新潟大学教育学部附属教育実践研究
指導センター研究紀要、11（1992）

『小学算術』における自然数の乗法の導入過程

岡 野 　 勉

On the Introduction to Multiplication of Natural Number in "Syogaku Sanzyutsu"

Tsutomu OKANO

目　　次

0．は じ め に

本稿の課題は、『小学算術』（第４期国定教科書）における自然数の乗法の導入過程における教育内容構成の論理を解明することである。『小学算術』は、1935（昭和10）年から1940（昭和15）年において、算術新教育運動における実践的研究の成果を集約する形で成立した。しかしながら、現在において、この運動の展開過程と研究成果、『小学算術』の教育内容との関連などの諸点について十分に解明されているとは言えない。算術新教育運動における実践的研究の展開については、少なくとも、(1)『小学算術書』（第１～３期国定教科書）に対して提出された新しい算術科の構想、(2)作業主義、作問中心、郷土算術、生活指導の算術など様々なヴァリエーション、(3)それらの合流としての「生活算術」が区別されなければならない[1)]。その上で、これら(1)～(3)における研究成果、『小学算術』における教育内容の論理を解明していくことによって、両者の関係について解明することができる。

この課題に対して、筆者は、これまでに、算術新教育運動における「数理（思想）」の意味内容の変遷と『小学算術』において算術教育の目的とされた「数理思想」との関係[2)]、および『小学算術書』に対する「形式陶冶」批判から『小学算術』における「精神的鍛錬」の強化に至る過程[3)]について検討を加えてきた。本稿は、『小学算術』を対象に、自然数の乗法の導入過程という個別の教育内容構成の観点から分析を試み、その論理を解明することを課題とするものであり、先の課題に接近するための一つの作業である。分析の方法について次に述べる。

分析に際しては、(1)教科書の記述を命題（教育内容の表現）に変換することができることを仮定し、(2)その命題が属するレベルおよび命題間の関係を区別するためのカテゴリーを設定し、(3)これらのカテゴリーによって教科書の記述を説明する、という方法を採った。カテゴリーについて、ここでは、命題が属するレベルとして、量に関する諸性質を記述するレベルと個別の演算結果を記述するレベル

（算術的事実［F］）とを区別した。量については分離量と連続量を区別し、前者については集合論において成立している事実・法則を、後者についてはユークリッド式量空間において成立している事実・法則を対応させ、前者を集合論的事実［S］、後者を量的事実［Q］とした。さらに、定義［D］を設定した。定義とは、一般に、「A（概念の内容）をB（概念の名前）という」といった形で書かれるが、算数教科書においてこのような形で定義が書かれているとは限らない。そこでは、ある命題がそれ以前の諸命題とは異なる、新しい内容を表現している場合がある。このような場合、その命題を新しい内容の定義であると考えることができる。命題間の関係については、命題Aから命題Bを「導く」という関係、および命題Aを命題Bに「用いる」という関係を区別した[4]。

なお、本文においては、教育内容の表現としての命題を《　》内に記述し、［　］によってそれが属するレベルを表示した。

1．乗法指導の前段階としての「同数累加」の指導

第2学年上巻の第2章「2位数と2位数との加減　その1」（21ページ）には、6個のキャラメルの箱のさし絵と次の文がある。

「どのはこにも、キャラメルが10ずつはいっています。みんなでいくつになるでしょう。一はこが5せんです。みんなでなんせんになりますか」。

この記述について、教師用書では次のように説明している。

「実際指導にあたっては、まず、どうして全体の数を知るかを考えさせる。そうして、キャラメルの絵、または実物、あるいはその代用物について、10と10とで20、20と10とで30、30と10とで40、40と10とで50、50と10とで60　という風に累加を行なわせる。続いて、10＋10＋10＋10＋10＋10というような式を用いて累加させるのもよい。かようにして、次には、10が6つで60ということに注意させるがよい。この同数のものの集団の個数を強く意識することが、乗法の観念を得る上に最も大切なことである」[5]。

ここでは、「［同学年の第5章から指導されることになる］掛算を最も自然に指導するために」、「掛算の適用の必要が起こって来るような同数累加の場合」が、「実例について取り扱」われている（［　］内は引用者。以下同じ）[6]。従って、前述のさし絵と文は、次の命題に変換することができる。

《集合$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_6, N(A_1)=N(A_2)=N(A_3)=\cdots=N(A_6)=5 \rightarrow N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6)=5+5+5+5+5+5=30$》［S］

同じさし絵および次の文についても、

《価格$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_6, A_1=A_2=A_3=\cdots=A_6=5$銭$\rightarrow A_1+A_2+A_3+\cdots+A_6=(5+5+5+5+5+5)$銭$=30$銭》［Q］

に変換される。また、同学年第3章「2位数と基数との加減　その2」34ページ(4)(5)、および第4章「2位数と2位数との加減　その2」40〜42ページ(1)(3)(5)にも同じ種類の問題があるが、これらはすべて前述と同様の命題（いずれも集合論的事実）に変換することができる[7]。

このように、ここでは、後に乗法に関する算術的事実を用いて導かれることになる集合論的事実および量的事実が、「同数累加」の算術的事実を用いて導かれている。

さらに、この「同数累加」によって、例えば、

《5×6＝5＋5＋5＋5＋5＋5＝30》［F］

という（乗法に関する）算術的事実を導くためには、

《5＋5＝10，10＋5＝15，15＋5＝20，20＋5＝25，25＋5＝30》［F］

という5つの（加法に関する）算術的事実が必要となる。《演算結果を得るための手つづき》とでも言うべきこのような側面が、次に指導されている。すなわち、同学年第3章31ページには、8＋2，25＋5，72＋8，…，64＋8　という式、「まわりのかずに、なかのかずをよせなさい」という文、および円形に並べられたいくつかの図形（その図形の中と円の中心とに数字が書かれている）があるが、これらはすべて「掛算九九構成に必要な累加計算において現れる寄算」[8] なのであり、次の命題に変換することができる。

《8＋2＝10，25＋5＝30，72＋8＝80，……，64＋8＝72》［F］

《A＝｛7，28，49，35，56，14，63｝→｛a＋7；a∈A｝＝｛14，35，56，42，63，21，70｝》［F］

このように、第2学年上巻、第2章〜第4章においては、自然数の乗法指導の“前段階”として、(1)後に（自然数の乗法の）適用対象となる集合論的事実と量的事実、(2)演算結果を得るための手つづきとして、「同数累加」の算術的事実、およびそれを導くのに必要な加法の算術的事実、が指導されている。

2．「倍」による乗法の導入から定義まで

2－(1)　乗法の意味づけとしての「倍」

自然数の乗法の指導が開始されるのは、第2学年上巻の第5章「倍とその逆」からである。ここではこの第5章を分析の対象とするが、そこで主たる内容となっているは、乗法の《意味づけとしての定義》とでも言うべき側面である。そこでは「倍」によってそれがなされている。教師用書の説明を見よう（なお、本章では「［倍の］逆として［量および数を］幾つかずつに分けること、および幾つかに等分することの意義を明らかにする」[9] ことも目的とされているが、これに対応する記述は除法の指導に関するものなので、ここでの分析対象とはしない)。

「　加減から乗除へ進む過程

さて、加減から乗除へ進むには、まず、同数の累加という寄算が、その過程たるべきである。この点を考慮して、前学年用下巻第7章以来前章に至るまでに、寄算において、しばしば同数の物幾つかの集合の全体の数を求めることを取り扱ってきた。しかし、同数の累加が出来るからといって、掛算の基礎が築かれたということは出来ない。換言すれば掛算は、単に寄算の特別な場合の簡便法として指導して十分であるとは言えない。例えば、

3＋3＋3＋3＝12　……(1)

が出来るからと言って、ただちに、

$3\times 4=12$　　　　……(2)

が十分理解できるのではない。また、(1)の計算を簡単にするために、『３』を寄せ集める数『４』を知って、『三四十二』という呼声で、答えを記憶するというようにして(2)を説明するのでは、掛算の観念を十分に得しめることは出来ない」[10]。

そこでは、ここに言う「掛算の観念」とは何か。「乗法の数学的意義」については、「この程度の児童に知らしめることは、不可能であるし、またその必要もない」として、その内容については何も述べられていない。そして、「児童に可能な程度で掛算の観念を得しめることは、必要である。そのためには、少なくとも、『何倍』および『何倍する』ということの意義を明らかにすることが大切である」[11]として、「倍」が説明されている。

「倍の観念を、上の(1)の例について言えば、３という数を１単位と考えて、それの４単位が12であると考えるときに、３の４倍という観念が現れて来るのである。故に、前章までにおいて取り扱った同数累加の計算では、一つの集合の一要素の数（上例の３）と、要素の個数（上例の４）とをはっきり意識させるようにとの注意を加えて来た。これを、明らかに『倍』の観念として得させねばならぬ」[12]。

量あるいは数のｎ倍（自然数倍）とは、その量または数をｎ個だけ集めたものの和にほかならない。従って、今後の主たる教育内容は、「前学年以来基礎を作ってきた同数累加の場合を、倍の観念に基づいて解釈する」[13]こと、すなわち、例えばＡを量とすると、“ｎヶ分のＡの和”$\overbrace{A+A+\cdots+A}^{nヶ}$を“Ａのｎ倍”と定義することなのである（その意味では、いかに教師用書がそれを否定しようとも、この教科書において、かけ算は、「寄算の特別な場合の簡便法」として導入されているのである）。教師用書はその指導過程について次のように述べている。

「そのためには、数の場合よりも、量の場合から出発するのが適切である。何となれば、一定の大いさをもつ量は、それを単位と考えて、これで測って得た数値で何倍ということを、直観的に知ることができるからである。本章では、まず二つの物の長さを比較することから『倍』の観念を導入することとした。……進んで、広さについて『何倍』ということを取り扱い、同時に、広さのやや正確な観念を得させることを期した。かようにして、数の『何倍』ということに及び、ある数を『何倍する』ことの意義を理解させ、……」[14]。

ここでは、「倍」概念の導入に当たって、「数（ここでは自然数）の場合」と「量の場合」とが区別されている。そして、量の「倍」から出発して数の「倍」に至るという指導過程が構想されている。そして、量の「倍」の定義は、まず「長さ」「広さ」といった連続量について行なわれることになっているのである。ここで、１において見た教育内容との関連について考えて見よう。「同数累加の場合」について「前学年以来基礎を作ってきた」わけであるが、そこで扱われていたのはほとんどが分離量であった。この点を考慮に入れるならば、「倍」概念の導入も分離量から行なうのが自然であろう。しかしながら、先に引用においては、連続量によってそれが行なわれることになっているだけでなく、分離量の「倍」についてはまったく触れられていない。ただし、このことは、「倍」概念の導入において分離量の「倍」が扱われないことを意味するものではない。これについては後述するが、

分離量の「倍」は、自然数の「倍」が導入される前に、連続量の「倍」の‘拡張’として定義されるのである。これらの事実は、乗法の導入過程における量（とりわけ分離量）の扱いを考える上で重要な事実であるが、それについては後に考察することにして、まずは「倍」の指導過程を辿ってみることにしよう。

2－(2)　長さの「倍」の定義

量の「倍」の定義にあたって、最初に「長さ」が選ばれている。ここでは、まず、この「長さ」について、「倍」が定義されることになる。

47ページ上段には「みよ子は、だいとおなじ高さだ」「おじさんとおなじ高さになった」という２つの文と、下段にはその様子を描いたさし絵がある。「児童用書では、大人の身長が子供の身長のちょうど２倍であることを、絵によって、直観的に知ることが出来るようにして、児童から、２倍ということを引き出そうと期しているのである」[15]。

みよ子、台、おじさんの高さをそれぞれA、B、Cとすると、この記述は次の命題に変換することができる（ただし、×の記号がここで指導されているわけではない）。

《長さA，B，Cについて、A＝B、このとき、C＝A＋B＝A＋A＝A×２》［Q］

そして、ここでは、‘長さの２倍’が次のように定義されている。

《２つぶんの長さの和A＋Aのことを‘長さの２倍’といい、A×２と書く》［D］

次に、「児童用書第47頁の下半では、旗の絵を掲げ、旗竿の長さの比較をさせることとしてある。直観的に比較できるように、長い方の竿を塗り分けてある。これによって、３倍ということを見させるのである」[16]。

これについても、さし絵のうち、左の旗竿の長さをA、右の旗竿の長さをBとすると、次の命題に変換することができる。

《A＝B＋B＋B＝B×３》［Q］

そして、ここでは‘長さの３倍’が次のように定義されている。

《３つぶんの長さAの和A＋A＋Aのことを‘長さAの３倍’といい、A×３と書く》［D］

さらに、「教師は、以上に準じて、適当な物を選んで長さを比較させ、４倍・５倍などに及ぶがよい。その際には、直観的に判断し得るようなものを選ぶことが肝要である」[17]とされている。ここでは‘長さの４倍’‘５倍’について、これまで‘２倍’‘３倍’について行なわれてきたのと同様の指導が要請されている。従って、ここでの指導においては、長さの‘４倍’‘５倍’についてこれまでに見てきたのと同様の命題が教育内容として設定されている。そして、さらに、これらの諸命題から、長さの自然数倍に関する次の命題が導かれていると考えられる。

《一般に、任意に自然数ｎに対して、‘長さAのｎ倍’が定められる。それは‘ｎヶ分のAの和’であり、A×ｎと書く》［D］

2－(3)　面積への拡張

このようにして長さについて「倍」の定義がなされた後、次にそれが面積に拡張されることになる。

面積の「倍」は、まず、正方形について定義される。

児童用書第2学年上巻の48ページ上段には、2つの正方形と「大きい四かくのひろさは、ちいさい四かくのなんばいありますか」という文、同ページ中段には2つの正三角形と「大きい三かくのひろさは、小さい三かくのなんばいありますか」という文、下段には赤青2色に塗り分けられた円と「青い所のひろさは、赤の所のなんばいあるでしょう。かみにまるをかきなさい。それをきりぬいて、8つにきってごらんなさい」という文がある。

上段について、教師用書は次のように説明している。

「児童用書では、最初に、正方形の広さの比較をさせるのである。

指導は、次の順序に従うがよい。

(イ) 直観によって、大きい方が小さい方の何倍かを判断させる。

(ロ) 直観による判断を実証するには、どうしたらよいかを考えさせる。

(ハ) 小さい正方形と合同な正方形の紙を数枚持たせて、これを大きい正方形の上に並べ、4枚を要することによって、4倍であることを見させる。

(ニ) 大きい正方形に、図のような点線を入れて［各辺の中点が直線で結ばれている］、一見して、大きい方は小さい方の4倍であることを知らせる。

……以上によって、広さについて、4倍ということを取り扱うことができる」[18]。

これら一連の指導においては、次の命題が教育内容として設定されていると考えることができる。

《面積A, Bについて、A＝B＋B＋B＋B＝B×4》［Q］

《4つぶんの面積Bの和B＋B＋B＋Bを‘面積Bの4倍’といい、B×4と書く》［D］

ここでは、前ページでなされた長さの「倍」の定義が面積に対して拡張されている。

中段について次に見よう。「児童用書の正三角形に関するものについては、上記の正方形の場合と同様にして指導すべきである。…正方形の場合に記した(ニ)に対しては、右図［正三角形の各辺の中点が直線で結ばれている］のようにすべきは言うまでもあるまい」[19]。

従って、この指導に対応する記述は、上段についてと同様、次の命題に変換される。

《面積A, Bについて、A＝B＋B＋B＋B＝B×4》［Q］

ここでは、上段で定義された‘面積の4倍’が正三角形に対して適用されている。

下段では、円について、面積の3倍、4倍および8倍が指導される。教師用書の説明を見よう。「［児童用書の円について］青い部分が赤い部分の3倍であることは、上図のように点線を引けば［直交する2本の半径が書き込まれている］、明らかであることは言うまでもあるまい。…児童用書にあるような比較の他に、円全体は、赤い部分の何倍であるかをも問うがよい」。「児童用書第48ページの最後は、円の8等分である。これは、上の指導から容易に発展しうるところである」[20]。すなわち、

《面積A、Bについて、B＝A×3》［Q］

《面積A、Bについて、B＝A×4》［Q］

8倍については、これまでの指導の「発展」とされていることから、4倍と2倍の合成として定義されるのであろう。すなわち、

《面積A、Bについて、B＝A×8 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$（A×4）×2》［D］
に変換されるものと思われる。

2－(4) 長さの「倍」から自然数の「倍」へ

このようにして、長さの「倍」の拡張として、正方形、正三角形および円について、それらの面積の「倍」が定義された。そこでは、常に比較の対象となる2つの量が与えられていた。それに対して、ここでは、すでに定義された「倍」を用い、与えられた長さAに対してそのn倍を求め、それに測度を与えるという過程を経て、自然数の「倍」が定義されることになる。児童用書の記述を見よう。

第2学年上巻の49ページには長さ4㎝の直線があり、続いて、「ひごを、このせんの5ばいの長さにきってごらんなさい。そのひごの長さは、何センチメートルありますか」という文がある。教師用書によれば、ここでは、「まず、与えられた長さの何倍かを求めることで、これを作業させるのである」[21]。ここでは、この記述を中心に、次のような指導過程が構想されている[22]。

(1) 最も直接的な方法としては、長いひごをとって、与えられた長さを、次々に5回だけその上に取るのである。しかる後に、与えられた長さ、および求めたひごの長さを物指で測ることによって、長さの5倍ということから、数の5倍へ自然に移っていくことが出来る。すなわち、ある数の5倍ということも、その数を5つ合わせたものであることが具体的に理解せられ、

(2) 児童用書で要求しているような場合には、まず、長さを測って、その数値の5倍を求め、それだけの長さのひごを切り取る方が便利であることが理解せられるであろう。…ここでは、実際の長さに即して取り扱い、数の何倍ということを抽象的に取り扱わないようにすべきである。

順に命題に変換していくと次のようになろう。まず(1)について。

《1．Aを長さとする。［Q］

2．長さAに対して、A×5が定まる。［Q］

3．A＝4㎝→A×5＝20㎝　［Q］

4．4×5＝4＋4＋4＋4＋4＝20　［F］》

このようにして、「4の5倍」を例として、自然数の「倍」が長さの「倍」から導かれ、次のように定義されている。

《m，n∈N，mのn倍 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\overbrace{m+m+\cdots m}^{n\text{ケ}}$.（これを‘m×n’と書く）》［D］

このようにして、自然数の「倍」が定義されるわけであるが、「実際の長さに即して取り扱い、数の何倍ということを抽象的に取り扱わないようにすべきである」とされていたように、ここで定義された自然数の「倍」とそれを用いて導かれた算術的事実（ここでは、4×5＝20）は、次の(2)おいては、「倍」に関する量的事実（4㎝×5＝20㎝）を導くのに用いられることになる。(2)において設定されている教育内容は次の通りである。

《1．Aを長さとする。A＝4㎝　［Q］

2．4×5＝4＋4＋4＋4＋4＝20　［F］

3．A×5＝4㎝×5＝（4×5）㎝＝20㎝　［Q］》

2－(5) 分離量の「倍」から自然数の「倍」へ

このようにして、長さの「倍」から自然数の「倍」が導かれ、それ（例. 4×5＝20）を用いて、測度の与えられた長さの「倍」に関する命題（例. 4㎝×5＝20㎝）を導くことが指導された。次には、「具体的な個物の数の何倍から、抽象的な数の何倍へ進」[23]むこと、すなわち、集合（分離量）の間にも「倍」を定義し、そこから自然数の「倍」を導くことによって、自然数の「倍」について新しい意味づけがなされることになる。教科書の記述を見よう。

第2学年上巻50ページには、左側に5個のボタンが縦一列に並べられており、各々のボタンと全体とが直線の枠で囲まれている。右側には、縦に5個、横に6個、計30個のボタンが長方形状に並べられており、左側と同様、直線の枠で囲まれている。このさし絵について教師用書は次のように解説している。

「児童用書では、ボタンの2群を示して、一方が他方の何倍であるかを見させることとしてある。左の方の5つのボタンを一つの単位のごとく考えて、これが、右の方の群に幾つ含まれているかを見させる。すなわち、右の方を5つづつの群に分けて見るのである。そうすると、右の方は、左の方の6倍であることが、これまで学習したところに基づいて容易に知られる」[24]。

ここでは、（連続量とは区別される）分離量についての「倍」が扱われている。そして、それ（ここでは6倍）は「これまで学習したところに基づいて容易に知られる」とされていることから、分離量の「倍」は、連続量の「倍」の‘拡張’として、次のように定義されていると考えることができる。

《集合A，Bについて、$A \sim A_1 \sim A_2 \sim \cdots \sim A_n$によって、$B = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$と書けるとき、‘BはAのn倍である’といい、$B = A \times n$と書く》［D］

以下においてはこの定義を用いて指導が行なわれる。まず、上段のさし絵は、下段にある最初の文、「右のボタンのかずは、ひだりの方のなんばいですか」と合わせて、次の命題に変換される。

《集合A，Bについて、$B = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_6$, $A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim \cdots \sim A_6 \rightarrow B \times 6$》［S］

⇒《N（B）＝N（A）×6》［F］

次に、「進んで、右の方の全体の数を求めさせる。これは、5、10、15、20、25、30の数え方により、あるいは2列を1組として、10、20、30、または10が3つで30というようにして求めるのである」[25]。ここで、

《N（B）＝30》［F］

が与えられる（2つめの文、「右のボタンのかずは、いくつですか」が、この命題に変換される)。「かようにして5つの6倍が30であることを認めさせる」[26]。すなわち、この命題と前述のFとから、

《N（A）×6＝30》［F］

が導かれるのである。そして、「同様のことを、他の例によって取り扱」った後、自然数の「倍」が指導される。「5の6ばいは、いくつですか」「2の4ばいは、いくつですか」「4の5ばいは、いくつですか」という、同じ50ページにある3つの文がそれに対応する。この文について教師用書は次のように説明している。

「それから進んで、数について、その何倍かを求めさせる。児童用書には、その数例が掲げてある。

具体的事物について相当取り扱った後であるから、さして困難は感じないであろうが、例えば２の４倍という場合は、数字２を４つ並べて書いて、全体の数を求めることを考えさせ、又、２＋２＋２＋２　を計算することであることを理解させて、これを行なわせるがよい。そうして、単に寄算が出来たからそれでよいとせずに、２の４倍が８であるということを強く意識させねばならぬ」[27]。

従って、先の文は次の命題に変換される。

《$5\times 6=5+5+5+5+5+5=30$》［F］

《$2\times 4=2+2+2+2=8$》［F］

《$4\times 5=4+4+4+4+4=20$》［F］

ここで用いられているのは、(3)において指導された自然数の「倍」に関する定義である。そして、これまでに見てきたところから、この同じ定義が、ここでは、最初に見た、分離量についての「倍」の定義から導かれていると考えることができる。

(4)(5)の指導によって、自然数の「倍」は、連続量の「倍」と分離量の「倍」の両方から導かれたことになる。ここでは、さしあたり前者をD_1、後者をD_2として、この両者を区別しておくことにしよう。

２－(6)　「倍」による乗法の定義

このようにして導かれた自然数の「倍」が、ここでは、乗法の定義として採用されることになる。教科書の記述を見よう。

児童用書51ページ上段には、「長さ５センチメートルのゴムひもがありました。これをひきのばして、もとの長さの３倍にしました。なんセンチメートルになったでしょう」という文と、「５を３ばいすると、いくつになりますか」という文がある。

この記述について教師用書は次のように解説している。

「児童用書第51ページでは、『何倍する』という意味を明らかにし、符号『×』の意味と読み方とを教えることとした。『ある数を何倍かする』ということは、『ある数の何倍かを求める』ということと同じである。しかし、言葉が少し変わっているために、児童にとっては、理解を妨げるおそれがあるから、改めて実際の問題から入ることとしたのである。これまでは、５つの物と30のものとがあって、後者が前者の６倍であるというようにして『何倍』を導いてきたが、今度は、一つのゴム紐があり、そのものを３倍の長さに引延ばすという事実から、ある数を何倍するということを明らかにしようとするのである。実際に、ゴム紐を持たせて行なわせて見るがよい。…そこで、抽象数を何倍するということに進むのである」[28]。

このように、ここでは、先に(4)において見た、連続量の「倍」から自然数の「倍」を導く過程がもう一度辿られることになる（この点についての検討は行なわないが、自然数の「倍」を導くにあたって、ここでも連続量が選ばれていることに注意しておきたい）。

先の２つの文は次の命題に変換することができる。

《長さAについて、$A=5\,\text{cm}\rightarrow A\times 3=15\,\text{cm}$》［Q］→《$5\times 3=15$》［F］

（先の文に続いて、「４を３ばいすると、いくつになりますか」という文があるが、これは、《４×

3＝12》に変換される)。

そして、同じく51ページの下段に、「5を3ばいすることを、5×3とかいて、これを『5かける3』とよみます」という文がある。これは、「符号『×』の意義と読み方とを…知らせる」ものである[29]。ここでは、「aのb倍」あるいは「aをb倍すること」によって、「a×b」が定義されている。すなわち、この文は次の命題に変換される。

《自然数a、bについて、「aのb倍」または「aをb倍すること」を‘a×b’と書き、「aかけるb」と読む》［D］

(5)の最後で、自然数の「倍」について2つの定義を区別しておいた。この区別に従えば、ここで採用されているのは、先の分析から明らかなように、連続量に関する「倍」の定義から導かれた定義D_1である。この点には注意しておく必要がある。というのは、今後、自然数の「倍」の定義がこのD_1で一貫しているとは言えず、D_2が採用されていると考えられる記述も見られるからである。例えば、D_1が採用されたすぐ後の52ページにおいて、そのような記述が見られる。ここでは、「何倍の観念…に基づいて、実際の場合を考察させる」[30]として、次の2つの文がある。

(1) はしが5ぜんあります。みんなでなん本でしょう。

(2) 5まい1くみのさらが、3くみあります。さらは、みんなでなんまいあるでしょう。

これを命題に変換すると次のようになり、それは前述の指摘を裏付けている。

《集合$A_1, A_2, \cdots, A_5$, $N(A_1)=N(A_2)=\cdots=N(A_5)=2 \rightarrow N(A_1+A_2+\cdots+A_5)=2\times 5=10$》［S］

《集合A_1, A_2, A_3, $N(A_1)=N(A_2)=N(A_3)=5 \rightarrow N(A_1+A_2+A_3)=5\times 3=15$》［S］

3. おわりに

これまでの指導は、次のようにまとめることができる。

(1) 自然数の乗法指導の‘前段階’として、後に乗法に関する算術的事実を用いて導かれることになる集合論的事実および量的事実が、「同数累加」の算術的事実を用いて導かれた。また、乗法の演算結果を得るための手続きとして、「同数累加」の算術的事実、およびそれを導くのに必要な算術的事実（加法）が指導された。

(2) 連続量（長さ、面積）について「倍」の定義がなされた。

(3) 自然数についての「倍」の定義が(2)から導かれた（これをD_1とする)。

(4) 連続量についての「倍」の定義の‘拡張’として、分離量の「倍」が定義され、そこから、自然数についての「倍」の定義が導かれた（これをD_2とする)。

(5) 自然数の乗法の定義としてD_1が採用され、それにもとづいて、いくつかの算術的事実が導かれた。

(6) (1)と同様の集合論的事実が、乗法に関する算術的事実を用いて導かれた。

これら(1)〜(6)の指導過程において最も主要な教育内容となっているのは「倍」の概念である。先に指摘したように、この教科書において、自然数の乗法は、「寄算の特別な場合の簡便法」として導入

されている。だからこそ、「倍」の概念を導入し、それ以前に指導されてきた「同数累加の場合」を「倍の観念に基づいて解釈する」ことが課題となるのである。そして、その指導過程においては、「量の場合」と「数（ここでは自然数）の場合」とが区別され、量の「倍」から出発して自然数の「倍」に至るという順序がとられていた。ここでは、この指導過程における量と数の関連について次の２点を指摘しておきたい。

まず、乗法の定義について。(5)において定義として採用された「倍」は、D_1、すなわち、連続量についての「倍」の定義から導かれたものであった。にもかかわらず、それは、(6)において、集合論的事実、すなわち分離量に対しても適用されている。この事実は何を意味するのであろうか。０において述べたように、分析にあたって、われわれは、分離量、連続量という量の区分を設定した。しかしながら、この教科書においては、自然数の乗法の導入過程に関する限り、このような区分はなく、それらはともに量一般として位置づいていると考えざるを得ない。すなわち、自然数の乗法はD_1によって定義されてはいるものの、それは、分離量であると連続量とであるとを問わず、量一般に対して適用可能なのである。

ただし、このことは、われわれのカテゴリー設定が無意味であったことを意味するものではない。このようなカテゴリーの設定によって、われわれは次の点を指摘することができるからである。それは、「倍」概念の導入における分離量の位置についてである。これまでの分析によって明らかになった事実をあげてみよう。まず、(1)における教育内容はそのほとんどが分離量に関するもの（集合論的事実）であったにもかかわらず、(2)における「倍」概念の導入は連続量から始められている。次に、「倍」の定義は、まず連続量について行なわれ、次にその‘拡張’として分離量について定義されている。このように、この教科書において、「倍」概念は、量一般に対して適用可能なものであるが、その導入は連続量に依拠して行なわれているのである。

『小学算術』において、自然数の乗法は「倍」によって意味づけられている。その「倍」概念は分離量と連続量との区別なく、量一般に対して適用可能なものと考えられているが、その導入は連続量に依拠して行なわれている。このような教育内容の構成が算術新教育運動における実践的研究のどのような成果を継承して行なわれているのか、また、当時の教師たちによってこの教科書を用いた実践がどのように行なわれたのか、等の解明については今後の研究課題としたい。

《註》

［引用文はできるだけ現代仮名遣いに改めてある］

1）このような視点については、須田勝彦「算数の教科書のあり方－算術から数学へ」、柴田義松編『教科書』、有斐閣、1983年、参照。

2）拙稿「算術教育の目的としての『数理思想』の形成過程」、『北海道大学教育学部紀要』第54号、1990年。

3）拙稿「算術教育史における『形式陶冶』批判の問題」、『北海道大学教育学部紀要』第56号、1991年。

4）拙稿「算数教科書分析の試み」、北海道大学教育学部教育方法学研究室編『教授学の探究』第５号、1987年、参照。

5）『尋常小学算術』第２学年教師用、上巻、文部省、38～39ページ。

6）同上書、38ページ。

7）教科書の本文を次に記しておく。変換される命題については省略するが、いずれも集合論的事実（分離量）に変換されることには注意しておいてよいだろう。「車一台に、米だわらが５ひょうつめます。４だいの車には、米だわらがなんひょうつめるでしょう」（34ページ(4)）。「一だいの車を、一人がひき、一人があとおしをします。車が４だいあります。人がなん人いるでしょう」（34ページ(5)）。「にいさんが、いねのなえを、なわしろからたんぼへはこんでいらっしゃいます。２つのかごには、なえが36たばずつはいっています。なえは、みんなでいくたばあるでしょう」（40ページ(1)）。「５人そろって、たんぼからかえって来ました。おかあさんが、おむすびをお出しになりました。どのさらにも、おむすびが４つずつあります。おむすびは、みんなでいくつあるでしょう」（41ページ(3)）。「ひこうきが、３だいずつ一くみになって、５くみとんで来ました。みんなでなんだい来たでしょう」（42ページ(5)）。

8）『尋常小学算術』第２学年教師用、上巻、文部省、54ページ。

9）同上書、79ページ。

10）同上書、79～80ージ。

11）同上書、80ページ。

12）同上書、80ページ。

13）同上書、81ページ。

14）同上書、80～81ページ。

15）同上書、82～83ページ。

16）同上書、83ページ。

17）同上書、83ページ。

18）同上書、84～85ページ。

19）同上書、86ページ。

20）同上書、87ページ。

21）同上書、87ページ。

22）同上書、87～88ページ。ただし、(1)(2)の番号は引用者による。

23）同上書、89ページ。

24）同上書、89ページ。

25）同上書、90ページ。

26）同上書、90ページ。

27）同上書、90ページ。

28）同上書、91ページ。

29）同上書、91ページ。

30）同上書、92ページ。

［付記］本稿は、1988年１月に、北海道大学大学院教育学研究科に提出した修士論文「『小学算術』における量と数の論理」の一部に若干の加筆・訂正を加えたものである。論文の作成にあたっては、同大学教育学部教育方法学研究グループにおいて何度も検討の場をもっていただいた。記して感謝申し上げる次第である。なお、本稿では、分析結果とその考察について加筆・訂正を加えるに止まり、カテゴリーの設定に関する問題など、教科書研究の方法論に関する問題については検討することができなかった。他日を期したい。