現代社会文化研究 No.34　2005 年 12 月

数学的リテラシーを育成する授業
—— 知識の習得場面を中心として ——

神　林　信　之

Abstract

I assumed that it was indispensable to assemble the experience that the study value is actualized by studying each theme (concrete achievement of a local,mathematical value) to promote mathematical literacy.

Then, novel improvement type mathematics department methods and techniques of instruction that enabled it were assumed. It is a class from which it is received with the meaning in the learner in the objectivism paradigm, and re-systematization of knowledge is pressed.

And, the class of theme "simultaneous equations" was planned according to the person abbreviation of the teaching material composition, and it practiced it. As a result, the following was suggested.

(1) The teaching material composition in which three patterns of the connection are made a viewpoint works effectively to actualizing the study value.

(2) The pattern of the connection is accumulating an inclusive type, and when commonness with the content of study before is potential, it is necessary to set the scene to which making the strange familiar is performed intentionally and in the process of actualizing the study value.

キーワード……数学的リテラシー　数学的価値　接続の 3 類型　異質馴化

1　数学科学力の現状と主題設定の趣旨

1-1　数学を活用する力

PISA（OECD 生徒の学習到達度調査）調査によれば、日本の生徒の数学的リテラシーは低下しつつある。

この調査は､義務教育終了段階の 15 歳児が持っている知識や技能を様々な状況でどの程度生かすことができるかを査定するものである。それによると、2000 年調査では、数学的リテラシーのわが国の平均得点は 557 点と参加国中で最も高かった。しかし、2003 年調査では、依然 1

位グループにはいるものの平均得点は 534 点で参加国中 6 位となっている（国教研 a, 2004）。

一方、新潟県中学校教育研究会は、新潟県教育委員会義務教育課の提案している学力モデル（A⊂B⊂C）に従って調査問題を作成し、到達度評価に関する調査を実施した。A 学力とは基礎学力（基本的な知識・技能）、B とは基礎・基本（学習指導要領に示された各教科等の目標、内容）、C とは生きる力（自ら学び自ら考える力）のことである。それによれば、H14.5 実施の第 3 学年数学の ABC 学力別正答率等は次のとおりであった。C 学力は正答率が 44.90%と低く、無答率が 25.50%と高い。

「H14.5」実施　第 3 学年数学

	A学力	B学力	C学力
正答率	70.40%	68.59%	44.90%
中間答率	9.90%	0.30%	6.60%
誤答率	12.00%	20.98%	23.00%
無答率	7.70%	10.13%	25.50%
合計	100%	100%	100%

（表 1）　想定学力別応答状況（新潟県中学校教育研究会、2004）

1-2　数学観

Buxton(1981)は、なぜ大人は数学を恐れるのかという点について行った調査の要点をまとめ、数学はだいたい次のように見なされていると述べている。

・固定的(fixed)、変容不能(immutable)、外的(external)、とっつきにくい(intractable)、非創造的(uncreative)
・抽象的、現実との関連がない
・少数の人しか近づくことができない神秘
・覚えなければならない規則と事柄の集まり
・一般常識として捉えられているものに対する対立
・制限時間内の試験
・人の知性だけでなく個人的な価値観に関しても判定を下す一つの学問領域
・主に計算に関する問題

以上を見ると、生徒や大人が学校数学の学習を通して得た数学に対する一定の態度は、いわゆる「閉じた」数学観であるものが多いことが分かる。

さて、国際教育到達度評価学会（IEA）が行った国際数学・理科教育動向調査の 2003 年調査（TIMSS2003）による、わが国の生徒（中学 2 年生）の数学に対する関心・態度についての結果は、次のとおりであった(国教研 b, 2004)。

・数学の勉強が楽しいかを 4 つの選択肢で尋ねた設問について、「強くそう思う」と答えた生徒の割合が 9 パーセントであり、国際平均値の 29 パーセントよりも 20 ポイント下回っており、オランダ、スロベニアに次いで低く、国際的に見て低いレベルにある。
・希望の職業につくために数学で良い成績を取る必要があるかどうかを 4 つの選択肢で尋ねた設問の回答のうち、「強くそう思う」及び「そう思う」と答えた生徒の割合は 47 パーセントで国際平均値の 73 パーセントよりも 26 ポイント下回っており、台湾の 46 パーセントに次いで低く、国際的に見て低いレベルにある。
・我が国は「数学の勉強への積極性」についての高いレベルの割合が 17 パーセントで国際平均値の 55 パーセントよりも 38 ポイント下回っており、オランダの 16 パーセントに次いで低く、国際的に見て下位にある。
・数学は得意な教科ではないかどうかを 4 つの選択肢で尋ねた設問の回答のうち、「強くそう思わない」及び「そう思わない」と答えた生徒の割合を合わせたものは 39 パーセントで国際平均値の 54 パーセントよりも 15 ポイント下回っており、国際的に見て低いレベルにある。
・我が国は「数学の勉強に対する自信」についての高いレベルの割合が 17 パーセントで国際平均値の 40 パーセントよりも 23 ポイント下回っており、国際的に最も低い。

わが国に焦点を当てた場合においても「閉じた」数学観が特に顕在化している。この問題は、かつて昭和 51 年に国立教育研究所が行った「学習到達度と学習意識に関する調査」及びそれ以降行われた各種調査の結果と比べても改善されていないことを示している。

1-3　研究の仮説

21 世紀に必要とされる数学の学力は、剥落しやすい個別の知識の集まりではなく、使える状態になった汎用性のある知識である。

上述 1-1、1-2 の事実の背因を私は、現在の日本の学校数学において数学的価値が具体的に実現されていないことであると考える。

数学的価値にかかわって Bishop(1991)は、次のように述べている。

・多くの教師や教育関係者たちは、数学は価値とは無縁の知識だと信じているようだ。したがって、数学の教育現場で価値が意図的に重要な役割を演じたり、数学の教科書の中で数学に関して真剣に議論されていたり、学校の試験で数学に関する質問が行われたりすることは稀である。
・学校における数学は、多くの場合スキルが強調される成績科目であり、教師から質問が行われたり触発されたりすることがないために、生徒の数学教育を通して開発されている価値は、隠され、知られず、分析されないままとなっている。
・数学の価値に関する面は、暗示的に学習された結果、学習者の数学観の形成に好ましい結果を残していない。

一方、Romberg と Kaput(1999)は近未来の学校数学について考察し、その特徴や要件について次のように述べている。

・複線形ネットワーク構造（ガジュマル樹型）である。
・センスメイキングとしての数学である。
・中核となる分野は、個人の諸経験を意味あるものにする(making sense of individual experiences)ことに役立つ中で発生する。

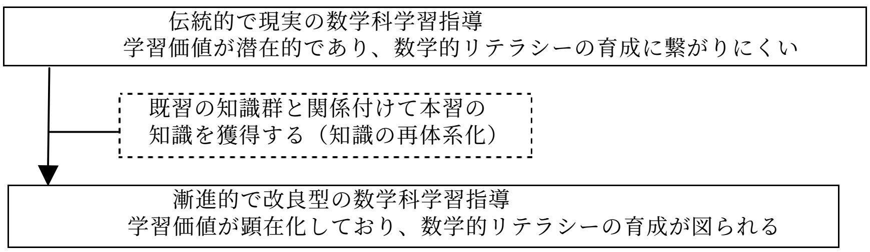
また、齋藤(2000)は、学習活動の構造及び「学習のための活動」をリフレッシュさせる視点について、次のように述べている。

・学習活動は、目標を発見することを本質としている。この目標によって、バラバラな道具、教科書、ルール、共同体をシステム化することができる。
・目標を持つ学習者は、メタ認識のスキルを身に付けることが要請される。
・授業者の技量としては、「感じられた意味」を生成させる学習活動にはどのようなものがあるか、そして、その条件にはどのようなものがあるかを明らかにすることである。

さらに、秋田（1995）によれば、M.Lampert の研究には、子どもは常に意味を求め理解しようとする存在であるという考えが根底に貫かれている。

このように、学習者の学びの内面に目を向け、潜在的な数学的価値を実感や納得の伴った学習価値（学びの意味）に転化させる授業の必要性が指摘されている。

以上のことから求められるように、知識の習得場面における学習者の学習内容との望ましい関わりは、問題意識が持てず「ただ、やれと言われたからやる」といったいわば機械的な関わりではなく、有意味な関わりである。有意味な関わりとは、学習価値（学びの意味）が顕在化した状態を指し、そのためには既習の知識と関係付けて本習の知識を獲得（知識の再体系化）することが必要となる。そのような考えから、私は、各題材の学習で学習価値が顕在化した経験（局所的な数学的価値の具体的な実現）を積み重ねることが数学的リテラシーの育成のために必須であると仮定した。



（図 1）　漸進的で改良型の数学科学習指導の特徴および要件（神林、2005）

このような仮説から、本稿では、学習者の数学的リテラシー育成を目指し、研究主題「数学

的リテラシーを育成する授業」を設定する。

そして、そのために数学的価値を具体的に実現する教授＝学習活動の組織の仕方を、中学校数学科の授業を例に探して考察することにする。

2　考察の方向

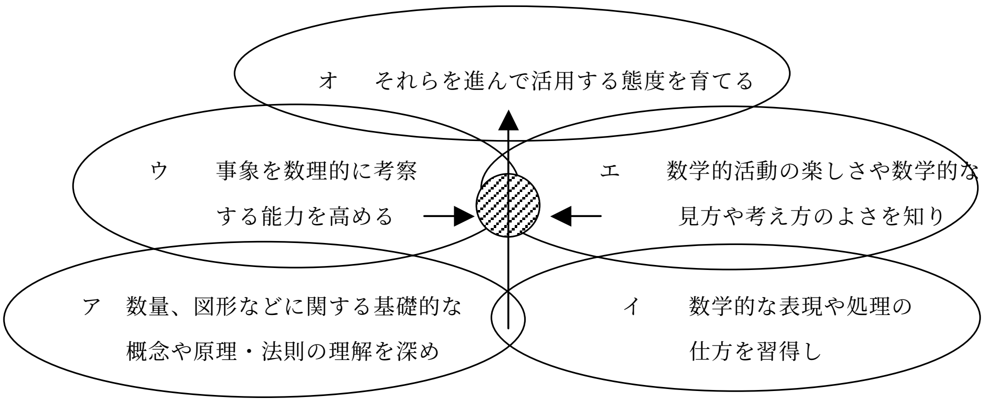
前節では、数学的リテラシーを育成するために、学習者の知識の再体系化を通して数学的価値の具体的な実現を図っていくことを提案した。本節では、新たな認識を今までの認識の体系に適切に位置付けるための問題系列構成の方略について考察する。

2-1　数学科学習指導要領における学力の構造

学習指導要領における数学科の目標（中学校）は次のとおりである。

数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさ、数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる（文科省, 1998）。

この数学科の目標を構造化すると次のように表すことができる。



（図 2）中学校数学科で育成を目指す学力の構造（金子･神林他、2002）

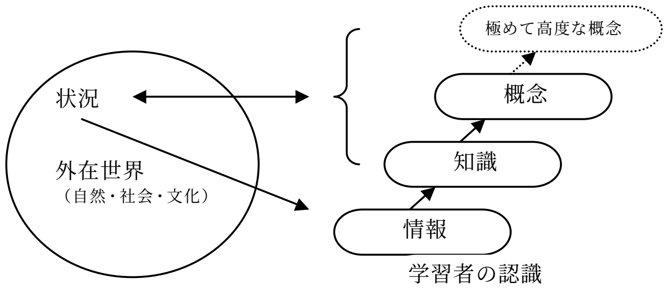
それによると、学力の構造は、基盤学力層(ア、イ)、媒介学力層(ウ、エ)、発展学力層(オ)の 3 層になり、最終的に目指すことは、学んだ事柄を進んで活用する態度を育成することである。

このように、目指す学力が育成される道筋は、ウ、エのいわば媒介学力層が仲立ちとなっている。つまり、オの「進んで活用する態度」の育成には、媒介学力が必要となる。また、ア、イのいわば基盤学力の習得には、媒介学力層の数理的な考察、よさの感得、楽しさの体験がかかわっている。

2-2　知識の再体系化を促す教材構成の機構と在り方

2-2-1　**知識獲得の過程と教授方略**

学習者は五感を働かせて情報を受け取り、知識を習得し、さらに使いこなして応用してみることを通して概念を形成していく。



（図 3）　情報→知識の在り方（神林、2005）

本稿では、主に知識の習得場面（図－3：情報→知識）の在り方を探る。

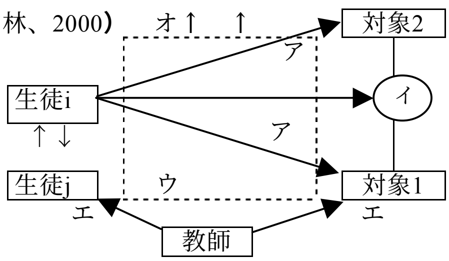
D.Jonassen(1991) によれば知識獲得の過程は、3 つのレベルで想定される。本稿で考察の対象とする初期レベルの知識の習得は D.Jonassen の想定する第 1 段階に当たり、新しくスキーマを作る時期である。学習は、練習、フィードバックによってなされる（久保田、2000）。

また、金子(2002)は、構成主義の授業理論を大切にしながら、学習者の発達段階、数学という教科の特性、割り当てられた週時間数という 3 つの現実的制約を踏まえて、客観主義の授業理論を組み合わせた折衷的な態度を提案している。

D.Jonassen や金子のモデルで考えると、中学生はその学習内容の多くの部分に対して初学者であるため、中学校で言えば各学年 3 時間／週という現実の中で、教授方略は、客観主義パラダイムに基づく授業理論を比較的多く使うことが必要かつ有効である。

本習の知識と既習の知識を関係付ける指導モデルは次のように表せる。

（図4）　指導モデル（神林、2000）



（注）　ア: 興味･関心に裏付けられた体験（体験知）　　　　オ: 学び続ける力
イ: 問題意識、実感、納得
ウ: 学習価値（学びの意味）への気付き、目的意識
エ: 教材解釈と生徒の見とりに基づいた教材構成

数学学習における価値は、教師側から見たものと学習者側から見たものの 2 つが考えられる。前者は、数学の内容の持つ価値（教授価値）であり、後者は、学習者が活動を通して体験、感得する価値（学習価値）である。

私は、それらの価値について、教材構成に焦点を当てて考察する。なぜなら、それは、教材構成が数学教育の目的や意図にかかわるものであり、この側面からの考察が価値を明示的に示そうとすることに直接つながるからである。

本稿では、教材及び教材構成を次のように捉えている。教材は、自然、社会、文化から数学科の目標というフィルターを通して抽出されたもので、教育内容をある一定の学習目標に基づき、生徒の実態に即応して具体的な学習対象として選択し構造化されたものである。それらは、教師の支援、学習者からの触発応答を通して、学ぶ必要性の顕在化したもの（学習材）となる。

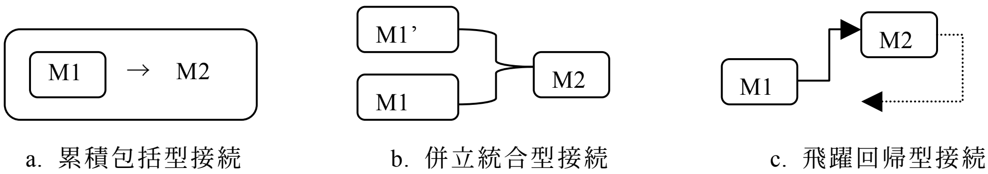
織田・下村(1989)の研究によれば、要素の部分の概念が学習者に受容され形成されるのは比較的容易であるのに比べて、接続関係部分の概念が学習者に受容され形成されるのはかなり難しい。

また、Bishop(1991)は、多くの人々にとって数学は、互いに関係のない客観的事実の集まりであると指摘している。

2-2-2　問題系列構成の観点

問題系列の構成は、どんな観点からなされるべきなのだろうか。本稿では、それに答える概念として、接続の 3 類型を使用する。それは、接続の 3 類型を視点とした教材構成によって、接続部分の概念形成の困難を克服し、学習者の知識の再体系化を促すことができると考えたからである。

学習内容 1（M1）と学習内容 2（M2）の関係は、その接続の様相を観点に次の 3 つの類型に分けて想定される。



（図 5）　学校数学における既習内容と本習内容との接続の 3 類型（金子、1984）

累積包括型は、中心となる概念が量的に拡大したり質的に深まったりすることで、既習内容 M1 が本習内容 M2 に含まれる接続の型である。

併立統合型は、新たな視点で見ることで、対立している既習内容 M1 と本習内容 M1'とが統

合的に本習内容 M2 にまとめられる接続の型である。

飛躍回帰型は、既習内容 M1 の原理と全く異なる原理をもつ本習内容 M2 に飛躍し、既習内容を本習内容から解釈し直せる接続の型である。

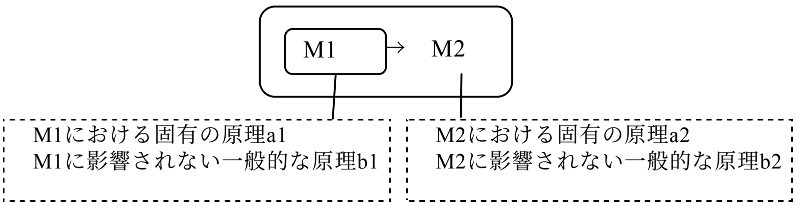
私は、接続の 3 類型を観点にした教材構成を 1988 年から現在に渡って行い、授業実践と評価を通して、知識の習得場面において数学的価値の具体的な実現に及ぼす効果について実践研究をしてきた。その中から、題材「連立方程式の利用」を例に考察する。

3　数学的価値の具体的な実現（実践編）

3-1　連立方程式の意味と解き方

3-1-1　実践例の位置付け及び教材構成の新しさ

既習の一元一次方程式 M1 と本習の二元一次連立方程式 M2 の接続様相は累積包括型である。既習内容と本習内容に含まれる固有の原理と一般的な原理の視点から、この累積包括型の特徴は、次のように示される。



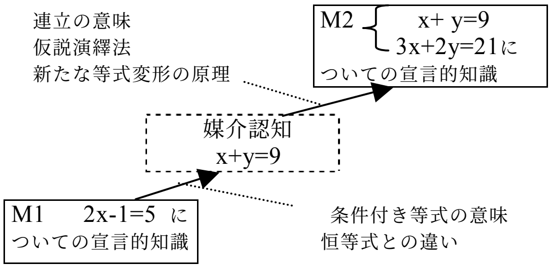
（図 6）　累積包括型接続における累積一貫する原理と応用概念（神林、1995）

M1、M2 領域固有の原理をそれぞれ a1、a2 として、領域に影響されない一般的な原理を b1、b2 とするとき、次のように表せる。

a1 ：・連立なし ・等式変形の原理 両辺相殺型①	a2：・連立あり ・等式変形の原理 両辺相殺型②
b1：・等号の見方 つり合い ・方程式の意味 条件付き等式 仮説演繹法	b2：・等号の見方 つり合い ・方程式の意味 条件付き等式 仮説演繹法

（表 2）　連立方程式の意味と解き方における領域固有の原理と一般的な原理（神林、2005）

連立方程式の意味と解き方の学習において、学習価値を顕在化するとともに、実感のある納得を促すために、次のように媒介認知（応用媒介）を位置付けた教材構成をする。



（図 7）　連立方程式の意味と解き方における教材構成（神林、2005）

3-1-2　指導の構想

M1→媒介認知の部分では、学習者が学習の入り口に立つための問題意識を喚起させるために、見慣れていない x+y=9 が既習の 2x-1=5 と関係付いている側面があることに気付かせる。したがって、M1 と媒介認知を突き合わせる際に、異質馴化(making the strange familiar)を行う。

媒介認知→M2 の部分では、連立方程式の意味や解の意味等を押さえる。ここで M2 の新しさ（M1 と M2 の異質性）が現れ、自然に馴質異化(making the familiar strange)がなされる。

そして、M1→M2 では、学習者の知識の再体系化を図るために、M2 も既習の M1 と同じように等号をつり合いと見て goal-subgoal 方略を使いながら両辺相殺型等式変形をしていることを押さえる必要がある。したがって、既習の一元一次方程式と関係付けて解法原理をまとめる際に、異質馴化がなされるようにする。

3-1-3　指導計画　全 11 時間

・連立方程式の意味と解き方　…　7 時間（本時 1/7 、2/7）
・連立方程式の利用　…　4 時間

3-1-4　指導の実際　－授業の概要－

<本時 1/7>

連立方程式の意味の学習である。問題場面を提示した。

バスケットボール地区大会決勝戦で横田選手はフリースローを除いて、シュートを 9 回成功させ、21 得点をあげました。横田選手は 3 点シュート、2 点シュートをそれぞれ何回成功させたのでしょうか。

M1→媒介認知での異質馴化の場面では、式 x+y=9 ができることを確認し、下のような式の分類を提示して、既習の 2x-1=5 と同じく等号の見方がつり合いであることやどちらも方程式であることを合意した。

（**図 8**）　M1→媒介認知での異質馴化（神林、2005）

2+3
2x+3x
2x-1
x+y
2+3=5
2x+3x=5x
2x-1=5
x+y=9

恒等式
方程式
等式

媒介認知→M2 での馴質異化の場面では、もう 1 本 3x+2y=21 という式が立てられることを押さえた後、次のように働き掛けた。

Ｔ　2 本の二元一次方程式を組み合わせると解はどうなるのだろうか。表やグラフを用いて調べなさい。

P1　私は表で調べた。2 つの表で共通な x 、 y の組を調べた。x=3 、 y=6 だ。

P2　私はグラフをかいた。一直線上に点が並び、座標が(3,6)の点で交わった。

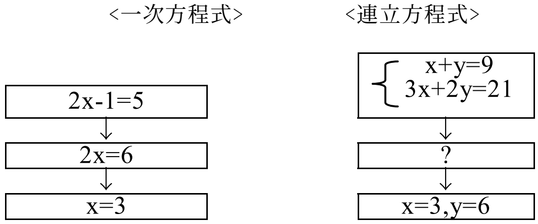
P3　私は表とグラフの両方で調べた。P1 さん、P2 さんと同様の結果を得た。

Ｔ　2 つの二元一次方程式を組み合わせると解は一組に決まりそうだ。

連立の意味、解の意味を表、グラフと関係付けて言葉でまとめた。

M1→M2 での異質馴化の場面では、既習である一次方程式の両辺相殺による解き方に対比して期待される連立方程式の解き方のシルエット図（図－9）を提示して、次のように働き掛けた。

Ｔ　表やグラフを使わないで連立方程式の解を計算で求められないだろうか？



（**図 9**）　M1→M2 での異質馴化（神林、2005）

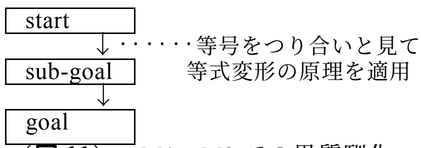
<本時 2/7>

両者で解法の際に使われる等式変形の原理及び両者に共通な解法のシルエット図を下のようにまとめた。

等式の性質(中1)　　等式の性質（中2）

$$\begin{array}{r} A=B \\ +)\ \ C=C \\ \hline A+C=B+C \end{array} \qquad \begin{array}{r} A=B \\ +)\ \ C=D \\ \hline A+C=B+D \end{array}$$

（**図 10**）　M1→M2 での異質馴化
（神林、2005）



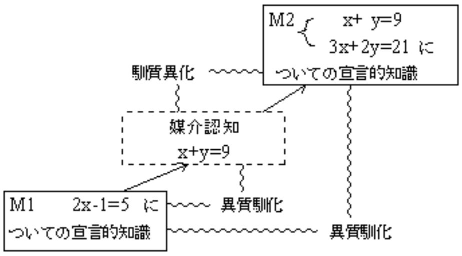
（**図 11**）　M1→M2 での異質馴化
（神林、2005）

こうして、等式変形の原理が新しいものであることを踏まえながら、中 1 の学習との一貫性、整合性を図った。

3-1-5　**考察**

本単元は累積包括型接続であるので、中心概念や原理の一貫性をとらえることが必要であった。しかしながら、文字が 2 つ、式が 2 本などの異質性が顕在化しているのに対し、等号の意味、等式変形の原理、解法方略などの馴質性は学習者にとって顕在化していない。

本実践の、これまでの実践との違いは、学習価値を顕在化し、学習者に連立方程式についての確かな宣言的知識を獲得させるために、媒介認知を位置付けるとともに、2 回に渡る異質馴化の場面を意図的に取り入れたことである。（図－12）



（**図 12**）連立方程式の意味を獲得する教材構成（神林、2005）

その結果、学習者は既習内容と関係付けて、自分なりに納得しながら連立方程式の意味や解法原理を見いだしていた。

このように、累積包括型である題材「連立方程式の意味と解き方」においては、知識の再体系化の方略が有効に機能し、授業を通して数学的価値が具体的に実現された。

3-2　連立方程式の利用

3-2-1　実践例の位置付け及び教材構成の新しさ

既習の一元一次方程式の利用 M1 と本習の二元一次連立方程式の利用 M2 の接続様相は累積包括型である。既習内容と本習内容に含まれる固有の原理と一般的な原理の視点から、この累積包括型の特徴は、次のように示される。

M1、M2 領域固有の原理をそれぞれ a1、a2 として、領域に影響されない一般的な原理を b1、b2 とするとき、次のように表せる（神林, 1997）。

a1：・未知数を1つ使った問題解決原理	a2：・未知数を2つ使った問題解決原理
b1：・仮説演繹法による方程式を用いての問題解決原理	b2：・仮説演繹法による方程式を用いての問題解決原理

（**表 3**）連立方程式の利用における領域固有の原理と一般的な原理（神林、1992）

したがって、本題材の学習において知識の再体系化がなされるには、学習者が次の 2 つを捉えることが必要となる。

・一元一次方程式の利用と二元一次方程式の利用には一貫した仮説演繹法の発想による問題解決原理が働いていること

・未知数を 2 つ設定できるようになったことによさがあること

一般的に、連立方程式の利用における教材構成は、連立方程式単独の利用であることが多かった。この場合、連立方程式の利用の学習において、既習の一元一次方程式の利用との関係がはっきりしないため、新たな学習内容である連立方程式の利用の意味やよさが捉えにくい。そして、その結果、それぞれの解き方を自分なりに使い分けることができず、戸惑うことが予想される。これは数学的リテラシーが育成されたとは言えない姿である。

その問題点を解決し、生徒が既習の一元一次方程式の利用と本習の連立方程式の利用それぞれの特徴やよさを踏まえて、自分なりに使いこなしていくことができるよう、連立方程式を一元一次方程式の利用と対比して学習できる教材構成を行う。

3-2-2　**指導の構想**

生徒は、1 年時の一次方程式の利用の学習において、一次方程式を利用して文章題を解決するときの立式の手順や関係を把握する際の図や表の利用の仕方を習得している。連立方程式の単元の始めに行った調査「方程式を利用して問題を解決するよさを挙げなさい」（選択肢は設けず、自由記述で行った）に対しての回答状況は次のとおりであった。(1992.5 実施)

自動的に解ける、文章通りに立式すればよい	10人	26%
速く答えが出る、楽に解決できる、簡単に答が出る	12人	32%
必ず解ける、正確に解ける	5人	13　%
分からないものを仮に分かったとしてxと置ける	5人	13%
その他（問題の構造が分かる、確かめができる、表やグラフと関連、自分なりの考え方ができる）	6人	16%

（**表 4**）連立方程式学習前のパイロット調査（神林、1992）

生徒は、文章題を方程式を利用して解決することのよさとして、自分なりの気付きをもっている。これらの気付きをもとに、本題材の学習を通して、よさの中身として、分からないものを仮に分かったとして x とおくと文章通りに式を立てさえすればよいこと、修正をせずに解決できることなどをさらに確かに捉えさせていきたい。

ここでは、生徒が一元一次方程式の利用の学習を踏まえて、連立方程式の利用における立式の手順や関係を把握する際の図や表の利用の仕方を習得する中で､次のことに気付かせていく。

・　一元一次方程式の利用のときと同じ原理、手順で問題解決ができる（一般的な原理 b にかかわる気付き）

・　文字を 2 つ使うと立式しやすいことが多い（固有の原理 a2 にかかわる気付き）

そこで、この 2 つの気付きが喚起されるように、一元一次方程式を利用した場合と対比しながら学習を進める。

一元一次方程式の利用 M1　　二元一次連立方程式の利用 M2

・原理　　　　　　　　　　・原理
・手順　　　対比　　　　　・手順

問題場面
求答型の立式
↑↓この対比は中 1 で既習
方程式の立式
未知数を 1 つ使う立式 M1
↑↓　対比
未知数を 2 つ使う立式 M2

（図 13）　二元一次連立方程式の利用の教材構成における対比**（**神林、1992**）**

これらの対比を通して、「2 つの方程式を自分なりに使い分けていけるようになろう」という学習の目的意識をもたせていく。

問題の選択は、文字を 2 つ使うと文章通りに式を立てることができることから、立式が容易になる場合があることに生徒が気付くことができるものとする。

そこで、比較的身近な場面である買い物の場面の設定とし、単位当たり量（内包量）×幾つ分（外延量）＝全体量（外延量）という構造を含む 3 問題とした。

そして、3 問題のうち、連立方程式の方がかなり有効であると考えられる問題を最後に置き、その前の 2 つを、どちらでも簡単に解決できるが連立方程式の方がやや有効な問題、一元一次方程式と連立方程式が同じくらい有効な問題とした。

その 3 問題とは次のものである。

・ばら 2 本とカーネーション 3 本を買うと、850 円であり、ばら 1 本とカーネーション 1 本で

は 350 円である。ばらはいくらか求めなさい。（連立方程式の方がやや有効な問題）
・1 個 120 円のりんごと 1 個 40 円のみかんを合わせて 20 個買ったら代金は 1200 円であった。りんごは何個買いましたか。（一元一次方程式と連立方程式が同じくらい有効な問題）
・鉛筆 5 本とノート 3 冊を買うと 680 円であり、鉛筆 4 本とノート 2 冊では 500 円である。鉛筆 1 本はいくらか求めなさい。（連立方程式が有効な問題）

それぞれを一元一次方程式、連立方程式の両方を利用して解かせ、やりやすさや、立式までとその後の解法の特徴を発表させる。

場面 ＼ 利用する方程式	一元一次方程式	二元一次連立方程式
立式	L11	L12
解法	L21	L22

（表 5） 特徴分析と発問設定の視点（神林、1992）

特徴を分析する際に立式までの部分と解法の部分に分けたのは、そうすることによって固有の原理（原理 a）が、よりはっきりするからである。即ち、2 つの立式で逆思考をする必要の有無を L11 と L12 から捉えることができ､解法手順の困難さの違いを L21 と L22 から捉えることができる。

3-2-3　**指導計画　全 11 時間**

・連立方程式の意味と解き方　…　7 時間
・連立方程式の利用　…　4 時間（本時 3/4）

3-2-4　**指導の実際　－授業の概要－**

<本時 3/4>
［本時のねらい］
買い物の問題を、一次方程式、連立方程式を利用して解決し、それぞれの利用における特徴を立式と解法の点から挙げることを通して、連立方程式の有効性を説明することができる。
［指導過程の概要］
連立方程式と一元一次方程式を利用して問題を解決し、その特徴を調べ、発表する。
T　前時の、ばらとカーネーションの問題では、連立方程式の方が簡単…35 人、同じくらい　…1 人、一元一次方程式の方が簡単…2 人だった。

その理由として、1 本の式にするとき面倒（P1、P2）、カーネーションを求めなければならない（P3、P4）、条件が 2 本だから（P5、P6）、以上連立方程式が簡単、

2 つの式を足したり引いたりせずに解が求まる（P7）、一つの文字で解ける（P8）、以上一元一次方程式が簡単、などがあった。今日はその学習の上に立ち、さらにもう幾つかの問題を通して、一元一次方程式、連立方程式のそれぞれの特徴やよさを調べていくことにしよう。

<指示>を行う。

T　次の 2 つの問題を一次方程式、連立方程式のうち、やりやすいと思った方を利用して解決しなさい。終わった人は、もう一つのやり方で解決しなさい。

（机間指導をしながら、それぞれの問題を一次方程式、連立方程式を利用した場合に分けて生徒に黒板に書かせる。鉛筆、ノートの問題を一次方程式でやった生徒は式の立て方の違いによって 2 名指名した。）

簡単に説明してもらいます。

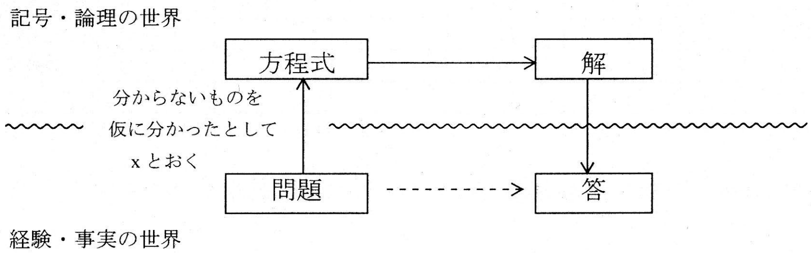
（5 人の生徒 P9、P10、P11、P12、P13 に説明をさせ、それぞれの考えを評価する。）

T（一元一次方程式と連立方程式のどちらがやりやすかったかを挙手により確認した。）

	一次方程式	連立方程式	同じくらい
りんごとみかんの問題	21人	15人	3人
鉛筆とノートの問題	1人	37人	1人

（表 6）　文章題 2 題に対する解法の応答類型（神林、1992）

どちらにしても解決はできたという点で変わりがない。どちらも同じ原理で行われている。（小黒板に図 14 を提示して確認する。）



（図 14）　方程式を利用して現実の問題を解決する仕組み（神林、1992）

（<発問>を行う。図 14、表 5 が書かれた学習プリントを配布する。）

T　方程式の利用における一次方程式、連立方程式それぞれの特徴を、立式までと解を求めるまでの 2 つの点から挙げなさい。

T　一元一次方程式を利用する場合の立式での特徴（表 5 の L11）を挙げなさい。

P14　2 つのものが出てきているときにもう一つの表し方が難しいときがある。

P15　一つのものしか x と置けない。

P16　条件が 1 つのときは式が立てやすいけれど、2 つのときは y にあたるものがでるからいろいろと面倒になる。

P17　分からないものが 1 つの場合はやりやすい。

Ｔ　連立方程式の代入法と似ていると指摘している人もいました。次に、連立方程式の立式における特徴（表 5 の L12）を挙げなさい。

P18　りんごとみかんの問題のように、20-x という計算で求めるより、x と y の 2 つの文字を使って式を立てられるので速く式が立てられる。

P19　文章をそのまま式にするので立式が簡単。

P20　x を使って前後の関係から y を求めたりする式を作る必要があるかないかが違っている。

P7　P19 さんと同じで、問題の文を連立方程式に表せばよいので一次方程式よりも立てやすい。

生徒の発表を整理し、合意された事柄を次のようにまとめた。

・連立方程式は文章をそのまま式に表せ、逆思考をせずにすむので一元一次方程式を利用する場合に比べて立式が簡単であることが多い。

・式が 2 本になるが解法手順は一元一次方程式に比べて著しく困難になることはない。

3-2-5　**考察**

前時と本時の計 3 問題に対しての生徒の応答状況を二次元表に整理すると下のようになる。

		問題1（りんごとみかんの問題）			問題2（鉛筆とノートの問題）		
	前時＼本時	A	B	C	A	B	C
ばらとカーネーションの問題	A	15	3	17	35		
	B			1	1		
	C			2		1	1
	前時欠席者			1	1		

※　Ａは二元一次連立方程式の方が簡単、Ｂは同じくらい、Ｃは一元一次方程式の方が簡単を表している。

（表 7）文章題 3 題に対する解法の応答類型（神林、1992）

それぞれの問題における授業者（私）の最も期待する応答は、最も文脈に即した立式すべき方程式の種類の選択であり、(A 、B 、A)である。3 つの問題の一番やり易い解決方法として(A 、B 、A)を選択している生徒は 3 人であった。ただし、りんごとみかんの問題は、正反対である 2 つのタイプであるＡが 15 人、Ｃが 21 人と、大きく違わない数値であることから、生徒はどちらの解決方法にもやり易さがあることを認めているといえる。

したがって、(A 、A or B or C 、A)という選択に幅を広げると 35 人が該当していることになる。

これらの考察から、生徒は連立方程式の有効性を適切に捉えるとともに、相対的に一元一次方程式の有効性を改めて捉えたと判断できる。

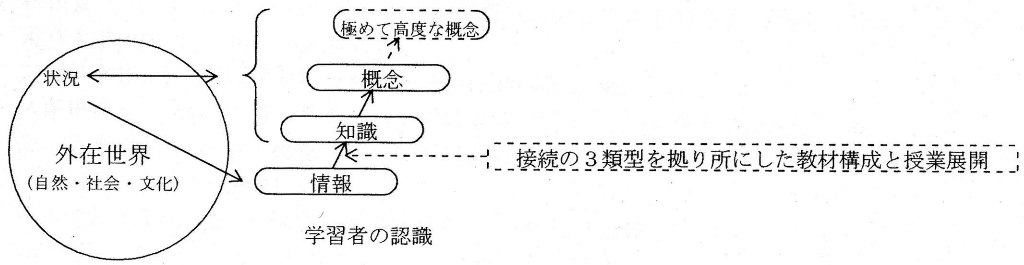
以上のように、授業では、働き掛けが有効に働いていると感じられる生徒の作業の様子、発言内容であった。

また、題材修了後の感想に、既習内容と関係付けて記述しているものが多く見られた。この原因は学習者が、既習の場面における原理の使われ方と新たな場面におけるその原理の使われ方とを対比して特徴の違いを捉えること、本習内容の新しさに気付くことにより原理の適用される範囲が広がったことの意味やよさを捉えることができたことである。また、イメージモデルとして図 14 を提示したことも一貫する原理（原理 b）の仕組みを捉えさせるのに有効に働いた。

以上のことから、累積包括型である題材「連立方程式の利用」においては、知識の再体系化の方略が有効に機能し、授業を通して数学的価値が具体的に実現できたといえる。

4　本稿のまとめと今後の課題

本稿で私が主張したことは、数学的リテラシーの育成を図るために、前述の図 3 において、情報→知識の場面では、数学的価値が具体的に実現されることが必要であること、そして、そのためには接続の 3 類型を観点にした教材構成が有効に働くということであった。



（図 15）　情報→知識の在り方（神林、2005）

本稿で述べた累積包括型接続の場合、数学的価値を具体的に実現する教材構成の方略は次のとおりである。

・中心概念・原理が一貫していることをとらえること

・本習内容の新しさに気付くことにより、原理の適用される範囲が拡がったことの意味やよさをとらえること

今後の課題は次の 2 点である。

・情報→知識の過程において、数学的価値の具体的な実現を促す教材構成の方略を、併立統合

型接続や飛躍回帰型接続の場合を例に探る。

・知識→概念の過程において、現行の学習指導要領の教育課程のもとで、数学的リテラシーの育成や学び続ける力の育成等、確かな認識の獲得を促すカリキュラムを開発する。

＜参考文献＞

秋田喜代美、1995、「ランパートの研究にみる『語り合い、わかる授業』の創造」、『学びへの誘い』、東京大学出版会、pp.234-240.

織田守矢・下村勉、1989、『概念形成と評価』、コロナ社。

金子忠雄、1984、「学校数学の教授=学習と『問題』の構成」、『新潟大学教育学部紀要』。

金子忠雄･井口浩･小田暢雄･風間寛司･星野将直･宮宏之･神林信之、2002、『学びの数学と数学の学び』明治図書、pp.9-11。

神林信之、1992、「見いだした事柄を発展、再体系化して数理を追求する力を高めていく連立方程式の授業」、新潟大学教育学部附属新潟中学校授業研究、未刊行。

神林信之、1997、「学校数学における数学的価値の様相と具現化の方途　－知識の再体系化を促す教材構成を中心として－」、新潟大学大学院修士論文、未刊行。

神林信之、2005、「学び続ける力の育成　－知識の習得場面を中心として－」、『日本数学教育学会第 38 回数学教育論文発表会（山梨）論文集』。

久保田賢一、2000、『構成主義パラダイムと学習環境デザイン』、関西大学出版部。

国立教育政策研究所 a、2004、『生きるための知識と技能(2) OECD 生徒の学習到達度調査(PISA)2003 年調査国際結果報告書』。

国立教育政策研究所 b、2004、『国際教育到達度評価学会(IEA)国際数学･理科教育動向調査の 2003 年調査』(TIMSS2003)Trends in International Mathematics and Science Study 2003 国際調査結果報告(速報)。

齋藤勉、2002、「学習活動の構造」、『F-NET～授業の研究～』、145 号、新潟大学教育人間科学部附属新潟小学校、pp.6-7.

新潟県中学校教育研究会、2004、『学習内容の到達度評価に関する調査研究報告書、平成 13～15 年度　学習指導改善調査研究（数学）』。

文部科学省、1998、『中学校学習指導要領』、国立印刷局。

Bishop, A.J., 1991, *Mathematical Values In The Teaching Process*. Kluwer Academic Publishers.

Buxton,L., 1981, *Do You Panic About Maths.* Heinemann Educational. London.

Romberg, T.A. and J.J.Kaput, 1999, “Mathematics Worth Teaching, Mathematics Worth Understanding” pp.3-17, in *Mathematics Classrooms That Promote Understanding*. Edited by E.Fennema and T.A.Romberg. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

主指導教員（齋藤勉教授）、副指導教員（井上正志教授・雲尾周助教授）