

博士論文

格子 QCD を用いた有限温度カイラル相転移

新潟大学大学院 自然科学研究科 数理物質科学専攻
学籍番号 F14J003H

石見 涼

目次

1	導入	1
2	QCD	3
2.1	連続理論 QCD の作用	3
2.1.1	非局所量のゲージ不変性	4
2.1.2	ユークリッド化	5
2.2	漸近的自由性	5
2.3	閉じ込めとウィルソンループ	7
3	格子 QCD	10
3.1	格子上の変数とゲージ不変量	10
3.1.1	格子空間	10
3.1.2	リンク変数	10
3.2	格子上の QCD 作用	11
3.2.1	格子ゲージ場の作用	12
3.2.2	格子フェルミオン場の作用	13
3.3	作用の改良	15
3.3.1	改善された格子ゲージ場の作用	16
3.3.2	改善された格子フェルミオン場の作用	17
3.4	格子フェルミオンとカイラル対称性	17
3.5	演算子と期待値	19
4	有限温度 QCD	21
4.1	有限温度の場の理論	21
4.1.1	スカラー場	21
4.1.2	フェルミオン場	24
4.1.3	有限温度項と繰り込み	25
4.2	カイラル対称性とその自発的破れ	28
4.2.1	カイラリティ	28
4.2.2	カイラル変換	29
4.2.3	有限温度 QCD におけるカイラル相転移	30
4.2.4	QCD のランダウ関数	30
4.2.5	軸性異常がない零質量の QCD	31
4.2.6	軸性異常のある零質量の QCD	31
4.2.7	軽いクォークの質量の効果	33
4.2.8	軸性対称性の熱的回復	33
4.2.9	格子計算による現状での理解	35

5	多フレーバー法	37
5.1	多フレーバー手法の考え方	37
5.1.1	有効ポテンシャルの計算方法	38
5.2	多フレーバー法: 結果	42
5.2.1	有効ポテンシャルの微分	42
6	クロスオーバースケーリング	48
6.1	スケーリング則の概要	48
6.2	有限温度格子 QCD と 3 次元 $O(4)$ スピン模型、及び、 Z_2 スピン模型の対応	49
6.3	有限密度への拡張	50
6.4	カイラル凝縮の二階微分	52
6.4.1	再重み付け法	53
6.4.2	テイラー展開法	53
6.5	スケーリング則: 結果	53
6.5.1	スケーリングプロット	54
6.5.2	カイラル凝縮の二階微分と曲率	55
6.5.3	カイラル極限におけるベータ関数	56
7	まとめ	59
A	3 次元 $O(4)$ スピン模型とイジング模型のスケーリング関数	60

1 導入

宇宙がどのような進化を経て、現在の状態に至ったのか。それを理解することは、自然科学の究極的な目標の一つである。宇宙誕生から 0.00001 秒後（温度が 1 兆度くらい）の世界では、「強い相互作用」と呼ばれる力で結合した粒子が融解してプラズマ状態になると言われている。そのような状態をクォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) 状態という。その宇宙誕生直後の高温状態を地上で実現するために、現在、アメリカのブルックヘブン研究所 (BNL) の「相対論的重イオン衝突実験 (RHIC)」、スイスの欧州原子核研究機構 (CERN) の「大ハドロン衝突実験 (LHC)」という大規模な衝突実験が行われている。宇宙進化の過程を知る上で、「強い相互作用」が支配しているような状態の研究は不可欠であるが、その知識の欠落が宇宙論構築の際の重大な不確定要素になっている。その「強い相互作用」の基礎理論である量子色力学 (QCD) を系統的に研究できる方法は、スーパーコンピュータを用いた格子 QCD の大規模数値シミュレーションだけである。

量子色力学 (QCD) はあらゆる相を持ち、その相境界は一次転移 (不連続転移) か二次転移 (連続転移) のどちらかである。その相境界は温度や密度、クォークの質量、クォークの数に依存して変化する。ゼロ質量を持つ二つのクォークが存在し、密度が零とみなせる系における QCD のカイラル相転移は、様々な手法で長い間研究されてきた。なぜなら、この系の研究は現実世界の QCD の研究の本質を捉えており、かつ、比較的簡単な計算になるからである。しかし、この系の相転移の性質は未だ完全に理解できておらず、長年の問題となっている。

通常、二つのクォークのみが低密度で存在する系でのカイラル相転移は、クォークの質量を零とする極限で二次転移となり、相転移点付近でのスケールリング則は 3 次元 $O(4)$ スピン模型と同じユニバーサリティクラスを示す。一方、一次転移となり有限な臨界質量 m_q において二次転移に変化し、イジングユニバーサリティクラス (Z_2 ユニバーサリティクラス) に属する可能性も議論されている。私たちは格子 QCD による数値計算を行い、以下の二つの方法でこの問題を議論する。

一つ目の方法は”多フレーバー手法”である。軽クォークが 2 つ存在し、余分なクォークが N_f 個存在する QCD、 $(2+N_f)$ フレーバーの QCD のカイラル相転移を扱う。 $(2+N_f)$ フレーバーの QCD の相転移は 2 つの軽いクォーク質量 m_{ud} と N_f 個の余分なクォークの質量 m_h がともに小さかったとき一次であるが、ある臨界質量においてクロスオーバーへと変化する。フレーバー数 N_f の増加に連れ臨界質量は大きくなるため、大きな N_f では臨界質量の線を見つける。なぜなら、クォークの質量が大きくなるにつれ数値計算が容易になるからである。臨界線の位置から、2 フレーバーの質量が零になる点 $(m_{ud}, m_h) = (0, \infty)$ が一次相転移であるかどうかを調査する。

他の方法は”クロスオーバースケールリング”を用いた解析である。QCD のカイラル相転移に対する秩序変数を数値計算することで、QCD とスピンモデルのスケールリングプロットを比較する。以上の解析から、私たちは 2 フレーバーの質量が零となる QCD のカイラル相転移が標準的なシナリオ、つまり、2 フレーバーカイラル極限において二次転移というシナリオと無矛盾であることがわかった。一方で、カイラル極限において一次転移の可能性は排除していない。しかし、一次転移の場合であっても一次転移からクロスオーバー転移へと変化する臨界質量は限りなく小さいということがわかった。さらに、QCD のデータをスケールリング関数でフィットすることで、低密度におけるカイラル相転移の化学ポテンシャル依存性を計算することができた。

まずは QCD や格子 QCD、有限温度の場の理論、QCD の相転移に関するレビュー¹ から始める。QCD や有限温度の場の理論を取り扱くと結合定数の強さや有限温度項の赤外発散により、非摂動的な取扱い

¹QCD のレビューに関しては文献 [8]、[13]、[14]、[15]、[16]、[17]、[18]、[19] を参考にした。格子 QCD のレビューに関しては文献 [1]、[2]、[3]、[9]、[10]、[19] を参考にした。有限温度の場の理論のレビューに関しては文献 [12]、[16] を参考にした。QCD の相転移のレビューに関しては文献 [11]、[12]、[16]、[23]、[38] を参考にした。

が不可欠であることを示す。格子 QCD では、格子間隔で空間を分割したことによる問題点を中心に議論し、現在行われている対処法に関してレビューする。その後、本研究で取り扱った上記の二つの方法を説明し、結果を記載し、カイラル相転移の次数に関して議論した。

2 QCD

自然界には四種類の基本的な力がある事が知られている。古典的には「重力」と「電磁気力」があり、量子論で記述される原子核や素粒子の世界には「強い相互作用」と「弱い相互作用」がある。

重力と電磁気力は古くから知られているが、強い相互作用と弱い相互作用は原子核の反応や崩壊を通じて発見、観測されてきた。強い相互作用はハドロンと呼ばれるクォークやグルーオンからなる粒子の相互作用であり、原子核中で核子(陽子と中性子)を結びつける力として発見された。原子核半径の典型的なスケールである 1fm を基準にして、それよりも短距離では強く働くが、長距離では非常に弱い力である。弱い相互作用は、原子核のベータ崩壊を引き起こす力で、この力の到達距離はさらに短いため、ハドロンの世界ではほとんど点状に起こるフェルミ型相互作用として扱われてきた。

現代物理学の進展の成果として、重力を除く三種類の力はゲージ場の理論の枠組みで統一的に理解されている。ゲージ理論では、力の到達距離はゲージ粒子の質量によって決まる。そのため、電磁相互作用の到達距離が長いのは光子の質量が 0 であるからであり、弱い相互作用の到達距離が短いのは、ゲージボゾン(W,Z ボゾン)の質量が大きいためであると説明されている。この質量は電弱対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ が自発的に $U(1)_{EM}$ に破れたことに起因する。この破れの秩序変数はヒッグズ場の真空期待値であり、ゲージボゾンの質量はその秩序変数に依存する。一方、強い相互作用の到達距離が限られていることはゲージボゾンであるグルーオンが「閉じ込め」により、有効質量を持っていると考えることができる。まず、この章では QCD 作用の導入と、QCD の基本的な性質について見る。

2.1 連続理論 QCD の作用

強い相互作用を記述する基本法則は量子色力学 (Quantum Chromo Dynamics 略して QCD) と呼ばれる非可換ゲージ理論によって記述される。その理論における粒子は色電荷という自由度をもつ。例えば、 $SU(N)_c$ ゲージ理論において基本表現で表わされるクォークはそれぞれ、三つの色電荷の内一つを持つ。この三つの色電荷を光の三原色、青、赤、緑に取り、クォークと反クォークの組み合わせである中間子(ある荷電とそれと反対の荷電、つまり、青と青の組み合わせ) かクォーク三つの組み合わせであるバリオンがカラー座標系の 3 軸を任意に回転してもハドロンに関する観測値は全て不変になるように構成されている。つまりカラー自由度について、これらのハドロンは完全な対称性が成り立っている。この理論において、ゲージ場に相当する粒子はグルーオンと呼ばれている。カラー自由度を N_c とし、今から、 $SU(N)_c$ カラーゲージ理論を展開していく。

量子電磁気学 (Quantum Electro Dynamics 略して QED) の光子場に対応して、 $(N_c^2 - 1)$ 個の成分をもつグルーオン場 $A_\mu^a(x) (a = 1, 2, \dots, (N_c^2 - 1))$ を導入する。

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T^a \quad (2.1)$$

ここで、行列 T^a は $N_c \times N_c$ 行列であり、カラー $SU(N_c)$ 変換の生成子の随伴表現である。この行列は以下の性質を持つ。

$$(T^a)^\dagger = T^a \quad [T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

$$\text{tr}T^a = 0 \quad \text{tr}T^a T^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

ここで、 f^{abc} は $SU(N_c)$ 群の構造定数である。 $N_c = 3$ では Gell-Mann 行列 $\lambda^a (a = 1, 2, \dots, 8)$ を用いて $T^a = \lambda^a/2$ と書ける。クォーク場に対応するフェルミオン場を $q(x)$ 、共変微分 D_μ 、及び、場の強さ

テンソル $F_{\mu\nu}$ とすると QCD ラグランジアンは以下ようになる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q(x) - \frac{1}{2}\text{tr}[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)] \\ D_\mu &= \partial_\mu + igA_\mu \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]\end{aligned}$$

カラー $SU(N_c)$ ゲージ変換は

$$\begin{aligned}q(x) &\rightarrow q'(x) = \omega q(x) \quad \bar{q}(x) \rightarrow \bar{q}'(x) = \bar{q}\omega^\dagger(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = -\frac{1}{ig}(\partial_\mu\omega)\omega^\dagger(x) + \omega A_\mu\omega^\dagger(x) \\ D_\mu &\rightarrow D'_\mu = \omega[D_\mu]\omega^\dagger(x) \quad F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \omega F_{\mu\nu}\omega^\dagger(x)\end{aligned}$$

ここで、 $\omega(x)$ はゲージ変換関数であり、変換のパラメータを $\theta^a(x)$ とすると

$$\omega(x) = \exp\left[ig\sum_{a=1}^{N_c^2-1} T^a\theta^a(x)\right] \in SU(N_c) \quad (2.2)$$

与えられる。可換群を用いた QED とは異なり、非可換群を用いたゲージ場、及び、QCD の場の強さテンソルはゲージ不変ではなくカラー回転を受けている。ラグランジアンの中にある場の強さテンソルに対しカラー添字に関してトレースを行っているのは、ラグランジアンをゲージ不変なものにするためである。

2.1.1 非局所量のゲージ不変性

時空を格子化する前の準備として、非局所量のゲージ変換性にふれておく。例えば、 $\bar{q}(x+\Delta x)q(x)$ という量を考える。 Δx が微小であれば、 $\bar{q}(x+\Delta x)$ と $q(x)$ との間に次の量を挟んでおけばよい。

$$1 + ig\Delta x^\mu A_\mu(x) \quad (2.3)$$

実際にゲージ変換を施してみると、ゲージ変換関数の微小なずれに関しては $\omega(x+\Delta x) \simeq \omega(x) + \Delta x^\mu\partial_\mu\omega(x)$ と言えるので、

$$\begin{aligned}1 + ig\Delta x^\mu A'_\mu(x) &= 1 - \Delta x^\mu(\partial_\mu\omega)\omega^\dagger(x) + ig\Delta x^\mu\omega A_\mu\omega^\dagger(x) \\ &= \omega(x+\Delta x)[1 + igA_\mu\Delta x^\mu]\omega^\dagger(x) + O((\Delta x)^2)\end{aligned}$$

以上のようになる。

$O((\Delta x)^2)$ を無視すると確かにゲージ不変な量になる。 $O((\Delta x)^2)$ を無視できないような有限に離れた 2 点 x, y の場合は、

$$\bar{q}(x)U(x, y)q(y) \quad U(x, y) \equiv \mathcal{P}\exp\left[ig\int_x^y A_\mu(z)dz^\mu\right] \quad (2.4)$$

とする必要がある。ここで \mathcal{P} は経路順序積と呼ばれており、今の場合以下のように定義される。

$$\mathcal{P}\exp\left[ig\int_x^y A_\mu(z)dz^\mu\right] = \lim_{N\rightarrow\infty}\prod_{n=0}^{N-1}[1 + igA_\mu(x+n\delta x)\delta x^\mu] \quad (2.5)$$

$|\delta x| = |y-x|/N$ であり、これは区間 $[x, y]$ を無限小に分割している。関数 $U(x, y)$ の変換則は、前の考察を掛け合わせたものであり、

$$U'(x, y) = \omega(x)U(x, y)\omega^\dagger(y) \quad (2.6)$$

となる。

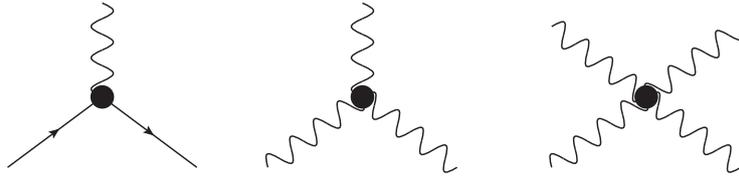


図 2.1: 非可換ゲージ理論におけるファインマンダイアグラム。右二つのダイアグラムが非可換性により追加された項。

2.1.2 ユークリッド化

最後に、格子 QCD では四次元ユークリッド空間を考えるので、その表式をあたえる。ミンコフスキー空間からユークリッド空間への移行 (ユークリッド化) は以下の置き換えを行なう。

$$x_0 \rightarrow -ix_4 \quad \gamma_i \rightarrow i\gamma_i^E \quad A_0 \rightarrow -iA_4 \quad S_{QCD} \rightarrow iS_{QCD}^E$$

さらにユークリッド空間上における QCD の作用を以下のように定義する。

$$S_{QCD}^E = S_G^E + S_F^E \quad S_G^E = \int d^4x \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) \quad S_F^E = \int d^4x \bar{q} (\gamma_\mu^E D_\mu + m) q(x)$$

2.2 漸近的自由性

QCD には閉じ込めという現象があり、グルーオンがクーロン力のような長距離到達力を媒介することはない。しかも、それはゲージ対称性を保ちながら行われる。ここではグルーオンの真空偏極およびカラーゲージ結合定数の量子補正を考える。摂動計算を行なうため正則化法とゲージ固定を選択しなければならない。正則化法は次元正則化法によるもので、ゲージ固定をファインマンゲージに選んだ。クォーク間を媒介するグルーオンはカラー電荷をもつため、グルーオン同士の結合 (三点結合や四点結合) が許される。

一般にゲージ場の真空偏極に効いてくるダイアグラムは図.2.2 のようなものになる。真空偏極にはカラー荷を運ぶような寄与のみが効いてくるので、ここではヒッグス粒子の寄与は無い。なので、下段を除く四つのダイアグラムの計算が必要である。

ゲージ場の真空偏極に効いてくるダイアグラムの計算結果は

$$(\text{ゲージ場の真空偏極}) = i (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left[\frac{g^2}{4\pi^2} \left(\frac{5}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) \right] \quad (2.7)$$

真空偏極の効果を弱結合による摂動効果として取り入れても、ゲージ場は横波モードしか持つことは出来ない。ゆえに、グルーオンによる強い相互作用は摂動論の範疇では無限遠方まで到達するよう見える。しかし、以下に議論する漸近的自由性によりカラー荷を持つグルーオンの伝達は有限になってしまうことわかる。

$SU(N_c)$ ゲージ理論に対する β 関数は次のように与えられる。³

$$\beta(\alpha) = \mu \frac{d\alpha}{d\mu} = -\alpha^2 \frac{2}{12\pi} \left[\frac{33}{3} N_c - 2N_f \right] \quad (2.8)$$

³ベータ関数の計算を行なうには、ゲージ場の真空偏極のループ計算の他に、フェルミオン場の真空偏極およびフェルミオンとゲージ場間の相互作用のループ計算が必要である。

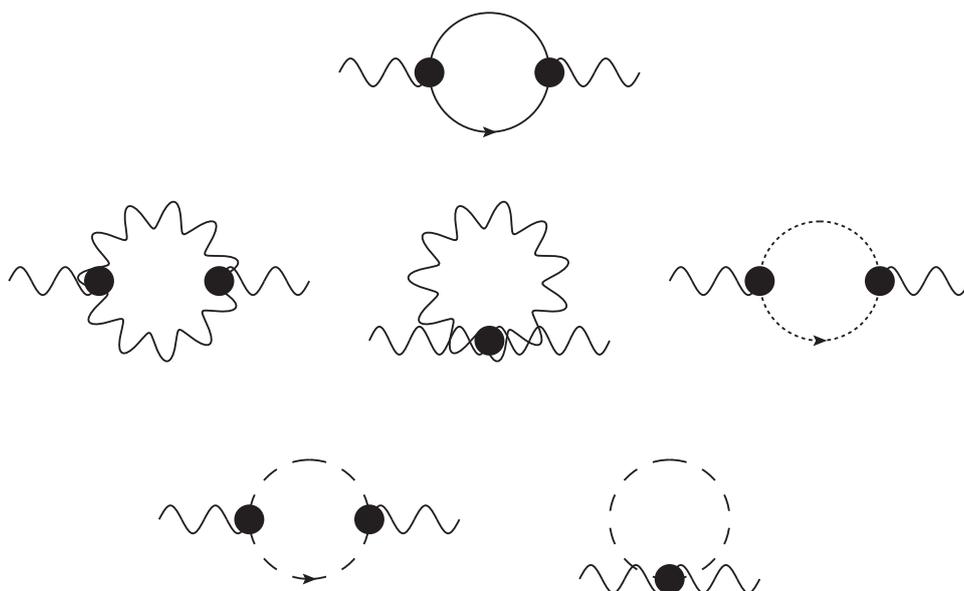


図 2.2: グルーオン場の真空編曲に対する 1 ループ補正。一段目はフェルミオンループが中に走るダイアグラム。二段目はゲージ場自身による真空偏極と、ゲージ固定によって生じたゴースト場のダイアグラム。三段目はスカラーループが中に走るダイアグラム。ここではファインマンゲージを選択した。スカラー粒子はカラー電荷を持たないので、三段目のダイアグラムは効いてこない。

ここで、 μ は質量次元を持つパラメータを表し、 $\alpha = g^2/4\pi$ とする。この μ に関して積分を実行すると、

$$\alpha(Q^2) = \frac{12\pi}{\left(\frac{33}{3}N_c - 2N_f\right) \ln Q^2/\Lambda_{QCD}^2} \quad (2.9)$$

ここで、 $Q^2 = -q^2$ で q はグルーオンの四元運動量あるいは考えている現象の典型的なスケールを表す。カットオフ Λ_{QCD} は結合定数の観測値などから $\Lambda_{QCD} \simeq 200 \text{ MeV}$ であることがわかっている。この $\alpha(Q^2)$ は走る結合定数と呼ばれ、現象のエネルギースケールによって結合定数の値が変化していくことを表している。QCD ではカラー数が $N_c = 3$ 、フレーバー数 $N_f = 6$ であるとき結合定数のエネルギースケール依存性は図.2.3 のように表される。

図.2.3 からわかるように関係するグルーオンの運動量が大きい短距離相互作用は弱くなり、摂動論を展開することが可能である。グルーオンを交換することによって量子電磁気学に似た結果を表す。しかし、低エネルギーのクォークとグルーオンは長距離で増大する結合定数に支配されて強く相互作用している。これを漸近的自由性と呼ぶ。この性質から、低エネルギー領域における QCD ではゲージ結合定数が大きいため、摂動論を取り扱うことが出来ないことを示している。

これをはっきり示すのが、カラーの閉じ込め現象である。色電荷を持ったクォークやグルーオンはカラーが無色の組になったハドロン内部に閉じ込められていて、単独で引き離すことができない。クォークと反クォークの間には、クォーク間の距離に比例する閉じ込めポテンシャルが働いていると考えられていて、引き離そうとしても分離させることができない。例えば、メソンの中のクォーク対を引き離そうとしても分離することはなく、エネルギーが上がっていったクォークと反クォークの対生成を起こしてカラー三重項のメソンに分裂してしまう。長距離の相互作用が働く世界では、カラーを持つクォークやグルーオンが主人公ではなく、無色のハドロンたちが主人公となって有効相互作用で記述されるべき

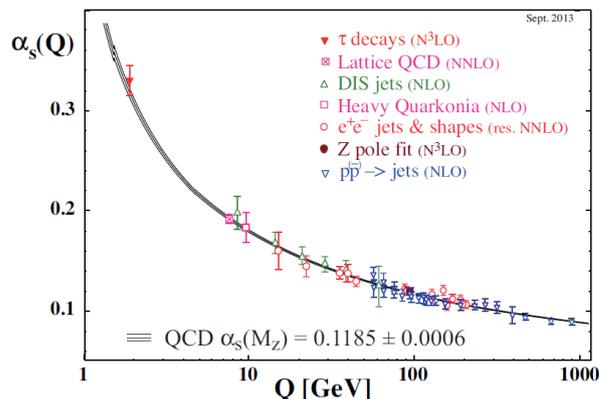


図 2.3: QCD 結合定数の $Q^2 = \mu^2$ 依存性。丸括弧は摂動的 QCD による計算結果で α_s の何次まで考慮に入れたのかを示している。(NLO:Next-to-Leading Order, NNLO:Next-to-Next-to-Leading Order, res. NNLO:mathcehd with resummed Next-to-Leading logs, N^3 LO:next-to-NNLO)) [17]

である。また、クォークやグルーオンはハドロン内部に閉じ込められているので、これを取り出して直接その性質を調べることはできないことが、低エネルギー QCD の理解を困難にしている。

2.3 閉じ込めとウィルソンループ

QCD においてカラーを持ったクォークやグルーオンが閉じ込められていて、ハドロンを構成するクォークの組はカラー重項のもののみが許されていると信じられている。これは格子 QCD によって数値的に確かめられている。格子 QCD の数値計算の議論に関しては後章に任し、ここでは閉じ込め (これは $SU(3)$ に限らない) に関して議論する。

ここでは簡単のため、フェルミオンを外場として導入し静的フェルミオン (非常に重い質量を持つフェルミオン) を扱い、ウィルソンループの期待値の計算によってフェルミオン間の相互作用エネルギーを距離の関数としてみる。今、フェルミオンと反フェルミオンはある時間に対生成し、距離 l_0 まで瞬時に引き離され、それ以後は空間に固定され直進し、時間 t_0 だけ過ぎたところで対消滅するとしよう。

このようにフェルミオンを配置すると、フェルミオンの荷電の流れ、外部カレント J_μ はゲージ場に働く。今、外部カレント $j_\mu(x)$ は図の用に系に加えられたと考えることができる。横軸を空間方向、縦軸を時間方向としている。 $l_0 \times t_0$ の閉じた長方形に対し、反時計まわりにカレントを流す。この経路を C とする。すると、外部カレントは以下のように定義される。

$$j_\mu(x) \begin{cases} 1(x = \text{経路 } C \text{ 上}) \\ 0(x = \text{それ以外}) \end{cases} \quad (2.10)$$

このような非局所的なフェルミオンの配置がある場合、局所的なゲージ対称性を保つために経路 C にそってゲージ場の線積分 W^C は

$$W^C = \mathcal{P} \exp \left[ig \text{tr} \int d^4x \sum_\mu J_\mu A_\mu \right] = \mathcal{P} \exp \left[ig \text{tr} \oint_C \sum_\mu dx_\mu A_\mu \right] = \text{tr} \prod_{i \in C} U_i \quad (2.11)$$

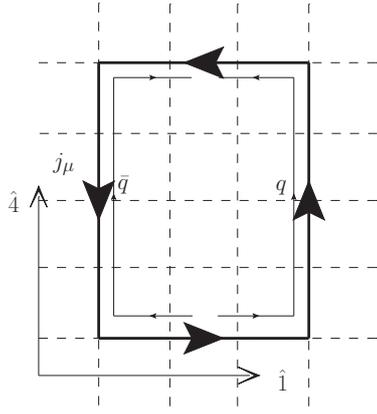


図 2.4: 系に導入した外部カレントとその経路

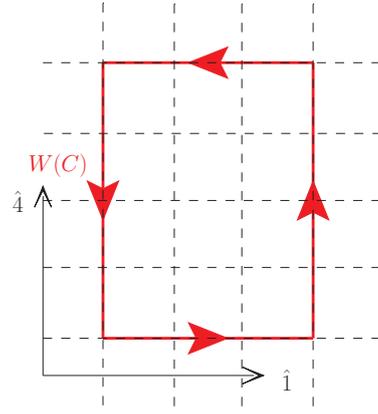


図 2.5: 対応するウィルソンループ

となる。この W^C をウィルソンループと呼ぶ。

今、リンク場を用いて動的なクォークのない系でウィルソンループの期待値を計算すると、

$$\langle W^C \rangle = \frac{1}{N_c Z} \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} \left(\text{tr} \prod_{i \in C} U_i \right) e^{-S_G} \quad (2.12)$$

となる。ここでカラー数 N_c で割ったのは連続極限においてウィルソンループ W^C が 1 に規格化されるように選んだ。簡単のため、このウィルソンループの振舞を $U(1)$ ゲージ理論 ($N_c = 1$) において評価してみる。先の方程式をリンク場ではなくゲージ場で表現すると、

$$\begin{aligned} \langle W^C \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A_\mu \left(\mathcal{P} \exp \left[ig \int d^4x \sum_\mu J_\mu A_\mu \right] \right) e^{-S_G} \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{P} e^{-S_G + ig \int d^4x \sum_\mu J_\mu A_\mu} = \frac{Z(J)}{Z} \end{aligned}$$

となる。これは経路 C に沿って流したソースを系に挿入した時の分配関数とそのソースの無い分配関数の比で表せる。したがって、ウィルソンループは外場を挿入することによる応答を表す量とみなせる。さて、外場を挿入することで系がどのように変化を受けるのかを量子力学的に考えてみる。前述の外場を挿入したラグランジアンから得られるハミルトニアン $\hat{H}(J)$ 、外場を入れていないものを \hat{H} とする。系の始状態を $|i\rangle$ 、系の終状態を $|f\rangle$ 、系の最低エネルギーを E_0 とし、一般に量子力学的な分配関数 Z を計算すると、

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} Z = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \langle f | e^{-\hat{H}t_0} | i \rangle = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \sum_n e^{-E_n t_0} \langle f | n \rangle \langle n | i \rangle \simeq e^{-E_0 t_0}$$

となる。時間相関を引き離せば離すほど、基底状態のエネルギー E_0 で指数関数的に減衰していく。この分配関数 Z の振舞は虚時間 t_0 を逆温度 β に対応付ければ分かりやすい。時間 t_0 を引き伸ばすことは、系の温度を小さくすることに対応していることから、系の温度を低くすればするほど量子状態は基底状態に集約されることを熱力学で知っているの、系の確率は基底状態に支配されることがわかる。故に確率の規格化定数である分配関数 Z の振舞は、上記のようになることがわかる。

さて、ウィルソンループの期待値は外場のある系での分配関数と外場の無い系での分配関数の比だった。この期待値は以下ようになる。

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \langle W^C \rangle = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{Z[J]}{Z[0]} \simeq e^{-(V(t_0) - E_0)t_0} \quad (2.13)$$

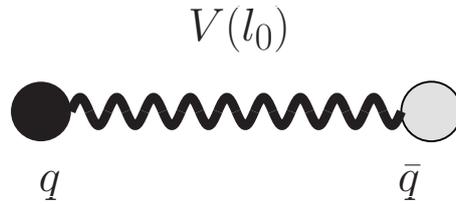


図 2.6: フェルミオン間の紐による閉じ込め

外場のある系で外場は最低エネルギー状態を $V(l_0)$ とし、外場のない系では最低エネルギーを E_0 とした。今の場合、空間に固定されたフェルミオンと反フェルミオン間の静的ポテンシャルであると解釈でき、静的ポテンシャルはフェルミオン間の距離 l_0 に依存する。この量を用いて、元の状態からの変化量を測ることができる。

もしウィルソンループの期待値が次のように振る舞うとき、

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \langle W^C \rangle \propto \exp[-\sigma(l_0 \times t_0)] \quad (2.14)$$

σ は紐の強さと呼ばれている量であり、ウィルソンループは「面積則」に従うという。これはフェルミオンの閉じ込めを意味する。なぜなら、このとき静的ポテンシャルは、

$$V(l_0) = \sigma l_0 \quad (2.15)$$

となる。フェルミオン間に紐状のゲージ場が生じて、エネルギーが紐の長さ l_0 に応じて増大していく。

フェルミオンはこの紐によって束縛されてしまい、閉じ込めが起こる。一方、もしウィルソンループの期待値が次のように振る舞うとき、

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \langle W^C \rangle \propto \exp[-c(l_0 + t_0)] \quad (2.16)$$

ウィルソンループは「周辺則」に従うといい、これはフェルミオンの非閉じ込めを表す。なぜなら、このとき静的ポテンシャルは、

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} V(l_0) = c \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{l_0}{t_0}\right) \simeq c \quad (2.17)$$

となり、有限な値をもつ。これは $l_0 \rightarrow \infty$ でも有限な値を取るため、フェルミオン同士を無限に引き離すことが可能である。以上より、ウィルソンループの期待値は閉じ込め・非閉じ込めを区別する一種の秩序変数である。実際に格子計算を用いて $SU(3)_c$ ゲージ理論における数値シミュレーションを行った結果、ウィルソンループは面積則に従うことが示され、クォークが観測できないのは”閉じこめ”が起きているからだということが分かった。この例のように、格子 QCD による数値シミュレーションは、QCD の非摂動的性質を暴くのに有効なツールである。

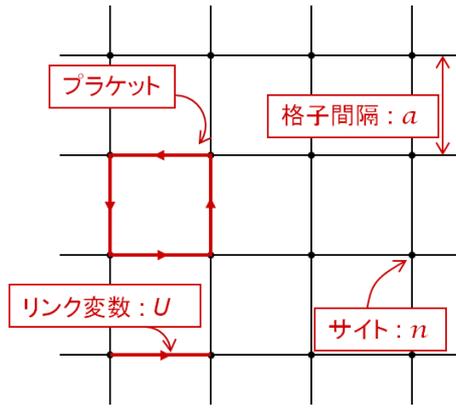


図 3.1: 格子ゲージ理論での登場物たち

3 格子 QCD

この章では、前章で紹介した QCD の作用を格子化する。格子上の変数と作用を定義する。

3.1 格子上の変数とゲージ不変量

3.1.1 格子空間

格子 QCD では四次元ユークリッド空間を考え、これを間隔 a ごとの格子へ離散化し、さらに格子点数を有限に取る。今、空間方向のそれぞれの格子数を N_s 、時間方向については N_t とすると、格子体積は $a^4 N_s^3 \times N_t$ となる。のちに述べるように有限温度系を考える場合は時間方向の格子長 $N_t a$ は温度 T の逆数に対応する。このように有限離散空間を考えることにより、計算機による数値シミュレーションを可能にする。格子間隔の各格子点をサイト $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ と呼び、クォーク場は $q_n = q(na)$ として定義される。さらにサイト間を結ぶ最小線分をリンクと呼び、格子 QCD においてゲージ場は次に見るようにリンク変数 $U_{n,\mu}$ として定義される。

3.1.2 リンク変数

リンク変数は格子と格子をつなぐリンク上に定義する。サイト $n, n + \mu (\mu = 1, 2, 3, 4)$ 間をつなぐリンク $(n, n + \mu)$ 上に n から $\hat{\mu}$ 方向に格子一つ進むものとして

$$U_{n,\mu} \equiv U(x, x + \hat{\mu}a) = \exp [igaA_\mu((n + \hat{\mu}/2)a)] \in SU(N_c) \quad (3.1)$$

と定義し、これを「リンク変数」という。ただし、格子間隔は有限だが十分小さいとして

$$\int_x^{x+\hat{\mu}a} \sum_\nu A_\nu(y) dy_\nu \simeq aA_\mu((n + \hat{\mu}/2)a) \quad (3.2)$$

と近似できることを用いた。格子 QCD においてゲージ場の主役は次に見るような、リンク変数により構成された閉じたループなどのゲージ不変量である。共变的な変換をしない $A_\mu(x)$ は、連続理論との対応を見るとき以外、理論中に変数として直接現れない。よって、格子 QCD における基本的変換は、

このリンク変数 $U_{n,\mu}$ である。この意味で「ゲージ場はリンク変数としてリンク上に置く」という。逆方向へ進むリンク変数は、

$$U_{n,\mu}^\dagger = U_{n+\hat{\mu},-\hat{\mu}} \quad (3.3)$$

とかける。リンク変数のゲージ変換性はすでに見たように

$$\begin{aligned} U_{n,\hat{\mu}} &\rightarrow \omega_n U_{n,\hat{\mu}} \omega_{n+\hat{\mu}}^\dagger \\ U_{n-\hat{\mu},\hat{\mu}}^\dagger &\rightarrow \omega_n U_{n-\hat{\mu},\hat{\mu}}^\dagger \omega_{n-\hat{\mu}}^\dagger \end{aligned}$$

であり、サイト毎に定義されたゲージ変換関数 ω_n による共变的な変換をうける。サイト n から m まで任意の経路を進むリンク変数の積は

$$\prod_{n \rightarrow m} U \equiv U_{n,\hat{\mu}_1} U_{n+\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2} U_{n+\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3} \cdots U_{n-\hat{\mu}_k,\hat{\mu}_k} \rightarrow \omega_n \left[\prod_{n \rightarrow m} U \right] \omega_m^\dagger \quad (3.4)$$

と変換するので、次のような点 n で閉じたループ C_n 上のリンク変数のトレース $[\text{tr} \prod_{C_n} U]$ はゲージ不変な量となる。ループを成すリンク変数の積で最も単純なものとして、 1×1 ウィルソンループ、いわゆる、「プラケット」があり、サイト n から、 $\hat{\mu}$ 、 $\hat{\nu}$ 方向に進んで出来る単位正方形のループで以下のように定義する。

$$W_{\mu\nu}^{1 \times 1}(n) \equiv U_{n,\hat{\mu}} U_{n+\hat{\mu},\hat{\nu}} U_{n+\hat{\mu},\hat{\nu}}^\dagger U_{n,\hat{\mu}}^\dagger / N_c \quad (3.5)$$

逆まわりのプラケットは単にエルミート共役をとることで表せる。

$$W_{\nu\mu}^{1 \times 1}(n) \equiv (W_{\mu\nu}^{1 \times 1})^\dagger(n) \quad (3.6)$$

よって反時計回りのプラケットと時計回りのプラケットの和は、虚数部分が打ち消し合うので、

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{1 \times 1}(n) + W_{\nu\mu}^{1 \times 1}(n) &= 2\text{Re}W_{\mu\nu}^{1 \times 1}(n) \\ \sum_{\mu \neq \nu} W_{\mu\nu}^{1 \times 1}(n) &= \sum_{\mu < \nu} \left[W_{\mu\nu}^{1 \times 1}(n) + (W_{\mu\nu}^{1 \times 1})^\dagger(n) \right] = \sum_{\mu < \nu} 2\text{Re}W_{\mu\nu}^{1 \times 1}(n) \end{aligned}$$

がいえる。

3.2 格子上的 QCD 作用

この章では以下の「指導原理」に従い、ゲージ場とフェルミオンであるクォーク場の作用を定式化する。

- $a = 0$ の連続極限で格子作用は、連続作用に一致する。
- カラーゲージ対称性を厳密に保たせる。
- 連続理論の作用が持っている対称性は「できるだけ」維持せよ。

ここで、「できるだけ」という意味は、必ずしも連続理論の対称性を格子上で保てる訳ではないためである。例えば、連続なローレンツ対称性や並進対称性は格子上で保つことはできない。しかし、90度回転や格子間隔 a の並進ならば保つことができる。上記の始動原理のみからでは、格子作用を一つに決めることが出来ず任意性が残る。実際、研究目的に応じて様々な格子作用が使われている。クォーク作用に関してはウィルソンフェルミオン以外に、KS フェルミオン、ドメインウォールフェルミオンなどが存在するが、本研究ではふれない。

3.2.1 格子ゲージ場の作用

格子上にゲージ場の作用を定義する。厳密なカラーゲージ対称性を持たせるためには、ゲージ不変量である「閉じたループのトレース」をもちいてゲージ作用は構成されるべきである。ここではまず、最も単純なループであるプラケット $W_{\mu\nu}^{1\times 1}$ を採用し、連続極限で連続理論の QCD 作用に一致することをみる。作用を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} S_G &= -\beta \sum_{\mu} \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{2} \text{tr} W_{\mu\nu}^{1\times 1}(n) \\ &= -\beta \sum_{\mu} \sum_{\mu < \nu} \text{tr} W_{\mu\nu}^{1\times 1}(n) \end{aligned}$$

ここで β は連続極限で連続理論の QCD 作用に一致させるための規格化定数である。まず、プラケットの連続極限を考える。

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{1\times 1}(na) &= U_{n,\hat{\mu}} U_{n+\hat{\mu},\hat{\nu}} U_{n+\hat{\nu},\hat{\mu}}^\dagger U_{n,\hat{\nu}}^\dagger / N_c \\ &= \exp [iga A_\mu ((n + \hat{\mu}/2)a)] \exp [iga A_\nu ((n + \hat{\mu} + \hat{\nu}/2)a)] \\ &\quad \exp [-iga A_\mu ((n + \hat{\nu} + \hat{\mu}/2)a)] \exp [-iga A_\nu ((n + \hat{\nu}/2)a)] / N_c \end{aligned}$$

ここで、ハウストルフの公式

$$\exp A \exp B = \exp \left(A + B + \frac{[A, B]}{2} + \dots \right) \quad (3.7)$$

を用い、さらにテイラー展開をしていくと、 $n_c = n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2$ として、結局、

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{1\times 1}(na) &= \exp [iga^2 (\partial_\mu A_\nu(n_c a) - \partial_\nu A_\mu(n_c a) - ig [A_\mu(n_c a), A_\nu(n_c a)]) + \text{高次項}] / N_c \\ &= \exp [iga^2 F_{\mu\nu}(n_c a) + \text{高次項}] / N_c \end{aligned}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} \text{tr} W_{\mu\nu}^{1\times 1} &\simeq \text{tr} \left[1 + iga^2 F_{\mu\nu}(n_c a) - \frac{g^2 a^4}{2} F_{\mu\nu}^2 + \text{高次項} \right] / N_c \\ &= 1 - \frac{g^2 a^4}{2N_c} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + \text{高次項} \end{aligned}$$

となり、高次項は連続極限をとると無視することができる。ただし、

$$\text{tr} 1 = N_c \quad \text{tr} F_{\mu\nu} = \text{tr} \left(\sum_a F_{\mu\nu}^a \hat{T}^a \right) = 0 \quad (3.8)$$

を用いた。以上より、

$$\begin{aligned} S_G &\simeq -\beta \sum_n \sum_{\mu \neq \nu} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{g^2 a^4}{2N_c} F_{\mu\nu}^2 \right) \right] \\ &= \left(\beta \times \frac{g^2}{2N_c} \right) \sum_n a^4 \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2(n_c a) + \text{const.} \end{aligned}$$

となる。ここで $\beta = 2N_c/g^2$ と選び、物理には寄与しない定数項を無視すると

$$S_G \rightarrow \int d^4x \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2(x) \quad (3.9)$$

となり、結合定数などの係数を含めて連続理論の作用と一致する。この作用は、格子ごとの並進対称性、90度回転対称性と既に述べたような厳密なカラー $SU(N_c)$ ゲージ対称性を持っている。

3.2.2 格子フェルミオン場の作用

簡単のためフレーバー数 $N_f = 1$ の格子フェルミオンの作用を考え、連続理論におけるフェルミオン作用を格子化することを考える。任意のフレーバー数 N_f への拡張は容易である。まず共変微分の格子化は以下のように行なう。

$$\frac{U_{n,\hat{\mu}}q_{n+\hat{\mu}} - U_{n-\hat{\mu},\hat{\mu}}q_{n-\hat{\mu}}}{2a} \rightarrow D_\mu q(x) \quad (3.10)$$

実際にリンク場をテイラー展開することで、連続極限で共変微分になる事が証明できる。当然、ゲージ変換性に関しても、

$$\frac{U_{n,\hat{\mu}}q_{n+\hat{\mu}} - U_{n-\hat{\mu},\hat{\mu}}q_{n-\hat{\mu}}}{2a} \rightarrow \omega_n \frac{U_{n,\hat{\mu}}q_{n+\hat{\mu}} - U_{n-\hat{\mu},\hat{\mu}}q_{n-\hat{\mu}}}{2a} \quad (3.11)$$

と共変微分と同じゲージ変換性をもつ。このように共変微分を共変差分で評価し、連続極限で連続理論におけるフェルミオン作用に一致するように格子フェルミオン作用は、

$$S_F^{\text{lattice}} = a^4 \sum_n \bar{q}_n \left[\sum_\mu \gamma_\mu \frac{U_{n,\hat{\mu}}q_{n+\hat{\mu}} - U_{n-\hat{\mu},\hat{\mu}}q_{n-\hat{\mu}}}{2a} + m q_n \right] \quad (3.12)$$

となる。しかし、この格子作用にはダブリングと呼ばれる問題があり、1自由度の格子フェルミオン場を導入したはずが、16自由度の粒子を記述してしまっていることが知られている。¹ ダブラー問題を考えるため、自由場 ($U_{n,\mu} = 1$) の場合で考える。

フェルミオン作用をフーリエ変換することで、

$$S_F^{\text{lattice}} = a^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_\mu \bar{q}(-p) \left[\frac{i}{a} \sum_\mu \gamma_\mu \sin p_\mu a + m \right] q(p) \quad (3.13)$$

[...] の逆数が伝搬関数となるので有理化を行うと以下ようになる。

$$\Delta(p) = \frac{1}{i \sum_\mu (\gamma_\mu \sin p_\mu a)/a + m} = \frac{-i \sum_\mu (\gamma_\mu \sin p_\mu a)/a + m}{\sum_\mu (\sin p_\mu a)^2/a^2 + (m)^2} \quad (3.14)$$

$a \rightarrow 0$ で連続理論に戻り、

$$\sin p_\mu a \sim \begin{cases} \hat{p}_\mu a & p_\mu = \hat{p}_\mu \\ -\hat{p}_\mu a & p_\mu = \pi/a + \hat{p}_\mu \end{cases} \quad (3.15)$$

となるので (但し、 $\hat{p}_\mu \ll 1/a$)、伝搬関数は

$$\lim_{a \rightarrow 0} G_F(p) = \frac{1}{a} \sum_{p_\mu=0,\pi/a} \frac{-i \sum_\mu (-1)^{\delta_\mu} \gamma_\mu p_\mu + m}{\hat{p}_\mu^2 + m^2} \quad (3.16)$$

となる。ここで、 $p_\mu = 0$ に対しては $\delta_\mu = 0$ 、 $p_\mu = \pi/a$ に対しては $\delta_\mu = 1$ ととっている。場の量子論では伝搬関数の極が粒子を表すので、上の結果は「一つの格子フェルミオン場が $2^d = 16$ の粒子を記述している」ことを意味する。一つの次元に対して 0 と π/a の二つの極が現れるので、この余計な自由度の粒子をダブラー、格子フェルミオンに余分な自由度が現れてしまう問題をダブリング問題と呼ぶ。

¹本研究では、その問題に関して深く追求せず、ウィルソン項をこのフェルミオン作用に足すことでダブリングを回避する。

連続理論のフェルミオン作用と一致させるためには、この無駄な自由度を排除しなければならない。この望まれないダブラー粒子を取り除く方法の一つとして、先の格子フェルミオン作用にウィルソン項を加える方法がある。ウィルソン項は以下のように定義される。

$$S_{WF}^{\text{lattice}} = -a^5 \frac{r}{2} \sum_n \sum_\mu \frac{\bar{\psi}_n U_{n,\hat{\mu}} \psi_{n+\hat{\mu}} + \bar{\psi}_n U_{n-\hat{\mu},\hat{\mu}}^\dagger \psi_{n-\hat{\mu}} - 2\bar{\psi}_n \psi_n}{a^2} \quad (3.17)$$

ここで r とはウィルソンパラメータとよばれる定数である。テーラー展開より、

$$\psi_{n\pm\hat{\mu}} = \psi(na \pm \hat{\mu}a) = \psi(na) \pm a\partial_\mu \psi(na) + \frac{a^2}{2} \partial_\mu^2 \psi(na) + O(a^3) \quad (3.18)$$

を用いると、ウィルソン項は連続極限において

$$S_{WF}^{\text{continuum}} = a \times \frac{r}{2} \int d^4x \sum_\mu \bar{\psi} D_\mu D_\mu \psi(x) \quad (3.19)$$

と振る舞うので、連続極限をとると消えてしまう項である。ウィルソン項を加えることで、望まれない15個のダブラー粒子の質量をもちあげ、連続極限において無限大にすることができる。先ほどと同様にフーリエ変換を行ってみる。

$$S_{WF}^{\text{lattice}} = -ra^4 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(-p) \sum_\mu [\cos p_\mu a - 1] \psi(p) \quad (3.20)$$

先の格子フェルミオン作用を足すと、

$$S_F^{\text{lattice}} + S_{WF}^{\text{lattice}} = a^4 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sum_\mu \bar{q}(-p) \left[\frac{i}{a} \sum_\mu \gamma_\mu \sin p_\mu a + M(p) \right] q(p)$$

$$M(p) = m - r \sum_\mu (\cos p_\mu a) + 4r$$

[...] の逆数が伝搬関数となるので有理化を行うと以下ようになる。

$$\Delta(p) = \frac{1}{i \sum_\mu (\gamma_\mu \sin p_\mu a)/a + M(p)}$$

$$= \frac{-i \sum_\mu (\gamma_\mu \sin p_\mu a)/a + M(p)}{\sum_\mu (\sin p_\mu a)^2/a^2 + (M(p))^2}$$

ウィルソン項の寄与によって、質量 M が運動量に依存するよう質量項 $M(p)$ になったと考えればよい。連続極限 $a \rightarrow 0$ で $M(p)$ は

$$\frac{M(p)}{a} = \begin{cases} m & \text{for physical pole} \\ m + 2r|\delta|/a \rightarrow \infty & \text{for doublers} \end{cases} \quad (3.21)$$

ここで、 δ は π 程度の大きさを持つ運動量の数である ($1 \leq |\delta| \leq d$)。我々が必要とする物理的な粒子 ($\forall p_\mu \simeq 0$) の質量は m のままであるが、ダブラー ($p_\mu \simeq \pi/a$) の質量は $m + 2r|\delta|/a$ となり連続極限で発散する。そのため、(無限大の) 大きな質量を持つダブラーは低エネルギーの物理現象には寄与できなくなる。このようにして格子フェルミオンにウィルソン項を加えることで、連続理論のフェルミオン作用を格子化することができた。

計算の便宜のため、次の規格化を行なっておく。 $\psi'_n \equiv a^{3/2}\psi_n$ と $m' \equiv ma$ と定義された無次元量を用いて、ウィルソン項を含めた格子フェルミオン作用を書き直すと、

$$S_F = (m + 4r) \sum_n \bar{\psi}_n \psi_n - \frac{1}{2} \sum_n \sum_\mu \bar{\psi}_n \left[(r - \gamma_\mu) U_{n,\hat{\mu}} \psi_{n+\hat{\mu}} + (r + \gamma_\mu) U_{n-\hat{\mu},\hat{\mu}}^\dagger \psi_{n-\hat{\mu}} \right] \quad (3.22)$$

とまとめられる。ここでホッピングパラメータ κ を以下のように定義する。

$$\kappa = \frac{1}{2(m + 4r)} \quad (3.23)$$

このパラメータでフェルミオン場を $\psi = (\sqrt{2\kappa})\psi'$ と再定義してやり、 ψ' を用いてさらに書き直すと、

$$S_F = \sum_n \bar{\psi}_n \psi_n - \kappa \sum_n \sum_\mu \bar{\psi}_n \left[(r - \gamma_\mu) U_{n,\hat{\mu}} \psi_{n+\hat{\mu}} + (r + \gamma_\mu) U_{n-\hat{\mu},\hat{\mu}}^\dagger \psi_{n-\hat{\mu}} \right] \quad (3.24)$$

となり、この格子作用をウィルソンフェルミオン作用と呼ぶ。

フェルミオン行列 $M(\kappa)$ を用いて、作用を書き換えると以下ようになる。

$$S_F = \sum_{n,m} \bar{\psi}_n M_{n,m}(\kappa) \psi_m$$

$$M_{n,m}(\kappa) \equiv \delta_{n,m} - \kappa \sum_\mu \left[(r - \gamma_\mu) U_{n,\hat{\mu}} \delta_{m,n+\hat{\mu}} + (r + \gamma_\mu) U_{m,\mu}^\dagger \delta_{m,n-\hat{\mu}} \right]$$

任意のフレーバー数 N_f への拡張は次式で与えられる。

$$S_F = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_n^{(f)} \psi_n^{(f)} - \kappa \sum_n \sum_\mu \bar{\psi}_n^{(f)} \left[(r - \gamma_\mu) U_{n,\hat{\mu}} \psi_{n+\hat{\mu}}^{(f)} + (r + \gamma_\mu) U_{n-\hat{\mu},\hat{\mu}}^\dagger \psi_{n-\hat{\mu}}^{(f)} \right] \quad (3.25)$$

$$= \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{n,m} \bar{\psi}_n^{(f)} M_{n,m}(\kappa) \psi_m^{(f)} \quad (3.26)$$

3.3 作用の改良

前節までは、連続理論に一致するように QCD の格子上の作用を素直な形で導出したが、そのような条件を満たす作用は一意ではない。特に、現在のコンピュータの能力からいってそれほど大きな格子サイズで計算を行なうことができないので、素直な作用を用いて連続極限をとることは困難である。ここでは、格子上において格子間隔が 0 ではなく有限な値を持つことからくる誤差をなるべく小さくするように改善した格子上の作用を議論する。

改善方法には大きく分けて二つの流儀があり、一つはシマンツィックの方法である [4]、[5]。格子作用の格子化による誤差は a がある程度小さければ、 a の巾の低い次数順に出てくる。作用の中に余計なパラメータを導入して、その a を含む項を低次の項から順に打ち消すように、そのパラメータを調節する方法が、シマンツィック流の改善方法である。

もう一つの方法は、繰り込み群の解析による改善方法である。繰り込み群の考え方はウィルソンによって発展され、物性の相転移の問題に適用された。その考え方を以下に示す。

相転移の近傍では相関長は長くなり、相転移点では無限大に発散する。相関長とはその距離の範囲内で系の物理的性質が定性的に変わらない距離である。そこでその範囲内で、いくつかの自由度をまと

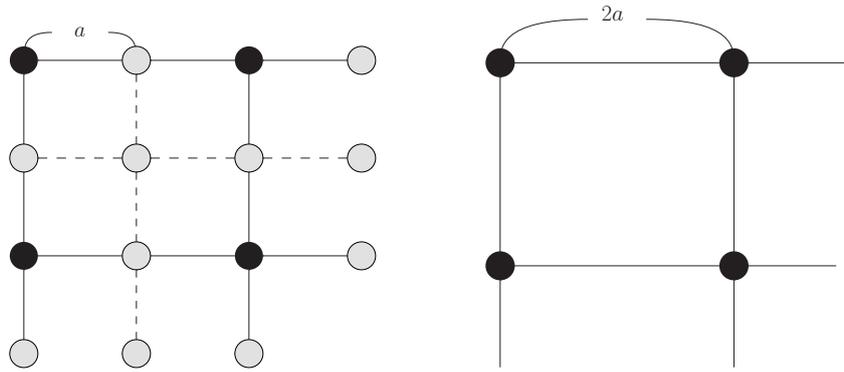


図 3.2: 繰り込み操作の例。左図の点線の相互作用を無視する。次に灰円のスピンの和を取ってしまい、スピンの寄与は黒円で代表させる。繰り込み変換によってスピンの自由度は粗視化され、格子間隔が荒くなり、長距離 (低エネルギー) の相互作用を取り入れている。

めて、一つの有効自由度で代表させることが出来る。この有効自由度に対する作用は元の作用とは異なる有効作用である。元の作用から有効作用への変換を繰り込み変換とよび、その群を繰り込み群と呼ぶ。たとえば、 d 次元のスピン系で隣接する二つのスピンを一つのスピンとして扱うことが繰り込み変換の一つである。この際、二つのスピン間の格子間隔 a は繰り込み変換後に二倍される。(図.3.2を参照) 相関長が十分大きければ、この置き換えで伸びた隣接するスピンの距離 (格子間隔の距離) を二倍にしても、系の物理的性質が定性的に変わらない。さらに、この変換を何回も繰り返す。 J 回繰り返したとすると、もとの 2^J 倍の格子間隔が新しい格子間隔になる。もとの相関距離を ξ とすると

$$\xi \leq 2^J$$

である限りこの変換は意味を持つ。このようにして得られた有効作用は、もともとの作用で記述される系の遠方での振舞を記述する作用である。温度 T が相転移温度 T_c に近づくと $\xi \rightarrow \infty$ になるので、繰り込み変換の可能な回数は $J \rightarrow \infty$ となる。このときに得られる有効作用 S_∞ が相転移点直上での物理を記述することになる。あるゆるい条件を満たす限り、もとのミクロな作用はどんなものであっても、有効作用は S_∞ に行き着く。すなわち、相転移近傍での振舞はミクロの物理に依らず一意的に決定される。これが相転移の普遍性 (universality) である。

格子ゲージ理論の連続極限とは、相転移に近づくときの遠方の振舞で決まる。ゆえに、格子作用としてどんなものとってもよい。しかし、端から遠方での振舞を見たいのなら、最初から遠方の振舞を記述するような作用を最初から用いた方がよい。このような作用のことを、繰り込み群によって改善された作用と呼ぶ。

3.3.1 改善された格子ゲージ場の作用

先に述べたように QCD を格子上に定式化する場合、作用の取り方は一意的ではない。連続極限で連続理論の QCD 作用が導けるといふ要請を満たす作用は無限に存在する。ゲージ不変性をみとすためには、とにかく閉じたループを採用すればよい。最も単純なループがプラケットとよばれる、単位正方形の 1×1 ウィルソングループである。他にも 1×2 ウィルソングループやそれを折り曲げて椅子のような形をしたループなど様々存在する。

そこで、ゲージ作用として以下のような作用も考えることができる。

$$S_g = \frac{1}{g^2} \left[c_0 \sum \text{tr} \left[\text{square loop} \right] + c_1 \sum \text{tr} \left[\text{rectangle loop} \right] + c_2 \sum \text{tr} \left[\text{pentagon loop} \right] + c_3 \sum \text{tr} \left[\text{hexagon loop} \right] \right]$$

ただし、 $\beta_i = c_i \times 2N_c/g^2 (i = 0, 1, 2, 3)$ であり、連続極限で $\text{tr} F_{\mu\nu}^2/2$ になるように

$$c_0 + 8c_1 + 16c_2 + 8c_3 = 1 \quad (3.27)$$

という規格化条件が与えられている。以下、 $c_2 = c_3 = 0$ だとして議論していく。故に、 $c_0 = 1 - 8c_1$ 係数 c_1 は、上記の二つの流儀を用いて決定することができる [6]。

シマンツィック流の改善方法をとると以下のようにして決定される。ブラケットと 1×2 ウィルソンループの和で高次項をキャンセルし、格子化による誤差を減らすように係数を決定する。この方法では、 $c_1 = -1/12$ である。この係数を用いた格子ゲージ作用をシマンツィック作用と呼ぶ。

ウィルソン流の改善方法をとると以下のようにして決定される。摂動的に繰り込み群方程式を解くことで係数を決定する。この方法では、 $c_1 = -0.331$ である。この係数を用いた格子ゲージ作用を岩崎作用と呼ぶ。本研究では、岩崎作用を用いた。

3.3.2 改善された格子フェルミオン場の作用

ゲージ場同様にフェルミオンに対しても、改善された作用を用いる。シマンツィックの方法で $O(a)$ の誤差を取り除いた作用が、クローバー改善作用といわれるものである。

$$S_{clover} = c_{SW} \kappa \sum_n \sum_{\mu, \nu} \bar{\psi}_n^{(f)} \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_n^{\mu\nu} \psi_n^{(f)} \quad (3.28)$$

この係数は実数値であり、Sheikholeslami-Wohlert 係数と呼ばれている。また $\hat{F}_n^{\mu\nu}$ は

$$F_n^{\mu\nu} = \frac{-i}{8a^2} (Q_n^{\mu\nu} - Q_n^{\nu\mu}) \quad (3.29)$$

ここで、 $Q_n^{\mu\nu}$ は、ブラケット $W_{n\mu\nu}^{1 \times 1}$ から構成され、

$$Q_n^{\mu\nu} \equiv W_{n\mu, \nu}^{1 \times 1} + W_{n\nu, -\mu}^{1 \times 1} + W_{n-\mu, -\nu}^{1 \times 1} + W_{n-\nu, \mu}^{1 \times 1} \quad (3.30)$$

これは、連続理論における場の強さテンソルを離散化したものである。係数 c_{SW} はツリーレベルで 1。平均場による改善を行なうのであれば、 $W^{1 \times 1}$ をブラケットの期待値として、 $c_{SW} = (W^{1 \times 1})^{-3/4}$ となる [7]。

3.4 格子フェルミオンとカイラル対称性

一つの格子場を導入するのに、16 個の粒子を記述しているのは不都合である。なぜなら、低エネルギーに現れる粒子の個数は系の物理的性質に大きな影響を与える。たとえば、非可換ゲージ理論の結合定数のエネルギー依存性を決めるベータ関数は系のフェルミオン数に依存している。なので、格子理論を実際の物理系に適用するには、ダブラーがなく、一つのフェルミオンを記述する格子フェルミオ

ンの定式化が必要になってくる。しかし、ダブリングのない格子フェルミオンの定式化はそう簡単ではない。

定理 (ニールセン・ニ宮の No-Go 定理)² 格子フェルミオンの作用が以下の仮定を満たしているとする。

- 平行移動不変性
- カイラル対称性
- エルミート性
- フェルミ場の双一次形式
- 局所性

この時、格子作用が記述する行列 γ_5 の固有値が + の粒子と - の粒子の個数は等しくなる。すなわちダブラーが生じる。

定理の仮定である平行移動不変性から格子フェルミオン作用は一つの運動量 p だけの関数となる。また、カイラル対称性から質量項は禁止され、格子作用が双一次形式で書かれているのであれば、

$$S_F = i\bar{q}(-p)Dq(p) \quad D = \gamma_\mu F^\mu(p) \quad (3.31)$$

とかかれる。エルミート性から $F^\mu(p)$ は実関数であり、局所性から $p = 0$ で連続である。したがって、 $F^\mu(p)$ は実ベクトル場である。このときフェルミ作用は質量項を持っていないので、フェルミオンは F_μ の零点は、伝搬関数の極となり粒子に対応する。

連続理論では $F_\mu = p_\mu$ であり、ゼロ点は $\forall p_\mu = 0$ にしかない。ところが、格子理論の場合、運動量は周期 $2\pi/a$ で周期的なので、ある方向 μ に対して $F_\mu(0) = F_\mu(2\pi/a) = 0$ となるはずで、その傾きも等しい。したがって、 p に関する連続性より、必ず途中のある点 p_0 で $F_\mu(p_0) = 0$ となる。事実、単純な格子作用を用意したら、 $F_\mu = (\sin p_\mu a)/a$ なので、 $p_\mu = \pi/a$ でも $F_\mu = 0$ となり、これがダブラーに対応している。

次にカイラル対称性に関して再考察する。作用 S_F が平衡移動不変性を持ち、フェルミ場の双一次形式で書かれ、繰り込み可能であるならば、

$$S_F = i\bar{q}(-p)Dq(p) \quad (3.32)$$

カイラル変換 $q \rightarrow e^{i\gamma^5\theta}q \simeq i\theta\gamma^5q$ より、作用 S_F がカイラル対称性をもつということは

$$S_F \rightarrow S_F - \theta\bar{q}\{\gamma^5, D\}q \quad (3.33)$$

反交換関係 $\{\gamma^5, D\} = 0$ を意味する。もしカイラル対称性が成り立つならば、質量項を持たないため、先のような伝搬関数 $D = F^\mu\gamma_\mu$ となる。この場合、格子理論ではダブラー粒子が生まれてしまい、連続極限における低エネルギー領域で問題が起きる。ダブリング問題を解決するため、ダブラー粒子に質量項を足せば、連続極限における低エネルギー領域で問題が起きないが、この場合、カイラル対称性を壊すことになる。

QCD の低エネルギー領域において、カイラル対称性の自発的破れは中間子の質量階層性や閉じ込め・非閉じ込め相への相転移にとっても重要な現象である。しかし、格子理論ではカイラル対称性を明白に

²参照 [19]、[20]

破り、ダブリング問題を回避するか、カイラル対称性を保ち、低エネルギー領域で問題が起こるダブリング問題と向き合うかのいずれかである。

本研究で用いる、ウィルソンフェルミオンはウィルソン項により、質量項が作られるのでカイラル対称性を破ってしまう。しかし、連続極限でダブラーは無限の質量をもつため、低エネルギー領域での問題は起きない。

3.5 演算子と期待値

経路積分形式により、任意のゲージ不変な物理量を計算することが出来る。経路積分を用いて分配関数 Z は以下のように与えられる。

$$Z = \int \mathcal{D}U \exp[-S_G - S_F] \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \equiv \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} \quad (3.34)$$

ここで、 $\mathcal{D}U$ は全てのサイト上の全ての方向を向いているリンク変数についての積分をあらわす。前章で見たように格子 QCD の作用は、次のように与えられる。

$$S = S_G(U) + S_F(\bar{\psi}, \psi, U) = S_G(U) + \bar{\psi} M(U) \psi \quad (3.35)$$

であり、任意の演算子を $O(\bar{\psi}, \psi, U)$ とすると、

$$\begin{aligned} \langle O(\bar{\psi}, \psi, U) \rangle &= \frac{1}{Z} \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} d\bar{\psi} d\psi O(\bar{\psi}, \psi, U) e^{-S_G} e^{-S_F} \\ Z &= \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} d\bar{\psi} d\psi e^{-S_G} e^{-S_F} \end{aligned}$$

外場 $\eta, \bar{\eta}$ を導入したのち、フェルミオンに関して積分を実行してやれば次のようになる

$$\langle O(\bar{\psi}, \psi, U) \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} (\det M(U))^{N_f} e^{-S_G} O\left(-\frac{\delta}{\delta\eta}, \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, U\right) e^{\bar{\eta} M^{-1}(U) \eta} \quad (3.36)$$

フェルミオン行列式を指数の肩に乗せれば、次の表式を得る。

$$\langle O(\bar{\psi}, \psi, U) \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} O\left(-\frac{\delta}{\delta\eta}, \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, U\right) e^{-S_G - N_f \ln \det M(U) + \bar{\eta} M^{-1}(U) \eta} \quad (3.37)$$

本研究では、格子ゲージ作用として岩崎作用、格子フェルミオン作用としてウィルソンフェルミオンとクローバー作用を採用した。作用は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} Z(\beta, m) &= \int \mathcal{D}U (\det M)^{N_f} e^{-S_G} \\ S_g &= S_g^{1 \times 1} + S_g^{1 \times 2} = -\beta \left[\sum_{x,\mu > \nu} c_0 W_{\mu\nu}^{1 \times 1}(x) + \sum_{x,\mu \neq \nu} c_1 W_{\mu\nu}^{1 \times 2}(x) \right] \\ M_{x,y} &= (M_{WF})_{x,y} + (M_{clover})_{x,y} \\ &= \delta_{x,y} - K \sum_i \left[(1 - \gamma_i) U_i \delta_{x+\hat{i},y} + (1 + \gamma_i) U_i^\dagger(x - \hat{i}) \delta_{x-\hat{i},y} \right] \\ &\quad - \delta_{x,y} c_{SW} K \sum_{\mu > \nu} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$\hat{F}_{\mu\nu} = (Q_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu}^\dagger)/(8i)$ で与えられ、ゲージ結合定数 $\beta = 6/g^2$ 、ゲージ作用として岩崎作用 ($c_1 = -0.331, c_0 = 1 - 8c_1$) を採用し、Sheikholeslami-Wohlert 係数は $c_{SW} = (1 - 0.8412\beta^{-1})^{-3/4}$ で与えられる。格子サイズは $N_s^3 \times N_t$ である。

4 有限温度 QCD

まず、有原温度の場の理論の導入を行なう。ここでは、四次元ユークリッド空間の場の量子論と三次元の統計力学の類似性を議論する。ボーズガスの中で最も簡単なものが中性スカラー場なので、中性スカラー場のラグランジアンから始め、周期的境界条件を与えることでボーズ分布を得ることを確認する。その次にはフェルミオンのラグランジアン、反周期的境界条件を与えることでフェルミ分布を得ることを確認し、有限温度の場の理論における繰り込みを議論する。零質量を持つ粒子の有限温度量子効果は赤外領域で発散を起こすため、非摂動的な取扱いが必要であることを述べる。

そののち、カイラル相転移を議論する。まずはカイラル対称性に関して触れ、その後、QCD のランダウ自由エネルギーと 1 ループのベータ関数を議論することで、有効模型を用いたカイラル相転移のクォークの質量依存性 [24] の先行研究を紹介する。先行研究からわかったことは、量子異常の効果から破れている $U(1)_A$ 対称性が温度効果によって回復するか否かによって、カイラル極限 $[(m_{ud}, m_s) = (0, \infty)]$ の相転移の次数が変わることが分かっている。この章の最後には、格子 QCD によるカイラル極限の相転移の研究のレビューを行った。相転移の次数が一次である結果もあれば、二次でもある結果もあり混沌としている。

4.1 有限温度の場の理論

有限温度系に量子色力学を適用する。ファインマンの経路積分の方法を用いて、場の理論の統計力学的な取り扱いについて述べる。

4.1.1 スカラー場

ここでは中性スカラー場の自由場 $\phi(x, t)$ を考える。これはユークリッド空間において次の古典的なラグランジアン \mathcal{L} と作用関数 S を持つ。

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (4.1)$$

ϕ に対する共役運動量 $\pi(x, t)$ は $\pi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi} = \dot{\phi}$ で、したがってハミルトニアン、 $H = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$ は

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\hat{\pi}^2(x, t) + (\nabla \hat{\phi}(x, t))^2 + m^2 \hat{\phi}^2(x, t) \right] \quad (4.2)$$

となる。ここで量子論に移って $\hat{\pi}$ と $\hat{\phi}$ は同時交換関係 $[\hat{\pi}(x, t), \hat{\phi}(y, t)] = i\delta^3(x - y)$ を満たす演算子とする。この系に対する統計力学的分配関数 Z は、

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_{\text{periodic}} \langle \phi(x) | e^{-\beta \hat{H}} | \phi(x) \rangle \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (4.3)$$

によって与えられる。 T は温度のことである。積分は $\phi(x)$ についての汎関数積分である。統計力学の要請から時間に関して周期的境界条件を与える。状態 $|\phi(x)\rangle$ はある時刻 ($t = \text{一定}$) における場の演算子 $\phi(x, t)$ の固有状態で固有値 $\phi(x)$ をもつ、

$$\hat{\phi}(x, t) |\phi(x)\rangle = \phi(x) |\phi(x)\rangle \quad (4.4)$$

そして完全性、

$$\int \mathcal{D}\phi(x) |\phi(x)\rangle \langle \phi(x)| = 1 \quad (4.5)$$

を満たす。したがって、先の分配関数は統計力学での分配関数 $Z = \text{tr} e^{-\beta \hat{H}}$ と同等である。そして、それは t に依存しない。汎関数積分の測度に関しては簡単に次のようにして考えておく。まず空間を正方格子化して各格子点における積分として表し、最後に格子間隔 $a \rightarrow 0$ の極限をとる。つまり、 $\int \mathcal{D}\phi \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \prod_x \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(x)$ とする。統計力学でいうボルツマン因子 $e^{-\beta \hat{H}}$ は、

$$e^{-\beta \hat{H}} = \prod_{i=1}^N e^{-\epsilon_i \hat{H}} \quad \epsilon_i = \beta/N \equiv \epsilon \quad (4.6)$$

で N を十分大きくすると、 ϵ の二次以上の項は無視することができて、

$$e^{-\epsilon \hat{H}} = 1 - \epsilon \hat{H}(\hat{\pi}, \hat{\phi}) \quad (4.7)$$

と \hat{H} の一次関数で近似する。以上の式を用いて時刻 t_i から時刻 t_f までの遷移確率を求める。

$$\begin{aligned} \langle \phi_0 | e^{-\beta \hat{H}} | \phi_0 \rangle &= \left\langle \phi_0 \left| \prod_{i=1}^N e^{-\epsilon_i \hat{H}} \right| \phi_0 \right\rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^N d\phi_i \langle \phi_0 | e^{-\epsilon_i \hat{H}} | \phi_{N-1} \rangle \langle \phi_{N-1} | e^{-\epsilon_i \hat{H}} | \phi_{N-2} \rangle \cdots \langle \phi_1 | e^{-\epsilon_i \hat{H}} | \phi_0 \rangle \end{aligned}$$

さらに共役運動量の固有状態 $\hat{\pi}(x, t) | \pi(x) \rangle = \pi(x) | \pi(x) \rangle$ を導入し、この完全性関係を先の積分に挿入する。すると、

$$\begin{aligned} \langle \phi_{i+1} | e^{-\epsilon \hat{H}} | \phi_i \rangle &= \int d\pi_i \langle \phi_{i+1} | \pi_i \rangle \langle \pi_i | \phi_i \rangle e^{-\epsilon H(\pi_i, \phi_i)} \\ &= \int d\pi_i \exp \left[i\epsilon \int d^3x \pi_i(x) [\phi_{i+1}(x) - \phi_i(x)] \frac{1}{\epsilon} - \epsilon H(\pi_i, \phi_i) \right] \end{aligned}$$

ここで $\Delta t = \epsilon$ 、 $t_j = j\epsilon = j\beta/N$ 、 $\phi(x, t_i) = \phi_i(x)$ 、 $\phi(x, t_i + \Delta t) = \phi_{i+1}(x)$ 等と書くと、

$$Z(\beta) = N' \int_{\phi:\text{periodic}} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\pi \exp \left[- \int_0^\beta dt \left[H(\pi, \phi) - i \int d^3x \pi \dot{\phi} \right] \right] \quad (4.8)$$

ここで N' は規格化のための定数、汎関数積分の際 ϕ については周期的境界条件 $\phi(x, \beta) = \phi(x, 0)$ をみたくする。これをファインマンの経路積分の形にするには、先に π 積分を実行してやればよい。被積分関数はガウス型なので、

$$\int d\pi e^{-\pi^2/2 - i\pi\dot{\phi}} = \sqrt{2\pi} e^{-\dot{\phi}^2/2} \quad (4.9)$$

となる。結局、分配関数は以下ようになる。

$$Z(\beta) = N \int_{\phi:\text{periodic}} \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int_0^\beta dt \int d^3x \mathcal{L} \right] \quad (4.10)$$

以上のように統計力学とユークリッド空間における場の量子論は非常に密接な関係にある。場の理論における統計力学の問題を以下の方法によって解析することができる。任意の物理量 O の統計平均は

$$\langle O \rangle = \frac{\text{tr}(O e^{-\beta \hat{H}})}{\text{tr} e^{-\beta \hat{H}}} = \frac{\int_{\phi:\text{periodic}} \mathcal{D}\phi O e^{-S(\phi)}}{\int_{\phi:\text{periodic}} \mathcal{D}\phi e^{-S(\phi)}} \quad (4.11)$$

によって計算される。

次に経路積分を実行して分配関数を求めていく。まず、 $\phi(x, t)$ の空間成分に関してフーリエ変換を実行すると、

$$S = -\frac{\beta^2}{2} \sum_n \int \sum_k [\omega_n^2 + E^2(k)] \tilde{\phi}^*(k, n) \tilde{\phi}(k, n) \quad E(k) \equiv (k^2 + m^2)^{1/2}$$

$$\phi(x, t) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_n \sum_k \tilde{\phi}(k, n) e^{ik \cdot x + i\omega_n t} \quad \tilde{\phi}(-k, -n) = \tilde{\phi}^*(k, n) \quad \tilde{\phi}(k, 0) = \tilde{\phi}(k, \beta)$$

となる。ここで $\omega_n = 2\pi n/\beta$ であり、この量を松原振動数とよぶ⁶。この結果を分配関数に代入すると、

$$Z(\beta) = N \prod_{k_i} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\phi}(k_i, n) \exp \left[-\frac{\beta^2}{2} \int d^3k [\omega_n^2 + E^2(k)] \tilde{\phi}^*(k, n) \tilde{\phi}(k, n) \right] \right\}$$

$$= N' \prod_n \prod_k [\beta^2(\omega_n^2 + E^2(k))]$$

となる。分配関数の log は

$$\ln Z = -\frac{1}{2} \sum_n \sum_k \ln [(2\pi n)^2 + \beta^2 E^2(k)]$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_n \sum_k \left\{ \int_1^{\beta^2 E^2(k)} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} \right\} - \frac{1}{2} \sum_n \sum_k \{ \ln [1 + (2\pi n)^2] \}$$

$$= -\sum_k \left\{ \int_1^{\beta^2 E^2(k)} d\theta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right) \right\} - \frac{1}{2} \sum_n \sum_k \{ \text{温度非依存項} \}$$

ここで以下の計算式を用いた。

$$\ln [(2\pi n)^2 + \beta^2 \omega^2] = \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} + \ln [1 + (2\pi n)^2]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^2 + (\theta)^2} = \frac{1}{2\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right)$$

温度非依存項を除き、 θ 積分を実行すると、

$$\ln Z = \sum_k \left[-\frac{1}{2} \beta E(k) - \ln(1 - e^{-\beta E(k)}) \right] = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[-\frac{1}{2} \beta E(k) - \ln(1 - e^{-\beta E(k)}) \right] \quad (4.13)$$

となる。二つ目の式は離散的な空間の表式で、三つ目の式は連続極限における表式となる。分配関数の各項の物理的意味を見るためにエネルギー密度を求める。エネルギー密度 \mathcal{E} の表式は $\mathcal{E}V = -\partial \ln Z / \partial \beta$ と与えられるので、

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E(k) + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E(k)}{e^{\beta E} - 1} \quad (4.14)$$

⁶松原振動数は統計力学的要請によって与えられた周期的境界条件 $\phi(x, 0) = \phi(x, \beta)$ から決定されている。この条件から

$$\phi(x, \beta) - \phi(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(k, n) e^{ik \cdot x} [e^{i\omega_n \beta} - 1] = 0 \quad (4.12)$$

とならなければならないので、恒等的にこの関係式が成り立つためには $[\dots] = 0$ が成り立つ必要がある。したがって、松原振動数は $\omega_n = 2\pi n/\beta$ (n は $-\infty$ から ∞) となる。

となる。第一項はゼロ点振動によるエネルギーであり、第二項はボーズ統計を反映したエネルギーである。よって、中性スカラー場の経路積分から分配関数を時間方向に関する周期的境界条件を与えることで、統計力学のボーズ粒子に対する分配関数を導くことができた。ゲージ場に関しても同様で、分配関数は次のように与えられる。

$$\ln Z = d_G V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[-\frac{1}{2} \beta E(k) - \ln(1 - e^{-\beta E(k)}) \right] \quad (4.15)$$

ここで d_G はゲージ場の自由度である。

4.1.2 フェルミオン場

次に自由なディラックフェルミオンの分配関数を導く。ラグランジアン密度は以下のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(-\gamma^4 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m \right) \psi \quad (4.16)$$

場 ψ はディラックフェルミオンであり、グラスマン性により反可換な量である。 ψ を変数とし、共役運動量をもとめ、ラグランジアン形式からハミルトニアン形式に書き換えると、

$$\mathcal{H} = \Pi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{L} = \bar{\psi} (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi \quad \Pi = i\bar{\psi} \gamma^4 \quad (4.17)$$

となる。大局的 $U(1)$ 対称性が成立するので、それに付随する保存電荷が存在し、

$$Q = \int d^3 x \bar{\psi} \gamma^4 \psi \quad (4.18)$$

分配関数は経路積分公式より、

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[\int_0^\beta dt \int d^3 x \bar{\psi} \left(-\gamma^4 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m + \mu \gamma^4 \right) \psi \right] \quad (4.19)$$

となる。この分配関数は自由フェルミオン場の作用に大局的 $U(1)$ 対称性に付随する保存電荷を足したものになる。フェルミオン場に対しては反周期的境界条件 $\psi(0, x) = -\psi(\beta, x)$ が要請され⁷、松原振動数は $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$ (n は $-\infty$ から ∞) となる。

さて、作用をフーリエ変換すると、

$$S = \sum_n \sum_k \tilde{\psi}_{\alpha,n}(k) D_{\alpha\rho} \tilde{\psi}_{\rho,n}(k) \\ D = -\beta [k_\mu \gamma^\mu + m] \quad k_\mu = (i\omega_n - \mu, \mathbf{k})$$

となる。フェルミオン場に関して積分を実行してしまえば、

$$Z_F = \text{Det} D \quad (4.21)$$

⁷松原振動数は統計力学的要請によって与えられた周期的境界条件 $\psi(x, 0) = -\psi(x, \beta)$ から決定されている。この条件から

$$\psi(x, \beta) + \psi(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(k, n) e^{ik \cdot x} [e^{i\omega_n \beta} + 1] = 0 \quad (4.20)$$

とならなければならないので、恒等的にこの関係式が成り立つためには $[\dots] = 0$ が成り立つ必要がある。したがって、松原振動数は $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$ (n は $-\infty$ から ∞) となる。

となる。ここで Det は運動量、振動数、ディラック引数に関する行列式である。この分配関数は \log をとることで、次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}\ln Z_F &= 2 \sum_n \sum_k \ln \{ \beta^2 [(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2] \} \\ &= \sum_n \sum_k \{ \ln \beta^2 [\omega_n^2 (\omega - \mu)^2] + \ln \beta^2 [\omega_n^2 (\omega + \mu)^2] \}\end{aligned}$$

ここで、次の関係式を用いた。

$$\det AB = \det A \det B = \det A \det(\gamma^5 B \gamma^5) = \det A \gamma^5 B \gamma^5 \quad \ln \text{Det} AB = \text{Tr} \ln AB$$

Tr は運動量、振動数、ディラック引数に関するトレースである。スカラー場の時と同様に振動数の和をとり、運動量積分を実行する。その際に以下の関係式を用いばよい。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-x)(n-y)} = \frac{\pi (\cot \pi x - \cot \pi y)}{y-x}$$

結果は温度非依存項を除けば、

$$\ln Z_F = d_F V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\beta \omega + \ln \left(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)} \right) \right] \quad (4.22)$$

ここで d_F はフェルミオンの自由度であり、ここではスピンの自由度から $d_F = 2$ となっている。この分配関数は第一項がゼロ点エネルギーの寄与を表し、第二項は粒子、第三項は反粒子の寄与を表している。物質粒子を表す二項はフェルミ分布に従っている。

4.1.3 有限温度項と繰り込み

松原形式を用いて場の理論に温度をもたせた。今までの章の計算からわかるように、温度に依存する項と温度に依存しない項が存在する。ここでは、自由スカラー場のラグランジアンに四点結合を足すことで、温度依存項と温度非依存項の繰り込みの振舞を見る。後にみるように、実は発散の除去のための繰り込みという作業は温度非依存項でのみ行なえばよいことがわかる。

先に紫外発散の繰り込みに関して議論する。スカラー場の四点結合を系に足し、摂動論を用いて伝搬関数の繰り込み計算を行なう。 λ の最低次では図.4.1 のダイアグラムが効いてくる。このダイアグラムの寄与を Π_1 とし、ファインマン図を計算すると、

$$\Pi_1 = 12\lambda T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2} \quad (4.23)$$

となる。振動数に対する和は複素積分を用いて次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_0 = i\omega_n) &= \frac{\beta}{2\pi i} \oint_C dp_0 f(p_0) \frac{\beta}{2} \coth\left(\frac{\beta}{2} p_0\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{1}{2} [f(p_0) + f(-p_0)] \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 [f(p_0) + f(-p_0)] \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1}\end{aligned}$$

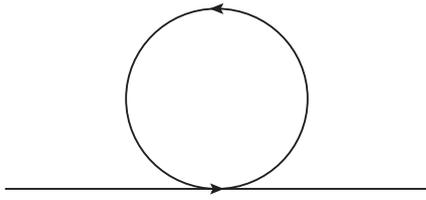


図 4.1: 零温度の発散に効いてくるダイアグラム。上のダイアグラムは紫外発散を起こすダイアグラムの一例である。

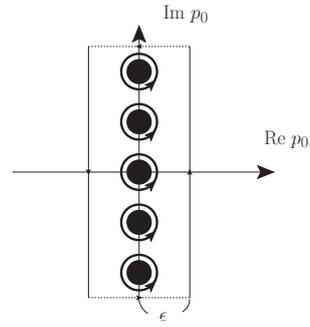


図 4.2: $\coth(\beta p_0/2)$ の極 $p_0 = i\omega_n$ を表しているのが黒点である。複素積分の経路は p_0 の実部に関して絶対値 ϵ 、虚部に関して $-\infty$ から ∞ の閉じた経路取り扱う。

積分経路 C は図 4.2 のとおりである。このようにして、振動数和は自然に、温度非依存項 (真空項) と温度依存項 (物質項) に分割される。先の 1 ループダイアグラムにこの式を用いると、

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \Pi_1^{\text{VAC}} + \Pi_1^{\text{MAT}} \\ \Pi_1^{\text{VAC}} &= 12\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_4^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \\ \Pi_1^{\text{MAT}} &= 12\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{e^{i\beta p_4} - 1} \frac{1}{p_4^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

となる。真空項の寄与は場の量子論 ($T = 0$) における四次元ユークリッド積分の形そのままである。ループ積分の運動量次数のみに着目すると、

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_4^2 + \mathbf{p}^2} \simeq \int^{\Lambda_{UV}} dp \frac{p^3}{p^2} \propto \Lambda_{UV}^2$$

この寄与は二次発散する。また、物質項の寄与は統計性を反映し、ここではボーズ分布の分布関数がかけている。この形から質量項の寄与の発散はありえない。何故なら、物質効果は紫外線領域で指数関数によって減少させられるからである。よって、有限温度の場の量子論における紫外発散は、温度の依存性を持たない真空項によって行なわれることがわかる。これはフェルミ分布においても同じである。

次に赤外発散に関して議論するが、この発散は温度に依存する形で現れる。しかし、紫外発散と同様に零温度において発散を除去する。赤外発散に関しては、図 4.3 に書いてあるようなリングダイアグラムの計算を行なう。サブダイアグラム (灰色の部分) は紫外発散を起こすが、零温度の線り込みによってどうにかする。真ん中のリング部分に寄与するループ積分に着目すると、

$$I \simeq \beta VT \Pi_1^2 \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2(p)} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2(p)} \quad (4.24)$$

概算で以上のような振舞を持つことがわかる。今、松原振動数 $\omega_n = 0$ かつ質量 $m = 0$ のときに着目する。これに関してもループ積分の三次元運動量次数のみに着目すると、

$$I \propto \int_{\Lambda_{IR}} d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^4} \propto \frac{1}{\Lambda_{IR}^2} \quad (4.25)$$



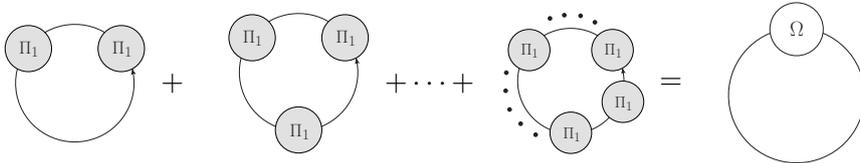
図 4.3: λ^2 の寄与を持つ真空ダイアグラムである。次数 2 のリングダイアグラムとも呼ばれる。これらのダイアグラムは真ん中のリング部分に赤外発散をもつ。紫外発散のときに議論した自己エネルギーダイアグラム Π_1 を用いれば、右図のようになる。もちろん灰色の円の部分は紫外発散をもつサブダイアグラムとなる。

このようにして赤外発散は、有限温度において、質量 $m = 0$ かつ松原振動数 $\omega_n = 0$ という静的な極限で起こる。同様のことが零温度において起きないのは、自己エネルギー Π_1 の寄与が質量に比例して現れるために、このリングダイアグラムの寄与は消えてしまうからである。しかし、有限温度では物質項が存在するため、 p_4 積分に関して留数を取った自己エネルギー Π_1 は質量 $m = 0$ において、

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= 0 + 12\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta|\mathbf{p}|} - 1} \frac{1}{|\mathbf{p}|} \\ &= 12\lambda T \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{1}{e^{\beta|\mathbf{p}|} - 1} \frac{1}{|\mathbf{p}|} = \lambda T^2 \neq 0\end{aligned}$$

となる。故にリングダイアグラムは非零となるため、対称性により粒子の質量が零に制限される QED や QCD などといった理論における有限温度の物理現象は赤外発散により摂動論が扱えなくなる。

さらに λ の次数を上げていっても事情は同じで、リングを含む限り赤外発散を含むことになる。ここではこの赤外発散をどうにかするため再加算 (resummation) という方法を紹介する。



まず、上図のようにリングダイアグラムを全て足しあげる。 λ^1 の寄与は赤外発散には関係ないので、それを除き、足しあげた結果を Ω とすると、

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{N=2}^\infty \frac{(-1)^N}{N} (\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}))^N \\ &= \frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\sum_{N=1}^\infty \frac{(-1)^N}{N} (\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}))^N - \frac{(-1)^1}{1} (\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}))^1 \right] \\ &= -\frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\ln(1 + \Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p})) - (\Pi_1 D(\omega_n, \mathbf{p}))]\end{aligned}$$

一行目から二行目へは赤外発散を含まない λ^1 項を差し引きし、二行目から三行目へは \log の展開式 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} x^n/n$ を用いた。もちろん先に述べたように、有限温度効果を含めた質量 $m = 0$ のときの自己エネルギーは $\Pi_1 = \lambda T^2$ である。

今から、この Ω が赤外発散を起こしていないかを確認する。 $\omega_n = 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{1}{2}\beta VT \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(1 + \frac{\lambda T^2}{\mathbf{p}^2} \right) - \left(\frac{\lambda T^2}{\mathbf{p}^2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\beta VT}{4\pi^2} \left[\int_0^\infty d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 \ln \left(1 + \frac{\lambda T^2}{|\mathbf{p}|^2} \right) - \int_0^\infty d|\mathbf{p}| (\lambda T^2) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\beta VT}{4\pi^2} \left[\left[\frac{1}{3} |\mathbf{p}|^3 \ln \left(1 + \frac{\lambda T^2}{|\mathbf{p}|^2} \right) \right]_0^\infty - \frac{-2\lambda T^2}{3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2 + \lambda T^2} - |\mathbf{p}| (\lambda T^2) \right]\end{aligned}$$

$|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ のとき、第一項の \log は展開できて、

$$\left[|\mathbf{p}|^3 \ln \left(1 + \frac{\lambda T^2}{|\mathbf{p}|^2} \right) \right] \simeq |\mathbf{p}| \lambda T^2 - \frac{(\lambda T^2)^2}{|\mathbf{p}|} \dots$$

展開の第一項は Ω の第三項とキャンセルし、第二項以降は極限において零となる。よって、 Ω の第二項のみが残り、計算を行なえば、

$$\Omega = -\frac{1}{2} \frac{\beta VT}{4\pi^2} \left[-\frac{2\lambda T^2}{3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}|^2 + \lambda T^2} \right] = \frac{\beta V}{12\pi} \lambda^{3/2} T^4$$

となり、赤外発散が起きていないことがわかる。フルオーダーの寄与を足しあげることでリングダイアグラムの発散を処理したため、通常の摂動展開は破綻する。

4.2 カイラル対称性とその自発的破れ

クォークには6種類のフレーバーが存在しており、その質量は1MeVから 10^2 GeVまでである。この中でチャーム、ボトム、トップクォーク(以降、 c 、 b 、 t クォーク)はQCDの典型的なスケール $\Lambda_{QCD} \sim 200$ MeVに比べて十分重いため、重いクォークと呼ばれている。逆にアップ、ダウン、ストレンジクォーク(以降、 u 、 d 、 s クォーク)は質量が Λ_{QCD} より小さく、軽いクォークと呼ばれている。QCDのダイナミクスからすれば、重いクォークは直接結合しない非常に重い粒子として扱ってよく、軽いクォークは非常に重要な役割をもつ。後章で議論するが、真空中でのクォーク凝縮は軽いクォークに数100MeVの有効質量を与え、ハドロンの質量の源となる重要な役割を果たしている。この章では、まず、カイラル対称性を議論し中間子の質量の起源を議論する。

4.2.1 カイラリティ

クォーク場を γ_5 の固有状態を用いて二つの部分に分ける。

$$\begin{aligned}q(x) &= q_R(x) + q_L(x) \quad q_{R/L}(x) \equiv P_{R/L} q(x) = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} q(x) \quad \gamma_5 q_{R/L}(x) = \pm q_{R/L}(x) \\ P_{R/L} &\equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \quad P_{R/L}^2 = P_{R/L} \quad P_R P_L = 0 \quad P_R + P_L = \mathbf{1} \quad \gamma^\mu P_{R/L} = P_{L/R} \gamma^\mu\end{aligned}$$

ここで、 $\gamma_5^2 = 1$ より、その固有値は ± 1 をとる。この固有値をカイラリティと呼び、カイラリティが正の成分を右巻き成分、カイラリティが負の成分を左巻き成分と呼ぶ。 $P_{R/L}$ は各固有状態への射影演算子で R と L の成分が直行していることを表している。 γ_5 と γ_μ は反可換なので、射影演算子は入れ替えによって変化する。

4.2.2 カイラル変換

QCD ラグランジアンを γ_5 の固有状態として書き直すと以下ようになる。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}_L (i\gamma^\mu D_\mu) q_L(x) + \bar{q}_R (i\gamma^\mu D_\mu) q_R(x) - m (\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L) - \frac{1}{2} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)]$$

ここで、 $SU_R(N_f) \times SU_L(N_f)$ 変換を定義する。これは右巻きクォークと左巻きクォークを独立に $SU(N_f)$ 大局変換することに対応する。

$$\begin{aligned} q_R^a &\equiv [e^{i\theta_R^i \hat{T}_i}]^{ab} q_R^b \simeq q_R^a + i\theta_R^i [\hat{T}_i q_R]^a & q_L^a &\rightarrow [e^{i\theta_L^i \hat{T}_i}]^{ab} q_L^b \simeq q_L^a + i\theta_L^i [\hat{T}_i q_L]^a \\ \bar{q}_R^a &\rightarrow \bar{q}_R^b [e^{-i\theta_R^i \hat{T}_i}]^{ba} \simeq \bar{q}_R^a - i\theta_R^i [\bar{q}_R \hat{T}_i]^a & \bar{q}_L^a &\rightarrow \bar{q}_L^b [e^{-i\theta_L^i \hat{T}_i}]^{ba} \simeq \bar{q}_L^a - i\theta_L^i [\bar{q}_L \hat{T}_i]^a \end{aligned}$$

添字 a はクォークのフレーバーを意味し、 $q^a = u, b, \dots$ となる。生成子 \hat{T} は $SU(N_f)$ 群の生成子である。 $N_f = 2$ ならば、 $\hat{T}^a = \frac{\sigma^a}{2}$ となり、 σ^a はパウリ行列である。 $N_f = 3$ ならば、 $\hat{T}^a = \frac{\lambda^a}{2}$ となり、 λ^a はゲルマン行列である。

この変換に対して、QCD ラグランジアンは次のように変化を受ける。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &\rightarrow \bar{q}_L (i\gamma^\mu D_\mu) q_L(x) + \bar{q}_R (i\gamma^\mu D_\mu) q_R(x) - \frac{1}{2} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)] \\ &\quad - m \left(\bar{q}_L [-i(\theta_L^i - \theta_R^i) \hat{T}^i] q_R + \bar{q}_R [-i(\theta_R^i - \theta_L^i) \hat{T}^i] q_L \right) \end{aligned}$$

質量を零にすることで QCD ラグランジアンは $SU_R(N_f) \times SU_L(N_f)$ 変換に対し不変となる。

ここで、回転角 θ_R と θ_L との線形和で新しい回転角を作る。

$$\theta_V = \frac{1}{2}(\theta_R + \theta_L) \quad \theta_A = \frac{1}{2}(\theta_R - \theta_L)$$

回転角を定義し直すことで、右巻きクォークと左巻きクォークは以下のように変換する。 q_R と q_L は γ_5 の固有状態となるので、

$$\begin{aligned} q_{R/L}^a &\rightarrow [e^{i(\theta_V^i + \gamma_5 \theta_A^i) \hat{T}_i}]^{ab} q_{R/L}^b \simeq q_{R/L}^a + i(\theta_V^i + \gamma_5 \theta_A^i) [\hat{T}_i q_{R/L}]^a \\ \bar{q}_{R/L}^a &\rightarrow \bar{q}_{R/L}^b [e^{-i(\theta_V^i + \gamma_5 \theta_A^i) \hat{T}_i}]^{ba} \simeq \bar{q}_{R/L}^a - i(\theta_V^i + \gamma_5 \theta_A^i) [\bar{q}_{R/L} \hat{T}_i]^a \end{aligned}$$

位相 θ_V で回す変換が $SU_V(N_f)$ ベクトル変換という大局的なベクトル変換で、位相 θ_A で回す変換が $SU_A(N_f)$ カイラル変換という大局的な軸性変換と呼ばれる。

この変換に対し、QCD ラグランジアンは次のように変換を受ける。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \rightarrow \bar{q} (i\gamma^\mu D_\mu) q(x) - \frac{1}{2} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)] - m\bar{q} [2i\theta_A^i \hat{T}_i] q(x)$$

ラグランジアンに質量パラメータが有無に関係せずベクトル変換に関して系は対称であり、カイラル変換に関して系は質量が零のとき対称であることがわかる。よって、質量項があることで破れていた対称性はカイラル変換によるものであったことがわかる。

ここで QCD における現実のクォークは典型的なスケール Λ_{QCD} に比べて、2 個 (u クォークと d クォーク) が十分に軽いため、近似的に u クォークと d クォークの二つが零質量とみなすことができ、近似的カイラル対称性が成立する。

以下では u クォークや d クォークに限らず、 N_f 個のクォークの質量が縮退した軽い質量を持つとし、QCD ラグランジアンは次のように定義し直す。

$$\mathcal{L} = \bar{q}^a (i\gamma^\mu D_\mu - M) q^a(x) - \frac{1}{2} \text{tr} [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)]$$

$$q^a(x) = (u(x), d(x), \dots)^T \quad M \equiv \text{diag}(m, m, \dots), \quad m \equiv m_u = m_d = \dots$$

M は質量行列である。カイラル対称性は厳密に回復する、クォーク質量を 0 にする極限をカイラル極限と呼ぶ。この系では局所対称性であるカラーゲージ対称性 $SU(3)_c$ 以外に、大局的対称性である $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_A \times U(1)_V$ を持つ。

次の節からは、有効模型を用いてカイラル極限における QCD 相転移を議論していく。カイラル対称性の破れ指標は質量項の有無に関連しているため、この質量項を秩序変数とみなすことができ、真空において非零の期待値を持ったとき、相転移が起きたといえる。この期待値 $\langle \bar{q}q \rangle$ をカイラル凝縮という。

4.2.3 有限温度 QCD におけるカイラル相転移

今、 u クォークと d クォークの質量が極めて小さく、二つのクォークが等しい質量 m_{ud} を持つとしたとき、古典的ラグランジアンは次の群に属している。

$$G = SU(N_f)_A \times SU(N_f)_V \times U(1)_A \times U(1)_V \times SU(3)_c \quad (4.26)$$

$U(1)_V \times SU(3)_c$ は破れないと仮定し、カイラル対称性の自発的破れとその回復に焦点をあてる¹。この系におけるカイラル秩序変数は $U(1)_V \times SU(3)_c$ 変換を受けない、以下のような $N_f \times N_f$ 行列で与えられる。

$$\Phi \equiv \frac{1}{2} \bar{q}^i (1 - \gamma_5) q^j = \bar{q}_R^i q_L^j \quad (4.27)$$

ここで、 i, j はフレーバーの引数である。

この秩序変数は $SU(2)_{L/R}$ の変換行列 $V_{L/R} \equiv e^{i(\theta_V^i + \gamma_5 \theta_A^i) \hat{T}_i}$ と $U(1)_A$ の位相変換 $e^{i\alpha \gamma_5}$ を受け、次のように変換を受ける。

$$\Phi \rightarrow e^{2i\alpha} V_L \Phi V_R^\dagger \quad (4.28)$$

また、左手型クォーク、及び、右手型クォークは次のように変換を受ける。

$$q_L \rightarrow e^{i\alpha} V_L q_L, \quad q_R \rightarrow e^{i\alpha} V_R q_R \quad (4.29)$$

もしカイラル対称性の力学的破れが起きれば、 Φ の熱平均は非零になる。

4.2.4 QCD のランダウ関数

秩序変数場 Φ で記述されるランダウ関数 $S_{\text{eff}} = \int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff}}$ を構築する。 \mathcal{L}_{eff} は QCD のラグランジアンと同じ対称性を持ち、臨界点付近において Φ で展開できる [24]。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \text{tr} \partial \Phi^\dagger \partial \Phi + \frac{a}{2} \text{tr} \Phi^\dagger \Phi + \frac{b_1}{4!} (\text{tr} \Phi^\dagger \Phi)^2 + \frac{b_2}{4!} \text{tr} (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

$$- \frac{c}{2} (\det \Phi + \det \Phi^\dagger) - \frac{1}{2} \text{tr} h(\Phi + \Phi^\dagger) \quad (4.30)$$

¹バリオン密度が大きいときにカラー超伝導が起きるとしたら、この仮定は根拠のないものになる

ここで tr 、 det はフレーバーの引数に対する演算である。式 (4.30) の右辺の最初の 4 項は、 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_A$ 対称性を保っている。一方、第 5 項は $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 対称性を保っているが、 $U(1)_A$ 対称性は破っている。この項は QCD の軸性異常を示唆している [25]。式 (4.30) の最後の項はクォーク質量 $h \propto \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$ から生じ、 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 対称性だけでなく、 $U(1)_A$ 対称性も破っている。

系が二次相転移を起こすならば、 Φ の場はソフトモードであり、臨界点において相関距離が発散する。ハードモードは、相関距離が発散せず、経路積分で消え、係数 a, b_1, b_2, c, h にのみ影響する。ローレンツベクトルソフトモード (ベクトル中間子など) が存在するかどうかは非自明な問題である [26]。ここでは、ソフトモードはローレンツスカラーのみと考える。

4.2.5 軸性異常がない零質量の QCD

Φ の値が大きい場合、 \mathcal{L}_{eff} は $b_1 + \frac{b_2}{N_f} > 0$ 、 $b_2 > 0$ の条件下で下に有界である。この条件下では、相転移は a の符号が変わることで引き起こされる平均場理論における二次相転移である。

相転移の次数は Φ の熱揺らぎを考慮することで変わってくる。これを見るために、 β 関数を結合定数 $g_{1,2} \equiv b_{1,2} S_d / (2\pi)^d$ の二次の項まで見ていく。

$$\beta_1 = -\epsilon g_1 + \frac{N_f^2 + 4}{3} g_1^2 + \frac{4N_f}{3} g_1 g_2 + g_2^2 \quad (4.31)$$

$$\beta_2 = -\epsilon g_2 + 2g_1 g_2 + \frac{2N_f}{3} g_2^2 \quad (4.32)$$

これらは臨界点 ($a = 0$) での 1-loop 有効作用と b_1, b_2 に比例する 4 点結合から得られる。式 (4.31-4.32) はフレーバー数に依存しており、それぞれ異なる繰り込み群流をもつ。

$N_f = 1$ の場合、式 (4.30) ($c = h = 0$) は、 $O(2)$ 対称な ϕ^4 モデル ($b \equiv b_1 + b_2$) と等価である。赤外固定点 $g^* = 3\epsilon/5$ が赤外発散しない。また、相転移は二次相転移である。

$N_f \geq 2$ の場合、 b_1, b_2 は独立な結合定数であり、式 (4.30) ($c = h = 0$) は $SU(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_A(1)$ 対称性を持つ。この時 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ について次の 2 つの解がある。

$$g^* = \begin{cases} (0, 0) \\ \left(\frac{3}{N_f^2 + 4} \epsilon, 0 \right) \end{cases} \quad (4.33)$$

安定行列 $\Omega_{ll'} (= \partial\beta_l / \partial g_{l'})$ の固有値 ω_l によって、固定点が赤外発散するかが決まる。簡単な代数計算により、次の結果を得る。

$$(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} (-\epsilon, -\epsilon) & \text{for } g^* = (0, 0) \\ \left(\epsilon, -\frac{N_f^2 - 2}{N_f^2 + 4} \epsilon \right) & \text{for } g^* = \left(\frac{3}{N_f^2 + 4} \epsilon, 0 \right) \end{cases} \quad (4.34)$$

$N_f \geq 2$ では、常に負値の固有値が存在するため、臨界面上には赤外発散しない固定点はないことが分かる。これは、相転移が変動的に引き起こされる 1 次相転移であることを示している。

4.2.6 軸性異常のある零質量の QCD

次に $c \neq 0, h = 0$ の場合を考える。この時 \mathcal{L}_{eff} は $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ 対称性を持つ。表 1 では、零質量 ($h = 0$) での QCD の相転移の次数をまとめている。ここでフレーバー数は重要な役割を果たしているため、異なる N_f についてそれぞれ見ていく。

表 1: 零質量 QCD のカイラル相転移

	軸性異常のない零質量の QCD	軸性異常のある零質量の QCD
	$(h = 0, c = 0)$	$(h = 0, c \neq 0)$
$N_f = 1$	2 次相転移 [$O(2)$]	クロスオーバー
$N_f = 2$	1 次相転移	2 次相転移 [$O(4)$]
$N_f = 3$	1 次相転移	1 次相転移 ²
$N_f \geq 4$	1 次相転移	1 次相転移

- $N_f = 1$ の場合

式 (4.27) を 1 フレーバーのものに書き換える ($S^0 + iP^0 = \sigma + i\eta$) と、次が得られる。

$$-\frac{c}{2}(\det\Phi + \det\Phi^\dagger) = -c\sigma \quad (4.35)$$

これは式 (4.30) のクォーク質量項 (またはスピン系に対する外磁場) と同じ構造をしていて、カイラル対称性を明らかに破っている。そのため、2 次相転移 ($c = 0$) はクロスオーバー ($c \neq 0$) に変わる。

- $N_f = 2$ の場合

2 フレーバーに対して次の定義を用いる。

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\eta + \delta \cdot \tau + i\pi \cdot \tau) \quad (4.36)$$

ここで τ はパウリ行列を表す。これより

$$-\frac{c}{2}(\det\Phi + \det\Phi^\dagger) = -\frac{c}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{c}{2}(\eta^2 + \delta^2) \quad (4.37)$$

を得る。これと式 (4.30) の 2 次の項を組合せて $\frac{a-c}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{a+c}{2}(\eta^2 + \delta^2)$ を導く。

$T = 0$ での粒子のスペクトルによって c の符号が正であることが知られているため、臨界点付近 ($a - c \sim 0$) では σ と π はほぼ零質量となり、一方、 η と δ は質量が大きいままである。これらのことから、 $O(4)$ 対称性を持つ ϕ^4 模型が導かれる。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(\partial\vec{\phi})^2 + \frac{a-c}{2}\vec{\phi}^2 + \frac{b_1+b_2/2}{4!}(\vec{\phi}^2)^2 \quad (4.38)$$

$$\vec{\phi} = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = (\sigma, \pi)$$

この模型は 2 次相転移を起こす。

²軸性異常により生じる 3 次の項が引き起こす 1 次相転移

- $N_f = 3$ の場合

行列式の項が 3 次の相互作用を生じる。

$$-\frac{c}{2}(\det\Phi + \det\Phi^\dagger) = -\frac{c}{3\sqrt{3}}\sigma^3 + \dots \quad (4.39)$$

相転移は平均場理論においても 1 次相転移となる。

- $N_f \geq 4$ の場合

$N_f = 4$ において行列式の項は 4 次の項を持ち、 $N_f > 4$ では 4 次以上の高次項を持つ。前者の場合、新しく現れた 4 次の項は原理的に臨界現象の性質に関係しているが、 (b_1, b_2, c) 空間において、赤外発散しない固定点は現れない [54]。後者の場合、新しく現れた項は臨界現象と関係はなく、 $c = 0$ での結果は第 4.2.5 節で述べている。このため、 N_f が 4 以上の場合は変動的に引き起こされる 1 次相転移が予想される。

4.2.7 軽いクォークの質量の効果

現実の世界に近付くために、u,d,s クォークの質量を考慮していく ($c \neq 0, h \neq 0$)。図 4.4 は (m_{ud}, m_s) 平面における QCD 有限温度カイラル相転移の性質を表している。ここでアイソスピン対称性に対して $m_{ud} \equiv m_u = m_d$ を仮定する。図 4.4 の 4 つの角はそれぞれ次の極限に対応している。

$$(m_{ud}, m_s) = \begin{cases} (\infty, \infty) & N_f = 0(\text{no quarks}) \\ (\infty, 0) & N_f = 1(\text{massless 1 flavor}) \\ (0, \infty) & N_f = 2(\text{massless 2 flavors}) \\ (0, 0) & N_f = 3(\text{massless 3 flavor}) \end{cases} \quad (4.40)$$

外場が弱い限り 1 次相転移は消えることはない。クォーク質量 m_q が外場として強く働きすぎると、1 次相転移はクロスオーバーへと変わる。この境界における相転移の次数は二次である。例えば、図 4.4 の左下は 1 次相転移の領域であるが、質量が大きくなりすぎるとクロスオーバーの領域に変わることが分かる。この境界線上の 2 次相転移は、 Z_2 対称性を持つイジング模型と同じ普遍性クラスにあり、温度が冷えていくにつれて Z_2 対称性が自発的に破れる。

$m_{ud} = 0$ の線上で 1 次相転移と 2 次相転移の境目となっている点は三重臨界点という。三重臨界点近傍では、ud クォークの質量 m_{ud} と s クォークの質量 m_s の間に三重臨界点スケールリングというベキ則が存在する。その振舞いは $m_{ud} \sim (m_s^{\text{tri}} - m_s)^{5/2}$ に従う。また、図 4.4 の星印が物理点であり、その相転移の次数はクロスオーバーであることが分かっている。

表 2 では異なるフレーバー数の格子 QCD シミュレーションの結果を相転移の次数、 \mathcal{L}_{eff} の対称性、臨界温度についてまとめている。

4.2.8 軸性対称性の熱的回復

現実世界 ($T = 0$) では軸性対称性 $U(1)_A$ が量子異常で破れているため、カイラル相転移が起こる温度においても量子異常が回復することがないと信じられており、今まで議論した相構造が標準的な QCD 相転移の理解である。ところが、量子異常が熱的に回復するかもしれないシナリオが議論されている。ここでは、この議論に関して簡単に触れる。

³ T_c の Lattice データ [55]

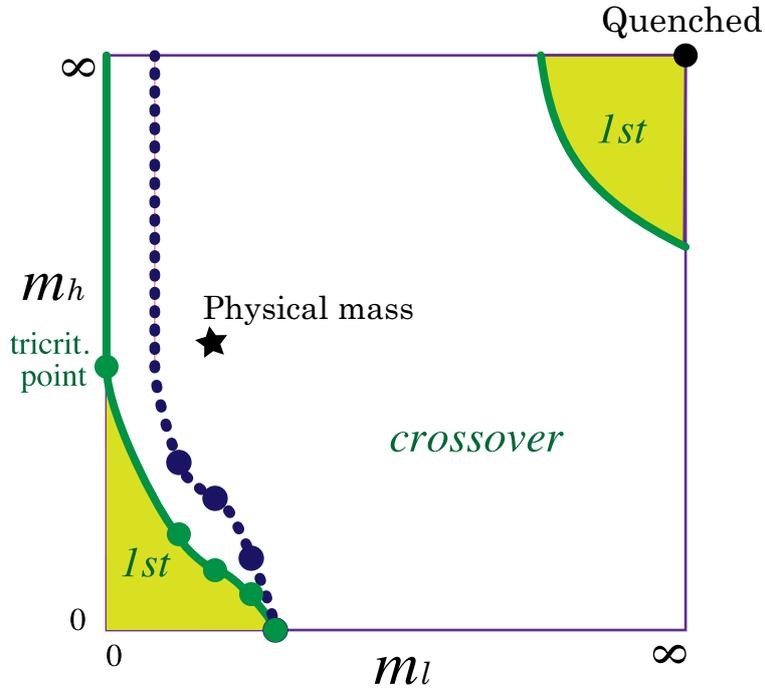


図 4.4: (m_{ud}, m_s) 平面における QCD 有限温度カイラル相転移の相図。横軸は縮退した ud クォーク質量 m_l で、縦軸は s クォーク質量 m_h 。 $m_l = \infty$ の上端は $N_f = 2$ QCD、 $m_l = \infty$ の右端は $N_f = 1$ QCD に相当する。右上の角ではクォークが全て脱結合した $SU(3)$ ゲージ理論となる。(緑線のシナリオ) $N_f = 2$ のカイラル極限が二次相転移である場合の標準的なシナリオ。 $N_f = 2$ のカイラル極限におけるユニバーサリティクラスは $O(4)$ 。右下の一次相転移領域とクロスオーバーの領域の間にある二次相転移線では、 Z_2 ユニバーサリティクラスに属する。“tricrit. point” は三重臨界点を表わし、一次相転移の領域の終点を表わす。(紺線のシナリオ) $N_f = 2$ のカイラル極限が一次相転移である場合に想定されるシナリオ。 m_h のどこかで特別な機構が生じなければ、右下の一次相転移領域と $N_f = 2$ カイラル極限の一次相転移の領域はつながると思われる。もしそうならば、三重臨界点は存在せず、二次相転移線は全て Z_2 ユニバーサリティクラスになる。

表 2: 異なるフレーバー数における QCD 相転移の標準的理解 ($N_c = 3$)

N_f	0	2	2 + 1	3
m_{ud}	∞	0	$\sim 5\text{MeV}$	0
m_s	∞	∞	$\sim 100\text{MeV}$	0
次数	1 次	2 次	1 次またはクロスオーバー	1 次
対称性	Z_3	$O(4)$	$\sim \text{SU}_L(3) \times \text{SU}_R(3)$	$\text{SU}_L(3) \times \text{SU}_R(3)$
$T_c(\text{Lattice})^3$	$\sim 270\text{MeV}$	$\sim 170\text{MeV}$		$\sim 150\text{MeV}$

量子異常項 $c(\det \Phi + \det \Phi^\dagger)$ は 't Hooft により、ソリトン解 (インスタントン) として導出することができ、その係数 c はインスタントン密度 n_i になると報告された。インスタントン密度 n_i は希薄ガス近似を用いれば求めることができ、温度に対して指数的に減少する ($c = n_i \simeq \exp(-\alpha T)$)。実際に相転移温度でどのくらい小さくなるかは、QCD のダイナミクスによって決まり未だに未解明である。

もし、相転移温度で係数 c が消えてしまえば、軸性対称性は”有効”的に回復する。このとき、 $(m_{ud}, m_s) = (0, \infty)$ (カイラル極限) における相転移の次数は二次から一次になる。なぜなら、式 (4.36) により、 $\sigma^2 + \pi^2$ と $\eta^2 + \delta^2$ の質量固有状態を分離させることができなくなり、 $\sigma^2 + \pi^2$ を秩序変数に持つ $O(4)$ シナリオを実現できなくなる。したがって、赤外固定点のない二つの四点結合を持つ、 Φ を秩序変数とするシナリオになるため、相転移の次数は二次ではなく一次になる。同時に $m_{ud} = 0$ の m_s 軸上にあった三重臨界点も消失し、ある有限質量 m_{ud}^c まで二次相転移が遠ざかる。この二次相転移は m_{ud} 、 m_s とともに小さな領域にあった Z_2 対称性の普遍性クラスとそのまま接続すると考えられている。

ただし、カイラル相転移の相転移温度において、希ガス近似が有効であるかは非自明であり、格子シミュレーションによる直接検証が必要である⁴。

4.2.9 格子計算による現状での理解

クロスオーバースケーリング

スケール現象によって二次相転移が起きる際に破れる対称性を理解することができる⁵。もし $N_f = 2$ QCD シミュレーションで $O(4)$ スケーリングが見ることができれば、図 4.4 の (緑線のシナリオ) になる。格子間隔誤差に関して改良されていないシミュレーションを CP-PACS コラボレーションが実行し、1997 年に $O(4)$ スケーリングの振舞を確認している [41]。その後、格子間隔誤差に関して改良されたクローバーウィルソンクォークを使ったシミュレーションにおいても、その振舞いが確認された [42]。

ウィルソン型クォークはスケール則は比較的容易に見つけることができたが、異なるダブル問題の回避方法を行っている KS フェルミオンは長年不明確な状況が続いた。KS フェルミオンのダブル問題回避法を行うと、1 つのクォークに対し、連続極限においてクォーク行列式の 4 乗が現れる。式 3.36 からわかるように、行列式の次数はクォークの数に相当するため、本物のクォークの他に 3 つのコピーが生まれてしまう。これを無理やり修正するために行列式の四重根を取る”forth-root trick”と

⁴章 3.4 で議論したように、格子におけるカイラル対称性の取り扱いには慎重に扱わなければならない。連続極限において正しくカイラル対称性を議論できることから、格子間隔誤差によるカイラル対称性の破れも頭の隅に置きながら数値計算の結果に向き合う必要がある。

⁵詳細は章 6。このレビューは [61] を参考にした。

いう手法がとられるが、このような相互作用は局所性を明白に破る。非局所な相互作用を考慮すべきであり、スケーリング則の議論は脆弱になる。“forth-root trick”は、連続極限を取った熱力学量の計算において問題が起きなかったため、KS フェルミオンとスケーリング則との相性が悪いことが分かっているが、連続極限におけるスケーリング則の議論をレビューする。

“forth-root trick”を行う KS フェルミオンには、有限格子サイズにおいて $O(4)$ スケーリングは成立しない [59]。有限格子サイズにおいて $O(2)$ ($\sim U(1)$) スケーリングになってしまうため、 $O(2)$ スケーリング則が成立するか判断し、さらに連続極限を取る必要がある。格子間隔誤差に関して改良されていない KS フェルミオンは $O(4)$ 、 $O(2)$ とともにスケーリング則の振舞が観測することができなかったが [58]-[60]、改良された KS フェルミオン⁶を用いた解析を行った結果、2010 年に $O(2)$ スケーリングが観測されたが [28]、スケーリング則が観測された領域は、物理点より遙かに小さな質量領域で漸く見つけることができた。

したがって、ウィルソンフェルミオン、KS フェルミオンの二つのフェルミオンの定義を用いた計算結果から、 $O(4)$ スケーリングが成立する (緑線のシナリオ) を否定する結論は出ていない⁷。

一方、(紺線のシナリオ) では Z_2 スケーリングが成立する。臨界指数が $O(4)$ と Z_2 とで酷似していることから (表.10)、長い間、 Z_2 スケーリングも成立するのではないかと話題に上がっていた。しかし、先行研究で Z_2 スケーリングを調査したものはない。もし Z_2 スケーリングが成立するのであれば、図.4.4 の (紺線のシナリオ) を否定することはできない。本研究では、二つのスケーリング則を用いて、カイラル極限における相転移の次数を調べていくつもりである。

二次相転移線の ud クォーク質量依存性

図.4.4 の左下にある一次相転移領域に注目し、一次相転移とクロスオーバーの境界質量、臨界質量 m_h^{crit} の ud クォーク質量 m_{ud} 依存性を議論する方法がある。この方法を扱う場合、まず、物理点よりも遙かに質量が軽い領域で一次相転移領域を探し出さないといけない。格子間隔誤差に関して改良されたクローバーウィルソンクォークを使ったシミュレーションを行った結果、 u クォーク、 d クォークと s クォークの質量が縮退した $N_f = 3$ QCD という設定で一次相転移領域が見つかった [62]。しかし、ウィルソンクォークでの二次相転移線の ud クォーク依存性は調べられていない。

一方、格子間隔誤差に関して改良されていない KS フェルミオンでは、 u クォーク、 d クォークの質量が縮退した $N_f = 2$ QCD のシミュレーションを行った結果が報告されている [63]。カイラル極限における相転移が一次だと仮定し、 ud クォーク質量依存性を見積もったとき、熱力学量の二階微分 (感受率) の計算を行うことで有限な ud クォーク質量 m_{ud} においてピークを観測したという報告が行われた。

したがって、KS フェルミオンの結果を信用すれば、(紺線のシナリオ)、つまり、カイラル極限における一次相転移という結果になってしまいそうである。この意味でも、ウィルソンフェルミオンを用いた解析で、二次相転移線の ud クォーク質量依存性を議論することは重要である。

⁶改良の仕方は複数考えられており、ここでは p4-improved KS フェルミオン

⁷しかし、KS フェルミオンの結果は、依然として $O(2)$ スケーリングの連続極限が $O(4)$ スケーリングに戻るかどうかは明らかでない。

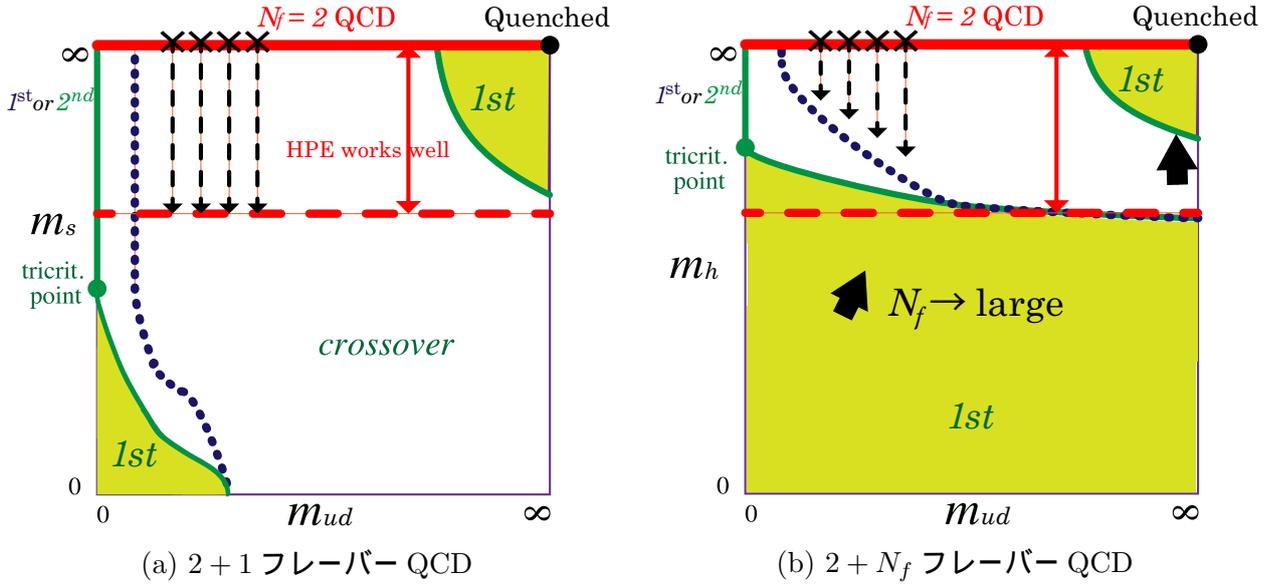


図 5.1: 多フレーバー手法の発想の基点 [56]

5 多フレーバー法

ここでは、軽クォークが2つ存在し、余分なクォークが N_f 個存在する QCD、 $(2+N_f)$ フレーバーの QCD のカイラル相転移を扱い、二次相転移線の ud クォーク質量依存性を議論する。余分なクォークの効果により一次相転移領域を拡張していき、質量が十分重い領域で二次相転移線の境界質量を見つけられることを示す。計算している設定は $(2+N_f)$ QCD という現実の理解とは異なる系の計算を扱うが、議論したい領域がカイラル極限 $[(m_{ud}, m_s) = (0, \infty)]$ であることから ud クォークでない方のクォークの質量を無限大に持っていけば、 $(2+1)$ QCD のカイラル極限の議論と等価になるはずである。

先行研究では、山田等が格子間隔誤差に関して改良された KS フェルミオンを用い、クォークの数を変化させることで一次相転移領域が拡張できることを調べられた [22]。私たちは、格子間隔誤差に関して改良されたウィルソンフェルミオンを用い、同様の性質があるか否かと二次相転移線の ud クォーク質量 m_{ud} 依存性を議論した [56]。結果、私たちの調べた質量領域では、カイラル極限での相転移の次数は二次の傾向があることが分かった。本章では、多フレーバー手法の詳細と先行研究の結果に関して記述する。

5.1 多フレーバー手法の考え方

多フレーバー手法の中心的な考えを以下に説明する。図 5.1(a) は $2+1$ フレーバー QCD のコロンビアプロット [27] と呼ばれ、QCD の相転移の性質をクォーク質量 m_{ud} 、 m_s の関数として表したものである。現在、物理点はクロスオーバー領域にあると考えられている [28, 29]。プロットによれば、2つの別れた1次相転移の領域があり、ひとつはクエンチ極限 ($m_{ud} = m_s = \infty$) の周りに、もう片方は3フレーバー QCD のある極限 ($m_{ud} = m_s = 0$) の周りにある。ここではクエンチ極限における相転移は議論しない。

我々の興味は、零質量の2フレーバー QCD ($m_{ud} = 0, m_s = \infty$) のカイラル相転移の次数にある。これを議論するため、2フレーバーの質量 m_{ud} を固定したときの一次相転移領域とクロスオーバー領域の境界値 m_s^c の値を計算する。 m_{ud} が小さくなるにつれ境界値が有限の値 ($m_s^c < \infty$) であれば、相転移

は2次相転移であるといえる⁸。このとき、極限 $m_{ud} \rightarrow 0$ において、有限な境界値 m_s^c は三重臨界点の位置をあらわす。一方、境界値がある有限な質量 m_{ud}^c にて発散すれば、相転移の次数は1次である⁹。境界線はクロスオーバーから1次相転移に変わる臨界値 m_s^c を繋いだものであり、線を極限 $m_{ud} \rightarrow 0$ へとたどることにより、カイラル極限における2フレーバー QCD の相転移の次数を判別することができる。

しかし、 $(2+1)$ フレーバー QCD の境界線が m_{ud} 、 m_s が小さい領域があり計算コストがかかりすぎることが知られている [28, 30, 31]¹⁰。図 5.1(b) に示したように軽いクォークに N_f 個の縮退した重いクォークが加わると状況が変わってくる。 $N_f \geq 3$ の場合、図 5.1(b) の左下の角は1次相転移の領域となる。 N_f が増加するにつれて、左下の小さな質量領域にあった一次相転移領域は徐々に広がっていくことが知られている。このおかげで、相境界の値 m_h^c を求めるシミュレーションが簡単になり¹¹、それにより臨界線が m_h の関数としてどのように表されるかを調べることができる。

多フレーバー手法では一次相転移領域が広がることによって境界値 m_h^c が大きくなり、数値計算しやすくなっただけが利益ではない。重いクォーク質量が十分大きくなると、多フレーバーの効果を質量分の1展開(ホッピングパラメータ展開)で調べることができる。ここで式(3.23)で導入したホッピングパラメータが大きい質量に対しては質量分の1に比例することを用いて、クォーク行列式をホッピングパラメータで展開することができる。もし重いクォークの臨界点における質量 m_h^c が $m_{ud} \rightarrow 0$ 極限において有限に留まっていれば、これは、カイラル極限 $(m_{ud}, m_s) = (0, \infty)$ における2フレーバー QCD の相転移の次数が二次であることが分かる。ここで重要なことは、 $(2+1)$ フレーバー QCD と $(2+N_f)$ フレーバー QCD とで我々が調べようとしている点 ($m_s \rightarrow \infty$ 又は $m_h \rightarrow \infty$) での理論が同じことである。なぜならば、どちらも2フレーバー成分 u, d の質量を0とし、そうではない成分を無限大にもっていく操作を行うからだ。つまり、我々の興味は重いクォークの臨界質量 m_h^c が $m_{ud} \rightarrow 0$ の極限において、有限かどうかという問題に帰着する。

現在、臨界値 m_s^c が非常に小さいため、1次相転移の領域の形状については定性的にしか分かっていない。しかし、軽いクォークと重いクォークの作用が同じならば、テイラー展開された再重み付け法 [32] によって $m_{ud} = m_h$ での臨界線の振舞いに対してより信頼度の高い情報が得られる。

$m_{ud} = m + \Delta m_{ud}$ と $m_h = m + \Delta m_h$ を仮定する。また、 Δm_{ud} と Δm_h についてクォーク行列の対数を展開する。ここで分配関数は $\Delta m_h = -2\Delta m_{ud}/N_f$ である限り変化せず、そのため (m_{ud}, m_h) 平面での $m_{ud} = m_h$ の直線まわりの傾き $-2/N_f$ の線に沿って物理は恒等的である。これは、 $(2+N_f)$ フレーバー QCD の境界線が $(2+1)$ フレーバーの場合よりも緩やかな傾きで $m_{ud} = m_h$ の直線を横切ることを意味する。

新たなフレーバーを追加することによって境界線がホッピングパラメータ展開が可能な領域に移動することが分かっている [22]。本研究では境界線の軽いクォーク質量依存性に注目する。後に説明するが、重いクォークの臨界質量は m_{ud} のカイラル極限において有限に留まる。これは零質量の2フレーバー QCD が2次相転移であることを示唆する。

5.1.1 有効ポテンシャルの計算方法

ハイブリッドモンテカルロ法により有限温度における2フレーバーの配位を生成する。次にホッピングパラメータ展開を用いて評価した再重み付け法を用いて、生成した配位に N_f フレーバーの重い

⁸ $m_{ud} = 0$ 付近の点線の実線の曲線

⁹ $m_{ud} = 0$ 付近の点線の曲線

¹⁰シミュレーションコストはクォーク行列式の計算が大部分占めており、この行列式の計算は質量が小さくなるにつれて増大する。

¹¹以降、ストレンジクォークの質量 m_s と区別するため、 N_f 個の縮退した重いクォークを m_h と表記する。

クォークの効果を加える。その後、一般化されたブラケット (以下で導入する) の確率分布関数を計算し、それをもとに $(2 + N_f)$ フレーバー QCD の有効ポテンシャルを求める。さらに有効ポテンシャルの 1 階微分と 2 階微分を調べることで相転移の次数を判別できる [22]。

ホッピングパラメータ展開を実行した後、重いクォークのホッピングパラメータ κ_h と縮退した質量をもつクォークの数 N_f は一つのパラメータ h に集約される (式 (5.13))。もし h がクロスオーバーの領域にあれば、擬臨界温度 T_{pc} において有効ポテンシャルは井戸型をしている。一方、 h が 1 次相転移の領域にある場合は、臨界温度 T_c において有効ポテンシャルは二重井戸型をしている。

我々は h を変化させながら重いクォークの効果徐徐に導入していき、クロスオーバーから 1 次相転移に変わる点である臨界点での値 h_c を決定する。この h_c の測定をいくつかの異なる軽いクォーク質量で行い、 h_c の軽いクォーク質量に対する依存性を調べる。以下で計算過程を詳しく説明する。

確率分布関数は参考文献 [33, 34] を参照する。 $(2 + N_f)$ フレーバー QCD に対する確率分布関数は次のように書ける。

$$w(X; \beta, \kappa_l, \kappa_h, N_f) = \int DU \delta(X - \hat{X}) [\det M(\kappa_h)]^{N_f} e^{-S_{\text{gauge}}(\beta) - S_{\text{light}}(\kappa_l)} \quad (5.1)$$

S_{gauge} 、 S_{light} はゲージ場の作用、軽いクォーク 2 フレーバーの作用を表す。 $\beta = 6/g^2$ は温度を調節するパラメータで g はゲージ結合定数である。 κ_l は軽いクォークのホッピングパラメータである。ここで以下に説明する解析方法は軽いクォークの作用が β を含まない限り、任意の軽いクォークに適用できることを提示しておく。 $M(\kappa_h)$ は重いクォークに対する格子ゲージ理論のディラック演算子であり、 κ_h は重いクォークの質量パラメータである。 \hat{X} は任意のパラメータであり、ここでは \hat{X} として一般化されたブラケットを採用する。一般化されたブラケットは次のように与える。

$$\hat{P} = c_0 \hat{W}_P + 2c_1 \hat{W}_R \quad (5.2)$$

ここで \hat{W}_P 、 \hat{W}_R は (1×1) ウィルソンループの空間平均、 (1×2) ウィルソンループの空間平均を表す。 \hat{P} を用いてゲージ作用を表すと次のようになる。

$$S_{\text{gauge}}(\beta) = -6N_{\text{site}}\beta\hat{P} \quad (5.3)$$

ここで $N_{\text{site}} = N_s \times N_t$ 4 次元の格子ゲージ理論の格子点数を表す。章.3.3.1 にも触れたように、 c_0 と c_1 は格子間隔誤差を改善するために必要な係数である。 c_0 と c_1 に成立する関係式は、上記のゲージ作用が連続極限において、量子色力学におけるゲージ作用に戻るように選ばれている。 $c_0 = 1$ かつ $c_1 = 0$ として時も連続極限において元のゲージ作用に戻るが、上記の処方を行うと有限格子間隔であっても、格子間隔誤差が抑えられるようになっている。

確率分布関数を用いて有効ポテンシャルを次のように書く。

$$V(X; \beta, \kappa_l, \kappa_h, N_f) = -\ln w(X; \beta, \kappa_l, \kappa_h, N_f) \quad (5.4)$$

確率分布関数は実際には直接求められないので、かわりに次に示すヒストグラムを計算する。

$$H(X; \beta, \kappa_l, \kappa_h, N_f) = \frac{w(X; \beta, \kappa_l, \kappa_h, N_f)}{Z(\beta, \kappa_l, \kappa_h, N_f)} \quad (5.5)$$

ここで Z は分配関数である。

有効ポテンシャルの形をみるために、ある程度広い P の範囲で計算しなければならない。しかし、1 点の β におけるシミュレーションから求められる有効ポテンシャルは限られた P の範囲のものしか得

られない。つまり、あるシミュレーション点で計算した有効ポテンシャルから別の点のものを求める必要がある。この求めたい点の β を β_{ref} とすると、有効ポテンシャルは次のように書ける。

$$\begin{aligned} & V(X; \beta_{\text{ref}}, \kappa_1, \kappa_h, N_f) + \ln Z(\beta^*, \kappa'_1, \kappa'_h, N'_f) \\ &= -H(X'; \beta', \kappa'_1, \kappa'_h, N'_f) - \ln \left(\frac{w(X''; \beta'', \kappa''_1, \kappa''_h, N''_f)}{w(X'; \beta', \kappa'_1, \kappa'_h, N'_f)} \right) - \ln \left(\frac{w(X; \beta_{\text{ref}}, \kappa_1, \kappa_h, N_f)}{w(X''; \beta'', \kappa''_1, \kappa''_h, N''_f)} \right) \\ & \quad - \ln \frac{Z(\beta', \kappa'_1, \kappa'_h, N'_f)}{Z(\beta^*, \kappa'_1, \kappa'_h, N'_f)} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$X', \beta', \beta^*, \kappa'_1, \kappa'_h, N'_f$ は任意の量である。ここでは後の計算のために次のように定義する。

$$X' = X'' = X, \quad \beta'' = \beta_{\text{ref}}, \quad \kappa'_1 = \kappa''_1 = \kappa_1, \quad \kappa'_h = \kappa''_h = 0, \quad N'_f = N''_f = 0 \quad (5.7)$$

β^* は β_{ref} の付近で選ぶ。

ここからは $\hat{X} = \hat{P}$ とする。有効ポテンシャルは次のようになる。

$$V(P; \beta_{\text{ref}}, \kappa_1, \kappa_h, N_f) + \ln Z(\beta^*, \kappa'_1, \kappa'_h, N'_f) = V_{\text{light}}(P; \beta_{\text{ref}}, \kappa_1) - \ln R(P; \beta_{\text{ref}}, \kappa_1, \kappa_h, N_f) \quad (5.8)$$

右辺第 1 項は次のように定義される。

$$V_{\text{light}}(P; \beta_{\text{ref}}, \kappa_1) = -\ln H(P; \beta, \kappa_1, 0, 0) - 6N_{\text{site}}(\beta_{\text{ref}} - \beta)P - \ln \frac{Z(\beta, \kappa_1, 0, 0)}{Z(\beta^*, \kappa_1, 0, 0)} \quad (5.9)$$

これは軽いクォーク 2 フレーバーの QCD についての有効ポテンシャルを表す。右辺第 2 項は次のように定義される。

$$R(P; \beta_{\text{ref}}, \kappa_1, \kappa_h, N_f) = \left\langle [\det M(\kappa_h)]^{N_f} \right\rangle_{P:\text{fixed}, (\beta_{\text{ref}}, \kappa_1)} \quad (5.10)$$

$$\langle \cdots \rangle_{P:\text{fixed}, (\beta_{\text{ref}}, \kappa_1)} \equiv \frac{\langle \delta(P - \hat{P}) \cdots \rangle_{(\beta_{\text{ref}}, \kappa_1)}}{\langle \delta(P - \hat{P}) \rangle_{(\beta_{\text{ref}}, \kappa_1)}} \quad (5.11)$$

$\langle \cdots \rangle_{P:\text{fixed}, (\beta_{\text{ref}}, \kappa_1)}$ は β, κ_1 において生成した 2 フレーバーの配位の集合平均である。ここで重要な点として、有効ポテンシャルを軽いクォーク (2 フレーバー) の部分と重いクォークの部分に分けたことにより、後者が β_{ref} に依らなくなったことを挙げておく。これは数値解析において非常に有用であることを後に説明する。

我々の目的においては、重いクォークに対して格子間隔誤差が改善されていないウィルソンフェルミオンで十分であるためこれを採用する。十分小さい κ_h において、式 (5.10) の行列式はホッピングパラメータ展開により次のように簡単化できる [35]。

$$\ln [\det M(\kappa_h)]^{N_f} \approx N_f \left(288 N_{\text{site}} \kappa_h^4 \hat{W}_P + 12 N_s^3 (2\kappa_h)^4 \hat{L} \right) = 6 N_s^3 h \hat{Y}, \quad \hat{Y} = (6\hat{W}_P + \hat{L}) \quad (5.12)$$

ここで κ_h の値を変化させたときに、 $\beta c_0 \rightarrow \beta c_0 + 48 N_f \kappa_h^4$ とすると、右辺の第 1 項はその変化に吸収することができる。この時 c_0 を変えてしまうと作用の改良係数が最適値からずれてしまうが、物理的には大きな影響はないと考えられる¹²。

¹²引用文献 [56] では次のように定義している。 \hat{P} の項はゲージ場の作用に吸収できるため、本研究 (5.11) 式の \hat{L} の部分を \hat{Y}, \hat{Z} を用いている。この変更による結果の変化はほぼなかった。

$$\begin{aligned} \ln [\det M(\kappa_h)]^{N_f} &\approx 6 N_s^3 h \hat{Y} = 9 N_{\text{site}} \frac{h}{c_0} \hat{P} + 6 N_s^3 h \hat{Z} \\ \hat{Y} &= 6\hat{W}_P + \hat{L}, \quad \hat{Z} = -\frac{12c_1}{c_0} \hat{W}_R + \hat{L} \end{aligned}$$

ここで導入した量は次のように定義する。

$$h = 2 N_f (2\kappa_h)^4 \quad (5.13)$$

ホッピングパラメータ展開のポリヤコフープにつく係数は N_t に依存し、 N_t を変えると表式が複雑になってしまうため、実際にシミュレーションを行った時間方向の格子数 $N_t = 4$ を以降では仮定する。したがって、式 (5.8) の $\ln R$ は以下の式ようになる。

$$\ln R(P; \kappa_l, h) \approx \ln \left\langle \exp \left(6 N_s^3 h \hat{Y} \right) \right\rangle_{P:\text{fixed}, (\beta, \kappa_l)} \quad (5.14)$$

数値計算を行うためにデルタ関数を近似する必要がある。デルタ関数は次のように近似する。

$$\delta(x) \approx 1/(\Delta\sqrt{\pi}) \exp[-(x/\Delta)^2] \quad (5.15)$$

Δ は極力零に近い適切な値を決める。ホッピングパラメータ展開をした後、重いクォークのフレーバー数 (N_f) とそれらの質量パラメータ (κ_h) は 1 つのパラメータ h にのみ残る (式 (5.13))。これにより、 R の引数にある N_f と κ_h は h で置き換えられる。よって、我々の目的は臨界点における h の値 h_c を探索することに帰着する。また、式 (5.9) の P に依存している項は P の 1 次式であるため、 β が違ってもそれぞれの P についての 2 階微分は等しい。

$\hat{X} = \hat{P}$ とすることで h_c を見つける作業は非常に簡単になる [22, 36]。我々は (擬) 臨界温度におけるポテンシャルの形に興味があり、それを得るには β_{ref} の値を (擬) 臨界値 β_c (又は β_{pc}) に調節する必要がある。この調節はポテンシャルの P に対する 2 階微分の曲率を見ることによって省くことができる。これは、この 2 階微分が P に依存しないからである。上述の通り R は β_{ref} に依存しない。 V_{light} は β_{ref} に依存するが、後に説明するように 2 階微分は依存していない。

本研究で適用した 2 フレーバーのクォーク質量では 2 フレーバー QCD の有限温度相転移は常にクロスオーバーである。任意の温度において、2 フレーバー QCD での \hat{P} の確率分布関数 (ヒストグラム) の形はピークのまわりでガウス分布に近似できる。

$$w(P; \beta, \kappa_l, 0, 0) \Big|_{P \sim \bar{P}(\beta, \kappa_l)} \propto \exp \left[-\frac{6 N_{\text{site}} (P - \bar{P}(\beta, \kappa_l))^2}{2 \chi_P(\beta, \kappa_l)} \right] \quad (5.16)$$

ここで $\bar{P}(\beta, \kappa_l) = \langle \hat{P} \rangle_{\beta, \kappa_l}$ は β, κ_l における一般化されたブラケットの平均値である。 χ_P は P の感受率であり、次のように与えられる。

$$\chi_P(\beta, \kappa_l) = 6 N_{\text{site}} \langle (\hat{P} - \bar{P}(\beta, \kappa_l))^2 \rangle_{\beta, \kappa_l} \quad (5.17)$$

これを式 (5.9) に代入することで次が得られる。

$$V_{\text{light}}(P; \beta_{\text{ref}}, \kappa_l) \Big|_{P \sim \bar{P}(\beta, \kappa_l)} = \frac{6 N_{\text{site}} (P - \bar{P}(\beta, \kappa_l))^2}{2 \chi_P(\beta, \kappa_l)} - 6(\beta_{\text{ref}} - \beta) N_{\text{site}} P. \quad (5.18)$$

1 階微分と 2 階微分は次のようになる。

$$\frac{dV_{\text{light}}(P; \beta_{\text{ref}}, \kappa_l)}{dP} \Big|_{P \sim \bar{P}(\beta, \kappa_l)} = \frac{6 N_{\text{site}} (P - \bar{P}(\beta, \kappa_l))}{\chi_P(\beta, \kappa_l)} - 6(\beta_{\text{ref}} - \beta) N_{\text{site}} \quad (5.19)$$

$$\frac{d^2 V_{\text{light}}(P; \kappa_l)}{dP^2} \Big|_{P \sim \bar{P}(\beta, \kappa_l)} = \frac{6 N_{\text{site}}}{\chi_P(\beta, \kappa_l)} \quad (5.20)$$

このように様々な値の β から得られた $\chi_P(\beta, \kappa_l)$ を集めることで2フレーバー部分を計算することができる。ここで重要なのは式 (5.20) が β に依存しないことである。つまり、系全体の有効ポテンシャル

$$\frac{d^2 V(P; \beta_{\text{ref}}, \kappa_l, h)}{dP^2} = \frac{d^2 V_{\text{light}}(P; \beta_{\text{ref}}, \kappa_l)}{dP^2} - \frac{d^2 \ln R(P; \kappa_l, h)}{dP^2} \quad (5.21)$$

は β に依存しない。

2フレーバー QCD のカイラル極限における h_c を決定する過程について説明する。 $h = 0$ において加えられる重いクォークの効果は明かにゼロであり、系は2フレーバー QCD に一致する。この時、相転移はクロスオーバーである。そのため、ポテンシャルの2階微分は常に正である。 h がゼロから大きくなるにつれて、ポテンシャルの曲率の最小値は小さくなっていき、ある点でゼロとなる。この点が h_c を与える。この過程において、曲率は β に依存しないため、 β を β_c や β_{pc} に調節する必要がない。 h_c の軽いクォーク質量依存性を調べることで、 h_c のカイラル極限を外挿する。

5.2 多フレーバー法: 結果

本研究では、格子 QCD を用いた数値シミュレーションを用いて解析を行った。シミュレーションの設定は以下の通りである。

- フェルミオン作用：格子間隔誤差に関して改良されたクローバーウィルソンクォーク
- ゲージ場の作用：くりこみ群で格子間隔誤差を改良された岩崎作用
- 格子サイズ： $16^3 \times 4$ と $12^3 \times 4$ (有限温度) $16^3 \times 32$ (ゼロ温度)
 - 格子サイズ： $12^3 \times 4$ のシミュレーションでは、2種類の軽いクォーク質量において、それぞれ 13 点から 20 点の β で 10000 個の配位を集めた。軽いクォークの質量パラメータは $\kappa_l = 0.145, 0.1500$ の2種類である。
 - 格子サイズ： $16^3 \times 4$ のシミュレーションでは、格子体積 $N_{\text{site}} = 16^3 \times 4$ の方では、4種類の軽いクォーク質量において、それぞれ 25 点から 32 点の β で 10000 個から 40000 個の配位を集める。軽いクォークの質量パラメータは $\kappa_l = 0.1450, 0.1475, 0.1500, 0.1505$ の4種類である。
 - 格子サイズ： $16^3 \times 32$ のシミュレーションでは、系の m_{PS}/m_V や PCAC 関係式を用いたクォーク質量 m^{pcac}_a の測定¹³を行った。結果は表 4 にまとめた。

図 5.2 は $16^3 \times 4$ 、図 5.3 は $12^3 \times 4$ の一般化された プラケットのヒストグラムである。それぞれの κ_l での擬臨界点 β_{pc} において、我々は格子体積 $16^3 \times 32$ のゼロ温度シミュレーションを行い、擬スカラーメソンとベクトルメソンの質量比 m_π/m_ρ を求めた。本研究に用いる系の質量は $0.46 < m_\pi/m_\rho < 0.66$ もしくは $0.019 < am_{\text{pcac}} < 0.054$ の範囲に収まっている。表 4 はその結果である。

5.2.1 有効ポテンシャルの微分

本研究 [56] では格子体積 $16^3 \times 4$ でシミュレーションを行った。また、格子サイズ依存性を見るため $12^3 \times 4$ でのシミュレーションも行った。

¹³章 6.3 にて詳述する。

我々は式 (5.21) の右辺の 2 項をそれぞれ別々に見ていく。先に右辺第 2 項に注目する。まず、近似した δ 関数 (式 (5.15)) を用いて $\ln R(P; \kappa_l, h)$ を計算した。我々は Δ の値として、0.0001, 0.00025 の 2 通りを選び、結果の安定性を見て、その差異を系統誤差として採用した。以下のプロットでは $\Delta = 0.0001$ の結果を示す。 $\ln R(P; \kappa_l, h)$ の P 依存性を図 5.4 に示す。このスケールでは統計誤差は非常に小さい。 $\ln R(P; \kappa_l, h)$ の湾曲は、 β_{pc} まわりでのポリヤコフープ (\hat{L}) の急激な増加に起因するはずだが、 $\ln R$ では変化が見えづらいため微分を行う。

次に $\ln R$ の傾きと曲率をフィット関数から求めた。ここでフィットと結果の選定について言及する。各データ点はそれぞれ別のシミュレーションで得られたものであり、他の点とは完全に独立である。データ点は P の多項式でフィットして次を求める。

$$\ln R^{\text{fit}}(P) = \sum_{i=0}^{N_{\text{poly}}} a_i P^i \quad (5.22)$$

この時、2 つの異なる次数のフィット関数を求め、また、2 種類の Δ の値を用いて計算する。ここでは 4 次多項式と 5 次多項式を用いた。以下では $N_{\text{poly}} = 5$ のフィットの結果を例として図に示す。

我々は目的の結果を得るために、ポテンシャルの 2 階微分を解析するが、理解を深めるために先に 1 階微分を議論する。式 (5.8) の 1 階微分を次のように得る。最初に、2 フレーバーの寄与を求めるために $\bar{P}(\beta, \kappa_l)$ と $\chi_P(\beta, \kappa_l)$ 値を数値シミュレーションにより計算し、式 (5.19) に代入する。この時、 N_f フレーバーのクォークの寄与、つまり、 $\ln R$ の 1 階微分は式 (5.22) の結果のフィットを用いて決定する。両者を足し合わせることによって、系全体の有効ポテンシャルの 1 階微分を得る。図 5.5 はポテンシャルの 1 階微分の振舞いを示している。ここで、それぞれの曲線は異なる h に対応している。 h が大きくなると、曲線の曲率が大きくなり S 字型になっていくことが分かる。丁度 S 字に変わるときの h が臨界値 h_c である。しかし、この方法では S 字の区別が分かりにくいいため、我々は次から 2 階微分を見ていく。図 5.6 は $\ln R$ の曲率を示したものである。

次に式 (5.21) の第 1 項について説明する。これは式 (5.20) と同様に各 β での平均値と \hat{P} の感受率を用いて簡単に求められる。得られた曲率を図 5.6 に示す。 $d^2 V_{\text{light}}/dP^2$ は κ_l に依らず常に正值であることが分かる。

図 5.6 から、 $d^2 \ln R/dP^2$ がピークを持つ点の P の値は、 $d^2 V_{\text{light}}/dP^2$ が最小値をとる点の値よりも非常に小さいことが分かる。このことから、多フレーバーの系は、2 フレーバーの場合よりも小さい P の値で、相転移または急激なクロスオーバーを起こすことが分かる。全ての κ_l に対して、 $d^2 \ln R/dP^2$ のピークが、 $h = 0.2$ で $d^2 V_{\text{light}}/dP^2$ の曲線に触れている。さらに h が大きくなると、ある P の範囲で $d^2 \ln R/dP^2$ が $d^2 V_{\text{light}}/dP^2$ より大きくなる。

系全体の有効ポテンシャルの曲率 (式 (5.21)) を図 5.7 に示す。 $h = 0.0$ から h の値を大きくしていき、軽いクォーク 2 フレーバーのカイラル極限に近付くと、曲率の最小値がゼロに向かって小さく

κ_l	c_{sw}	β_{pc}	am_{π}	am_{ρ}	m_{π}/m_{ρ}	am_{pcac}
0.1450	1.650	1.778	0.779(1)	1.172(2)	0.665(33)	0.0535(1)
0.1475	1.677	1.737	0.651(1)	1.130(5)	0.576(28)	0.0350(2)
0.1500	1.707	1.691	0.514(2)	1.099(10)	0.468(24)	0.0202(2)
0.1505	1.712	1.681	0.495(2)	1.082(13)	0.458(23)	0.0186(2)

表 3: 2 フレーバー QCD のシミュレーションパラメータ (κ_l, c_{sw}) と擬臨界点の $\beta(\beta_{\text{pc}})$ 。それぞれ一般化された プラケットの感受率のピークから決めている。擬スカラー中間子とベクトル中間子の質量比 m_{π}/m_{ρ} とその他の量は格子体積 $16^3 \times 32$ での各 κ_l における β_{pc} で定める。

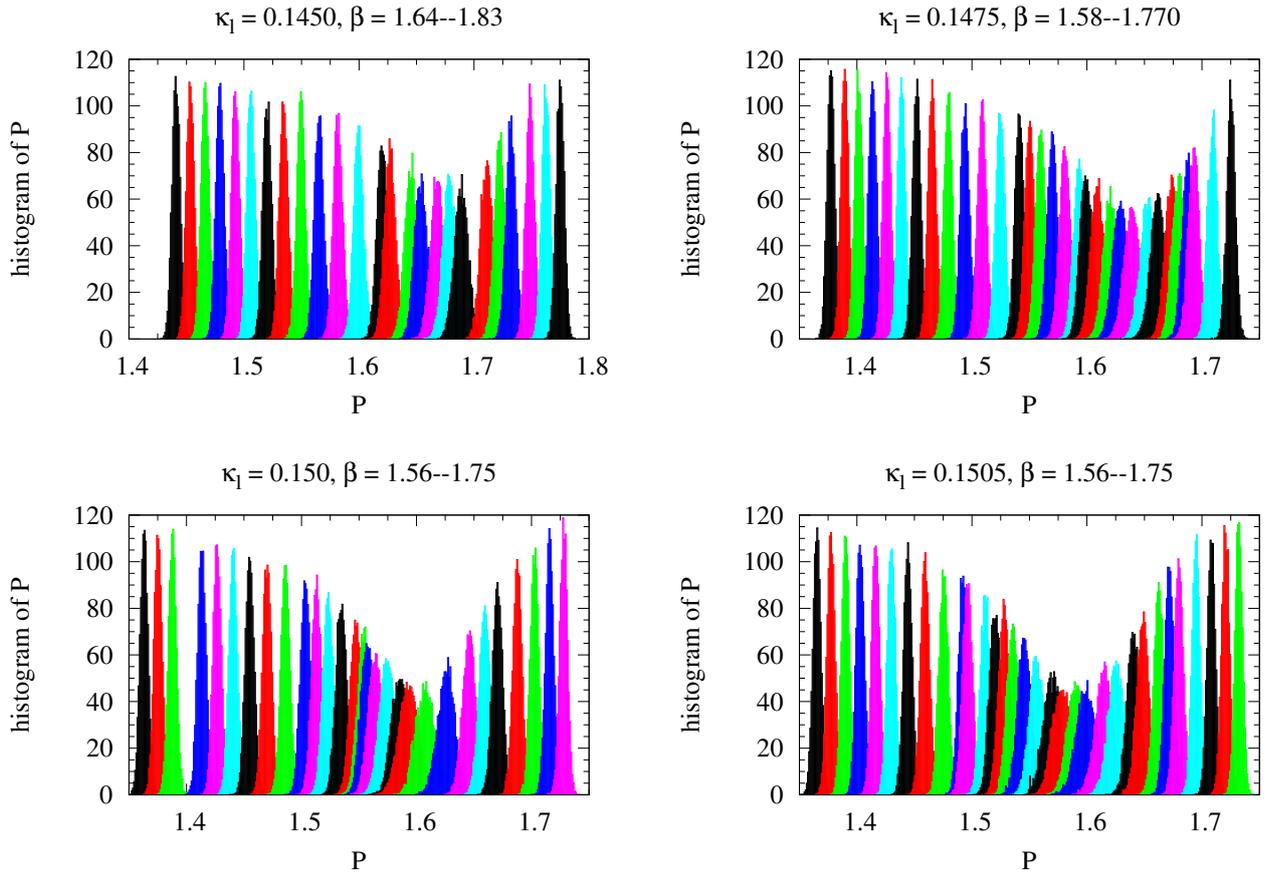


図 5.2: 格子サイズ $N_{\text{site}} = 16^3 \times 4$ の一般化されたプラケットのヒストグラム $\kappa_l = 0.1450$ (左上)、 $\kappa_l = 0.1475$ (右上)、 $\kappa_l = 0.1500$ (左下)、 $\kappa_l = 0.1505$ (右下)。[56]

なり臨界点でゼロに到達する。この点の h を h_c として測定する。本研究の観測では $\kappa_l = 0.1450$ と $\kappa_l = 0.1505$ との間で h_c の値に大きな違いは見られなかった。 h_c を決定する際、 h の値を 0.001 ずつ変えて計算する。

臨界点付近でのシミュレーションでは相関距離が無限大に発散する。しかしシミュレーションでは格子体積が有限であるため、結果が体積無限大の場合と異なってしまふ可能性がある。これを体積有限効果という。臨界点を決定するためにはそのような問題が常に現れるが、我々のシミュレーションは臨界点付近ではなく、質量がゼロでない 2 フレーバー QCD のシミュレーションを行い、そこに再重み付け法によって重いクォークの効果を加えていき有効ポテンシャルの変化を見る。そのため、この解析方法は有限体積効果の影響を受けにくいことが期待される。

我々はさらに、格子体積 $12^3 \times 4$ でシミュレーションを行い、零質量 2 フレーバー QCD の相転移の次数を調べ、また、格子体積 $16^3 \times 4$ の結果と比較することで我々の解析方法が有限体積効果の影響を受けているかを確認した。

h_c の軽いクォーク質量依存性を、 $(m_\pi/m_\rho)^2$ の関数として表したものと am_{pcac} の関数として表したものを図 5.8 に示す。各 κ_l のシミュレーションにおいて、 Δ が 0.0001 と 0.00025 の 2 通りの計算をし、さらにそれぞれについてフィット関数の次数についても 4 次の場合と 5 次の場合を求めたが、図 5.8 ではそれらの結果の平均値をプロットしている。また誤差は Δ とフィット関数の次数が異なる解析結果

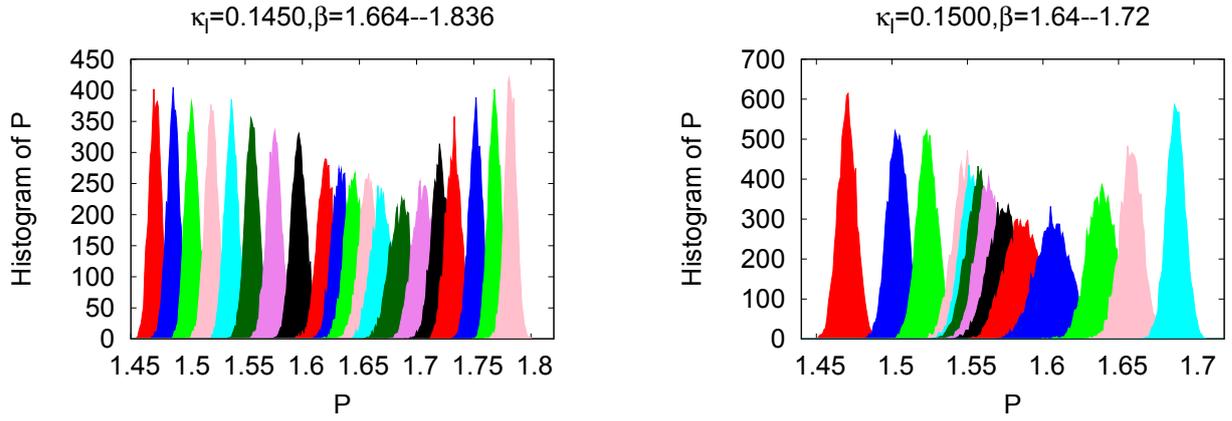


図 5.3: 格子サイズ $N_{\text{site}} = 12^3 \times 4$ の一般化されたブラケットのヒストグラム $\kappa_l = 0.1450$ (左)、 $\kappa_l = 0.1500$ (右)。

κ_l	c_{sw}	β_{pc}	am_π	am_ρ	m_π/m_ρ	am_{pcac}
0.1450	1.650	1.778	0.779(1)	1.172(2)	0.665(33)	0.0535(1)
0.1475	1.677	1.737	0.651(1)	1.130(5)	0.576(28)	0.0350(2)
0.1500	1.707	1.691	0.514(2)	1.099(10)	0.468(24)	0.0202(2)
0.1505	1.712	1.681	0.495(2)	1.082(13)	0.458(23)	0.0186(2)

表 4: 2 フレーバー QCD のシミュレーションパラメータ (κ_l , c_{sw}) と擬臨界点の $\beta(\beta_{\text{pc}})$ 。それぞれ一般化されたブラケットの感受率のピークから決めている。擬スカラー中間子とベクトル中間子の質量比 m_π/m_ρ とその他の量は格子体積 $16^3 \times 32$ での各 κ_l における β_{pc} で定める。

の系統誤差を示す。

図 5.8 の右上に、 $\kappa_l = 0$, $N_f = 50$ とした $2 + N_f$ フレーバーのシミュレーションから得られた h_c を示す。 $\kappa_l = 0$ での h_c は明らかに $0.1450 < \kappa_l < 0.1500$ のものより大きい。つまり h_c がカイラル極限に近づくにつれて徐々に減少していることが分かる。また、図 5.8 の h_c を外挿して得られる 2 フレーバー質量のカイラル極限はゼロでない定数である。これは零質量の 2 フレーバー QCD の相転移が 1 次相転移ではないことを示唆する。

さらに、 h_c の軽いクォーク質量依存性について、格子体積 $12^3 \times 4$ と格子体積 $16^3 \times 4$ の結果を比較したところ、その差は非常に小さかった。これは我々の解析方法が格子ゲージ理論の有限体積効果を受けにくいことを示す。

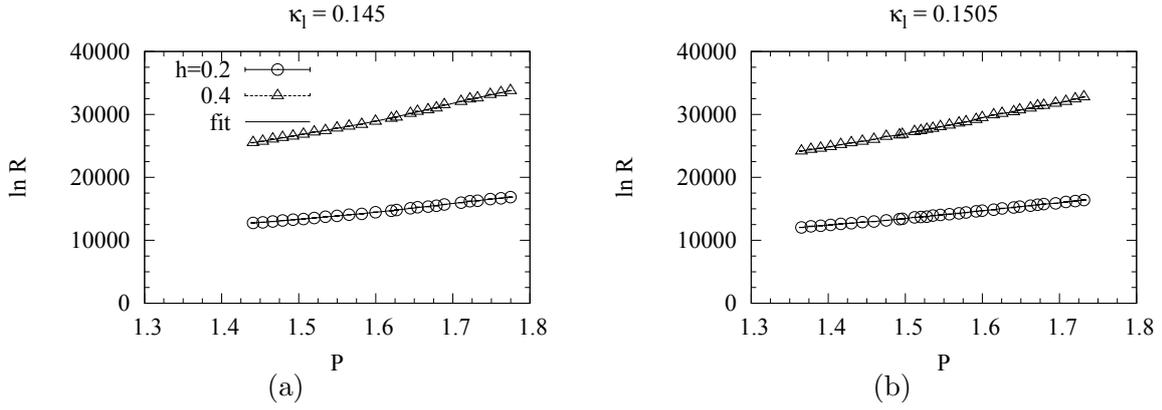


図 5.4: $\ln R$ の P 依存性。 $\kappa_l = 0.1450$ (a) と 0.1505 (b) の結果である。結果は $h = 0.2$ と $h = 0.4$ である [56]。

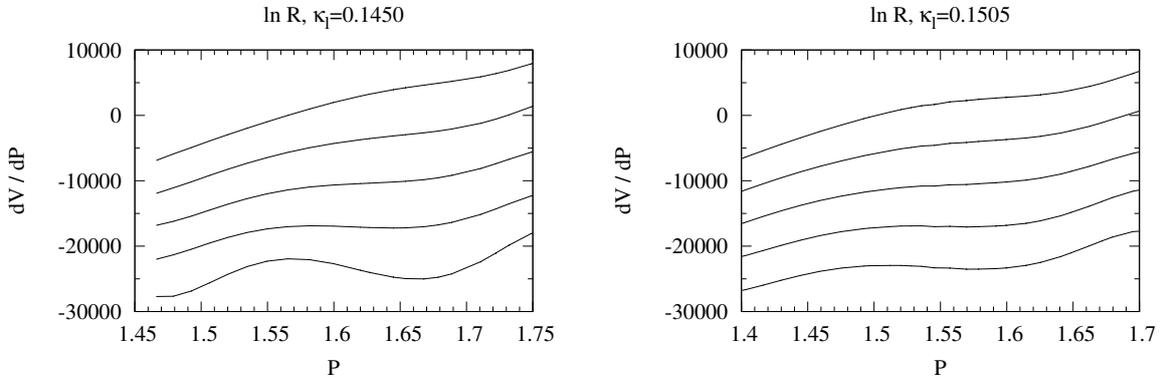


図 5.5: 系全体の有効ポテンシャルの 1 階微分。 h が大きくなるにつれて S 次型に変化する。下から $h = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ の図である [56]。

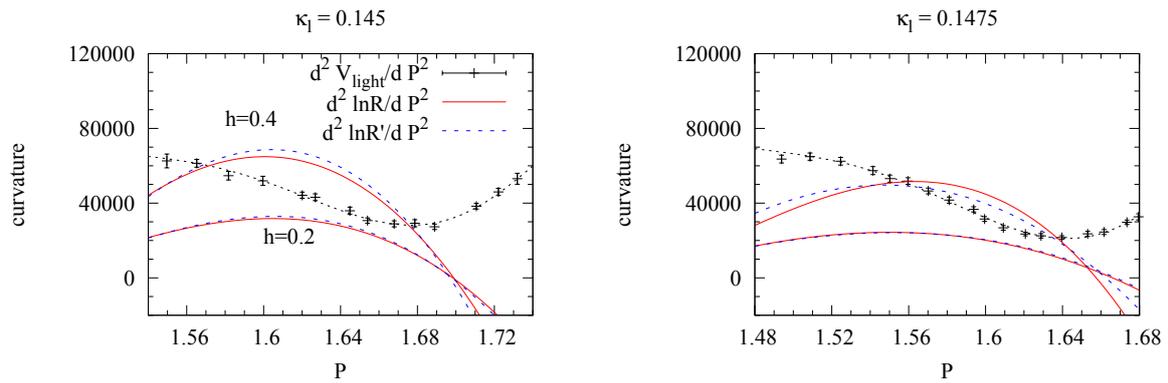


図 5.6: 軽いクォーク 2 フレーバーの有効ポテンシャルの 2 階微分と $\ln R$ の 2 階微分。 $h = 0.4$ のとき、式 (5.21) の第二項の寄与より第一項の寄与が上回る。それはある h にて一次相転移が起きていることを示唆する [56]。

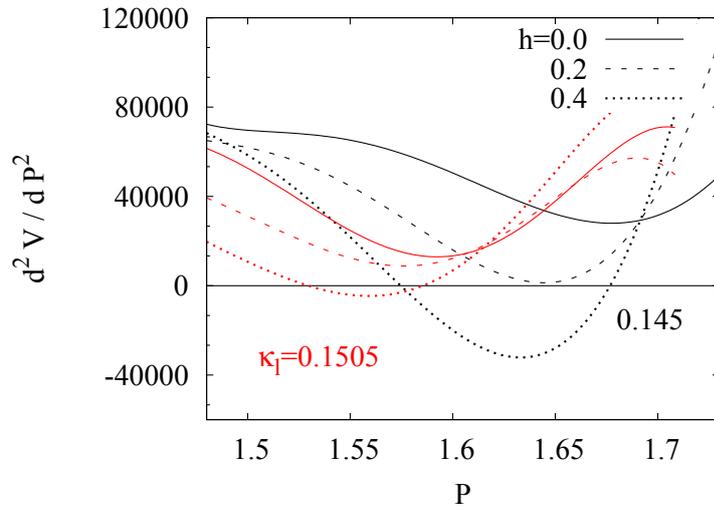


図 5.7: 系全体の有効ポテンシャルの 2 階微分。 $\kappa_l = 0.1450$ と $\kappa_l = 0.1505$ の時の二階微分の結果である。 $h = 0.0$ (実線)、 $h = 0.2$ (破線)、 $h = 0.4$ (点線) の結果が示されている [56]。

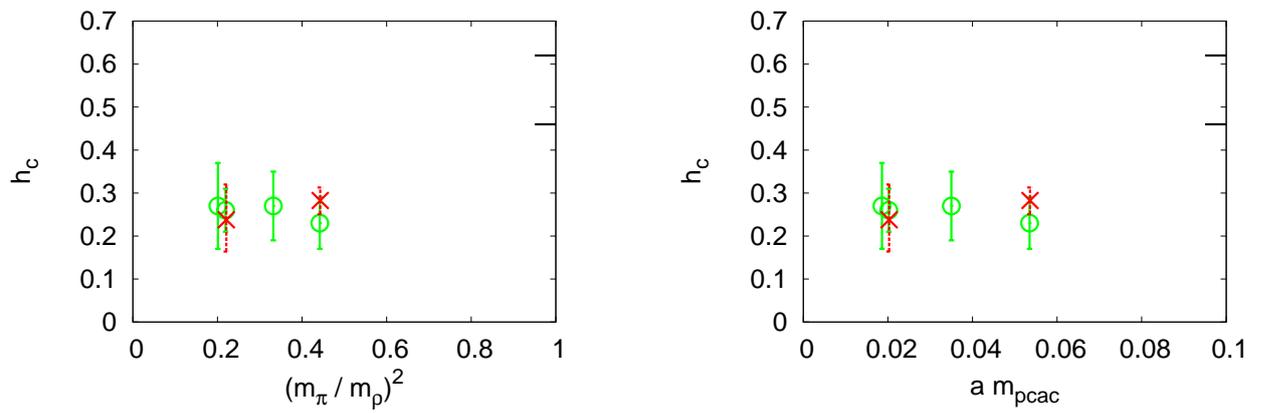


図 5.8: 重いクォーク質量パラメータの臨界値 h_c の軽いクォーク質量に対する依存性 [56]。

6 クロスオーバースケーリング

カイラル極限における相転移の次数が一次であれ、二次であれ、クロスオーバー相転移へと変化する質量領域の側には二次相転移の領域がある。二次相転移を起こしたとき、熱力学量の発散はベキで発散を起こし、そのベキは二次相転移を起こす際に自発的に破れる対称性によって決まる。このベキを臨界指数という。熱力学量が発散するとき、臨界指数の値に従い発散が行われることから、相転移点近傍における振舞が特徴づけられる。これを有効活用したのが、スケーリング則である。

カイラル極限における相転移の次数が二次である場合、破れる対称性は $O(4)$ であり、カイラル極限における相転移の次数が一次である場合、破れる対称性は Z_2 になると予想されている。それぞれの対称性に依じて臨界指数が決まっていることから、スケーリング則はカイラル相転移の次数を決めるツールの一つである。なぜなら、相転移点近傍における QCD のデータとスケーリング則を比較することで、背景にある対称性を読み解くことができるからである。

先行研究では $O(4)$ スケーリング則を仮定した計算を中心として行われてきた。結果としては、 $O(4)$ と無矛盾な結果が得られてきたことから、カイラル相転移の次数が二次である可能性が高い。一方で、 Z_2 スケーリングの計算は行われてこなかったため、今回はこのスケーリング則も調べていくつもりである。

また、このスケーリング則を仮定すれば、カイラル極限における相転移温度の密度依存性を簡単に調べることができるので、この解析も行った。今回は $N_f = 2$ QCD のシミュレーションを実行したため、物理的なクォーク質量とかけ離れた結果となるが、相転移温度の密度依存性は相対論的重イオン衝突実験をサポートする上で重要となる計算量である。

まずはスケーリング則に関して触れ、その後、スケーリング則の密度依存性を議論し、本研究 [57] の結果を紹介する。

6.1 スケーリング則の概要

物質の二次相転移の臨界点近傍における物理量のふるまいは、漸近的にベキ乗則に従うことが知られているが、その時の指数を臨界指数と呼ぶ。別々の臨界指数同士に働く関係のことをスケーリング則と呼ぶ。本節では、二次相転移の解析に有効であるスケーリング則を、比較的簡単な物理から理解していく。

まず、相転移について基本的な性質を理解する。相転移とは、ある系の物理的な特徴を持つ相が、温度、密度等の変化によって、異なる特徴を持つ別の相に変化することを指す。相転移が起こることによって、系の持つ対称性が破れる、あるいは系に対称性が回復することが知られている。相転移を特徴づけるには、秩序変数と呼ばれる系の秩序を表す変数を用いる。相転移の種類によって、その秩序変数は異なる。また、相転移点において秩序変数が不連続に変化するものを一次相転移、連続に変化するものを二次相転移と呼ぶ。先述した通り、二次相転移点近傍では物理量はベキ乗則に従ってふるまうことが知られており、その指数を臨界指数と呼ぶことを再度記載しておく。

磁気相転移を考える。磁気相転移の起こる系を考えた場合、その系は無数の電子のスピンによって記述されている。低温相では、スピン同士の相互作用から同じ向きにスピンを揃えた方がエネルギー的に安定になるため、磁気モーメントは同じ方向に揃い、結果として系は有限の磁化 M を持つ。高温相では熱運動によりスピンの向きはバラバラになり、系全体としての磁化は 0 となる。この相転移での秩序変数は、磁化 M である。

磁気相転移は二次相転移であり、つまり臨界点近傍で磁化 M はベキ乗則でふるまう。系の温度を T 、

臨界温度を T_c とすると、磁化 M は、

$$M \propto (T_c - T)^\beta \propto t^\beta \quad (6.1)$$

と表せる。ここで、 β は臨界指数である。 t は無次元化された温度で、

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (6.2)$$

であり、換算温度と呼ばれる。外部磁場 h を考える。外部磁場が変化すると、それに伴って系の磁化は変化する。臨界点近傍でのそれらの関係は、

$$M \propto h^{\frac{1}{\delta}} \quad (6.3)$$

となる。ここで、 $\frac{1}{\delta}$ も同様に臨界指数である。 M は t と h にそれぞれ β 、 δ 乗で比例するので、 t を s 倍、 h を $s^{-\beta\delta}$ 倍したとしても M の値は変わらない。このことから、 t と h は $t^\beta h^{-\frac{1}{\delta}}$ の組で出てくる必要がある。また、 $h = 0$ では磁化 M は t^β に比例することから考えると、 $M(t, h)$ として、

$$M \sim t^\beta \left(1 + A \frac{h^{1/\delta}}{t^\beta} \right) \quad (6.4)$$

という依存性が考えられる。一般的には、

$$M \simeq t^\beta f \left(\frac{h}{t^{\beta\delta}} \right) \quad (6.5)$$

と書くことが出来る。この式の f は $h/t^{\beta\delta}$ のみに依存する関数で、スケーリング関数と呼ばれる。

秩序変数をこのような形で書き表した時、その臨界指数の値、つまりは二次相転移点近傍での秩序変数の振る舞いは、系の詳細な構造によらず、系の空間次元と系の内部対称性にだけ依存しているという関係がある。つまり、その二つが一致していれば、ある相転移現象での臨界指数を用いて、別の相転移現象を解析することが可能であるということである。

本論文では、同じ対称性、次元を持つ系として、2フレーバー QCD のカイラル相転移と 3次元 O(4) スピン模型、または Z_2 スピン模型のスケーリング関数を比較する。格子 QCD の数値シミュレーションを用いて、この2つの系が同じユニバーサリティクラスにあるかどうかを検討するのが、この論文の目的の一つである。また、それらが同じユニバーサリティクラスにある場合は、この法則を用いて2フレーバー QCD のカイラル対称性の破れについて研究することが出来る。これの特徴の研究も本論文で目的としていることの一つである。

具体的には、 (T, μ_q) 平面においてのカイラル相転移の相転移線の曲率を、密度の低い領域で特定する。これは、QCD の理論や実験において、非常に重要な役割を持つ基礎情報である。

6.2 有限温度格子 QCD と 3次元 O(4) スピン模型、及び、 Z_2 スピン模型の対応

スケーリング則を用いた解析をするために、QCD でのカイラル相転移と 3次元スピン模型の変数を対応させる。3次元スピン模型の変数は、先述したスピン系でのスケーリング則の通り、磁化 M 、温度 T 、外部磁場 h の3つである。それぞれに、カイラル相転移での変数を対応させる。

磁化 M を考える。これは、スピン系での秩序変数であるため、同じくカイラル相転移での秩序変数 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ を対応させてやれば良い。よって、

$$M \sim \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (6.6)$$

外部磁場 h を考える。スピン系とディラック場のハミルトニアンをそれぞれ考えると、スピン系は

$$H = -2 \sum_{i < j} J_{ij} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - \mathbf{h} \cdot \sum_i \mathbf{s}_j \quad (6.7)$$

ディラック場のハミルトニアンは、

$$H = \int dx [-i\psi(x)\gamma \cdot \nabla\psi(x) + m_q a \bar{\psi}(x)\psi(x)] \quad (6.8)$$

と書くことが出来る。スピン系のハミルトニアンの2項目にある外部磁場の項は、明確に $O(4)$ 対称性を破る項である。同じくディラック場のハミルトニアンの2項目の質量項も、カイラル対称性を破る。そのため、これらの項の係数を対応させる。スピン系での質量項の係数は h 、ディラック場での質量項の係数は $m_q a$ である。ここで、 m_q はクォーク質量、 a は格子間隔であり、格子 QCD での値である。後の計算のため、 $m_q a$ を2倍して、

$$h \sim 2m_q a - 2m_q^{ct} a \quad (6.9)$$

と対応させる。ここで m_q^{ct} は臨界質量でありカイラル極限の相転移の次数が二次の時 $m_q^{ct} = 0$ となり、一次のとき m_q^{ct} は有限となる。

また温度 T を考える。松原形式において、温度は

$$T = \frac{1}{N_t a} \quad (6.10)$$

と定義できる。ここで、 N_t は時間方向格子数、 a は格子間隔である。本研究では、温度に関して以下の定義を用いる。 $T = \frac{1}{N_t a}$ が a に反比例する関数であることを用いて、シミュレーションのインプットパラメータ β で対応させる方法である。 β は a^{-1} の単調増加関数なので、カイラル極限の臨界点近傍を考えると、 $\beta \sim a^{-1}$ の直線で近似することが出来る。つまり、解析の範囲では $\beta \sim T$ とすることが出来るので、

$$t \sim \beta - \beta_{ct} \quad (6.11)$$

と対応させる。ここで、 β_{ct} はカイラル極限での β の臨界点を表している。先行研究 ([39],[40]) では、同じセットアップ、改良されたウィルソンクォークを用いたシミュレーションを用いて、QCD のデータ点が3次元 $O(4)$ スピン模型のスケール関数と無矛盾であることが示せた。そのため、カイラル相転移が二次相転移である結果が報告された。

本研究では、 $O(4)$ スケール関数に限らず Z_2 スケール関数を採用し、シミュレーションによって求めたデータ点とスケール関数を比較することで、カイラル極限における相構造の解明を行っていきたい。

6.3 有限密度への拡張

さらに、有限密度へと拡張した2フレーバー QCD を考えてみる。化学ポテンシャル μ_q が0近傍での臨界温度 $\beta_{ct}(\mu_q)$ と臨界質量 $m_q^{ct}(\mu_q)$ を考える。これを μ_q でテイラー展開した場合、対称性によって μ_q の奇数次の項が落ち、二次の項から現れる。相転移温度 $T(\mu_q)$ の曲率を c とすると、

$$t \sim \beta - \beta_{ct} + \frac{c}{2} \left(\frac{\mu_q}{T}\right)^2 + \dots, \quad c \equiv -\frac{d^2 \beta_{ct}}{d(\mu_q/T)^2} \quad (6.12)$$

$$h \sim 2m_q a - 2m_q^{ct}(0)a + \frac{c_h}{2} \left(\frac{\mu_q}{T}\right)^2 + \dots, \quad c_h \equiv -\frac{d^2 2m_q^{ct} a}{d(\mu_q/T)^2} \quad (6.13)$$

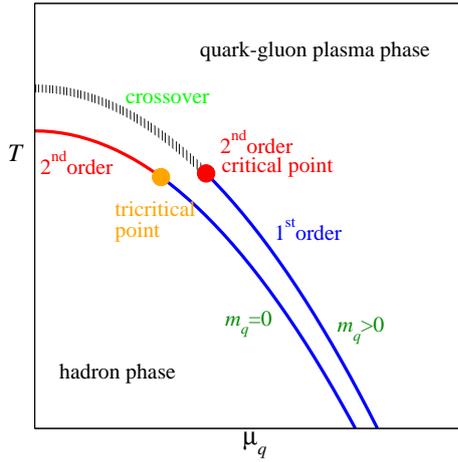


図 6.1: カイラル相転移の次数が二次となる $T-\mu_q$ 平面での標準的な相図 [40]

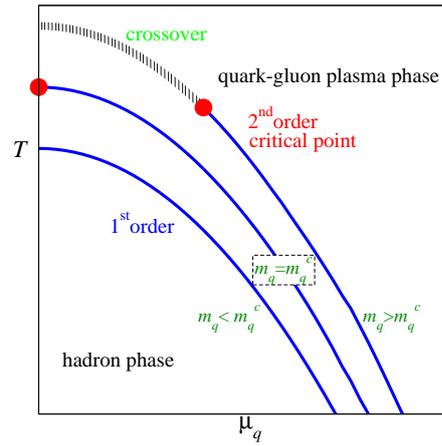


図 6.2: カイラル相転移の次数が一次となる $T-\mu_q$ 平面での相図

と表すことが出来る。ただし、 μ_q の 4 次の項は無視できるものとした。

一般に、 t と h には μ_q 依存性が現れるが、シナリオによって変化する。カイラル相転移が二次となる $O(4)$ シナリオでは、 $T-\mu_q$ 平面での相図が図.6.1 のようになり、一次となる Z_2 シナリオでは、 $T-\mu_q$ 平面での相図が図.6.2 となる。

そもそも、 $h \sim 2m_q a - 2m_q^{ct} a$ は質量項の係数として対応させたものだった。質量項は明確にカイラル対称性を壊す項であるが、化学ポテンシャルはカイラル対称性を壊さない。よって二次相転移がカイラル極限において起きるとき、カイラル対称性を破る方向の変数 h には、破らない方向の変数 μ_q の依存性が現れず、 $h \sim 2m_q a - 2m_q^{ct} a$ のままとなる。一方、カイラル相転移が一次相転移となるシナリオでは、有限な臨界質量において Z_2 対称性が破れる二次相転移となるので、スケーリング変数はカイラル対称性で区別することができない。したがって、外場 h に密度依存性が現れてもおかしくない。

本研究では格子 QCD の数値シミュレーションを用いた解析を行ったが、そのフェルミオン作用にクローバー項によって改良されたウィルソンクォーク作用を使用した。そのウィルソンクォークの問題点として、質量が零でもカイラル対称性を持たないというものがある¹⁴。なぜならダブラーを解決するために導入したウィルソン項がカイラル対称性を明白に破るからである (式.3.19)。この問題を回避するために、文献 [41]、[42] に従って、クォーク質量 $m_q a$ とカイラル凝縮 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ をウォード・高橋恒等式を用いて定義する [46]。ウォード・高橋恒等式は、

$$\langle \partial_\mu A_\mu(x) P(x') \rangle - 2m_q a \langle P(x) P(x') \rangle = \delta(x - x') \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (6.14)$$

で表される。これを満たす $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ と $m_q a$ は、

$$2m_q a = m_{PS} \langle \bar{A}_4(t) \bar{P}(0) \rangle / \langle \bar{P}(t) \bar{P}(0) \rangle \quad (6.15)$$

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{2m_q a (2K)^2}{N_s^3 N_t} \sum_{x, x'} \langle \text{tr}(D^{-1} \gamma_5 D^{-1} \gamma_5) \rangle \quad (6.16)$$

となる。ここで、 P は擬スカラーメソン演算子、 m_{PS} は擬スカラーメソン質量、 A_μ はベクトルメソン演算子、 $\bar{\cdot}$ は空間平均、 D はクォーク行列を表している。

¹⁴章.3.4 参照

μ_q が小さい所でカイラル凝縮を計算するには、再重み付け法を用いる。 $N_f = 2$ の時、

$$\begin{aligned} (2K)^2 \langle \text{tr}(D^{-1}\gamma_5 D^{-1}\gamma_5) \rangle_{\beta, \mu_q} &= (2K)^2 \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \text{tr}(D^{-1}\gamma_5 D^{-1}\gamma_5) (\det D)^{N_f} e^{-S_g} \\ &= \frac{(2K)^2 \langle \text{tr}(D^{-1}\gamma_5 D^{-1}\gamma_5)(\mu_q) e^{N_f(\ln \det D(\mu_q) - \ln \det D(0))} \rangle_{\beta, 0}}{\langle e^{N_f(\ln \det D(\mu_q) - \ln \det D(0))} \rangle_{\beta, 0}} \end{aligned} \quad (6.17)$$

となる。 $\ln \det D(\mu_q)$ の計算には多大なコストがかかる。そのため、 $\ln \det D(\mu_q)$ と $\text{tr}(D^{-1}\gamma_5 D^{-1}\gamma_5)$ をテイラー展開を用いて $O(\mu_q^2)$ まで求める。

$$N_f(\ln \det D(\mu_q) - \ln \det D(0)) = \mu_q a \mathcal{L}_1 + \frac{(\mu_q a)^2}{2} \mathcal{L}_2 + O(\mu_q^3) \quad (6.18)$$

$$(2K)^2 \text{tr}(D^{-1}\gamma_5 D^{-1}\gamma_5)(\mu_q) = (2K)^2 \text{tr}(D^{-1}\gamma_5 D^{-1}\gamma_5)(0) + \mu_q a \mathcal{T}_1 + \frac{(\mu_q a)^2}{2} \mathcal{T}_2 + O(\mu_q^3) \quad (6.19)$$

ここで、 \mathcal{L}_n と \mathcal{T}_n は、

$$\mathcal{L}_n = N_f \frac{\partial^n \ln \det D}{\partial (\mu_q a)^n}, \quad \mathcal{T}_n = (2K)^2 \frac{\partial^n \text{tr}(D^{-1}\gamma_5 D^{-1}\gamma_5)}{\partial (\mu_q a)^n} \quad (6.20)$$

となる。これらの微分演算子は、ランダムノイズ法によって求められる。

求められたカイラル凝縮を用いて、 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle^{WI}/h^{1/\delta}$ と $t/h^{1/\beta\delta}$ を計算する。それを $O(4)$ スピン系でのスケール関数と比較する。これらが臨界点付近で十分に一致していれば、2フレーバー QCD のカイラル相転移と $O(4)$ スピン模型が同じユニバーサルリティクラスにあると言える。これらの計算に当たって、臨界指数 β, γ, δ は $O(4)$ スピン系のものを使い、臨界温度 T_{ct} または β_{ct} は、別々の m_{PS}/m_V でのデータ点が1つの線に乗り、 χ^2/dof が最小になるように調節した。スケール関数は付録 A に記載した。

6.4 カイラル凝縮の二階微分

カイラル凝縮 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ について、密度 μ_q を無次元化した μ_q/T で二階微分したものを考える。

$$\frac{d^2 M}{d(\mu_q/T)^2} \Big|_{\mu_q=0} = c \frac{dM}{dt} \Big|_{(\mu_q, h)=0} + c_h \frac{dM}{dh} \Big|_{(\mu_q, t)=0} \quad (6.21)$$

$$\frac{dM}{dt} \Big|_{(\mu_q, h)=0} = h^{1/\delta-1/\beta\delta} \frac{df(z)}{dz} \quad z = t/h^{1/\beta\delta} \quad (6.22)$$

$$\frac{dM}{dh} \Big|_{(\mu_q, t)=0} = \frac{h^{1/\delta-1}}{\delta} \left[f(z) - \frac{z}{\beta} \frac{df(z)}{dz} \right] \quad (6.23)$$

QCD のカイラル相転移がこのスケール関数に従っているかを確認する。 c は $(\beta, \mu_q/T)$ 平面での相転移線の曲率、 c_h は $(h, \mu_q/T)$ 平面の曲率なので、この値をスケール関数解析を用いて求める。ただし、カイラル極限における相転移が二次相転移となるシナリオでは c_h が定義により零となるため、曲率 c は、

$$c = \frac{d^2 M/d(\mu_q/T)^2}{h^{1/\delta-1/\beta\delta} df(z)/dz} \quad (6.24)$$

となる。これらを調べるために、カイラル凝縮の二階微分を調べる。そのために、2つの方法を用いる。

6.4.1 再重み付け法

有限の μ_q での秩序変数は、 μ_q が小さければ

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle(\mu_q) = x + y(\mu_q/T)^2 \quad (6.25)$$

とフィットすることが出来る。 x と y はそれぞれフィットパラメータである。一階微分は $\mu_q \rightarrow -\mu_q$ の対称性から、ゼロになる。 x と y はそれぞれ、

$$x = \langle \bar{\psi}\psi \rangle(0), \quad y = \frac{1}{2} \frac{d^2 \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{d(\mu_q/T)^2}(0) \quad (6.26)$$

となる。これを用いて、二階微分を導出する。

6.4.2 テイラー展開法

もう一つの方法は、ランダムノイズ法で得られる演算子から計算する方法である。式 6.20 の \mathcal{L} と \mathcal{T} を用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \langle \mathcal{L}_1 \rangle, \quad \mathcal{A}_2 = \langle \mathcal{L}_2 \rangle + \langle \mathcal{L}_1^2 \rangle, \quad \mathcal{F}_0 = \langle \mathcal{T}_0 \rangle, \\ \mathcal{F}_1 &= \langle \mathcal{T}_1 \rangle + \langle \mathcal{T}_0 \mathcal{L}_1 \rangle, \quad \mathcal{F}_2 = \langle \mathcal{T}_2 \rangle + 2\langle \mathcal{T}_1 \mathcal{L}_1 \rangle + \langle \mathcal{T}_0 \mathcal{L}_2 \rangle + \langle \mathcal{T}_0 \mathcal{L}_1^2 \rangle \end{aligned} \quad (6.27)$$

というものを定義する。これを使うと、カイラル凝縮とその微分は、

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \Big|_{\mu_q=0} &= \frac{2m_q a}{N_s^3 N_t} \mathcal{F}_0, \quad \frac{\partial \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{\partial(\mu_q/T)} \Big|_{\mu_q=0} = \frac{2m_q a}{N_s^3 N_t^2} (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0 \mathcal{A}_1) = 0 \\ \frac{\partial^2 \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{\partial(\mu_q/T)^2} \Big|_{\mu_q=0} &= \frac{2m_q a}{N_s^3 N_t^3} (\mathcal{F}_2 - 2\mathcal{F}_1 \mathcal{A}_1 - \mathcal{F}_0 \mathcal{A}_2 + 2\mathcal{F}_0 \mathcal{A}_1^2) = \frac{2m_q a}{N_s^3 N_t^3} (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_0 \mathcal{A}_2) \end{aligned} \quad (6.28)$$

と表すことが出来る。右辺の \mathcal{A}_n と \mathcal{F}_n は \mathcal{L}_n と \mathcal{T}_n で表すことが出来、これらは先述した通りランダムノイズ法で求めることが出来るため、カイラル凝縮の二階微分を計算することが出来る。

6.5 スケーリング則：結果

本研究では、格子 QCD を用いた数値シミュレーションを用いて解析を行った。シミュレーションの設定は以下の通りである。

- フェルミオン作用：格子間隔誤差に関して改良されたクローバーウィルソンクォーク
- ゲージ場の作用：くりこみ群で格子間隔誤差を改良された岩崎作用
- 格子サイズ： $16^3 \times 4$ (有限温度)、 $16^3 \times 16$ 、 $16^3 \times 24$ (ゼロ温度)
- ランダムノイズ法を用いる。ノイズ数は各 β, κ 毎に 150 ノイズ
- 擬スカラーメソンとベクトルメソンの質量の比： $m_{PS}/m_V \simeq 0.65, 0.70, 0.80$
- シミュレーションパラメータは以下の通り。

ここで、 $\beta = 6/g^2$ であり、これは温度の調節パラメータである。また、 κ はクォーク質量の調節パラメータ。温度を $t \sim \beta - \beta_{ct}$ と対応させたもので結果を導出した。

表 5: 零温度におけるシミュレーション変数

β	K	Conf.	m_{PS}/m_V	β	K	Conf.	m_{PS}/m_V	β	K	Conf.	m_{PS}/m_V
1.50	0.150290	2000	0.678(2)	1.50	0.147000	500	0.706(8)	1.50	0.143480	2000	0.820(1)
1.55	0.150251	500	0.663(6)	1.55	0.147100	500	0.720(4)	1.55	0.143654	500	0.807(1)
1.60	0.150030	2000	0.663(2)	1.60	0.147200	500	0.694(5)	1.60	0.143749	2000	0.809(1)
1.65	0.149328	500	0.648(5)	1.65	0.146500	500	0.690(6)	1.65	0.143416	500	0.799(2)
1.70	0.148086	2000	0.659(2)	1.70	0.145750	500	0.697(5)	1.70	0.142871	2000	0.804(1)
1.75	0.146763	2000	0.662(3)	1.75	0.144500	500	0.692(7)	1.75	0.142105	500	0.796(2)
1.80	0.145127	2000	0.657(5)	1.80	0.143300	500	0.702(6)	1.80	0.141139	2000	0.800(2)
1.85	0.143502	2000	0.652(4)					1.85	0.140070	2000	0.794(2)
1.90	0.141849	2000	0.648(4)					1.90	0.138817	2000	0.796(2)
1.95	0.140472	2000	0.657(4)					1.95	0.137716	2000	0.802(2)
2.00	0.139410	2000	0.645(4)					2.00	0.136926	2000	0.801(2)

表 6: 有限温度におけるシミュレーション変数

β	K	Traj.	Noise	$\langle\psi\psi\rangle$	β	K	Traj.	Noise	$\langle\psi\psi\rangle$	β	K	Traj.	Noise	$\langle\psi\psi\rangle$
1.50	0.150290	5000	150	1.6541(34)	1.50	0.148750	5000	150	1.6557(229)	1.50	0.143480	5000	150	1.8601(19)
1.55	0.150251	5000	150	1.4033(44)	1.55	0.148500	5000	150	1.5781(54)	1.55	0.143654	5000	150	1.7057(25)
1.60	0.150030	5000	150	1.3172(21)	1.60	0.148800	5000	150	1.4073(37)	1.60	0.143749	5000	150	1.6354(12)
1.65	0.149328	5000	150	1.1344(50)	1.65	0.147900	5000	150	1.2322(25)	1.65	0.143416	5000	150	1.4712(18)
1.70	0.148086	5000	150	0.9608(26)	1.70	0.147100	5000	150	0.9918(22)	1.70	0.142871	5000	150	1.3677(17)
1.75	0.146763	5000	150	0.7440(23)	1.75	0.145800	5000	150	0.8659(21)	1.75	0.142105	5000	150	1.1875(26)
1.80	0.145127	5000	150	0.5111(17)	1.80	0.144100	5000	150	0.6180(24)	1.80	0.141139	5000	150	1.0392(15)
1.85	0.143502	5000	150	0.3631(14)						1.85	0.140070	5000	150	0.8441(14)
1.90	0.141849	5000	150	0.2930(12)						1.90	0.138817	5000	150	0.6648(12)
1.95	0.140472	5000	150	0.2350(8)						1.95	0.137716	5000	150	0.5459(7)
2.00	0.139410	5000	150	0.1897(11)						2.00	0.136926	5000	150	0.4504(7)

6.5.1 スケーリングプロット

各 m_{PS}/m_V でのデータ点が一つの線に乗り、 χ^2/dof が最小になるようにデータ点を削りながら β_{ct} を調整すると、 $O(4)$ スケーリングに対し $\beta_{ct} = 1.532(32)$ 、 Z_2 スケーリングに対し $\beta_{ct} = 1.560(15)$ となった。最終結果として使用したデータ点は、いずれも、 $m_{PS}/m_V = 0.80$ のデータ系列を除き、 $\beta \leq 1.75$ のデータ点を採用した。なぜなら、 m_{PS}/m_V が大きくなればなるほど系の質量は大きくなってしまいうために、スケーリング則が悪くなる。温度 $t(\sim \beta)$ が大きくなって同様である。したがって、温度と質量に関してデータ点を限ることで、スケーリング則が良く成立するプロットを記述することができる。以降の解析では、この限られたフィット範囲において解析を行うが、図としては全データを描写していく。

図.6.3 が零密度の時の $O(4)$ スケーリングプロットであり、図.6.4 が零密度の時の Z_2 スケーリングプロットである。縦軸は $\langle\bar{\psi}\psi\rangle^{WI}/h^{\frac{1}{\delta}}$ 、横軸は $t/h^{\frac{1}{\beta\delta}}$ である。黒線が限られたデータ点でフィットを行った $O(4)$ スピン系、もしくは、 Z_2 スピン系のスケーリング関数である。図を見ると、解析結果と $O(4)$ スピン系、 Z_2 スピン系のスケーリング関数はともに十分一致しているため、 $O(4)$ スピン系、 Z_2 スピン系はともに 2 フレーバー QCD でのカイラル相転移のスケーリング関数と一致していると見られる。2 フレーバー QCD が二次相転移を起こした時、破れた対称性が $O(4)$ であり、一次相転移を起こした時、有限な臨界質量 m_q^{ct} において破れる対称性が Z_2 であるから、スケーリング則による解析では、カイラル極限における相転移の次数は二次であっても、一次であっても矛盾しない。ただし、有限な臨界質量 m_q^{ct} は限りなく小さな値であり、 $2m_q^{ct} = 0.008(3)$ であった。

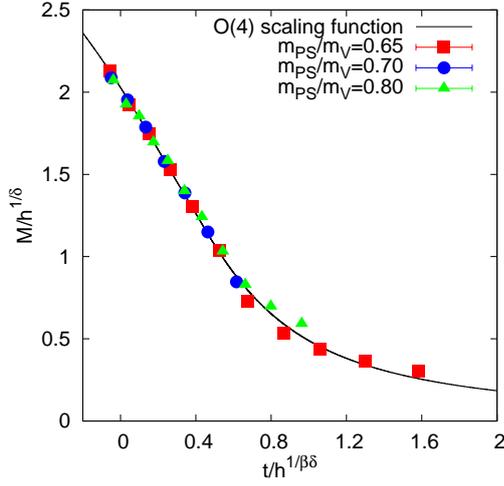


図 6.3: O(4) スケーリングプロット [57]

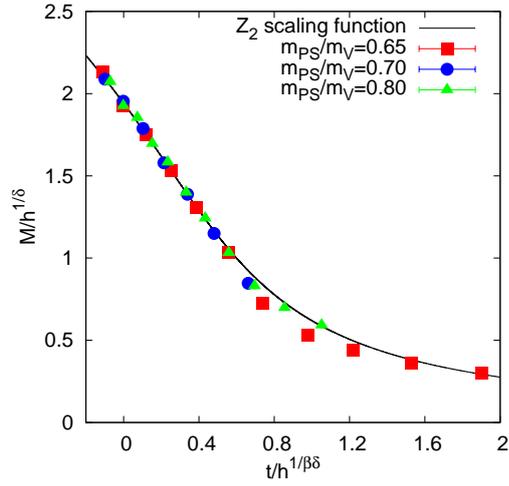


図 6.4: Z_2 スケーリングプロット

6.5.2 カイラル凝縮の二階微分と曲率

O(4) スケーリング則を仮定し、カイラル凝縮の微分を求めた結果が図.6.5 であり、 Z_2 スケーリング則を仮定した結果が図.6.7 である。それぞれ、再重み付け法によって計算した $\frac{d^2 M/d(\mu_q/T)^2}{h^{1/\delta-1/\beta\delta}}$ は赤点、テイラー展開法によって計算した $\frac{d^2 M/d(\mu_q/T)^2}{h^{1/\delta-1/\beta\delta}}$ は青点である。縦軸が $\frac{d^2 M/d(\mu_q/T)^2}{h^{1/\delta-1/\beta\delta}}$ で、横軸が $t/h^{1/\beta\delta}$ である。また、再重み付け法では線形フィットを行うことで微係数を求めたが、 μ のフィット範囲は同様に $0 \leq \mu_q/T \lesssim 1$ である。両方の方法ともに t の小さいところでは誤差が大きく、評価が難しい。

ここまでで、二つのスケーリング則と二つの方法によってカイラル凝縮の二階微分が求められた。これをスケーリング関数の微分で除算して、誤差を用いた重み付き平均をすることにより、曲率 c が求められる。O(4) の結果は図.6.6、 Z_2 の結果は図.6.6 のようになる。縦軸が c に対応しており $\frac{d^2 M/d(\mu_q/T)^2}{h^{1/\delta-1/\beta\delta} \cdot df(x)/dx}$ 、横軸が $t/h^{1/\beta\delta}$ である。O(4) の結果は表.7 であり、 Z_2 の結果は表.8 にまとめた。以上の計算により、 (β, μ_q) 平面における曲率 c を計算することができた。しかし、ゲージ結合定数 β は裸な量なため、この曲率 c も裸な量である。最後に、曲率 c を (T, μ_q) 平面における物理的な曲率 κ として書き換える。 κ と c との間には以下の関係式があり、カイラル極限におけるベータ関数を計算すれば置き換えが可能である。

$$\kappa \equiv -(1/18T_c)(d^2 T_c/d(\mu_q/T)^2) = c/18[-a(d\beta/da)]^{-1} \quad (6.29)$$

表 7: O(4) シナリオにおけるカイラル極限におけるベータ関数と曲率 κ 。

-	Method 1			Method 2		
c	0.0418(22)			0.0404(60)		
χ^2/dof	8.73			3.32		
scale	$\sqrt{t_{2.0}/a}$	$\sqrt{t_{2.5}/a}$	$\sqrt{t_{3.0}/a}$	$\sqrt{t_{2.0}/a}$	$\sqrt{t_{2.5}/a}$	$\sqrt{t_{3.0}/a}$
$-ad\beta/da$	3.90(25)	3.85(16)	4.01(39)	3.90(25)	3.85(16)	4.01(39)
κ	0.00060(5)	0.00060(4)	0.00058(6)	0.00057(9)	0.00058(9)	0.00056(10)

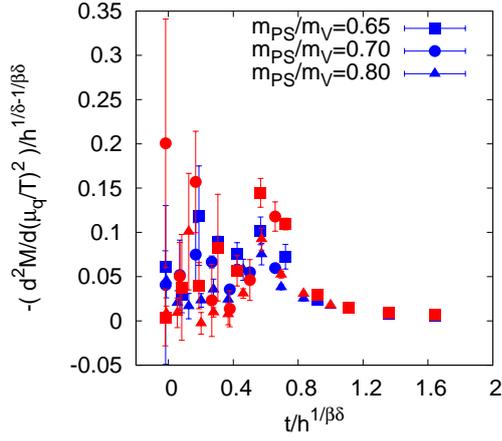


図 6.5: O(4) スケーリング: 秩序変数の二階密度微分 (赤点:再重み付け法で評価、青点:テイラー展開法で評価)[57]

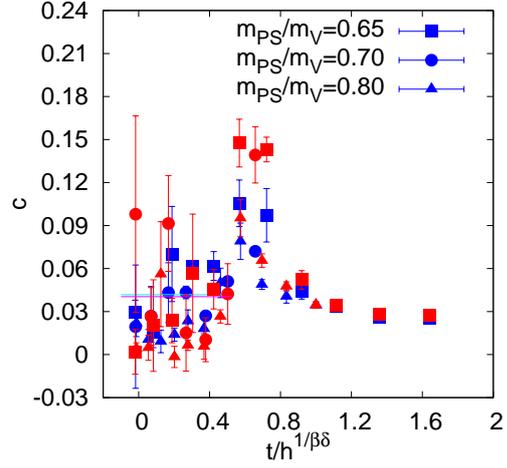


図 6.6: O(4) スケーリング: $(\beta, \mu_q/T)$ 平面での曲率 (赤点:再重み付け法で評価、青点:テイラー展開法で評価)[57]

表 8: Z_2 シナリオにおけるカイラル極限におけるベータ関数と曲率 κ .

-	Method 1			Method 2		
c	0.0356(34)			0.0360(42)		
χ/dof	2.04			2.60		
scale	$\sqrt{t_{2.0}}/a$	$\sqrt{t_{2.5}}/a$	$\sqrt{t_{3.0}}/a$	$\sqrt{t_{2.0}}/a$	$\sqrt{t_{2.5}}/a$	$\sqrt{t_{3.0}}/a$
$-ad\beta/da$	3.45(25)	3.30(16)	3.54(38)	3.45(25)	3.30(16)	3.54(38)
κ	0.00057(7)	0.00060(6)	0.00056(8)	0.00058(8)	0.00061(8)	0.00057(9)

6.5.3 カイラル極限におけるベータ関数

カイラル極限におけるベータ関数を計算するため、カイラル極限における格子間隔 a とゲージ結合定数 β との関係を見積もる必要がある。我々は勾配流法 [47]-[48] を用いて格子間隔 a を測定した。勾配流法を用いて格子間隔を決定するため、以下のような無次元となる演算子 $t^2 \langle E(t) \rangle$ を測定する。これはフロー時間 t [48] の関数である。期待値 $\langle E(t) \rangle$ は次のように定義される。

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(t) G_{\mu\nu}^a(t) \quad (6.30)$$

ここで場 $G_{\mu\nu}^a(t)$ は、フローされたゲージ場 $B_\mu(t)$ で構成される”場の強さ”である。勾配流法とは、場を以下のような拡散方程式に従って解く方法である。

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\mu\nu}(t, x), \quad B(0, x) = A_\mu(x) \quad (6.31)$$

初期条件では通常の場合を採択しておき、拡散半径 $1/\sqrt{8t}$ で場の存在確率をなめす方法である。離散化された格子空間上で拡散半径を大きくしていけば、なめされたゲージ場はあたかも連続空間の存在確率のようにふるまえる。格子量子化を施した上でフローされた物理量は、あたかも、連続極限のくりこまれた物理量とみなすことができる。

ここで期待値 $t^2 \langle E(t) \rangle$ を X という値に固定し、そこでのフロー時間を $t = t_X$ とすると、

$$t^2 \langle E(t) \rangle \Big|_{t=t_X} = X. \quad (6.32)$$

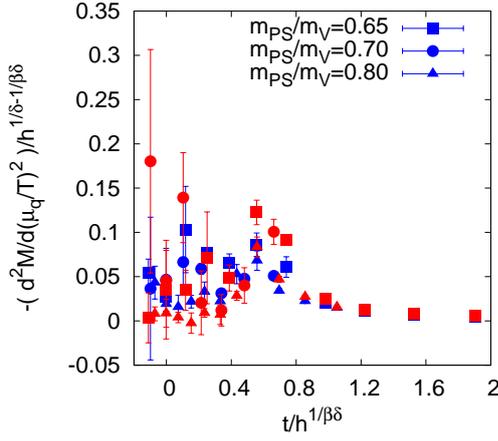


図 6.7: Z_2 スケーリング: 秩序変数の二階密度微分 (赤点:再重み付け法で評価、青点:テイラー展開法で評価)

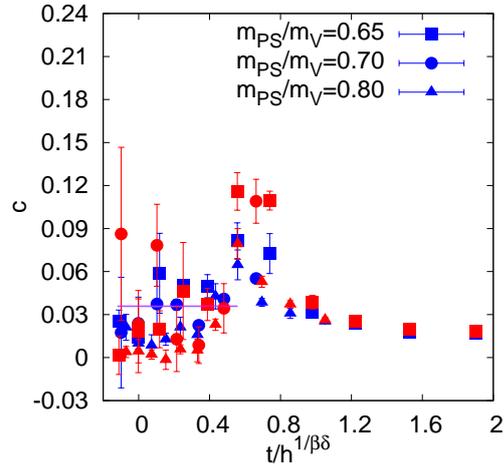


図 6.8: Z_2 スケーリング: $(\beta, \mu_q/T)$ 平面での曲率 (赤点:再重み付け法で評価、青点:テイラー展開法で評価)

とかける。ここで、フロー時間 t は長さの二乗の次元を持つ。期待値 $t^2 \langle E(t) \rangle$ が無次元な物理量であるならば、シミュレーション変数を変えたとしても変化を受けない。シミュレーション変数を変化させたとき、ゲージ結合定数のような変数はベータ関数を通じて格子間隔を変化させるため、長さの四乗の次元を持つ量 t^2 は格子間隔に応じて変化する。したがって X を固定しながらシミュレーション変数を変化させれば、 t_X^2 を通じて格子間隔の計算をおこなうことができる。

今回、期待値 $t^2 \langle E(t) \rangle$ の格子間隔誤差を抑えるため、以下の処方 [49] を施した。

$$t^2 \langle E(t) \rangle = -\frac{C_2^{\text{Clv}}}{C_2^{\text{Wil}} - C_2^{\text{Clv}}} t^2 \langle E^{\text{Wil}}(t) \rangle + \frac{C_2^{\text{Wil}}}{C_2^{\text{Wil}} - C_2^{\text{Clv}}} t^2 t^2 \langle E^{\text{Clv}}(t) \rangle \quad (6.33)$$

異なる格子間隔誤差をもつ期待値を用意して格子間隔誤差を抑える方法である。 E^{Clv} はクォーク行列式の格子間隔誤差を抑える演算子であるクローバー項で構成されたゲージ作用を表わし、 E^{Wil} は単なる 1×1 ウィルソンループで構成されたゲージ作用である。それぞれの演算子に格子間隔誤差 C_2^{Wil} や C_2^{Clv} があり、それらがキャンセルし合うように演算子を構成した。結果は図.6.9-6.10 の通りである。ここでは五つの t_X を測定した ($X = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ と 3.5)。結果は表.7-8 にまとまっている。

今からカイラル極限における t_X の値を求める。章で議論したようにカイラル極限に南部ゴールドストーンボソンであるパイ中間子の質量 m_{PS} は、どのスケールにおいても零になっていなければならない。したがって、シミュレーション変数 β を固定し、各 β における t_X の質量 m_{PS} 依存性を求め、 m_{PS} を零に取る極限がカイラル極限における t_X に相当する。我々は次のようなフィット関数 $a/\sqrt{t_X} = A(m_{PS}a)^2 + B$ を用いて零質量への外挿を行う。ここで係数 A と B はフィット変数であり、 B がカイラル極限の格子間隔を与える。結果は図.6.11 の通りである。この図はフロー時間 $t_{2.5}$ のカイラル極限における値を求めた。擬スカラー中間子の質量 m_{PS} は、カイラル極限において零になることから、フロー時間の質量依存性を求め、質量が零となる外挿を行った。

さらに、この極限における t_X のゲージ結合定数 β の依存性を見積もる。各 β におけるカイラル極限の t_X を多項式でフィットし、その微分値がベータ関数となる (図.6.12)。ここでは χ^2/dof を最小とした三次関数を採用した。相転移温度 $\beta = \beta_{ct}$ におけるベータ関数の値は、表 7-8 にまとめた。勾配流法により t_X を求め、ベータ関数を計算したが、以下の注意が必要である。 X の値を大きくすればするほど拡散半径が大きくなり、ゲージ場の存在確率はなめされるためより連続極限に近い値が計算でき

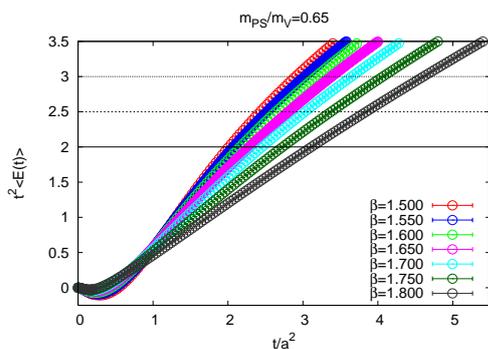


図 6.9: 質量比 $m_{PS}/m_V = 0.65$ におけるフ
ロースケール $a/\sqrt{t_X}$ [57]

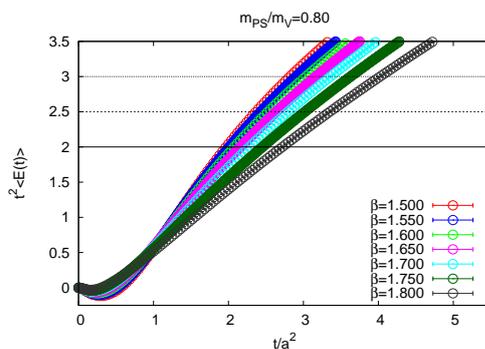


図 6.10: 質量比 $m_{PS}/m_V = 0.80$ におけるフ
ロースケール $a/\sqrt{t_X}$ [57]

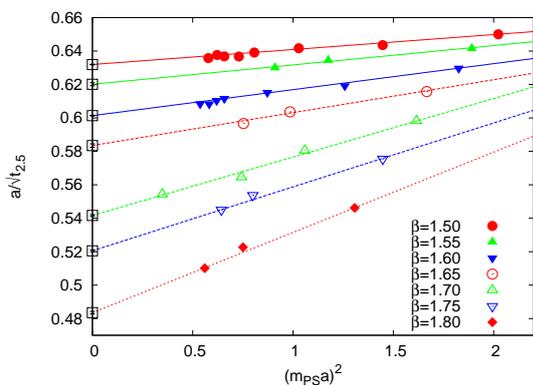


図 6.11: スケール $\sqrt{t_{2.5}/a}$ のカイラル極限 [57]

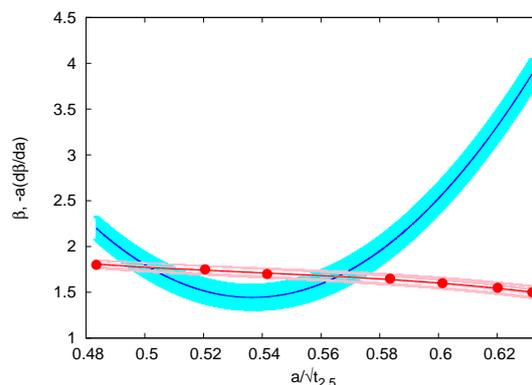


図 6.12: スケール $\sqrt{t_{2.5}/a}$ のベータ関数 [57]

る。しかし、 X の値を大きくしすぎると、元は有限格子サイズのシミュレーションを行っているため、拡散半径が格子サイズをこえてしまい、周期的境界条件を感じてしまう。このため、勾配流法をもちいて格子間隔を測定する場合 X を適切な値に選ぶ必要がある。今回はベータ関数の値が安定している $X = 2.0, 2.5, 3.0$ の三点だけを選んだ

以上の計算結果からカイラル極限におけるベータ関数を求めることができたため、物理的な曲率 κ へと書き換えを行う (表.7-8). 二つの方法で計算した c の値を、三通りの X で κ へと変化させた結果を全て系統誤差としてとらえ、全ての計算結果を包含する値と誤差を最終結果として採用する。 $O(4)$ と Z_2 のスケーリング則を用いて計算した結果、物理的な (T, μ_q) 平面における曲率は $\kappa = 0.0006(1)$ となった。この値は異なるクォークでシミュレーションされて行われた先行研究の結果よりはるかに小さい [50]。

7 まとめ

本論文ではまず QCD の性質や現象に関してふれ、QCD の相転移に焦点を当てレビューをした。また、格子 QCD の定式化について説明し、カイラル極限における相転移を議論する二つの方法に関して説明を行い、それぞれの結果を示した。“多フレーバー手法”では、軽いクォーク質量 m_{ud} を変えながら、 $(2 + N_f)$ QCD におけるカイラル相転移を議論した。一次相転移がクロスオーバー相転移に変わる臨界質量 m_h の軽いクォーク質量 m_{ud} 依存性を議論することで、カイラル極限における相転移の次数を調べた。調査した質量領域では、臨界質量の軽いクォーク質量依存性が見えなかったため、軽いクォーク質量を零とするカイラル極限においても臨界質量が消えない。したがって、相転移は二次という標準的な理解と無矛盾である結果が得られた。

一方、3次元統計モデルで得られた $O(4)$ スケーリング関数と Z_2 スケーリング関数と QCD シミュレーションを比較すると、QCD のデータは両方の関数形が良いフィットを示すことが分かった。この結果はカイラル極限における相転移が二次相転移、一次相転移ともに無矛盾である結果を示した。この解析から相転移の次数を判断することはできなかったが、カイラル極限における一次相転移がクロスオーバーへ変わる臨界質量 m_{ud}^{ct} が微小であることがわかった。また、スケーリング則を仮定することで曲率の計算をおこなったところ、 $O(4)$ と Z_2 スケーリングともに先行研究に比べ小さな値を取ることがわかった。

謝辞

素粒子論研究室に配属してから大変お世話になった谷本盛光先生、中野博章先生、淺賀岳彦先生、江尻信司先生に心から感謝しております。江尻信司先生には熱心な指導を賜りました。細かな指導により、物理の理解が深まり、研究を進めることができました。さらに、WHOT-QCD Collaboration に所属するスタッフの方々と共同研究者の山田憲和先生には、議論や教育を通して、多くのことを学ぶことができました。また、卒業生の奥野恭平さん、山本大さん、高橋優さん、藤田陽さん、宇治敦史さん、白銀瑞樹さんとは、結果の出ない辛い時間を過ごし、時には支え合いながら困難を乗り越えてきました。最後に、博士研究員の中川義之さんが残っていた計算サーバーの設定や計算コード、および、それらに関するメモが無ければ、私は研究を行うことができませんでした。研究や発表を通して、多くの人と出会い、多くの土地に出かけ、多くの経験を得ることができたことで、研究者として、人として成長することができました。大変感謝しております。

皆様が心の支えとなり、この博士論文を書き上げることができたと思っています。

A 3次元 $O(4)$ スピン模型とイジング模型のスケーリング関数

この章では3次元 $O(4)$ スピン模型とイジング模型のスケーリング関数をまとめる [45]-[43]。Widom-Griffiths 変数 x と y [51] を導入する。

$$y = f^{-\delta}, \quad x = (t/h^{1/\beta\delta})f^{-1/\beta}.$$

ここで f はスケーリング関数であり、 t は換算温度、 h は外場である。 β, δ は臨界指数であり、二次相転移を起こす際に破れる対称性により値が決定される。

y が小さいときと大きいときで、変数 x は y に依存した漸近形を与える。この形式はある近似の元で計算されているが、詳細は右記の論文を参考とする [52]。小さな y に対し、

$$x_s(y) = -1 + (\tilde{c}_1 + \tilde{d}_3) y + \tilde{c}_2 y^{1/2} + \tilde{d}_2 y^{3/2}, \quad (1.1)$$

という漸近形が与えられ、大きな y に対し、

$$x_l(y) = ay^{1/\gamma} + by^{(1-2\beta)/\gamma}. \quad (1.2)$$

という漸近形が与えられる。これらの二つの関係は次のような関数を用いて内挿できる [44]、

$$x(y) = x_s(y) \frac{y_0^p}{y_0^p + y^p} + x_l(y) \frac{y^p}{y_0^p + y^p}. \quad (1.3)$$

この関数は $O(4)$ スケーリング関数を記述するとき用いた。各変数は表.9 の値を取る。

一方、 z_2 スケーリング関数は状態方程式の変数表示で表すことができる。広く用いられているのは Guida と Zinn-Justin が導出した状態方程式の変数表示 [53] で、それはイジング模型に対する場の理論がもととなっている。彼らは二つの変数 R と θ を用いて状態方程式を記述する。その変数は以下の通り。

$$M = m_0 R^\beta \theta, \quad (1.4)$$

$$t = R(1 - \theta^2), \quad (1.5)$$

$$h = h_0 R^{\beta\delta} \hat{h}(\theta), \quad (1.6)$$

ここで m_0 と h_0 は規格化定数である。関数 $\hat{h}(\theta)$ は奇関数であり、5次多項式で展開すると以下のようなになる [53]。

$$\hat{h}(\theta) = \theta - 0.76201(36)\theta^3 + 0.00804(11)\theta^5. \quad (1.7)$$

すると、この関数を用いて x と y は以下ようになる。

$$x(\theta) = \frac{1 - \theta^2}{\theta_0^2 - 1} \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{1/\beta}, \quad y(\theta) = \frac{\hat{h}(\theta)}{\hat{h}(1)\theta^\delta}, \quad (1.8)$$

ここで θ_0 は $\theta_0 = 1.154$ であり、これは関数 $\hat{h}(\theta)$ の零点で求められる。 Z_2 のスケーリング解析では、以上の関数を用いて計算を行った。各臨界指数は表 10 にまとまっている。

	$\tilde{c}_1 + \tilde{d}_3$	\tilde{c}_2	\tilde{d}_2	a	b	y_0	p
$O(4)$	0.359(10)	0.666(6)	-0.052(10)	1.071(4)	-0.866(38)	5.0	3

表 9: $O(4)$ スケーリング関数に対するフィット変数

	β	γ	δ	χ^2/dof	β_{ct}	h_{ct}
$O(4)$	0.349	1.319	4.780	12.30	1.532(32)	
Z_2	0.326	1.239	4.805	2.60	1.560(20)	0.008(3)

表 10: 臨界指数 β と γ 、 δ の値。 $O(4)$ スケーリングの値は参考論文:[45] から、 Z_2 スケーリングの値は参考論文:[43] から引用した。三つの臨界指数は $\gamma = \beta(\delta - 1)$ という関係式をもつ。

参考文献

- [1] M.Creutz “Quarks,gluon and lattices” (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1985)
- [2] 青木慎也 「格子上の場の理論」シュブリンガー現代理論物理学シリーズ3(シュブリンガー・フェアラーク東京株式会社 2005)
- [3] I. Montvey, G. Muenster ”Quantum Fields on a lattice” (Cambridge Monographs on Mathematical Physics,1997)
- [4] K. Symanzik, Nucl. Phys. **B258**, 141 (1985); University of Tsukuba Report No. UTHEP-118 (1983)
- [5] M. Luscher and P.Weisz, Common. Math. Phys. **97**, 59 (1985); erratum, **98**, 433 (1985)
- [6] Y. Iwasaki, Nucl. Phys. **B258**, 141 (1985); University of Tsukuba Report No. UTHEP-118 (1983)
- [7] B. Sheikholeslami and R. Wohlert, Nucl. Phys. **B259**, 572 (1985)
- [8] K. G. Wilson, Confinement of Quarks, Phys. Rev, D **64**, 2445 (1974)
- [9] M. Creutz, Phys. Rev. Lett. **45**, 313 (1980)
- [10] M. Fukugita, M. Okawa and A. Ukawa, Nucl. Phys. B **337**, 181 (1990)
- [11] 西森秀稔 「相転移・臨界現象の統計物理学」新物理学シリーズ35(培風館 2005)
- [12] 神吉健 「クォーク・グルーオン・プラズマ」 パリティ物理学コース (丸善 1992)
- [13] J.I. Kapusta and C. Gale “Finite Temperature Field Theory Principles and Applications” (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1994)
- [14] 九後汰一郎 「ゲージ場の量子論 I」 新物理学シリーズ (培風館 1989)
- [15] 九後汰一郎 「ゲージ場の量子論 II」 新物理学シリーズ (培風館 1989)
- [16] 岡 真 「ハドロン物理学 (2004 年度:講義ノート)」
- [17] J. Beringer,Phys. Rev. D **86** 2012
- [18] John B. Kogut, Reviews of Modern Physics, Vol.**51**, No. 4 (1979)
- [19] H.B. Nielsen, M. Ninomiya, Nucl. Phys. B**185**, 20 (1981)
- [20] H.B. Nielsen, M. Ninomiya, Nucl. Phys. B**193**, 173 (1981)
- [21] 青木秀夫、岩崎洋一、中村健蔵 物理学最前線 11 巻、共立出版 (1985)
- [22] S. Ejiri, N. Yamada Phys. Rev. Lett. **110**, no. 17, 172001(2013)[arXiv:1212.5899]
- [23] K. Yagi, T. Hatsuda, Y. Miake Quark-Gluon Plasma (Cambridge University Press,2005)
- [24] R. D. Pisarski and F. Wilczek, Phys. Rev. D, **29**, 338 (1984)

- [25] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **B597**, 337(1970); G. 't Hooft, Prog. Theor. Phys. **B597**, 337 (1986)
- [26] M. Harada and K. Yamawaki, Phys. Rept. **381**, 1 (2003)
- [27] F. R. Brown, F. P. Butler, H. Chen, N. H. Christ, Z. H. Dong, W. Schaffer, L. I. Unger, A. Vaccarino, Phys. Rev. Lett. **65**, 2491(1990)
- [28] S. Ejiri, F. Karsch, E. Laermann, C. Miao, S. Mukherjee, P. Petreczky, C. Schmidt, W. Soeldner, W. Unger, Phys. Rev. **D80**, 094505 (2009).
- [29] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz, K. K. Szabo, Nature **443**, 675 (2006) [hep-lat/0611014].
- [30] H. T. Ding, A. Bazavov, F. Karsch, Y. Maezawa, S. Mukherjee, P. Petreczky, PoS LATTICE **2013**, 157 (2014) [arXiv:1312.0119 [hep-lat]].
- [31] X. Y. Jin, Y. Kuramashi, Y. Nakamura, S. Takeda, A. Ukawa, Phys. Rev. **D91**, no. 1, 014508 (2015) [arXiv:1411.7461 [hep-lat]].
- [32] C. R. Allton, S. Ejiri, S. J. Hands, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann, Ch. Schmidt, L. Scorzato, Phys. Rev. **D66**, 074507 (2002).
- [33] A.D.Bruce, J. Phys. C Solid State Phys.**14** (1981) 3667.
- [34] K.Binder, Z. Phys. **B43**, 119 (1981).
- [35] H. Saito, Y. Maezawa, H. Ohno, T. Umeda (WHOT-QCD Collaboration), Phys. Rev. **D84**, 054502 (2011).
- [36] S.Ejiri, Phys. Rev. **D77**, 014508 (2008).
- [37] S. Ejiri, Y. Maezawa, N. Ukita, S. Aoki, T. Hatsuda, N. Ishii, K. Kanaya, T. Umeda (WHOT-QCD Collaboration), Phys. Rev. **D82**, 014508 (2010).
- [38] 国広梯二「クオーク・ハドロン物理学入門」SGCライブラリ-100(サイエンス社 2013).
- [39] S. Ejiri *et al.*, PoS(LATTICE2010), 181 (2010).
- [40] T. Umeda *et al.*, PoS(LATTICE2013), 450 (2013).
- [41] Y. Iwasaki, K. kanaya, S. kaya, T. Yoshie, Phys. Rev. Lett, **78**, 179 (1997).
- [42] A. Ali Khan *et al.*, Phys. Rev, **D63**, 034502 (2000).
- [43] J. Engels, T. Mendes, *Nucl. Phys. B* **655** (2003) 277.
- [44] J. Engels, T. Mendes, *Nucl. Phys. B* **572** (2000) 289.
- [45] J. Engels, L. Fromme, M. Seniuch, *Nucl. Phys. B* **675** (2003) 533.
- [46] M. Bochicchio, L. Maiani, G. Martinelli, G. Rossi, and M. Testa, Nucl. Phys. **B262**, 331 (1985).

- [47] M. Luscher, *Commun. Math. Phys.* **293**, 899 (2010)
- [48] M. Luscher, *JHEP* **1008**, 071 (2010)
- [49] Z. Fodor et al, *JHEP* **09**, 018 (2014)
- [50] O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann, C. Miao, S. Mukherjee, P. Petreczky, C. Schmidt, W. Soeldner, and W. Unger, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 014504.
- [51] R. B. Griffiths, *Phys. Rev.* **158** (1967) 176.
- [52] D. J. Wallace and R. K. P. Zia, *Phys. Rev. B* **12** (1975) 5340.
- [53] J. Zinn-Justin, *Phys. Rept.* **344** (2001) 159.
- [54] A. J. Paterson, *Nucl. Phys. B***190**, (1981) 188.
- [55] F. Learmann and O. Philipsen, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53**, (2003) 163.
- [56] S. Ejiri, R. Iwami, N. Yamada, *Phys. Rev. D***93**, 054506 (2016) [arXiv:1511.06126v1]
- [57] T. Umeda, S. Ejiri, R. Iwami, K. Kanaya, H. Ohno, A. Uji, N. Wakabayashi and S. Yoshida, *PoS LATTICE 2016* 376 (2016) [arXiv:1612.09449]
- [58] F. Karsch, *Phys. Rev. D* **49**, 3791 (1994); F. Karsch and E. Laermann, *Phys. Rev. D* **50**, 6954 (1995).
- [59] C. Bernard et al. (MILC Collaboration), *Phys. Rev. D* **54**, 4585 (1996); *Phys. Rev. D* **61**, 054503 (2000)
- [60] S. Aoki et al. (JLQCD Collaboration), *Phys. Rev. D* **57**, 3910 (1998).
- [61] K. Kanaya, *PoS(LATTICE2010)*, 012 (2010).
- [62] X. Y. Jin, Y. Kuramashi, Y. Nakamura, S. Takeda, and A. Ukawa, *Phys. Rev. D* **91**, 014508 (2015).
- [63] C. Bonati, P. de Forcrand, M. D 'Elia, O. Philipsen, and F. Sanfilippo, *Phys. Rev. D* **90**, 074030 (2014).