

## 授業事例「平面図形」の活動理論を用いた検討 —数学的リテラシーの諸様相 (3)—

神林信之

Examined a clinical case using Engeström's activity theory  
— Aspects of mathematical literacy (3) —

Nobuyuki KAMBAYASHI

教育学部附属教育実践総合センター

### 1 はじめに

#### (1) 数学的価値と数学的リテラシー

現在、わが国で、学習者の、単なる学力低下ではない、学校からの根深い逃避傾向が現れてきていることが指摘されている<sup>(1)</sup>。

数学的リテラシーや数学科学力の現状について見ると、PISA 調査結果や TIMSS 調査結果において、「学習者の到達度の低下と二極化」および「学習者の数学の学びへの積極性の低さ」を読み取ることができる<sup>(2)</sup>。筆者は、これらの事実の原因の一つが、わが国の数学科授業で数学的価値が具体的に実現できていないことであると仮説的に捉えている。

岸本(2005)<sup>(3)</sup>は、授業において教師が生徒に対してどのような方法で数学的価値を示唆しているかを検討している。神林(2005)<sup>(4)</sup>は、知識の習得場面において数学的価値の具体的な実現を図る、即ち、実感のある納得を促す教材構成の方略について授業実践を通して提案している。ただし、これらは、授業における数学的価値がどのように実現されるかに焦点を当てたものであり、数学的価値と数学的リテラシーの区別や関係の問題については触れていない。

一方、阿部(2004)<sup>(5)</sup>、横(2005)<sup>(6)</sup>、西村(2006)<sup>(7)</sup>等は、数学的リテラシーの育成に向けて教材の開発と学習の提案をしている。ただし、これらの研究において、数学的価値の具体的な実現といった観点からの検討は必ずしも行われていない。

このように、わが国の先行研究で、「数学的価値の具体的な実現」と「数学的リテラシーの育成」はそれぞれで研究されてきており、両者の区別や関係の問題については、十分に明らかにされてきたとはいえない。

この小論では、数学的価値の実現と数学的リテラシーの育成の関係について事例的に考察することを通して、今後の数学科カリキュラム開発や授業実践への知見を得ることを目標にする。

#### (2) 事例考察の方法

中学校1年のあるクラスにおける平面図形の授業を取り上げ、ケース・スタディを行う。1988年7月に行われた「平面図形」の授業で、その対象は新潟大学教育学部附属新潟中学校1年生1クラス(全44人)、授業者は神林信之である。この授業は、「学習の仕方を習得させる教材・発問・指示」の在り方を探る学校研究<sup>(8)</sup>の一環として行われたもので、数学的価値と数学的リテラシーの区別や関係について検討する材料になると考えた。

授業の検討分析に当たって、エンゲストロームの活動理論<sup>(9)</sup>を拠り所に、三角形のモデル(水平的次元)と螺旋状のモデル(垂直的次元)を援用することとする。それは、従来の「目標」「内容」「方法」という観点からの授業検討分析に加えて、「道具」「共同体」「内的矛盾」という観点からの授業検討分析を行うことが、学習者の学びの内面を捉えるのに有効に働くと考えたからである。

2 ケース・スタディ

(1) 題材

1年「平面図形」－三角形がきまる条件－

(2) 指導の構想

授業者によれば、本題材では、基本的な図形の作図ができるとともに、それが正しいことを、三角形がきまる条件を基に説明できるようになることに意義がある。

附属新潟中学校では3年間の数学科年間指導計画に「課題を解決するときに働く知識や技能」として、例えば、「対比する」「関係づける」「異例、類例、反例を挙げる」「仮定する」「特殊化する」などを意図的に位置付けている。本題材で授業者は、教材の特性に応じて、「観点を定めて場合を尽くす」を取り上げている。

本時では、三角形の構成要素（辺と角）に観点を定め、三角形がきまるかどうかについて場合を尽くして調べる活動を重視する。そして、場合を尽くして調べた〈辺－角－辺〉と条件変更した〈角－辺－辺〉とを比較することを通して、〈角－辺－辺〉についても場合を尽くして調べ、必ずしも一つにきまらないことを見いださせていく。

本題材の時間配当（全 11 時間）は次のとおりである。

- ・ 三角形がきまる条件 4時間（本時 3 / 4）
- ・ 四、五角形がきまる条件 2時間
- ・ 点の集合と図形 2時間
- ・ 基本の作図 3時間

(3) 学習活動の構造

①水平的(横断的,共時的,空間的)次元

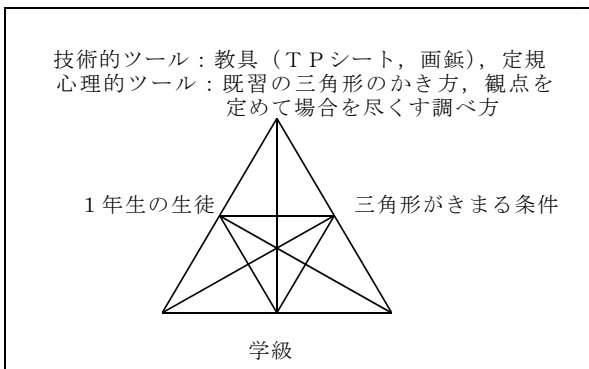


図1 「三角形がきまる条件」の学習活動の構造 (神林, 2007)

②垂直的(縦断的,通時的,時間的)次元

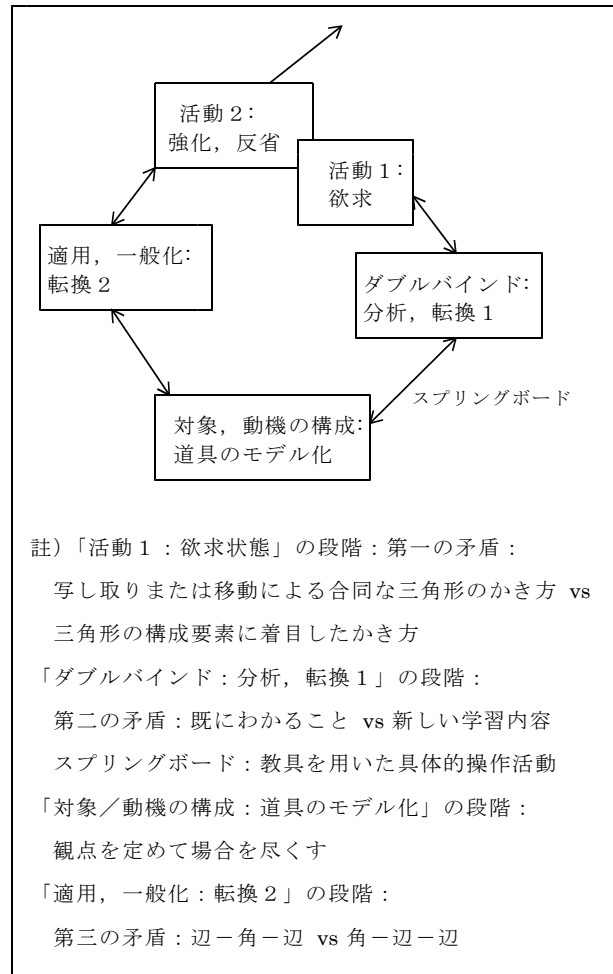


図2 「三角形がきまる条件」の授業における最近接発達領域の段階構造 (神林, 2007)

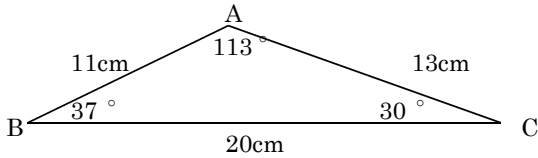
(4) 授業展開の概要と考察

本時の授業を、「活動1：欲求状態」の段階、「ダブルバインド：分析、転換1」の段階、「対象／動機の構成：道具のモデル化」の段階、「適用、一般化：転換2」の段階に分けてその概要と考察を記す。なお、その際に授業者を T で表し、生徒を S1, S2, … とラベル付けして区別して表す。

①「活動1：欲求状態」の段階

授業者は、5年時の既習内容を想起させ三角形の構成要素への着目を促すために、前々時に図形の移動による作図を位置付けた。与えられた三角形を、平行移動、回転移動、対称移動させた三角形を作図させ、これらは、辺や角など三角形の構成要素によらない合同な三角形のかき方であることを確認した。

そのあとで授業者は、既習内容を想起させ、三角形の構成要素に着目させるため、次の図を提示し、発問した。



〈発問〉写し取ったり移動したりしないで△ABC と合同な三角形をかきたい。どんな方法がありましたか。具体的な数値を挙げて説明しなさい。

前時、生徒は既習内容を想起し、合同な三角形のかき方をすべて挙げていった。その際に、「 $113^\circ - 37^\circ - 30^\circ$  (3角)」という意見が出されたが、一つに定まらないという説明に全員合意した。ここで授業者は、「きまる」という言葉を、「誰がかいても、形、大きさが一通りになること」と定義した。

②「ダブルバインド：分析、転換1」の段階

既習内容、辺-角-辺 を条件変更して新たな問題を作る。

〈発問1〉  $37^\circ - 11 - 13$  で三角形はきまりますか。

S1 できないと思う。理由はまず  $37^\circ$  を測って 11cm を引いたとして …… あっ、なるな。なる。  $37^\circ$  を測って 11cm を測り 13cm もとると、20cm,  $113^\circ$ ,  $30^\circ$  もできると思うから。

S2 僕はかけないと思う。11cm を引いて  $37^\circ$  をかいて考えたとしても、点AとCが結べないからだ。

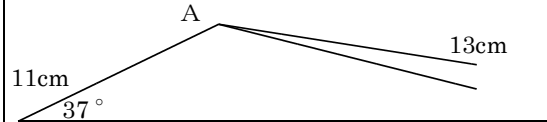
S3 (前に出て) 始めに線を引いておいて、 $37^\circ$ , 11cm をとり、コンパスで 13cm を測るとかける。

S1 20cm, 11cm を測り、 $37^\circ$  をとると確実にかける。

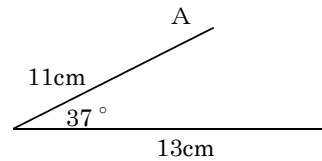
T 20cm は測っていいのか。

S1 あっ、そうか。

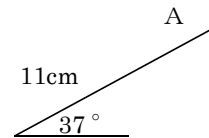
- S4 S3 さんとほとんど同じだ。まず 11cm を引き、 $37^\circ$  をとる。BからCの直線をずーっと伸ばしておく。それからAの点から定規で、ちょうど 13cm になる所にあてて線を引けばよい。
- S5 S4 君と同じように考えた。S1 君が 20cm とか言ったけど、わかっているのは  $37^\circ$ , 11cm, 13cm だけだ。
- ・OHPに映し、13cm の線分を図のように動かしてみせる。



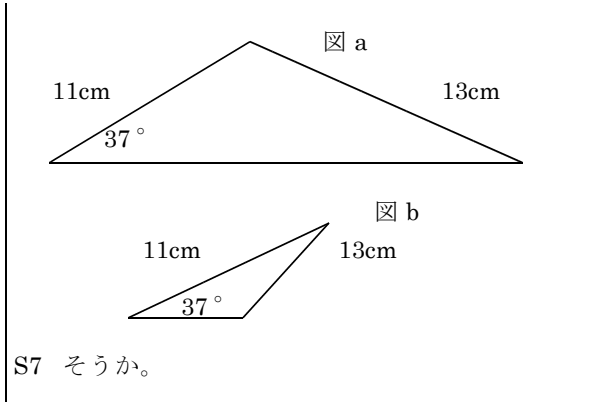
- ・現時点での考えを挙手により確かめた。  
きまる … 41 人, きまらない … 2 人, わからない … 1 人, であった。
- S6 (前に出て) もとの三角形は関係ない。下図の場合ができるのできまらない。



- S8 それは、角-辺-辺 にならない。
- S7 きまるという人は、どんな順番に図形をかこうと思っているのか。
- S9 11cm,  $37^\circ$ , 13cm の順にとった。
- S10 最初きまらないと思った。 $37^\circ$ , 11cm, 13cm の順にとるとききまる。
- ・この時点では S9 と同じ考えであった者が 14 人, S10 と同じ考えをした者は 25 人いた。
- S7 (前に出て) 下図の場合、13cm はとれないから、きまらない。



- S11 それは S7 君が、一番下の線を短くしてかけないようにしているからだ。
- S7 一番下の線は、短くても長くてもよい。
- S11 その長さはわからない。だから思い切り長くしておけばよい。
- S12 (前に出て) 見えない線があると思ってい。三角形にするんだから、くつつかなくてはいけない。図 b のようなことはありえない。必ず図 a のようになる。



授業者は S7 の疑問を評価した後、次のように板書する。

37° - 11 - 13 (きまる)

この「ダブルバインド：分析，転換 1」（既習内容，辺一角一辺 を条件変更して新たな問題を作る）段階について、「共同体」という観点で見ると，生徒は教師の働き掛けや互いの問い合いを通して，それぞれの考えの妥当性を検討している。そして学級全体での合意形成に至った。②のスタート時点で「違う考えの人がいる。どうしてそうなるのだろうか」等の意識を持っていた生徒も，②の終わりの時点では「〇〇さんの説明で納得できた」「みんなで話し合っ解決できた」などの意識に変容していったことが推察される。

また，「内的矛盾」「道具」の観点で見ると，教師の働き掛け（角一辺一辺 できまる一例からの提示等）により，生徒の知的好奇心が誘発されていることが分かる。ただ，角一辺一辺 について調べる際に，長さの定まっていない線を点線で表すなどして，辺一角一辺 との違いをより明確につかませる必要があった。

③「対象／動機の構成：道具のモデル化」の段階

角一辺一辺 が全部で六通りあることに気が付き，場合を尽くして調べる。

〈発問 2〉 角一辺一辺 で三角形はきまると言ってよいですか。  
 S13 はい。  
 S14 まだわからない。他に 5 つある。それは，  
 37° - 20 - 13, 30° - 13 - 11, 30° - 20 - 11, 113° - 11 - 20, 113° - 13 - 20 である。

S15 S14 君と同じだ。

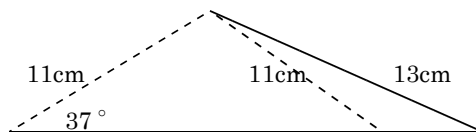
全員が S14, S15 に同意した。S14, S15 のような発言ができるのは，条件変更の前に辺一角一辺 について場合を尽くし，きまると判断したことが，既習内容として引き出されたからだと考える。発問 2 の後すぐに S13 のような反応をした生徒が数人見られた。これは，37° - 11 - 13 できまったため，角一辺一辺 はすべてきまらるうと考えたためである。前時に場合を尽くした，辺一辺一辺，辺一角一辺，角一辺一角，のどれもその例の中には，きまらない場合が一つもない。そのことから，角一辺一辺でもそうだろうと予想を立てていると思われる。ここで授業者はすぐに S14 を指名しているが，ここではその前に S13 にそう判断した理由を聞く必要があった。

机を班の形にさせる。教具を全員に配付する。

〈指示 1〉 教具を使って，角一辺一辺 のすべてについて調べなさい。

〈S11 の班の活動〉

S11 (教具を使って，きまるかどうか調べ始める)  
 30° - 13 - 11 はだめだ。(きまらない) 次，  
 37° - 20 - 13 これもだめだ。(画紙を厚紙の裏から刺し，TPシートにかかれた線分を回転させ，30° - 20 - 11 となる三角形が 2 つあることを見いだしている。)



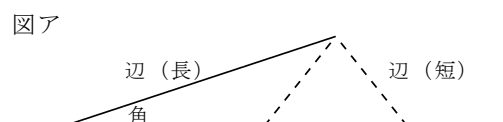
S3 (隣の S11 に) はじめに長い辺がきたとき，変な現象ができる。

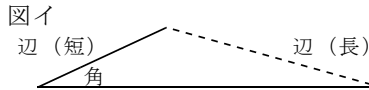
S11 なるほど。

S3 (向かいの S14 に) はじめに短いのがくるときは，変な現象は起きない。

S11 113° - 11 - 20 はきまる。

S14 (机間巡視で近くにきた T に説明する) 図アの場合きまらないが，図イの場合きまる。





S11 3つできて3つできない。

<S5の活動>

S5 (37° - 20 - 13から始める。隣のS16の発言で交点が2つできることに気付く。) 一本やられてしまった! (30° - 13 - 11を調べる。交点が2つできる。残りの3つも調べ全部で6つのうちきまるのは3つで、きまらないのが3つあることを見いだしていった。)

生徒は意欲的に具体的操作活動に取り組んでいた。そして、三角形が2つできる場合の2つの交点について44人全員が発見できていた。授業後、授業者は、全員に発見を促すことができた要因として次の2つを挙げている。一つは、「かけるか」でなく「きまるか」という観点で調べたことである。そしてもう一つは、自由に回転でき、コンパスの作図では見えない線が見えるなど、教具が有効に働いたことである。

生徒の発言、表情、作業の様子などから、先の②「ダブルバインド：分析、転換1」（既習内容、辺一角一辺を条件変更して新たな問題を作る）段階で、角一辺一辺できまる一例から提示して生徒の知的好奇心を喚起したことに加えて、発問2、指示1を講じたことが、場合を尽くすことへの問題意識を誘発したことが捉えられた。

④「適用、一般化：転換2」の段階

15分後、具体的操作活動を打ち切り、調べた結果を発表させ、次のように板書した。

板書内容	
二つの辺と一つの角	
辺一角一辺 (きまる)	→ 角一辺一辺 ( )
条件変更	
11 - 37° - 20 (きまる)	37° - 11 - 13 (きまる)
20 - 30° - 13 (きまる)	37° - 20 - 13 (きまらない)
11 - 113° - 13 (きまる)	30° - 13 - 11 (きまらない)
	30° - 20 - 11 (きまらない)
	113° - 11 - 20 (きまる)
	113° - 13 - 20 (きまる)

ここで授業者は、本時のまとめとして次のことを確認した。

板書内容

辺一角一辺 で三角形はいつでもきまるが、  
角一辺一辺 はきまるとは限らない。

S11, S5らの作業の様子や発言から、場合を尽くした具体的操作活動を通して、それまで気付かなかった新たな数理を仲間とともに実感のある納得を伴いながら見いだしていることが伺える。S11, S5をはじめとする生徒たちのこのような姿は、学習内容の本来の価値を意味を持って受け取っている姿であり、授業者の捉える、数学的価値が具体的に実現された様相であると言える。

S14, S3のように、辺の長短の關係に着目して規則性を見つけた生徒が約10人いた。角一辺一辺のうち、きまる場合に共通な数理を見いだしたと言える。場合を尽くして調べることにより新たな数理が見つけれられた例である。

⑤ 全体を通して

授業者は、日々の授業を通して、限られた事実の中だけの追求に終わりがちであるという生徒の問題点を捉え、課題解決の際に観点を定めて場合を尽くすことを重視した教材構成をした。「ダブルバインド」にあたる段階では、角一辺一辺できまる一例から提示することにより生徒の知的好奇心を喚起し、場合をつくすことへの問題意識を誘発している。その結果、それが、「対象／動機の構成」の段階での課題解決の手だてとしての心理的ツールとなり、実感のある納得（数学的価値の具体的な実現）につながった。つまり、心理的ツールが価値づくりとしての役割を担っている。

一方、今後、新たな場面や異なる領域でこのツールの有効性が実感されることにより、それが数学的リテラシーとしての心理的ツールとして学習者に獲得されていくことを授業者は期待し、年間指導計画を作成している。

このように考えると、課題解決の際に使われた知識や技能には、数学的価値を具体的に実現するという側面があるとともに、数学的価値の具体的な実現を通して獲得されるという側面があることになる。

### 3 考察を通して示唆されること

数学的価値と数学的リテラシーの間には、いわば往復運動的な相互関係があり、数学的リテラシーの育成には数学的価値の具体的な実現の積み重ねが必要である。

そして、そのための授業構想では、垂直的次元の螺旋状のモデルにおける「対象／動機の構成」の段階での「スプリングボード」の見いださせ方や、そこに至る「ダブルバインド」の組織の仕方が特に重要となる。

(本稿は、平成 19 年 11 月 4 日に東京理科大学で行われた日本数学教育学会第 40 回数学教育論文発表会における発表「価値づくりとしてのリテラシー」の一部に加筆し、整理したものである。)

#### 【引用・参考文献】

- 1) 佐藤 学. 『「学び」から逃走する子どもたち』. 岩波ブックレットNo. 524. 岩波書店. 2000. pp.9-14.
- 2) 金子忠雄・井口浩・風間寛司・星野将直・神林信之ほか. 「近未来の数学科授業を探る」. 数学教育フォーラムQDD報告書. 2007.
- 3) 岸本忠之. 「数学の授業における数学的価値の形成」. 日本科学教育学会研究会研究報告. 日本科学教育学会. 2005. pp.25-30.
- 4) 神林信之. 「学び続ける力を育成する授業－知識の習得場面を中心として－」. 日本数学教育学会第 38 回数学教育論文発表会論文集. 2005. pp.7-12.
- 5) 阿部好貴. 「数学的リテラシーの育成に関する研究(Ⅲ)－教材の開発と学習の提案－」. 日本数学教育学会第 37 回数学教育論文発表会論文集. 2004. pp.211-216.
- 6) 横弥直浩. 「数学的リテラシーの育成と数学的活動についての考察」. 日本数学教育学会第 38 回数学教育論文発表会論文集. 2005. pp.193-198.
- 7) 西村圭一. 「数学的リテラシーを育成するための教材の開発－ PISA 調査をふまえて－」. 日本数学教育学会誌第 88 巻第 1 号. 2006.
- 8) 新潟大学教育学部附属新潟中学校. 「学ぶ意志を育てる教育の過程(第 4 年次)－学習の仕方を習得させる教材・発問・指示－」. 1988. pp.43-54.
- 9) ユーリア・エンゲストローム. 『拡張による学習』. 新曜社. 1999.
- 10) 齋藤 勉. 『授業批評の力を鍛える』. 明治図書. 2007. pp.101-104.
- 11) 中村恵子. 「構成主義の教育学研究－教育活動への構成主義的アプローチ－」. 新潟大学大学院現代社会文化研究科学位論文. 2005.

(平成 21 年 3 月 23 日受理)