

2016年度 学位申請論文
Theoretical Constraints
on Right-Handed Neutrinos
(右巻きニュートリノへの理論的制限)

露木孝尚

F14J005D

新潟大学自然科学研究科博士後期過程

数理物質科学専攻

素粒子論研究室

要約

本学位申請論文では、素粒子標準模型に含まれない新粒子、右巻きニュートリノの現象論について考察する。この新粒子を導入した模型では、標準模型で説明不可能なニュートリノ振動、すなわちニュートリノが質量を持つことを説明できる。右巻きニュートリノはゲージ重項であるため、Dirac 質量よりも大きな Majorana 質量を持つことができる。その結果、ニュートリノ振動実験の結果が示唆する小さいニュートリノ質量が自然に得られる（シーソー機構）。この模型では更に物質と反物質の非対称性、および暗黒物質という他の標準模型を超えた宇宙物理の現象も説明できる可能性がある。右巻きニュートリノの性質は、その質量と、左巻きニュートリノとの混合の大きさにより決まる。混合の大きさは、X 線衛星観測や電子陽電子衝突実験など様々な宇宙観測、地上実験から制限がつけられている。

本論文ではこの右巻きニュートリノの混合について、理論的な要請から来る下限及び上限を求める。まず混合の下限は、混合が小さい時にはシーソー機構で得られるニュートリノ質量が小さすぎてしまうことから得られる。一方混合の上限は、混合が湯川結合に比例しており、湯川結合には理論の摂動性から上限があることに由来する。混合の上限付近では、第1世代と第2世代以降の右巻きニュートリノのシーソー機構への寄与は互いに打ち消しあう必要があり、このことで世代間の湯川結合に関係がつく。この上限は第2世代の右巻きニュートリノの質量に強く依存する。将来の実験で第1世代の右巻きニュートリノを発見するためには、第2世代も十分に軽いことが要請される。この研究結果は、今後の右巻きニュートリノ探索実験の重要性を高め、更に、宇宙初期における物質誕生の理論に大きなインパクトを与えるものである。

本論文は筆者らによる参考論文 [1-5] を基にしている。

本論文の構成

第1章では、標準模型の特に電弱理論と、ニュートリノ質量をはじめとするその問題点を説明する。第2章では右巻きニュートリノを導入し、先の問題や大統一理論の問題がどのように解決されるのかを見る。第3章では右巻きニュートリノに対する実験からの制限や感度を説明する。第4章では本博士論文の主要な結果であるシーソー機構及び摂動性からの理論的制限を導出する。最後に第5章で結論を述べる。本論文で必要となる事項で、計算が主な部分については付録 A から G に載せた。

目次

第1章	標準模型とその問題点	4
1.1	標準模型	4
1.1.1	カイラリティ	4
1.1.2	Weinberg-Salam 理論	6
1.1.3	低エネルギー有効ラグランジアン	7
1.2	ニュートリノ振動	8
1.2.1	世代間混合	8
1.2.2	ニュートリノ振動	11
1.2.3	物質中の有効ポテンシャル	14
1.2.4	標準模型を拡張する必要性	15
1.3	バリオン非対称性	16
1.3.1	宇宙のバリオン数	16
1.3.2	バリオン数の非保存	17
1.3.3	バリオン数とレプトン数	19
1.4	暗黒物質	21
1.4.1	観測	21
1.4.2	ニュートリノの残存量	22
第2章	右巻きニュートリノの導入	24
2.1	ニュートリノ質量	24
2.1.1	シーソー機構	24
2.1.2	重いニュートリノの弱い相互作用	28
2.2	レプトジェネシス	28
2.2.1	CP の破れ	29
2.2.2	Boltzmann 方程式	30
2.2.3	Davidson-Ibarra 境界	33
2.3	暗黒物質としての重いニュートリノ	34
2.3.1	寿命	34
2.3.2	Dodelson-Widrow 機構	35
2.3.3	X 線観測	38
2.3.4	Tremaine-Gunn 境界	40
2.4	大統一理論	42
2.4.1	SU(5) 大統一理論の問題点	42
2.4.2	右巻きニュートリノによる b - τ 統一	43

第 3 章	右巻きニュートリノへの制限	49
3.1	地上実験からの制限	49
3.1.1	中間子及び荷電レプトンの崩壊	49
3.1.2	重いニュートリノの崩壊	51
3.1.3	Z ボソンの崩壊	52
3.1.4	電弱精密測定	52
3.1.5	電子電子衝突	52
3.2	宇宙観測からの制限	53
3.2.1	ビッグバン元素合成	53
第 4 章	右巻きニュートリノへの理論的制限	54
4.1	混合の下限	54
4.2	混合の上限	56
4.3	結果	59
4.4	輻射補正について	61
第 5 章	結論	64
付 録 A	質量行列の対角化	67
A.1	Dirac 質量項	67
A.2	Majorana 質量項	68
A.3	固有状態	69
付 録 B	一般的な Casas-Ibarra パラメトリゼーション	70
付 録 C	Davidson-Ibarra 境界	71
付 録 D	量子異常	73
D.1	共変的量子異常	73
D.2	ハイパーチャージの一意性	77
付 録 E	巻きつき数	79
付 録 F	崩壊幅	83
F.1	$N \rightarrow L\Phi$	83
F.2	$N \rightarrow 3\nu$	84
付 録 G	CP の破れ	86

第1章 標準模型とその問題点

素粒子の標準模型は、群

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (1.1)$$

の対称性を持つゲージ理論であり、強い相互作用、弱い相互作用、電磁相互作用が関わる現象を良く説明する。標準模型に含まれる粒子を表 1.1 にまとめた。しかし、標準模型では説明できない現象も見つかっており、それらを説明可能な理論の構築が必要である。

本章では、標準模型を超えた現象として、ニュートリノ振動、バリオン数非対称性、暗黒物質を説明する。本章では主に [6] と [7] の記法を参考にした。

1.1 標準模型

本節では、記法の定義もかねて、素粒子の標準模型のうち主にニュートリノに関する部分を振り返る事にする。

1.1.1 カイラリティ

フェルミオンの場を表す Dirac スピノル $\psi(x)$ は、Lorentz 変換における次の変換性によって定義される。

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = D(\alpha)\psi(x), \quad (1.2)$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.3)$$

$$D(\alpha) \equiv \exp\left(-i\frac{\alpha_{\mu\nu}}{2}\sigma^{\mu\nu}\right), \quad (1.4)$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (1.5)$$

$\alpha_{\mu\nu}$ は変換の実パラメータで反対称である。ガンマ行列 γ^μ は反交換関係

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (1.7)$$

を満たす。本論文では、ガンマ行列として次の Weyl 表現を用いる。

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ -\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu \equiv (-1, \vec{\sigma}) \quad (1.9)$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

表 1.1: 標準模型に含まれる粒子の量子数。反粒子は省略し、自由度 g にはスピン、SU(2) アイソスピン自由度、及びカラー自由度を含めた。 B はバリオン数、 L はレプトン数、 T_3 は SU(2) のアイソスピン、 Y は U(1) ハイパーチャージを表す。

粒子	g	B	L	T_3	Y
$Q_L = \begin{pmatrix} q_L^U \\ q_L^D \end{pmatrix}$	6	1/3	0	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	1/6
q_R^U	3	1/3	0	0	2/3
q_R^D	3	1/3	0	0	-1/3
$L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}$	2	0	1	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	1/2
l_R	1	0	1	0	-1
W^+	2	0	0	1	0
Z^0	2	0	0	0	0
γ	2	0	0	0	0
グルーオン	16	0	0	0	0
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	2	0	0	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$	1/2

Weyl 表現では、スピノル表現 $D(\alpha)$ はブロック対角になる。

$$D(\alpha) = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\right) \quad (1.11)$$

$$= \begin{pmatrix} \exp\left[-\frac{i}{2}(i\alpha_{0i}\sigma_i + \alpha_{ij}\epsilon_{ijk}\sigma_k)\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-\frac{i}{2}(-i\alpha_{0i}\sigma_i + \alpha_{ij}\epsilon_{ijk}\sigma_k)\right] \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

すなわち、Dirac スピノルの上 2 成分と下 2 成分の Lorentz 変換性は異なる。そこで Dirac スピノルを次のように分解する。

$$\psi_L \equiv P_L \psi \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$$\psi_R \equiv P_R \psi \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$P_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (1.15)$$

$$P_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (1.16)$$

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

η と ξ は Weyl スピノルと呼ばれ、2 成分である。 ψ_L と ψ_R はカイラル変換 $\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ の固有状態で、固有値はそれぞれ -1 と 1 である。このような状態をそれぞれ左巻き (left-handed)、右巻き (right-handed) と呼ぶ。

自由な Dirac スピノルは次の Dirac 方程式に従う。

$$(i\partial - m)\psi = 0 \quad (1.18)$$

これに射影演算子 P_R, P_L をかけて分解すると

$$i\partial\psi_L = m\psi_R \quad (1.19)$$

$$i\partial\psi_R = m\psi_L \quad (1.20)$$

となる。すなわち、 ψ_L と ψ_R の時間的、空間的發展は質量 m によって結びついていて、 $m = 0$ の場合は独立になる。ニュートリノは標準模型では質量を持たず、右巻きニュートリノは標準模型に含まれていない。

1.1.2 Weinberg-Salam 理論

レプトンの電弱相互作用は、 $SU(2) \times U(1)$ の対称性を保つラグランジアンで記述される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\overline{L_{\alpha L}} \not{D} L_{\alpha L} + i\overline{l_{\alpha R}} \not{D} l_{\alpha R} \\ & - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & - y_{\alpha\beta}^l \overline{L_{\alpha L}} \Phi l_{\beta R} - y_{\alpha\beta}^{l*} \overline{l_{\beta R}} \Phi^\dagger L_{\alpha L} \\ & + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi - v^2)^2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

ただし添字は $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$, $a = 1, 2, 3$ で和を取る。共変微分と場の強さは

$$D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a T^a + ig'B_\mu Y, \quad T^a = \frac{1}{2}\sigma^i, \quad (1.22)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (1.23)$$

$$B_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (1.24)$$

である。Higgs 場 Φ は、自己ポテンシャルによって次の真空期待値を持つ。

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

これにより $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称性は $U(1)_Q$ に破れる。ただし電荷を

$$Q \equiv T_3 + Y \quad (1.26)$$

で定義する。 Q に結合するゲージ場

$$A_\mu \propto \frac{1}{g} W_\mu^3 + \frac{1}{g'} B_\mu \quad (1.27)$$

は質量を持たないままで、それに直交する場 Z_μ は質量を持つ。その混合角を θ_W とおくと

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad \tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (1.28)$$

となる。また、

$$W^\pm \equiv \frac{W^1 \mp iW^2}{\sqrt{2}} \quad (1.29)$$

と定義すると、ラグランジ안의うちレプトンとゲージ場の相互作用の部分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -\bar{L}_L \gamma^\mu (gW_\mu^a T^a + g'B_\mu Y) L_L - \bar{l}_R \gamma^\mu g'B_\mu Y l_R \\ &= -\bar{L}_L g \gamma^\mu [\sin \theta_W Q A_\mu + \cos \theta_W (T_3 - \tan^2 \theta_W Y) Z_\mu \\ &\quad + W_\mu^- (T_1 - iT_2)/\sqrt{2} + W_\mu^+ (T_1 + iT_2)/\sqrt{2}] L_L \\ &\quad - \bar{l}_R \gamma^\mu g \tan \theta_W Q (\cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu) l_R \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$= \mathcal{L}_I^{CC} + \mathcal{L}_I^\gamma + \mathcal{L}_I^Z, \quad (1.31)$$

$$\mathcal{L}_I^{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} (j_W^\mu W_\mu^+ + j_W^{\mu\dagger} W_\mu^-) \quad (1.32)$$

$$\mathcal{L}_I^Z = -\frac{g}{2\cos \theta_W} j_Z^\mu Z_\mu \quad (1.33)$$

$$\mathcal{L}_I^\gamma = -g \sin \theta_W j_\gamma^\mu A_\mu = -e j_\gamma^\mu A_\mu, \quad (1.34)$$

$$e = g \sin \theta_W, \quad (1.35)$$

$$j_W^\mu = 2\bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} j_Z^\mu &= 2\bar{L}_L \gamma^\mu (T_3 - \sin^2 \theta_W Q) L_L + 2\bar{l}_R \gamma^\mu (-\sin^2 \theta_W Q) l_R \\ &= \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L + 2\left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W\right) \bar{L}_L \gamma^\mu l_L + 2\sin^2 \theta_W \bar{l}_R \gamma^\mu l_R \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$j_\gamma^\mu = Q \bar{l} \gamma^\mu l = -\bar{l} \gamma^\mu l \quad (1.38)$$

となる。世代の和についての添字は省略した。

1.1.3 低エネルギー有効ラグランジアン

W ボソン (81 GeV) や Z ボソン (91 GeV) の質量よりも低いエネルギーでの反応を考える。このとき、ゲージボソンが運ぶ運動量が質量に対して無視できるので、伝播関数は

$$G_{\mu\nu}^W(p) = i \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_W^2}}{p^2 - m_W^2} \rightarrow i \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2}, \quad (1.39)$$

$$G_{\mu\nu}^Z(p) = i \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_Z^2}}{p^2 - m_Z^2} \rightarrow i \frac{g_{\mu\nu}}{m_Z^2} \quad (1.40)$$

となる。これはゲージボソンを介した相互作用をフェルミオン同士の4点相互作用に近似する事に相当する。(1.32)、(1.33) から、低エネルギー有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{eff}^{CC} = -\frac{g^2}{8m_W^2} j_{W\mu}^\dagger j_{W\mu} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_{W\mu}^\dagger j_{W\mu} \quad (1.41)$$

$$\mathcal{L}_{eff}^{NC} = -\frac{1}{2} \frac{g^2}{4\cos^2 \theta_W m_Z^2} j_{Z\mu}^\dagger j_{Z\mu} = -\rho \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_{Z\mu}^\dagger j_{Z\mu} \quad (1.42)$$

となる。4点相互作用の結合定数 G_F は Fermi 定数と呼ばれ、ミューオンの寿命を用いて決定される [8]。

$$G_F \equiv \frac{\sqrt{2}g^2}{8m_W^2} = 1.1663787(6) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \quad (1.43)$$

ラグランジアン (1.21) の Higgs 場の共変微分の項より、W ボソンの質量は

$$m_W^2 = g^2 v^2 / 2 \quad (1.44)$$

であるから、 v は G_F によって決まり、

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4G_F}} = 174.1 \text{ GeV} \quad (1.45)$$

となる。中性カレント相互作用の項で、 $1/2$ を掛けているのは、縮約の仕方が2通りあるためである。また Z ボソンの質量は

$$m_Z^2 = \frac{g^2 v^2}{2 \cos^2 \theta_W} (= 91.1876 \text{ GeV}) \quad (1.46)$$

である [8] から、中性カレント相互作用項の係数は

$$\rho \equiv \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_w} = 1 \quad (1.47)$$

である。

1.2 ニュートリノ振動

1.2.1 世代間混合

Higgs 場が真空期待値を持つ事により、荷電レプトンは次の質量項を得る。

$$m_{\alpha\beta}^l \overline{l_{\alpha L}} l_{\beta R} + \text{h.c.}, \quad m_{\alpha\beta}^l \equiv y_{\alpha\beta}^l v \quad (1.48)$$

一般に、行列 m^ℓ はバイユニタリー変換によって対角化する事ができる (付録 A 参照)。

$$V_L^\dagger m^\ell V_R = m^{\ell, \text{diag}}, \quad m_{kj}^{\ell, \text{diag}} \equiv m_k^\ell \delta_{kj}, \quad m_k^\ell \geq 0 \quad (1.49)$$

よって、

$$l_L = V_{LL} l'_L, \quad l_R = V_{LR} l'_R \quad (1.50)$$

と変換すると、荷電レプトンの質量項を対角にする事ができる。このとき、ラグランジアンのうち運動項と中性カレント j_X^μ , j_γ^μ は定義 (1.37), (1.38) から明らかなように変化しない。変化を受けるのは荷電カレント j_W^μ で、

$$j_W^\mu = 2\overline{\nu_L} \gamma^\mu V_{LL} l'_L \quad (1.51)$$

となる。標準模型では、アップ型のクォーク q^U と異なり、ニュートリノの質量項が無いので、 ν_L のユニタリー変換の自由度が残っている。よって荷電カレントの変化を吸収する事ができる。

しかし、ニュートリノ振動実験によりニュートリノは質量を持つことが判明した。この場合、クォークと同様にレプトンの荷電カレント相互作用で世代間の混合が生じる。ニュートリノの質量項には、Dirac 質量項と Majorana 質量項の二種類がある。Dirac 質量項とは

$$\mathcal{L}_{\nu\text{mass}}^D = -m_{D\alpha\beta}\overline{\nu_{\alpha L}}\nu_{\beta R} + \text{h.c.} \quad (1.52)$$

であり、標準模型の他の粒子と同様である。荷電レプトンと同様に、バイユニタリー変換 (1.49) によって質量行列 m_D を対角化できる。

$$\nu_L = V_{\nu L}\nu'_L, \quad \nu_R = V_{\nu R}\nu'_R, \quad (1.53)$$

$$V_{\nu L}^\dagger m_D V_{\nu R} = m_\nu^{\text{diag}} \quad (1.54)$$

一方 Majorana 質量項とは

$$\mathcal{L}_{\nu\text{mass}}^M = -\frac{1}{2}m_{M\alpha\beta}\overline{\nu_{\alpha L}}\nu_{\beta L}^c + \text{h.c.} \quad (1.55)$$

$$\nu^c \equiv \mathcal{C}\overline{\nu}^T, \mathcal{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2 \quad (1.56)$$

である。 ν^c は ν の荷電共役である。一般に Majorana 質量行列は対称性行列である。なぜなら、フェルミオンの反交換関係と、 $\mathcal{C}^T = -\mathcal{C}$ より

$$m_{\alpha\beta}^M\overline{\nu_{\alpha L}}\nu_{\beta L}^c = m_{\alpha\beta}^M(\overline{\nu_{\alpha L}})_i\mathcal{C}_{ij}(\overline{\nu_{\beta L}})_j \quad (1.57)$$

$$= -m_{\alpha\beta}^M(\overline{\nu_{\beta L}})_j(\mathcal{C}^T)_{ji}(\overline{\nu_{\alpha L}})_i \quad (1.58)$$

$$= m_{\alpha\beta}^M\overline{\nu_{\beta L}}\mathcal{C}\overline{\nu_{\alpha L}} \quad (1.59)$$

$$= m_{\beta\alpha}^M\overline{\nu_{\alpha L}}\nu_{\beta L}^c \quad (1.60)$$

となるためである。付録 A で示すように、複素対称行列はユニタリー行列を用いて要素が正の対角行列に変換できるので、

$$V_{\nu L}\nu'_L = \nu_L, \quad (1.61)$$

$$V_{\nu L}^\dagger m^M V_{\nu L}^* = M^{\text{diag}} \quad (1.62)$$

と書ける。

結局、Dirac、Majorana のどちらの質量項でも、

$$j_W^\mu = 2\overline{\nu'_L}\gamma^\mu V_{\nu L}^\dagger V_{lL}l'_L = 2\overline{\nu'_L}\gamma^\mu U^\dagger l'_L \quad (1.63)$$

となる。すなわち、荷電カレント相互作用により、世代間混合が起きる。その混合を表す行列

$$U \equiv V_{lL}^\dagger V_{\nu L} \quad (1.64)$$

は牧-中川-坂田 (MNS) 行列、またはレプトン混合行列と呼ばれ、クォークの混合を表す Cabibbo-小林-益川 (CKM) 行列に対応している。

以上では一般の m^l から出発して質量行列の対角化を議論した。以降は、荷電レプトンの質量行列について対角化されている場合を考える。すなわち、ラグランジアン (1.21) で

$$L_L \rightarrow V_{lL} L_L \quad (1.65)$$

$$l_R \rightarrow V_{lR} l_R \quad (1.66)$$

とする。このとき、ニュートリノの弱い相互作用の固有状態 $\nu_\alpha, \alpha = e, \mu, \tau$ と質量固有状態 $\nu'_k, k = 1, 2, 3$ の関係は

$$\nu_L = U \nu'_L \quad (1.67)$$

$$U^\dagger m^M U^* = m^{\text{diag}} \quad (1.68)$$

となる。

U はユニタリ行列なので、独立なパラメータは $N_g \times N_g = 9$ 個ある ($N_g = 3$ は左巻きレプトンの世代数を表す)。そのうち、回転を表すパラメータは $N_g(N_g - 1)/2 = 3$ 個である。残りは位相の自由度であるが、Dirac ニュートリノの場合、 $2N_g - 1 = 5$ 個は $\nu_{\alpha L}$ と $l_{\alpha L}$ の位相によって吸収できる。1 引いているのは、これらの場に共通の位相回転はフレーバー空間で単位行列に比例しており、 U はかわらない事による。この $U(1)$ 対称性はレプトン数の保存に対応する。結果として残った位相は、

$$N_g^2 - \frac{1}{2}N_g(N_g - 1) - (2N_g - 1) = \frac{1}{2}(N_g - 1)(N_g - 2) = 1(\text{個}) \quad (1.69)$$

である。これは Dirac 位相と呼ばれる。Majorana ニュートリノの場合は、 $\nu_{\alpha L}$ の位相の自由度は無いので、MNS 行列の位相は

$$N_g^2 - \frac{1}{2}N_g(N_g - 1) - N_g = \frac{1}{2}N_g(N_g - 1) = 3(\text{個}) \quad (1.70)$$

残る。このうち Dirac 位相でないものは $N_g - 1 = 2$ 個で、Majorana 位相と呼ばれる。

以上の議論から U は次のようパラメータ化できる。

$$U \equiv U^D D^M \quad (1.71)$$

$$U^D = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & c_{13}s_{12} & e^{-i\delta}s_{13} \\ -c_{23}s_{12} - e^{i\delta}c_{12}s_{13}s_{23} & c_{12}c_{23} - e^{i\delta}s_{12}s_{13}s_{23} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - e^{i\delta}c_{12}c_{23}s_{13} & -e^{i\delta}c_{23}s_{12}s_{13} - c_{12}s_{23} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

$$c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}, \quad s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij} \quad (1.73)$$

$$D^M = \text{diag}(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, 1) \quad (1.74)$$

θ_{ij} は混合角、 δ は Dirac 位相、 $\lambda_{1,2}$ は Majorana 位相を表している。次節で説明する、ニュートリノ振動の実験から得られた結果を表 1.2 にまとめた。質量差のパラメータは

$$\delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2, \quad (1.75)$$

$$\Delta m^2 \equiv m_3^2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} \quad (1.76)$$

と定義している。順階層 (Normal Hierarchy, NH) の場合 $\Delta m^2 > 0$ 、逆階層 (Inverted Hierarchy, IH) の場合 $\Delta m^2 < 0$ であるが表には絶対値を記している。

表 1.2: 3 世代のニュートリノ振動解析の結果 [9]。

パラメータ	最適値	1σ	3σ
$\delta m^2/10^{-5}\text{eV}^2$	7.54	$7.32 - 7.80$	$6.99 - 8.18$
$\sin^2 \theta_{12}/10^{-1}$	3.08	$2.91 - 3.25$	$2.59 - 3.59$
$\Delta m^2/10^{-3}\text{eV}^2(\text{NH})$	2.44	$2.38 - 2.52$	$2.22 - 2.66$
$\Delta m^2/10^{-3}\text{eV}^3(\text{IH})$	2.40	$2.33 - 2.47$	$2.17 - 2.61$
$\sin^2 \theta_{13}/10^{-2}(\text{NH})$	2.34	$2.16 - 2.56$	$1.77 - 2.97$
$\sin^2 \theta_{13}/10^{-2}(\text{IH})$	2.39	$2.18 - 2.60$	$1.78 - 3.00$
$\sin^2 \theta_{23}/10^{-1}(\text{NH})$	4.25	$3.98 - 4.54$	$3.57 - 6.41$
$\sin^2 \theta_{23}/10^{-1}(\text{IH})$	4.37	$4.08 - 4.96 \oplus 5.31 - 6.10$	$3.63 - 6.59$
$\delta/\pi(\text{NH})$	1.39	$1.12 - 1.72$	—
$\delta/\pi(\text{IH})$	1.35	$0.96 - 1.59$	—

1.2.2 ニュートリノ振動

ニュートリノ振動とは、ニュートリノが生成した時と異なるフレーバーに移り変わる現象を言う。本節ではシュレーディンガー描像を用いてその振動確率を求め、それがニュートリノの質量の 2 乗の差に依存する事を示す。

前小節で見たように、弱い相互作用の固有状態と質量固有状態は異なる。(1.67) より、消滅、生成演算子は

$$a_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} a_i, \quad a_\alpha^\dagger = \sum_i U_{\alpha i} a_i^\dagger \quad (1.77)$$

なので、状態ベクトルは次のように重ね合わせで書ける。

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu'_k\rangle \quad (1.78)$$

U の複素共役が現れていることに注意する。系のハミルトニアン \mathcal{H} を自由運動の部分 \mathcal{H}_0 と相互作用の部分 \mathcal{H}_1 に分けると、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (1.79)$$

$$\mathcal{H}_0 |\nu_k\rangle = E_k |\nu_k\rangle, \quad E_k = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (1.80)$$

$$\mathcal{H}_1 |\nu_\alpha\rangle = V_\alpha |\nu_\alpha\rangle \quad (1.81)$$

となる。時間発展は次の式に従う。

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\alpha\rangle = \mathcal{H} |\nu_\alpha\rangle, \quad |\nu_\alpha(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle \quad (1.82)$$

時刻 $t = 0$ につくられた ν_α が、時刻 t に ν_β に遷移する確率振幅及び確率は

$$\psi_{\alpha\beta}(t) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle, \quad \psi_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.83)$$

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = |\psi_{\alpha\beta}|^2 \quad (1.84)$$

である。よって遷移振幅の時間発展は

$$i \frac{d}{dt} \psi_{\alpha\beta} = \langle \nu_\beta | \mathcal{H} | \nu_\alpha \rangle \quad (1.85)$$

$$= \left(\sum_k \langle \nu'_k | U_{\beta k} \mathcal{H}_0 + \langle \nu_\beta | \mathcal{H}_1 \right) | \nu_\alpha \rangle \quad (1.86)$$

$$= \left(\sum_k \langle \nu'_k | U_{\beta k} E_k + \langle \nu_\beta | V_\beta \right) | \nu_\alpha \rangle \quad (1.87)$$

$$= \left(\sum_k \sum_\eta \langle \nu_\eta | U_{\eta k}^* U_{\beta k} E_k + \langle \nu_\beta | V_\beta \right) | \nu_\alpha \rangle \quad (1.88)$$

$$= \sum_\eta \left(\sum_k U_{\beta k} E_k U_{\eta k}^* + \delta_{\beta\eta} V_\beta \right) \psi_{\alpha\eta} \quad (1.89)$$

となる。この式から、ニュートリノ振動の振動確率は Majorana 位相には依らない事が分かる。実際、

$$U_{\beta k} E_k U_{\eta k}^* = (U^D D^M)_{\beta k} E_k (U^D D^M)_{\eta k}^* \quad (1.90)$$

$$= U_{\beta k}^D e^{i\lambda_k} E_k U_{\eta k}^{D*} e^{-i\lambda_k} \quad (1.91)$$

$$= U_{\beta k}^D E_k U_{\eta k}^{D*} \quad (1.92)$$

となり、Majorana 位相の因子は消える。

以下ではニュートリノが超相対論的な場合 ($E_k \gg m_k$) を考える。このとき、

$$p \simeq E, \quad E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E}, \quad t \simeq x \quad (1.93)$$

と近似できる。 x は生成した点からの距離である。このとき、遷移振幅の時間発展は

$$i \frac{d}{dx} \psi_{\alpha\beta} = \left(p + \frac{m_1^2}{2E} \right) + \sum_\eta \left(\sum_k U_{\beta k} \Delta_{k1} U_{\eta k}^* + \delta_{\beta\eta} V_\beta \right) \psi_{\alpha\eta} \quad (1.94)$$

$$\Delta_{kj} \equiv \frac{m_k^2 - m_j^2}{2E} \quad (1.95)$$

となる。第一項は全てのフレーバーに共通であり、次のように位相をずらす事によって吸収できる。

$$\psi_{\alpha\beta}(x) \rightarrow \psi_{\alpha\beta}(x) e^{-i(p+m_1^2/2E)x}, \quad (1.96)$$

$$i \frac{d}{dx} \psi_{\alpha\beta} = \sum_\eta \left(\sum_k U_{\beta k} \Delta_{k1} U_{\eta k}^* + \delta_{\beta\eta} V_\beta \right) \psi_{\alpha\eta} \quad (1.97)$$

この式から、振動確率は質量の 2 乗の差に依存する事が分かる。ニュートリノ振動実験のみでは質量の絶対値は求まらない。

簡単のため 2 種類のニュートリノの間の振動を考える。このとき、混合行列は

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

と書けるので、

$$\Psi_\alpha(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\alpha\alpha} \\ \psi_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (1.99)$$

とおくと、(1.97) は

$$i \frac{d}{dx} \Psi_\alpha \quad (1.100)$$

$$= (U \Delta U^\dagger + V) \Psi_\alpha \quad (1.101)$$

$$= \left\{ \Delta_{21} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_\alpha & 0 \\ 0 & V_\beta \end{pmatrix} \right\} \Psi_\alpha \quad (1.102)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \Delta_{21} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 1 + \cos 2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_\alpha + V_\beta & 0 \\ 0 & V_\alpha + V_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_\alpha - V_\beta & 0 \\ 0 & -(V_\alpha - V_\beta) \end{pmatrix} \right\} \Psi_\alpha \quad (1.103)$$

となる。振動に寄与しない共通の位相をずらす。

$$\Psi_\alpha(x) \rightarrow \Psi_\alpha(x) \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left(\Delta_{21} + \int_0^x (V_\alpha + V_\beta) dx' \right) \right\} \quad (1.104)$$

結局解くべき式は

$$i \frac{d}{dx} \Psi_\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \Delta_{21} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + \delta V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \Psi_\alpha \quad (1.105)$$

$$\equiv H_F \Psi_\alpha, \quad (1.106)$$

$$\delta V \equiv V_\alpha - V_\beta \quad (1.107)$$

となる。 H_F は実対称行列であり、実直交行列を用いて対角化できる。

$$\Psi_\alpha \equiv U_M \Psi'_\alpha \quad (1.108)$$

$$U_M^T H_F U_M = H_M \quad (1.109)$$

$$= \frac{\Delta_M}{2} \text{diag}(-1, 1) \quad (1.110)$$

$$\Delta_M = \sqrt{(\Delta_{21} \cos(2\theta) - \delta V)^2 + (\Delta_{21} \sin 2\theta)^2} \quad (1.111)$$

$$U_M = \begin{pmatrix} \cos \theta_M & \sin \theta_M \\ -\sin \theta_M & \cos \theta_M \end{pmatrix} \quad (1.112)$$

$$\tan 2\theta_M = \frac{\tan 2\theta}{1 - \frac{\delta V}{\Delta \cos 2\theta}} \quad (1.113)$$

この Ψ'_α を用いると、(1.105) は次のように書き直せる。

$$i \frac{d}{dx} \Psi'_\alpha + i U_M^T \left(\frac{d}{dx} U_M \right) \Psi'_\alpha = \frac{\Delta_M}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi'_\alpha \quad (1.114)$$

真空中や一様な物質、一様な熱浴中（2.3.2節で考える）など、ニュートリノの軌道上でポテンシャル $\delta V(x)$ の変化が無視できる場合、左辺第二項は0となる。そのときは簡単に解く事ができ、

$$\Psi'_\alpha(x) = \begin{pmatrix} e^{i\Delta_M/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta_M/2} \end{pmatrix} \Psi'_\alpha(0) \quad (1.115)$$

$$\Rightarrow \Psi_\alpha(x) = U \begin{pmatrix} e^{i\Delta_M/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta_M/2} \end{pmatrix} U^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\Delta_M/2} \cos^2 \theta_M + e^{-i\Delta_M/2} \sin^2 \theta_M \\ (-e^{i\Delta_M/2} + e^{-i\Delta_M/2}) \sin \theta_M \cos \theta_M \end{pmatrix} \quad (1.117)$$

結局、ニュートリノのフレーバーが α から β になる確率は

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(x) = |(-e^{i\Delta_M/2} + e^{-i\Delta_M/2}) \sin \theta_M \cos \theta_M|^2 \quad (1.118)$$

$$= \sin^2 2\theta_M \sin^2 \frac{\Delta_M x}{2} \quad (1.119)$$

$$= \frac{\Delta_{21}^2}{\Delta_M^2} \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta_M x}{2} \quad (1.120)$$

と求まる。

真空中では、 $V = 0$ であるから、

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(x) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta_{21} x}{2} \quad (1.121)$$

となる。すなわち、ニュートリノに質量の差が無ければニュートリノ振動は起きない。

1.2.3 物質中の有効ポテンシャル

ここで、物質中でのポテンシャル V_α の具体的な形を求める。

まず、ニュートリノと物質中の電子との相互作用を考える。有効ラグランジアン (1.41) より、低エネルギーでの荷電カレント相互作用のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_{eff}^{CC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(x) \gamma^\rho (1 - \gamma^5) e(x)] [\bar{e}(x) \gamma_\rho (1 - \gamma^5) \nu_e(x)] \quad (1.122)$$

となる。これに Fierz 変換を施すと

$$\mathcal{H}_{eff}^{CC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(x) \gamma^\rho (1 - \gamma^5) \nu_e(x)] [\bar{e}(x) \gamma_\rho (1 - \gamma^5) e(x)] \quad (1.123)$$

となり、電子の運動量分布について平均化すると

$$\overline{\mathcal{H}_{eff}^{CC}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(x) \gamma^\rho (1 - \gamma^5) \nu_e(x)] \int d^3p f(E, T) \frac{1}{2} \sum_{h=\pm} \langle e(p, h) | \bar{e}(x) \gamma_\rho (1 - \gamma^5) e(x) | e(p, h) \rangle \quad (1.124)$$

$$|e(p, h)\rangle \equiv \frac{1}{2EV} a^{h\dagger}(p) |0\rangle \quad (1.125)$$

となる。\$V\$ はある有限の体積で、電子の分布関数は次のように規格化されている。

$$\int d^3p f(E, T) = n_e V \quad (1.126)$$

\$n_e\$ は物質中の電子の数密度である。ヘリシティの平均をとると

$$\frac{1}{2} \sum_{h=\pm} \langle e(p, h) | \bar{e}(x) \gamma_\rho (1 - \gamma^5) e(x) | e(p, h) \rangle \quad (1.127)$$

$$= \frac{1}{4EV} \sum_{h=\pm} \overline{u^h(p)} \gamma_\rho (1 - \gamma^5) u^h(p) \quad (1.128)$$

$$= \frac{1}{4EV} \text{Tr}[(\not{p} + m_e) \gamma_\rho (1 - \gamma^5)] \quad (1.129)$$

$$= \frac{p_\rho}{EV} \quad (1.130)$$

となるので

$$\overline{\mathcal{H}_{eff}^{CC}}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(x) \left(\int d^3p f(E, T) \frac{\not{p}}{EV} \right) (1 - \gamma^5) \nu_e(x) \quad (1.131)$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}V} \bar{\nu}_e(x) \left(\int d^3p f(E, T) \left(\gamma^0 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\gamma}}{E} \right) \right) (1 - \gamma^5) \nu_e(x) \quad (1.132)$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e(x) (n_e \gamma^0) (1 - \gamma^5) \nu_e(x) \quad (1.133)$$

$$\equiv V_{CC} \bar{\nu}_{eL}(x) \gamma^0 \nu_{eL}(x) \quad (1.134)$$

となる。よって電子ニュートリノの荷電カレント相互作用のポテンシャルは

$$V_{CC} = \sqrt{2} G_F n_e \quad (1.135)$$

となる。各フレーバーの中性カレント相互作用に付いても同様に計算をすると、

$$V_{NC} = -\frac{1}{2} \sqrt{2} G_F n_n \quad (1.136)$$

\$n_n\$ は中性子の数密度である。物質中の電子との中性カレント相互作用は、陽子との中性カレント相互作用によってキャンセルされる。結果、\$\nu_\alpha\$ の物質中のポテンシャルとして

$$V_\alpha = V_{CC} \delta_{\alpha e} + V_{NC} \quad (1.137)$$

$$= \sqrt{2} G_F \left(n_e \delta_{\alpha e} - \frac{1}{2} n_n \right) \quad (1.138)$$

が得られる。\$\alpha = e\$ と他のフレーバー間でずれが生じていることがわかる。

1.2.4 標準模型を拡張する必要性

以上で説明したニュートリノ振動は、実験で確認されており、表 1.2 のようにニュートリノに質量がある事が分かっている。しかし標準模型ではニュートリノは質量を持たない。

まず、Dirac 質量項 (1.52) は、標準模型に右巻きニュートリノ ν_R が存在しないため書く事ができない。また、Majorana 質量項 (1.55) は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性を破っている。例えば、

$$L_L \rightarrow e^{i\alpha} L_L \quad (1.139)$$

という $U(1)$ 変換を考えると、Majorana 質量項は

$$\overline{\nu_L^c} \nu_L \rightarrow e^{2i\alpha} \overline{\nu_L^c} \nu_L \quad (1.140)$$

となり不変でない。標準模型に含まれる場のみで質量項を書くと

$$\frac{f_{ij}}{M} \overline{L_L^i} \tilde{\Phi} \tilde{\Phi}^T L_L^{jc} \quad (\tilde{\Phi} \equiv i\tau_2 \Phi) \quad (1.141)$$

となる。この項は場の積の質量次元が5であり、繰込み不可能である。以上より、標準模型ではニュートリノは質量を持っていないことがわかる。また、この項が未知の量子重力が重要となると考えられる Planck スケール $M_P = 2.4 \times 10^{18}$ GeV [8] から来ると考えると、ニュートリノ質量は

$$\sim \frac{v^2}{M_P} = \frac{(174 \text{ GeV})^2}{2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}} = 1.3 \times 10^{-5} \text{ eV} \quad (1.142)$$

となり、観測値よりも小さすぎる。よって M_P よりも小さなスケールが必要である。ニュートリノの質量項の由来については第2章で扱う。

1.3 バリオン非対称性

1.3.1 宇宙のバリオン数

現在の宇宙は、少なくとも観測可能な範囲では物質からできており、反物質はほぼ存在しない。Planck 衛星による宇宙背景放射の観測から、現在の宇宙でのバリオンのエネルギー比は [10]

$$\Omega_b h^2 = 0.02205 \pm 0.0028 \quad (1.143)$$

と分かっている。ただし、 h と Ω_i は

$$H_0 \equiv 100 h \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc}), \quad (1.144)$$

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{cr}}, \quad (1.145)$$

$$\rho_{cr} \equiv 3M_p^2 H_0^2 = 1.878 \times 10^{-29} h^2 \text{ g}/\text{cm}^3 \quad (1.146)$$

と定義される。 ρ_i は i のエネルギー密度である。 H は宇宙膨張のレート (Hubble レート) で、宇宙のスケール因子を $a(t)$ とおくと

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.147)$$

で定義される。ここでドット記号は時間微分、添字の 0 は現在の量である事を意味する。

バリオンの量の別の表し方として、エントロピー比

$$Y_{B0} \equiv \frac{n_{B0}}{s_0} = 0.86 \times 10^{-10} \quad (1.148)$$

がよく用いられる。 n_B はバリオン数密度、 s はエントロピー密度で、 $s_0=2889\text{cm}^{-3}$ である。バリオン数とエントロピーが保存しているとき、

$$n_B \propto a^{-3} \quad (1.149)$$

$$s \propto a^{-3} \quad (1.150)$$

であるから、 Y_B は宇宙膨張では変化しない。

バリオン数を生成するための条件として、Sakharov の条件と呼ばれる次の3条件がある [11]。

1. バリオン数 B の非保存

バリオン数の初期条件は0であるので、バリオン数を増やすためにこれは必要である。

2. C と CP 対称性の破れ

もし C, CP が破れていない場合、ある反応と同じだけの反応が反物質についても起きるため、バリオン数が生成できない。

3. 平衡からのずれ

熱平衡においては、粒子の数密度はその粒子の質量と化学ポテンシャルで決まる。 B が保存していないときは化学ポテンシャルは0である。また CPT 定理により粒子と反粒子の質量は等しいので、数密度も等しくなる。結果バリオン数は生成しない。

標準模型の枠内でバリオン数を説明する試みとして電弱バリオジェネシスと呼ばれるモデルがある [12,13]。バリオン数は量子異常（次小節及び付録D 参照）の効果により破れており、 C と CP は弱い相互作用で破れている。しかし、3番目の条件の平衡からのずれが説明できていない。電弱バリオジェネシスでは、平衡からのずれを起こすために Higgs 場の相転移を用いる。平衡からずれるには相転移が一次相転移である必要があるが、これは Higgs 粒子の質量が 80 GeV 程度より小さいときに起きる。実際には 126 GeV 程度であるから、一次相転移ではない。また、 CP の破れも小さすぎる事が分かっており、標準模型では十分なバリオン数を生成できない [6]。よって標準模型を超えるモデルは、 CP の破れと平衡からのずれを説明できる必要がある。

1.3.2 バリオン数の非保存

本小節では、標準模型においてバリオン数が保存しない事を見る。

バリオンカレント及びレプトンカレントは次の式で定義される。

$$j_B^\mu = \frac{1}{3} \sum (\overline{Q}_L \gamma^\mu Q_L + \overline{q}_R^U \gamma^\mu q_R^U + \overline{q}_R^D \gamma^\mu q_R^D) \quad (1.151)$$

$$j_L^\mu = \sum (\overline{L}_L \gamma^\mu L_L + \overline{l}_R \gamma^\mu l_R) \quad (1.152)$$

和は世代と（クォークのみ）カラーについてとる。量子化を考えない場合、一般の Dirac スピノル ψ について、Dirac 方程式を用いると

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi \quad (1.153)$$

$$= (\not{\partial}\psi)^\dagger\gamma^0\psi + \bar{\psi}\not{\partial}\psi \quad (1.154)$$

$$= i(m - m)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.155)$$

$$= 0 \quad (1.156)$$

となるので、

$$\partial_\mu j_B^\mu = 0, \partial_\mu j_L^\mu = 0 \quad (1.157)$$

である。よって、次の式で定義されるバリオン数とレプトン数は古典的な段階では保存する。

$$B \equiv \int d^3x j_B^0, L \equiv \int d^3x j_L^0 \quad (1.158)$$

しかし、場の量子化を行うと、付録 D で説明する量子異常によって保存則は破れる。

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = \frac{N_g}{32\pi^2} g^2 \text{tr} [W_{\mu\nu} \tilde{W}_{\mu\nu}] \quad (1.159)$$

$$\tilde{W}_{\mu\nu}^a \equiv \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} W^{a\lambda\sigma} \quad (1.160)$$

N_g は世代数である。この式から、 $B - L$ は保存するが、 $B + L$ は保存しない事が分かる。 $x_4 \equiv ix_0$ で積分して

$$\int d^4x \partial_\mu j_B^\mu = \int d^4x j_{B+L}^0 \Big|_{x_4=+\infty} - \int d^4x j_{B+L}^0 \Big|_{x_4=-\infty} \quad (1.161)$$

$$= B|_{x_4=+\infty} - B|_{x_4=-\infty} \quad (1.162)$$

$$\equiv \Delta B \quad (1.163)$$

となる。レプトン数 L についても同様である。一方、(1.159) の右辺の積分は

$$\int d^4x \frac{N_g}{32\pi^2} g^2 \text{tr} [W_{\mu\nu} \tilde{W}_{\mu\nu}] = N_g n \quad (1.164)$$

となる [6]。 n はゲージ場の配位によって決まる整数であり、巻き付き数と呼ばれる。付録 E を参照。よって B, L の変化は

$$\Delta B = \Delta L = N_g n \quad (1.165)$$

となる。

この $B + L$ を変化はインスタントンと呼ばれるゲージ場の配位により引き起こされる [14, 15]。その変化のレートには

$$\Gamma \propto |e^{-S(\text{instanton})}|^2 = e^{-16\pi^2/g^2} \quad (1.166)$$

の係数がかかる。ここで (1.35) と観測値 [8] を用いて、

$$\frac{g^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi \sin^2 \theta_W} \simeq \frac{1}{137 \times 0.232} = \frac{1}{31.8} \quad (1.167)$$

より、

$$\Gamma \propto e^{-4\pi \times 31.8} = e^{-400} = 10^{-173} \quad (1.168)$$

と非常に小さい。しかしながら、温度が高い場合にはこの抑制がなくなる。

1.3.3 バリオン数とレプトン数

温度が 100 GeV 程度以上の時、スファレロンと呼ばれるゲージ場の配位によってバリオン数 B とレプトン数 L は抑制されずに変化する¹ [16]。 (1.159) から分かるように差 $B - L$ は保存する。以下ではバリオン数 B を生成するためには $B - L$ 量子数が 0 でなければ良いことを示す [21, 22]。スファレロン過程が起こる温度では、標準模型に含まれる粒子は全て相対論的 ($\sqrt{p^2 + m^2} \simeq p$) である。よって粒子 i の数密度は

$$n_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi^3)} \frac{1}{e^{(p-\mu_i)/T} \mp 1} \quad (1.169)$$

$$= g_i \frac{T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x-\mu_i/T} \mp 1} \quad (1.170)$$

と表せる。 μ_i は化学ポテンシャル、 \mp はボソンのとき $-$ 、フェルミオンのとき $+$ をとる。粒子と反粒子が対消滅によりゲージボソン（化学ポテンシャルは 0）になる過程が平衡に達しているので、粒子 i の反粒子の化学ポテンシャルは $-\mu_i$ である。粒子と反粒子の数密度の差は

$$n_i - \bar{n}_i = g_i \frac{T^3}{2\pi^2} \int_0^\infty x^2 dx \frac{e^{x+\mu_i/T} \mp 1 - (e^{x-\mu_i/T} \mp 1)}{(e^{x-\mu_i/T} \mp 1)(e^{x+\mu_i/T} \mp 1)} \quad (1.171)$$

$$= g_i \frac{T^3}{\pi^2} \sinh \frac{\mu_i}{T} \int_0^\infty \frac{e^x x^2 dx}{(e^{2x} \mp 2 \cosh \frac{\mu_i}{T} + 1)} \quad (1.172)$$

である。バリオン数の非対称性は、(1.148) から分かるように非常に小さい。そのため、

$$\frac{|\mu_i|}{T} \ll 1 \quad (1.173)$$

の近似ができるので、

$$n_i - \bar{n}_i = g_i \frac{T^3}{\pi^2} \frac{\mu_i}{T} \int_0^\infty \frac{e^x x^2 dx}{(e^x \mp 1)^2} \quad (1.174)$$

$$= g_i \frac{T^2}{\pi^2} \mu_i \int_0^\infty dx x^2 \left(\frac{-1}{e^x \mp 1} \right)' \quad (1.175)$$

$$= 2g_i \frac{T^2}{\pi^2} \mu_i \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x \mp 1} \quad (1.176)$$

$$= f(T) \tilde{g}_i \mu_i \quad (1.177)$$

となる。ただし

$$\zeta(2) \left(= \frac{\pi^2}{6} \right) = \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} \quad (1.178)$$

$$= \int_0^\infty dx \frac{x}{(e^{x/2} - 1)(e^{x/2} + 1)} \quad (1.179)$$

$$= \int_0^\infty dx \frac{x}{2} \left(\frac{1}{e^{x/2} - 1} - \frac{1}{e^{x/2} + 1} \right) \quad (1.180)$$

$$= 2 \int_0^\infty dy y \left(\frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^y + 1} \right) \quad (1.181)$$

¹ スファレロン過程は標準模型で予言されるものであるが、実験的には観測されていない。重心系のエネルギーが 9 TeV 程度以上の加速器実験では、この過程は抑制されていない可能性が有る。その反応断面積の議論は古くからあるが [17–19]、近年再び活発化している [20]。

より

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \zeta(2) \quad (1.182)$$

であることを用い、

$$f(T) \equiv \frac{T^2}{6} \quad (1.183)$$

$$\tilde{g}_i \equiv \begin{cases} 2g_i & \text{ボソン} \\ g_i & \text{フェルミオン} \end{cases} \quad (1.184)$$

とおいた。粒子 i の化学ポテンシャルは、その粒子の保存量 q_{ai} の線形結合で

$$\mu_i = \sum_a q_{ai} \mu_a \quad (1.185)$$

のように表せる事を用いると、保存量 a の数密度は

$$n_a = \sum_i q_{ai} (n_i - \bar{n}_i) \quad (1.186)$$

$$= \sum_i q_{ai} f(T) \tilde{g}_i \mu_i \quad (1.187)$$

$$= \sum_i q_{ai} f(T) \tilde{g}_i \sum_b q_{bi} \mu_b \quad (1.188)$$

$$= f(T) \sum_b M_{ab} \mu_b, \quad (1.189)$$

$$M_{ab} \equiv \sum_i \tilde{g}_i q_{ai} q_{bi} \quad (1.190)$$

となるから、逆に解くと

$$\mu_a = \frac{1}{f(T)} \sum_b M_{ab}^{-1} n_b \quad (1.191)$$

と書けるので、

$$n_i - \bar{n}_i = f(T) \tilde{g}_i \sum_a q_{ai} \frac{1}{f(T)} \sum_b M_{ab}^{-1} n_b \quad (1.192)$$

$$= \tilde{g}_i \sum_{a,b} q_{ai} M_{ab}^{-1} n_b \quad (1.193)$$

となる。

表 1.1 より、

$$M_{B-L \ B-L} = N_g \times 3 \times 2 \times 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + N_g \times (2+1) \times (-1)^2 \quad (1.194)$$

$$= \frac{13}{3} N_g \quad (1.195)$$

$$M_{B-L \ Y} = -\frac{8}{3} N_g \quad (1.196)$$

$$M_{Y \ Y} = \frac{10}{3} N_g + N_H \quad (1.197)$$

$$M_{B-L \ T_3} = M_{Y \ T_3} = 0 \quad (1.198)$$

となる。ただし、 N_g は世代数、 N_H はヒッグス二重項の数を表す。 M はブロック対角である事から、逆行列のうち $B-L$ と Y が関わる部分は

$$M_{B-L B-L}^{-1} = \frac{1}{D} \left(\frac{10}{3} N_g + N_H \right) \quad (1.199)$$

$$M_{B-L Y}^{-1} = \frac{8N_g}{3D} \quad (1.200)$$

$$M_{Y Y}^{-1} = \frac{13N_g}{3D}, \quad (1.201)$$

$$D = M_{B-L B-L} M_{Y Y} - M_{B-L Y}^2 \quad (1.202)$$

$$= \frac{22}{3} N_g^2 + \frac{13}{3} N_g N_H \quad (1.203)$$

となる。ここで、保存量のうち $B-L$ のみが0でないと仮定する。すなわち

$$\sum_i Y_i(n_i - \bar{n}_i) = 0, \quad \sum_i T_{3i}(n_i - \bar{n}_i) = 0 \quad (1.204)$$

とする。このとき、(1.193) よりバリオン数密度は

$$n_B \equiv \sum_i B_i(n_i - \bar{n}_i) \quad (1.205)$$

$$= \sum_i \tilde{g}_i B_i \{ (B-L)_i M_{B-L B-L} + Y_i M_{Y B-L}^{-1} \} n_{B-L} \quad (1.206)$$

$$= \left(\frac{4}{3} M_{B-L B-L}^{-1} - \frac{2}{3} M_{Y B-L}^{-1} \right) N_g n_{B-L} \quad (1.207)$$

$$= \frac{8N_g + 4N_H}{22N_g + 13N_H} n_{B-L} \quad (1.208)$$

となる。この式から、 B と $B-L$ は同程度の大きさである事が分かる。特に、 $N_g = 3$, $N_H = 1$ のとき、

$$n_B = \frac{28}{79} n_{B-L} \quad (1.209)$$

である。 n_{B-L} はスファレロン過程では保存するので、スファレロン過程によってバリオン数を生成するためには n_{B-L} が0でなければ良いことがわかる。本論文で特に重要なのは、バリオン数が初め0でもレプトン数が存在すればスファレロン過程によりバリオン数が生成される点である。2.2節では、レプトン数を作り、それをこのスファレロン過程によりバリオン数に変換することを考える。

1.4 暗黒物質

1.4.1 観測

銀河や銀河団の観測、構造形成、宇宙背景放射 (CMB)、ビッグバン元素合成等、様々な理由から宇宙にはバリオンではない物質がある事が分かっており、これを暗黒物質と呼ぶ。

銀河や銀河団がどのような物質から成るのかの指標として、質量光度比 (M/L) がある。通常は太陽の値で規格化されたものを用いる。

$$M/L \equiv \frac{M/M_\odot}{L/L_\odot} \quad (1.210)$$

定義から太陽の M/L は 1 であり、例えば銀河の質量の大部分が太陽のような恒星からなるのであれば、 $M/L \sim O(1)$ となる事が期待できる。1933 年に Zwicky は、かみのけ座銀河団の質量光度比が渦巻銀河の 400 倍であることを見積もった [23]。すなわち、銀河団の質量は銀河のように光る物質の和では説明できないという事であり、暗黒物質の存在が示唆された最初の例である。また銀河系についても、円盤の明るさは $1.4 \times 10^{10} L_\odot$ 、質量は球状星団や衛星銀河の運動から $1 \times 10^{12} M_\odot$ と見積もられているので、 $M/L=70$ となり、銀河系の質量の大半は太陽のような星ではない [26]。矮小楕円体銀河では Coma Berenices が 448 ± 297 、Ursa Major が 1024 ± 636 等、非常に大きい [24]。このため、暗黒物質の性質への制限によく用いられる (2.3.3、2.3.4 節)。

弾丸銀河団 (1E0657-558, $z=0.296$) から暗黒物質の証拠が得られている [25]。この銀河団は 2 つの銀河団が衝突してできたと考えられている。X 線観測から分かる熱いガスの分布と重力レンズ効果から分かる質量の分布はずれている。これは衝突の際にバリオンでない物質が他の物質と相互作用せずにすり抜けたことを示唆する。

宇宙における暗黒物質のエネルギー比は、Planck 衛星による宇宙背景放射の温度ゆらぎから、

$$\Omega_{DM} h^2 = 0.1199 \pm 0.0027 \quad (1.211)$$

が得られている [10]。暗黒物質の性質をまとめると以下のようなになる [27]。

1. 既知の物質と強い相互作用及び電磁相互作用をせず、重力相互作用をする
2. 安定、または宇宙年齢と比べて十分長寿命
3. 銀河スケール $\sim 10\text{kpc}$ 以内に局在できる

これらを満たす粒子は標準模型にはニュートリノしか存在しない。次節で、ニュートリノが質量を持つ場合でも、実験で示唆される $0.01 \sim 0.1\text{eV}$ 程では暗黒物質になり得ない事を示す。

1.4.2 ニュートリノの残存量

まず、相対論的に熱浴から分離する粒子の現存量を求める。一般に、粒子 X と熱浴との相互作用レート Γ_{th} が宇宙膨張のレート H が以下になると、X は熱浴から分離する。ニュートリノの場合、

$$\Gamma_{th} \simeq G_F^2 T^5 \quad (1.212)$$

一方放射優勢の時代では

$$H = \sqrt{\frac{1}{3M_p^2} \frac{\pi^2}{30} g_* T^4} = 0.331 \sqrt{g_*} \frac{T^2}{M_p} \quad (1.213)$$

なので、 $H(T_f) = \Gamma_{th}$ より

$$T_f \simeq 3\text{MeV} \quad (1.214)$$

で分離する。 $m_X \ll T_f$ のとき、相対論的な状態で分離する。X はフェルミオンとすると、熱浴にいる粒子の数密度とエントロピー密度は、

$$n_X = g_X \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{p/T} + 1} \quad (1.215)$$

$$= g_X \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T^3, \quad (1.216)$$

$$s = g_* \frac{2\pi^2}{45} T^3 \quad (1.217)$$

$$\Rightarrow Y_X = \frac{g_X}{g_*} \frac{135\zeta(3)}{8\pi^4} \quad (1.218)$$

$\zeta(3)$ は Riemann のゼータ関数で、およそ 1.202 である。 g_* は熱浴にいる粒子の有効自由度で、次式で定義される。

$$g_* \equiv \sum_{i, \text{bosons}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i, \text{fermions}} g_i \quad (1.219)$$

Y_X は宇宙膨張で変化しないので、現在の X のエネルギー比は

$$\Omega_X h^2 = Y_X|_f \frac{M_X s_0 h^2}{\rho_{cr}} \quad (1.220)$$

$$= 0.12 \frac{g_X}{2} \frac{10.75}{g_{*f}} \frac{M_X}{10\text{eV}} \quad (1.221)$$

となる。ただし $s_0 = 2889/\text{cm}^3$ である。

X がニュートリノとすると、

$$g_X = 2, \quad (1.222)$$

$$g_{*f} = g_*(T \sim \text{MeV}) \quad (1.223)$$

$$= g_{\text{光子}} + \frac{7}{8} (2 \times g_{\text{電子}} + 2 \times g_\nu) \quad (1.224)$$

$$= 10.75, \quad (1.225)$$

$$M_X = \sum m_\nu \quad (1.226)$$

となるが、宇宙背景放射の観測より三世代の質量の和は

$$\sum m_\nu < 0.23\text{eV} \quad (1.227)$$

なので [10]、暗黒物質となるには量が足りない事が分かる。

またニュートリノは自由流長が 600Mpc 程度と銀河団のスケール ($\sim \text{Mpc}$) よりも非常に大きい。このため銀河が集まり大きな構造ができていったという観測事実 (暗黒物質の性質の 3) と矛盾する。これら 2つの理由から、標準模型のニュートリノに質量をもたせる拡張をしても、暗黒物質の全ては説明ができない。さらに新粒子などの拡張が必要である。その一つの解決策を 2.3 節で見る。

第2章 右巻きニュートリノの導入

前章で素粒子の標準模型で説明できない現象としてニュートリノの質量、バリオン数非対称性、暗黒物質を説明した。本章では、標準模型に右巻きニュートリノを加える事により、これらの現象が説明可能である事を示す。本章の結果はすべて先行研究のものである。

2.1 ニュートリノ質量

本章ではニュートリノ質量を説明するために右巻きニュートリノを導入する。

2.1.1 シーソー機構

標準模型のゲージ対称性を保ったまま、次のようにゲージ一重項 (表 2.1) の右巻きニュートリノを導入する¹。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_{\nu_R, kin} + \mathcal{L}_{\nu, mass} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_{\nu_R, kin} = \overline{\nu_R} i \not{\partial} \nu_R \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{\nu, mass} = -y_{\alpha I} \overline{L_{L\alpha}} \tilde{\Phi} \nu_{RI} - \frac{M_{RIJ}}{2} \overline{\nu_{RI}^c} \nu_{RJ} + \text{h.c.} \quad (2.4)$$

(2.4) の第一項は他の粒子と同様の Dirac 質量項で、Higgs 二重項 Φ が真空期待値を持つ事で質量項となる ($m_D \equiv yv$)。第二項は Majorana 質量項であり、ゲージ一重項である右巻きニュートリノのみに許され、ニュートリノは Majorana 型となる。 M_{RIJ} は Higgs 二重項の真空期待値とは独立な質量スケールである事に注意する。

Majorana 質量は、ニュートリノ質量を説明するためには必要ではない (Dirac ニュートリノ)。まず最も簡単な場合として、Majorana 質量項が無い場合を考えてみる。このとき、観測されているニュートリノの質量を説明するためには、湯川結合定数が

$$y = m_\nu/v \sim 0.05\text{eV}/174\text{GeV} = 3 \times 10^{-13} \quad (2.5)$$

と非常に小さい必要がある。

ニュートリノが Dirac 型か Majorana 型かは未解決問題であるが、実験による検証が進められている。必要ではないものの、Majorana 質量を導入する動機を以下に挙げる。

¹文献によっては、質量項を

$$-y_{I\alpha} \overline{\nu_{RI}} \tilde{\Phi}^T L_{L\alpha} - \frac{M_{RIJ}}{2} \overline{\nu_{RI}} \nu_{RJ}^c + \text{h.c.} \quad (2.1)$$

で定義しているものもある。その場合は $y \rightarrow y^\dagger$, $M_R \rightarrow M_R^\dagger$ と読み替える。

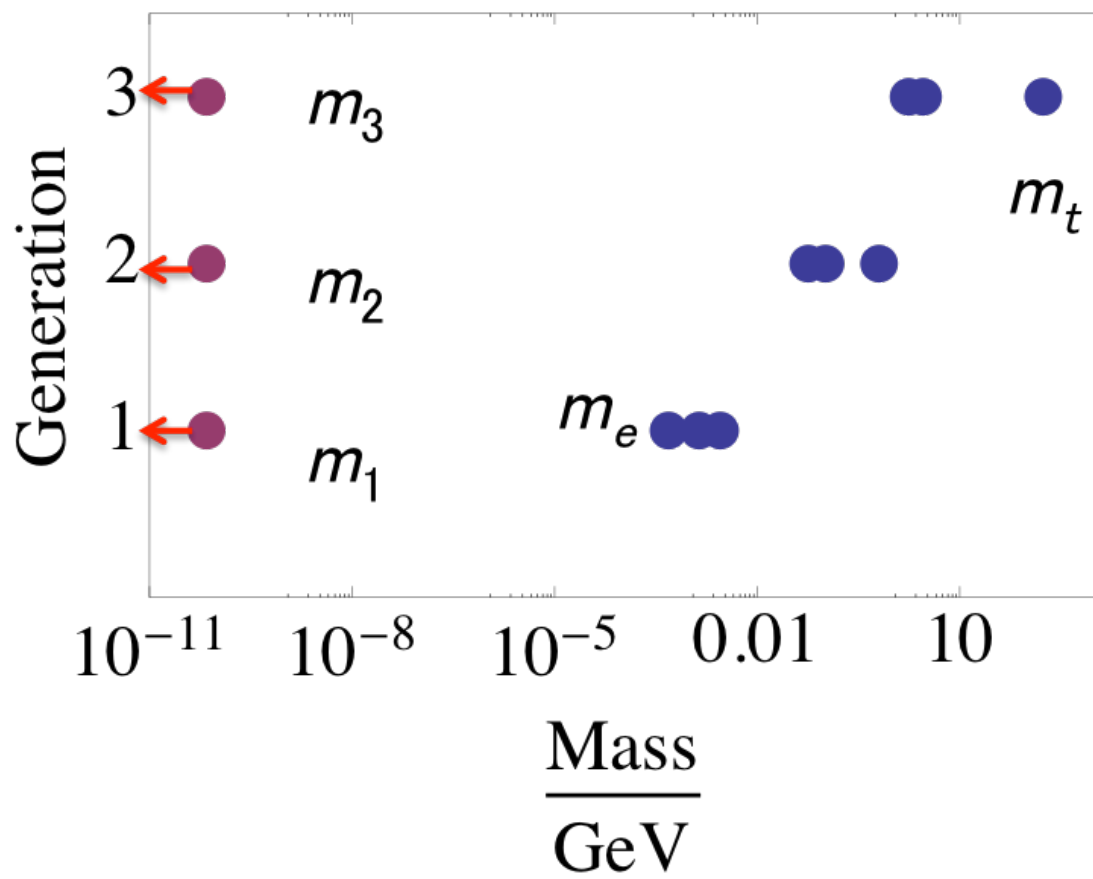


図 2.1: フェルミオンの質量分布の概念図。縦軸は世代、横軸は質量を表す。右側 9 個の青点は荷電レプトンとクォークの質量を表し、左側 3 個の赤点はニュートリノの質量を表す。

表 2.1: 右巻きニュートリノの量子数。記号は 1.1 と同様。

粒子	g	B	L	T_3	Y
ν_R	1	0	0	0	0

1. ニュートリノ質量は他のフェルミオンと比べ非常に小さいため、別の機構が働いている可能性がある (図 2.1)。
2. Dirac ニュートリノのみでは、バリオン数非対称性²や暗黒物質は説明できず、さらなる拡張が必要となる。
3. Majorana 質量項があると、ゲージ変換による量子異常が消える条件からハイパーチャージ Y の値を一意に決めることができるという利点がある。その説明は付録 D で行う。
4. SO(10) 大統一理論 [28, 29] や Pati-Salam 模型 ($SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$) [30] などの標準模型よりも大きな対称性を考える場合、ニュートリノの湯川結合はアップ系列のクォークのものと同一オーダーとなる。もし Majorana 質量項が無ければニュートリノ質量がクォーク質量程度となり、実験と矛盾する。

次に、軽いニュートリノの質量を自然に説明する、シーソー機構を説明する [31]。シーソー機構を良く理解するために、まずは簡単な左巻き及び右巻きのニュートリノが一世代ずつの場合を考える。このとき、ニュートリノの質量項を行列の形で表すと

$$-\mathcal{L}_{\nu, mass} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (2.6)$$

となる。この質量行列の固有値は

$$\frac{1}{2} \left(M_R \pm \sqrt{M_R^2 + 4m_D^2} \right) \quad (2.7)$$

である。ここで $|m_D/M_R| \ll 1$ を仮定する。 M_R は電弱理論のスケールとは無関係であり、未知の高いエネルギースケールに由来があるとすれば自然な仮定である。このとき質量固有値として

$$m_\nu = -\frac{m_D^2}{M_R}(1 + O(\theta^2)), \quad M_N = M_R(1 + O(\theta^2)), \quad (\theta \equiv m_D/M_R) \quad (2.8)$$

が得られる。 m_ν は軽いニュートリノの質量で、これが観測されている。負の符号は固有状態の位相で吸収できる。 M_N は重いニュートリノの質量である。 M_N が大きいほど m_ν は小さくなるので、シーソー機構と呼ばれる。

²Dirac レプトジェネシスと呼ばれる、Dirac ニュートリノを利用したバリオン数生成の模型がある。ただしこの模型は別の機構で作られた右巻き及び左巻き粒子のバリオン・レプトン数のうち、右巻きのレプトン数がスファレロン過程で消されない事を利用するものであり、拡張が必要である

(2.8) から、湯川結合定数と重いニュートリノの質量の間に関係がつく。

$$M_N = \frac{y^2 v^2}{m_\nu} = 6 \times 10^{14} y^2 \text{GeV} \frac{0.05 \text{eV}}{m_\nu} \quad (2.9)$$

いくつか例を挙げる。 $m_\nu = 0.05 \text{eV}$ とする。(i) $y = 1$ のとき、 $M_N = 6 \times 10^{14} \text{GeV}$ となり大統一理論のスケール $\sim 10^{15} \text{GeV}$ に近く、右巻きニュートリノの Majorana 質量項が大統一理論から現れる可能性を示唆する。(ii) 湯川結合定数が標準模型で最も小さい電子 ($y_e = 3 \times 10^{-6}$) と同程度の場合、 $M_N = 5 \times 10^3 \text{GeV}$ となる。

一般に左巻きニュートリノが3世代、右巻きニュートリノが \mathcal{N} 世代ある場合、ニュートリノの質量項を行列の形で表すと

$$-\mathcal{L}_{\nu, mass} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\nu_L} & \overline{\nu_R^c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (2.10)$$

となる。ただし

$$\overline{\nu_{RI}^c} \nu_{L\alpha}^c = \overline{\nu_{L\alpha}} \nu_{RI} \quad (2.11)$$

を用いた。 $\alpha = e, \mu, \tau$, $I = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$ であり、 m_D は $3 \times \mathcal{N}$ 行列、 M_R は $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 行列である。 M_R は ν_R のユニタリ変換によってあらかじめ対角化しておく。

質量固有状態を求める。Majorana 質量項は Dirac 質量項よりも大きい事、すなわち

$$|m_{D\alpha I}| M_{RI}^{-1} \ll 1 \quad (2.12)$$

を仮定する。また、(2.10) の質量行列を \mathcal{M} とおく。質量固有状態を求めるため、まず次のようにブロック対角化をする。その対角化は、混合

$$\Theta_{\alpha I} \equiv m_{D\alpha I} M_I^{-1} = y_{\alpha I} v / M_I \quad (2.13)$$

を用いて以下のように表せる。

$$\mathcal{U}_1^\dagger \mathcal{M} \mathcal{U}_1^* = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & M_N \end{pmatrix} + O(\Theta^3 M_N), \quad (2.14)$$

$$\mathcal{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \Theta \Theta^\dagger & \Theta \\ -\Theta^\dagger & 1 - \frac{1}{2} \Theta^\dagger \Theta \end{pmatrix} + O(\Theta^3) \quad (2.15)$$

$$m_\nu = -m_D M_R^{-1} m_D^T = -\Theta M_R \Theta^T \quad (2.16)$$

$$M = M_R + \frac{1}{2} (\Theta^\dagger \Theta M_R + M_R \Theta^T \Theta^*) \quad (2.17)$$

これをさらに世代空間でユニタリー変換することで質量行列は完全に対角化される。

$$U^\dagger m_\nu U^* = m_\nu^{\text{diag}} \quad (2.18)$$

$$-\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\nu_L} & \overline{\nu_R^c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_\nu^{\text{diag}} & 0 \\ 0 & M_N^{\text{diag}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R' \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (2.19)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R' \end{pmatrix} = \mathcal{U}_1^* \begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

U は左巻きニュートリノ世代間の混合を表すユニタリー行列であり、既に第一章で与えた (1.71)。また、(2.17) から $M \simeq M_R$ であり、 $V = 1 + O(\Theta^2)$ である。質量固有状態のうち、主に左巻きニュートリノからなる固有状態 ($\nu_{1,2,3}$) は軽いニュートリノ（またはアクティブニュートリノ）、主に右巻きニュートリノからなる固有状態 (N_1, N_2, \dots, N_N) は重いニュートリノ（またはステライルニュートリノ）と呼ばれる。

右巻きニュートリノは2世代以上必要である。もし1世代とすると、(2.16) より軽いニュートリノの質量行列は

$$m_{\nu\alpha\beta} = -m_{D\alpha 1} m_{D\beta 1} / M_1 \quad (2.21)$$

となる。この行列は階数が1であり、固有値は

$$\{0, 0, \text{Tr}[m_\nu]\} = \{0, 0, -(m_{D_{e1}}^2 + m_{D_{\mu 1}}^2 + m_{D_{\tau 1}}^2) / M_1\} \quad (2.22)$$

となり質量は1種類しか得られない。ニュートリノの質量は少なくとも2種類あるという実験結果と矛盾する。右巻きニュートリノはハイパーチャージを持たないので、量子異常から世代数への制限はない。ただし、SO(10) 大統一理論 [28, 29] や Pati-Salam 模型 [30]、左右対称模型 ($SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$) [32, 33] など、より大きな対称性に右巻きニュートリノを埋め込む場合は、左巻きニュートリノと同じく3世代となる。

本論文ではゲージ重項である右巻きニュートリノを導入した。これは他のフェルミオン質量と同様であるという意味で自然であるが、必ずしも右巻きニュートリノが必要というわけではない。例えば、SU(2) 三重項のスカラーやフェルミオンを導入する模型も存在し、それぞれII型シーソー [34, 35]、III型シーソー機構 [36] と呼ばれている。これらと区別するために、上のシーソー機構を特にI型シーソー機構と呼ぶ場合もある。

2.1.2 重いニュートリノの弱い相互作用

(2.20) で、 $O(\Theta^2)$ を無視すると、左巻きニュートリノは

$$\nu_L = U \nu'_L + \Theta \nu_R^c \quad (2.23)$$

と表せる。これを用いて、荷電カレント (1.36) とニュートリノの中性カレント (1.37) を質量固有状態 (2.20) で書き直すと

$$j_W^\mu = 2 (\overline{\nu'_L} U^\dagger + \overline{\nu_R^c} \Theta^\dagger) \gamma^\mu l_L, \quad (2.24)$$

$$j_{Z,\nu}^\mu = (\overline{\nu'_L} U^\dagger + \overline{\nu_R^c} \Theta^\dagger) \gamma^\mu (U \nu'_L + \Theta \nu_R^c) \quad (2.25)$$

$$= \overline{\nu'_L} \gamma^\mu \nu'_L + \overline{\nu'_L} \gamma^\mu U^\dagger \Theta \nu_R^c + \overline{\nu_R^c} \gamma^\mu \Theta^\dagger U \nu'_L + O(\Theta^2) \quad (2.26)$$

となる。よって、重いニュートリノ ν_R^c は弱い相互作用をし、その結合定数は軽いニュートリノと比べて Θ で抑制されていることが分かる。これは重いニュートリノの性質を特定するために重要なパラメータである。

2.2 レプトジェネシス

1.3節で、標準模型ではバリオン非対称性が説明できないことを見た。本節では右巻きニュートリノがこの問題を解決できることを見る。

2.2.1 CP の破れ

標準模型に右巻きニュートリノを加えることで、1.3.1 節で示した Sakharov の 3 条件のうち、標準模型では満たせなかった条件を満たす事ができる。

2. CP の破れ：ニュートリノの湯川相互作用

3. 平衡からのずれ：重いニュートリノの熱平衡離脱後の崩壊

重いニュートリノの崩壊によるレプトン数生成の事をレプトジェネシスと呼ぶ [37]。このレプトン数の一部がスファレロン過程によってバリオン数に変換される。

一般に、 N_I の崩壊によって作られる現在のバリオン数のエントロピー比は

$$Y_B = \frac{135\zeta(3)}{4\pi^4 g_{*f}} \sum_{\alpha} \epsilon_{I\alpha} \eta_{\alpha} C \quad (2.27)$$

と書ける [38]。 ϵ_{α} は N の崩壊の CP 非対称性、 η_{α} は効率係数、 C は $B + L$ を破る過程によってできるバリオン数と元のレプトン数の比で、 g_{*f} は N が熱浴から分離する時の熱浴にいる粒子の自由度である。標準模型では (1.209) より $C = -28/79$ である。 $\frac{135\zeta(3)}{4\pi^4 g_{*f}}$ は N_I は相対論的に熱浴から脱結合をした場合のエントロピー比で、相対論的な状態からのずれや後に説明するウォッシュアウトによる効果等は η_{α} に含まれる。

重い Majorana ニュートリノは、粒子と反粒子が同じ事から、次の 2 通りの崩壊をする。

$$N \rightarrow L_L + \Phi \quad (2.28)$$

$$\rightarrow \overline{L_L} + \Phi^* \quad (2.29)$$

ϵ はこの崩壊の非対称性として次のように定義される。

$$\epsilon_{I\alpha} \equiv \frac{\langle \Gamma(N_I \rightarrow L_{\alpha}\Phi) \rangle - \langle \Gamma(N_I \rightarrow \overline{L_{\alpha}}\Phi^*) \rangle}{\sum_{\alpha} \{ \langle \Gamma(N_I \rightarrow L_{\alpha}\Phi) \rangle + \langle \Gamma(N_I \rightarrow \overline{L_{\alpha}}\Phi^*) \rangle \}} \quad (2.30)$$

ここで $\langle \Gamma(i \rightarrow f) \rangle$ は熱的に平均化した崩壊レートで、粒子 i が Boltzmann 分布の時は次の式で表される。

$$\langle \Gamma(i \rightarrow f) \rangle = \int d\Pi_i d\Pi_f \tilde{\delta}_{if} |\mathcal{M}(i \rightarrow f)|^2 e^{-E_i/T}, \quad (2.31)$$

$$d\Pi_i \equiv \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (2.32)$$

$$\tilde{\delta}_{if} \equiv (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \quad (2.33)$$

温度による効果を見捨ると [39]、 ϵ は

$$\epsilon_{I\alpha} = \frac{|\mathcal{M}(N_I \rightarrow L_{\alpha}\Phi)|^2 - |\mathcal{M}(N_I \rightarrow \overline{L_{\alpha}}\Phi^*)|^2}{\sum_{\alpha} \{ |\mathcal{M}(N_I \rightarrow L_{\alpha}\Phi)|^2 + |\mathcal{M}(N_I \rightarrow \overline{L_{\alpha}}\Phi^*)|^2 \}} \quad (2.34)$$

これは、図 2.2 の 1 ループまでの計算により、次を得る (付録 G 参照)。

$$\epsilon_{I\alpha} = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{(y^{\dagger}y)_{II}} \sum_J \left\{ \text{Im}(y_{\alpha I} y_{\alpha J}^* (y^{\dagger}y)_{JI}) g \left(\frac{M_J^2}{M_I^2} \right) + \text{Im}(y_{\alpha I} y_{\alpha J}^* (y^{\dagger}y)_{IJ}) \frac{M_I^2}{M_I^2 - M_J^2} \right\} \quad (2.35)$$

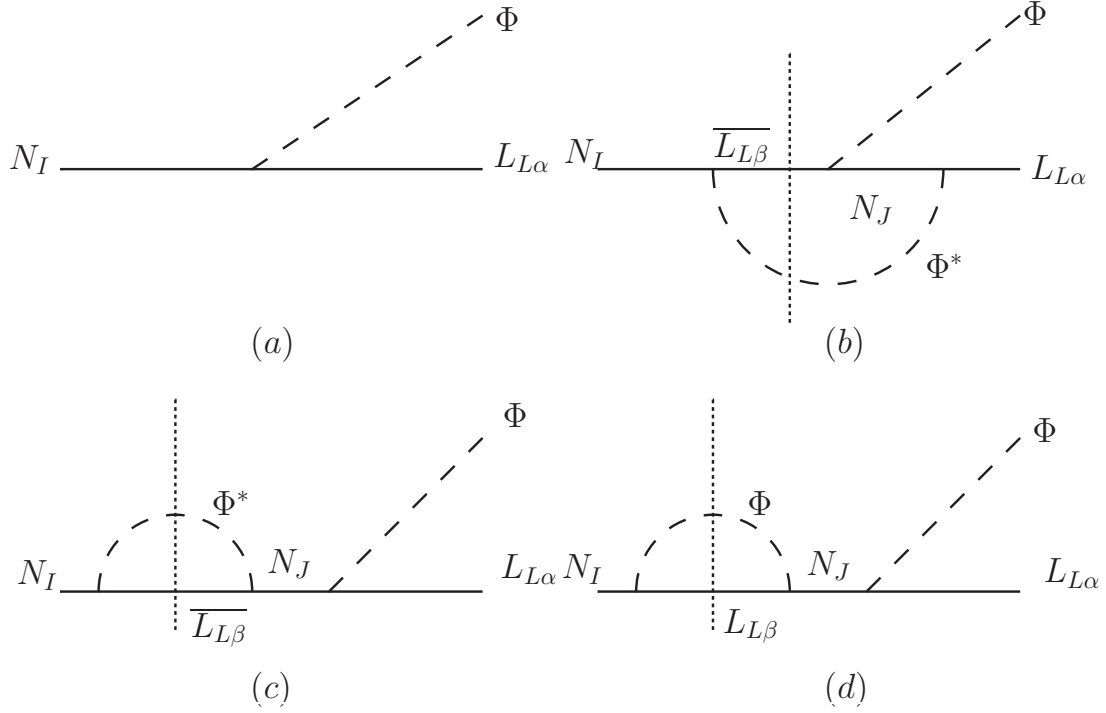


図 2.2: 重いニュートリノの崩壊 $N \rightarrow L\Phi$ のファインマン図。

ただし、

$$g(x) \equiv \sqrt{x} \left(\frac{1}{1-x} + 1 - (1+x) \ln \frac{1+x}{x} \right) \quad (2.36)$$

と定義した。この関数は図 2.3 のように振る舞う。

2.2.2 Boltzmann 方程式

粒子数の変化は次の Boltzmann 方程式を用いて計算することができる。

$$\hat{L}[f] = C[f], \quad (2.37)$$

$$\hat{L} = p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\mu p^\nu p^\rho \frac{\partial}{\partial p^\mu} \quad (2.38)$$

\hat{L} は Liouville 演算子、 $C[f]$ は衝突項と呼ばれる。計量が一様等方な Friedmann-Robertson-Walker 計量

$$ds^2 = dx_0^2 - a(t)^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (2.39)$$

で、運動量分布が一様で等方なとき、

$$f(p) = f(E, t) \quad (2.40)$$

より Boltzmann 方程式の左辺は

$$\hat{L}[f] = E \frac{\partial}{\partial t} f - \Gamma_{\nu\rho}^0 p^\nu p^\rho \frac{\partial}{\partial E} f \quad (2.41)$$

$$= E \frac{\partial}{\partial t} f - \frac{\dot{a}}{a} p_i p_i \frac{\partial}{\partial E} f \quad (2.42)$$

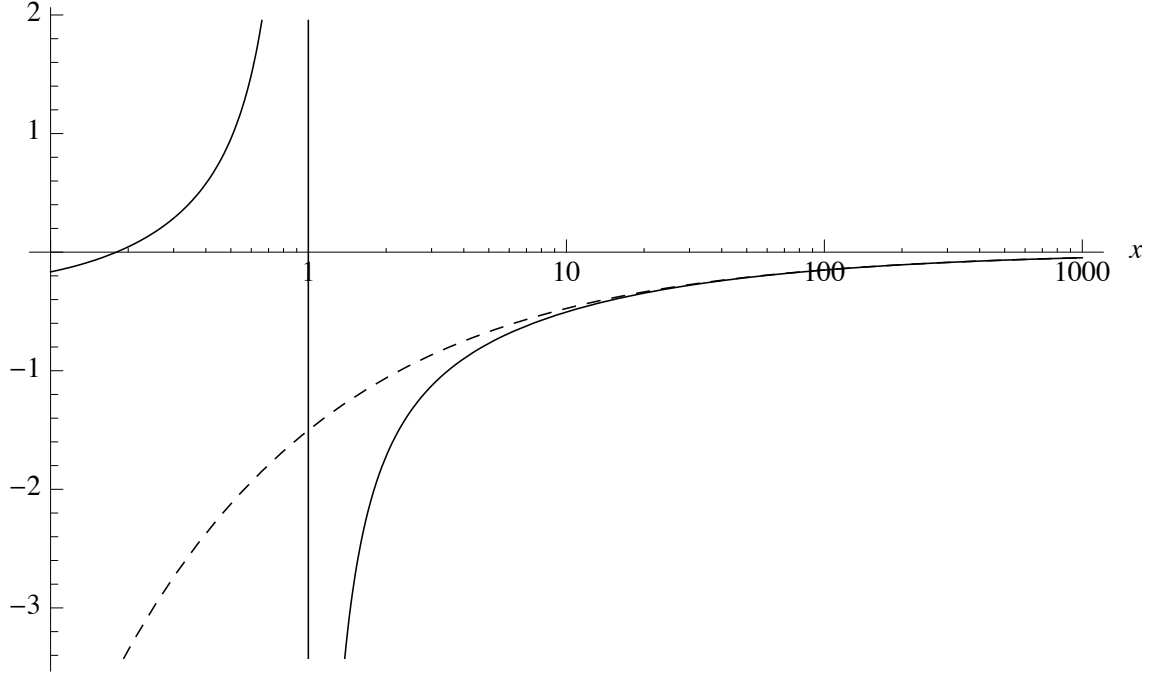


図 2.3: $g(x)$ (実線、(2.36) 式) およびその漸近式 $-\frac{3}{2\sqrt{x}}$ (破線) の振る舞い。

となる。粒子数密度についての式を得るために、Boltzmann 方程式に g/E を掛けて運動量積分をする。数密度の定義

$$n(t) \equiv g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f \quad (2.43)$$

を用いると、Boltzmann 方程式の左辺は

$$g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 E} \hat{L}[f] = \frac{dn}{dt} - H \frac{4\pi g}{(2\pi)^3} \int \frac{p^2 dp}{E} p^2 \frac{dp}{dE} \frac{\partial f}{\partial p} \quad (2.44)$$

$$= \frac{dn}{dt} + 3H \frac{4\pi g}{(2\pi)^3} \int dp p^2 f \quad (2.45)$$

$$= \frac{dn}{dt} + 3Hn \quad (2.46)$$

となる。

一方、一般の反応

$$i : \psi + a + b + \leftrightarrow f : j + k + \dots \quad (2.47)$$

についての衝突項は次で与えられる。

$$g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 E} C[f] = - \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_b \dots \tilde{\delta} [|\mathcal{M}|_{i \rightarrow f}^2 f_\psi f_a f_b \dots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \dots] \quad (2.48)$$

$$- |\mathcal{M}|_{f \rightarrow i}^2 f_i f_j \dots (1 \pm f_\psi)(1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \dots] \quad (2.49)$$

\pm はボソンの場合 $+$ 、フェルミオンの場合 $-$ をとる。

以下では特に

$$N_I \leftrightarrow L_\alpha \Phi \quad (\equiv \nu_\alpha \phi^0, l_\alpha \phi^+) \quad (2.50)$$

の反応を考える。粒子数密度についての Boltzmann 方程式を得るために、全ての粒子の熱平衡からのずれは小さく、

$$f \sim e^{-(E+\mu)/T} \sim \left(1 + \frac{\mu}{T}\right) e^{-E/T} \quad (2.51)$$

と近似できるとする。またスピンによる効果は無視する $(1 \pm f) \sim 1$ 。デルタ関数によりエネルギーは保存する事から

$$f_\alpha f_\Phi = e^{-(E_\alpha+\mu_\alpha)/T} e^{-E_\Phi/T} \sim \left(1 + \frac{\mu}{T}\right) e^{-E_I/T} \quad (2.52)$$

となる。また、反応レートの熱平均の定義 (2.32) を用いると、粒子数密度についての Boltzmann 方程式は

$$\dot{n}_\alpha + 3Hn_\alpha = \frac{1}{2} \langle \Gamma_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} \rangle [n_I \left(1 + \frac{\mu_\alpha}{T}\right) - n_I^{eq}] \quad (2.53)$$

となる。ただし $n_\alpha = n_{\nu_\alpha} = n_{l_\alpha}$ である。反粒子の化学ポテンシャルは粒子の (-1) 倍であるので、

$$\dot{n}_{\bar{\alpha}} + 3Hn_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \langle \bar{\Gamma}_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} \rangle [n_I \left(1 - \frac{\mu_\alpha}{T}\right) - n_I^{eq}] \quad (2.54)$$

正味のレプトン数密度は

$$n_{L_\alpha} \equiv 2(n_\alpha - n_{\bar{\alpha}}), \quad (2.55)$$

$$\dot{n}_{L_\alpha} + 3Hn_{L_\alpha} = (\langle \Gamma_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} \rangle - \langle \bar{\Gamma}_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} \rangle) [n_I - n_I^{eq}] - 2 \langle \Gamma_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} \rangle \frac{\mu_\alpha}{T} n_I^{eq} \quad (2.56)$$

$$= \epsilon_{I\alpha} \langle \Gamma_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} \rangle [n_I - n_I^{eq}] - \frac{9\zeta(3)}{2\pi^2} \langle \Gamma_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} \rangle \frac{n_{L_\alpha}}{n_\alpha} n_I^{eq} \quad (2.57)$$

に従う。ただし、(1.177) と (1.216) から

$$\frac{n_{L_\alpha}}{n_\alpha} = 2 \frac{2 \frac{T^2}{6} \mu_\alpha}{2 \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} T^3} = \frac{4\pi^2}{9\zeta(3)} \frac{\mu_\alpha}{T} \quad (2.58)$$

である事を用いた。重いニュートリノについては

$$\dot{n}_L + 3Hn_L = -\langle \Gamma_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} \rangle [n_I - n_I^{eq}] \quad (2.59)$$

となる [40]。 (2.57) の第二項は n_{L_α} と反対符号であり、レプトン数を 0 に近づける効果を現している。そのため Washout 項と呼ばれる。

最も効率的にレプトン数が作られる場合を考える。これは Washout 項が無視できる場合である。このとき、Boltzmann 方程式から

$$\frac{d(n_{L_\alpha} a^3)}{dt} = -\epsilon_{I\alpha} \frac{d(n_I a^3)}{dt} \quad (2.60)$$

$$\implies n_{L_\alpha} a_e^3 = \epsilon_{I\alpha} n_I a_s^3 \quad (2.61)$$

という関係が成り立つ。 a_s, a_e は N_1 の崩壊前と後のスケール因子である。 N_I の崩壊前後でエントロピーが保存している場合、

$$sa_e^3 = sa_i^3 \quad (2.62)$$

なので、これで割ると

$$Y_{L\alpha}|_{\text{崩壊後}} = \epsilon_{I\alpha} Y_I|_{\text{崩壊前}} \quad (2.63)$$

となる。すなわちこの場合、効率係数 $\eta_\alpha = 1$ の場合に相当する。

2.2.3 Davidson-Ibarra 境界

CP 非対称性 ϵ には上限があり、これはレプトジェネシスを起こす右巻きニュートリノの質量の下限を与える。この制限を Davidson-Ibarra 境界と呼ぶ [41]。以下でそれを求める。

(2.27) で効率係数 $\eta_\alpha \leq 1$ であるので、 N_I の崩壊によって作られるレプトンのフレーバー α について和をとる。すると (2.35) の第二項は

$$\sum_{\alpha} \text{Im}(y_{\alpha I} y_{\alpha J}^* (y^\dagger y)_{IJ}) = \text{Im}(|y^\dagger y|_{IJ}^2) = 0 \quad (2.64)$$

より消えて、

$$\epsilon_I \equiv \sum_{\alpha} \epsilon_{I\alpha} = \frac{1}{8\pi} \frac{\sum_J \text{Im}[(y^\dagger y)_{JI}]^2 g(M_J^2/M_I^2)}{(yy^\dagger)_{II}} \quad (2.65)$$

となる。次に、 $M_J^2/M_I^2 \gg 1$ と仮定する。 $x \rightarrow \infty$ で

$$g(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}} + O(x^{-3/2}) \quad (2.66)$$

であることと (図 2.3)、シーソー関係式 (2.16) を用いると

$$\epsilon_I \simeq \frac{3}{16\pi} \frac{\sum_J \text{Im}[(y^\dagger y)_{JI}]^2 (M_I/M_J)}{(y^\dagger y)_{II}} \quad (2.67)$$

$$= -\frac{3}{16\pi} \frac{M_I \sum_J \text{Im}[y_{J\alpha}^\dagger M_J^{-1} y_{J\beta}^\dagger y_{\alpha I} y_{\beta I}]}{(y^\dagger y)_{II}} \quad (2.68)$$

$$= -\frac{3}{16\pi} \frac{M_I}{v^2} \frac{\text{Im}[(y^T m_\nu^* y)_{II}]}{(y^\dagger y)_{II}} \quad (2.69)$$

となる。ここで Casas-Ibarra パラメタリゼーションを用いる [42] (付録 B)。

$$y = \frac{i}{v} U \sqrt{m_\nu^{\text{diag}}} R \sqrt{M_N^{\text{diag}}} \quad (2.70)$$

R は任意の複素直交行列である。これを (2.69) に代入し、(2.18) を用いると

$$\epsilon_I \simeq -\frac{3}{16\pi} \frac{M_I}{v^2} \frac{\sum_i m_i^2 \text{Im}[R_{iI}^2]}{\sum_i m_i |R_{iI}|^2} \quad (2.71)$$

となる。直交条件 $\sum_i R_{iI}^2 = 1$ を用いると (付録 C)、

$$\frac{|\sum_i m_i^2 \text{Im}[R_{iI}^2]|}{\sum_i m_i |R_{iI}|^2} < m_3 - m_1 \quad (2.72)$$

となり、結局

$$|\epsilon_I| < \frac{3}{16\pi} \frac{M_I}{v^2} (m_3 - m_1) = \frac{3}{16\pi} \frac{M_I}{v^2} \frac{\Delta m_{\text{atm}}^2}{m_3 + m_1} \quad (2.73)$$

となる。より、バリオン数の観測値からレプトジェネシスを起こす右巻きニュートリノの質量の下限が

$$Y_B \sim 8 \times 10^{-11} < \frac{0.416}{g_{*f}} \frac{28}{79} \frac{3}{16\pi} \frac{M_I}{v^2} \frac{\Delta m_{\text{atm}}^2}{m_3 + m_1} \quad (2.74)$$

$$= 6.1 \times 10^{-11} \frac{110}{g_{*f}} \frac{M_I}{10^9 \text{GeV}} \frac{0.1 \text{eV}}{m_3 + m_1} \quad (2.75)$$

$$\Rightarrow M_I > 1 \times 10^9 \text{GeV} \frac{m_3 + m_1}{0.1 \text{eV}} \frac{g_{*f}}{110} \quad (2.76)$$

となる。シーソー関係式から湯川結合定数が $y \gtrsim 10^{-3}$ となる事に対応している。

右巻きニュートリノを用いたバリオン数生成の模型として、CP 非対称性が (2.35) で表されない場合があり、その時は Davidson-Ibarra 境界以下の質量でもバリオン数生成が可能である。例えば、質量が縮退している場合 [43] やニュートリノ振動によって作る模型 [44, 45] がある。

2.3 暗黒物質としての重いニュートリノ

標準模型においてニュートリノが暗黒物質になり得ない理由の一つは、質量が軽すぎるためである。シーソー機構から分かるように、重いニュートリノは軽いニュートリノよりも非常に重くなり得る。また相互作用も左巻きニュートリノよりもさらに弱いので、暗黒物質の候補になる。本節ではその寿命と生成、現在の存在量を求める。

2.3.1 寿命

右巻きニュートリノは左巻きとの混合を通じて弱い相互作用するので、より軽い粒子に崩壊をする。質量が電子の 2 倍 ($\sim 1 \text{MeV}$) より軽い場合、主な崩壊モードはニュートリノ三つである (図 2.4)。このモードの崩壊レートは

$$\Gamma_{N_1 \rightarrow 3\nu} = 2 \frac{G_F^2 M_1^5}{192\pi^3} |\Theta_1|^2 \quad (2.77)$$

$$= 4.6 \times 10^{-35} \text{eV} \left(\frac{M_1}{\text{keV}} \right)^5 |\Theta_1|^2 \quad (2.78)$$

$$= \frac{1}{1.4 \times 10^{19} \text{s}} \left(\frac{M_1}{\text{keV}} \right)^5 |\Theta_1|^2 \quad (2.79)$$

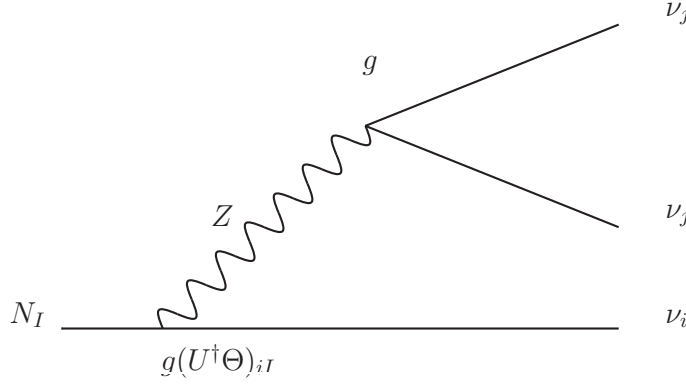


図 2.4: 重いニュートリノの崩壊 $N \rightarrow \nu\nu\nu$ のファインマン図。

となる (付録 F 参照)。 N_1 が暗黒物質として現在も残っているためには、崩壊レートが宇宙年齢の逆数

$$\frac{1}{13.8 \text{Gyr}} = \frac{1}{13.8 \times 3.16 \times 10^{9+7} \text{s}} = \frac{6.58 \times 10^{-16} \text{eV}}{43.6 \times 10^{16}} = 1.51 \times 10^{-33} \text{eV} \quad (2.80)$$

よりも小さい必要がある。このことから、

$$\left(\frac{M_1}{\text{keV}} \right)^5 |\Theta_1|^2 < 33 \quad (2.81)$$

であれば右巻きニュートリノは暗黒物質に成り得る。宇宙年齢からの制限よりも強い制限が次章で述べる X 線観測から得られている。

2.3.2 Dodelson-Widrow 機構

ここでは、暗黒物質としての右巻きニュートリノの生成機構として最初に考えられた、Dodelson-Widrow 機構 [46] を説明する。ただし次章で見ると、この機構のみですべての暗黒物質を説明することは難しいことが観測からわかっている。

簡単のため、左巻きニュートリノ $\nu_{L\alpha}$ のうちのひとつと右巻きニュートリノ N_1 の振動のみを考える。2.2.2 節での議論より、暗黒物質としての重いニュートリノの分布関数 f_N は次の式に従う。

$$\frac{\partial}{\partial t} f_N(E, t) - HE \frac{\partial}{\partial E} f_N(E, t) = \Gamma_{\nu_\alpha \rightarrow N_1}(E, t) [f_\alpha(E, t) - f_N(E, t)] \quad (2.82)$$

ただし今は $E \sim T \gg M_1 \sim \text{keV}$ を考えるので $p \simeq E$ と近似した。 f_α , $\alpha = e, \mu, \tau$ は左巻きニュートリノ $\nu_{L\alpha}$ の分布関数で、

$$f_\alpha \simeq \frac{1}{e^{p/T} + 1} \quad (2.83)$$

である。 N_1 が $\nu_{L\alpha}$ からの振動によって作られるレートは、(1.120) の振動確率を用いて、

$$\Gamma_{\nu_\alpha \rightarrow N_1}(p, t) \simeq \langle P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_s}(p, t) \rangle \Gamma_\alpha \quad (2.84)$$

$$= \sin^2 2\theta_M \sin^2 \frac{\Delta_M t}{2} \Gamma_\alpha \quad (2.85)$$

と近似できる。 Γ_α は $\nu_{L\alpha}$ が熱浴と反応するレートで

$$\Gamma_\alpha \simeq \frac{7\pi}{24} G_F^2 T^4 E \quad (2.86)$$

である [46]。ここで、振動数は

$$\Delta_M = \sqrt{\Delta^2 + V^2 - 2\Delta V \cos 2\theta} \quad (2.87)$$

$$\sim |\Delta - V| \quad (\theta = \frac{m_D}{M_1} \ll 1) \quad (2.88)$$

$$< \Delta, \quad (2.89)$$

$$\Delta = \frac{M_1^2 - m_\nu^2}{2E} \quad (2.90)$$

$$= \frac{1}{4.1 \times 10^{15} \text{s}} \left(\frac{M_1}{\text{keV}} \right)^2 \frac{\text{MeV}}{T} \quad (2.91)$$

であり、 $T \sim 1 \text{ MeV}$ の時の宇宙年齢 $t \sim 1 \text{ s}$ よりも十分大きいので、振動は時間について平均化される。 $\nu_{L\alpha}$ が感じるポテンシャルは

$$V \equiv V^D + V^T(p), \quad (2.92)$$

$$V^T(p) = -\frac{8\sqrt{2}G_F p}{3m_Z^2} (\langle E_\alpha \rangle n_\alpha + \langle E_{\bar{\alpha}} \rangle n_{\bar{\alpha}}) - \frac{8\sqrt{2}G_F p}{3m_W^2} (\langle E_\alpha \rangle n_\alpha + \langle E_{\bar{\alpha}} \rangle n_{\bar{\alpha}}) \quad (2.93)$$

である [47]。 V^D は (1.138) で与えた。粒子数と反粒子数の非対称性が無視できる場合、 $V_D \ll V_T$ で、

$$V \simeq -23.8 G_F^2 T^4 E \quad (2.94)$$

となる。 $\theta \ll 1$ を用いると、 N_1 が作られるレートは

$$\Gamma_{\nu \rightarrow N_1} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\Delta_M^2} \sin^2 2\theta \Gamma_\nu \quad (2.95)$$

$$\simeq \frac{1}{2} \frac{(M_1^2/2E)^2}{((M_1^2/2E) + 23.8 G_F^2 T^4 E)^2} 4\theta^2 \frac{7\pi}{24} G_F^2 T^4 E \quad (2.96)$$

$$= \frac{7\pi}{12} G_F^2 \theta^2 T^5 \frac{y}{(1 + x^2 y^2)^2}, \quad (2.97)$$

$$y \equiv E/T, \quad (2.98)$$

$$x \equiv \sqrt{2 * 23.8 G_F^2 T^6 / M^2} \quad (2.99)$$

$$= 6.90 G_F T^3 / M \quad (2.100)$$

$$= 80.7 \left(\frac{T}{\text{GeV}} \right)^3 \left(\frac{\text{keV}}{M_1} \right) \quad (2.101)$$

となる。

熱浴にいる粒子の自由度 g_* の変化が無いとき

$$\frac{\partial}{\partial t} = -HT \frac{\partial}{\partial T} \quad (2.102)$$

であることと、偏微分の性質

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} f_N(yT, T) \right)_y = \left(\frac{\partial f_N(E, T)}{\partial T} \right)_{E=yT} + y \left(\frac{\partial f_N(E, T)}{\partial E} \right)_T \quad (2.103)$$

$$(2.104)$$

を用いると、Boltzmann 方程式 (2.82) は、

$$\hat{L}[f_N] = -HT \left(\frac{\partial}{\partial T} f_N(yT, T) \right)_y \quad (2.105)$$

$$= -\Gamma_{\nu \rightarrow N} f_\nu(p, T) \quad (2.106)$$

となる。 f_ν は y だけの関数 $f_\nu(p, T) = f_\nu(y)$ であるので、

$$T \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{f_N}{f_\nu} \right)_y = -\frac{\Gamma_{\nu \rightarrow N}}{H} \quad (2.107)$$

$$= -0.229 g_*^{-1/2} \frac{\theta^2}{10^{-8} \text{ keV}} x \frac{y}{(1 + x^2 y^2)^2} \quad (2.108)$$

$$\Rightarrow \frac{f_N}{f_\nu} = 7.60 \frac{\theta^2}{10^{-8} \text{ keV}} y \int_x^\infty dx' \frac{1}{g_*^{1/2} (1 + x'^2 y^2)^2} \quad (2.109)$$

となる。 $x \ll 1$ 、 $g_*(T) \sim \text{一定}$ という近似を用いると、右辺はエネルギーに依らず、

$$\frac{f_N}{f_\nu} = 5.97 g_*^{-1/2} \times 10^{-2} \frac{M_1}{10^{-8} \text{ keV}} \quad (2.110)$$

となる。すなわち、 N_1 の運動量分布は熱平衡分布に比例している事が分かる。よって N_1 の現在のエネルギー比は、軽いニュートリノのエネルギー比 (1.221) と、 $g_* \sim 10.8$ を用いて

$$\Omega_N h^2 = \frac{M_1}{m_\nu} \frac{f_N}{f_\nu} \Omega_\nu h^2 \quad (2.111)$$

$$= 0.20 \frac{\theta^2}{10^{-8}} \left(\frac{M_1}{\text{keV}} \right)^2 \quad (2.112)$$

$$= 0.12 \left(\frac{m_D}{0.077 \text{ eV}} \right)^2 \quad (2.113)$$

となる。ただしシーソー関係 $\theta = m_D/M_1$ を用いた。よって

$$m_D = M_1 \theta \simeq 0.08 \text{ eV} \quad (2.114)$$

であれば、 N_1 は暗黒物質となる事が分かる。これを湯川結合定数に直すと $y = 0.1 \text{ eV}/174 \text{ GeV} = 6 \times 10^{-12}$ となる。

次に、 N_1 が作られる温度を求める。(2.82) を運動量について積分すると

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (n_1 a^3) = \gamma n_\nu \quad (2.115)$$

となる。 γ は N_1 の作られるレートに相当する。これを具体的に書くと

$$\gamma \equiv \frac{2}{n_\nu} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Gamma_{\nu \rightarrow N_1} \frac{1}{e^{p/T} + 1} \quad (2.116)$$

$$= \frac{2}{2^{\frac{3}{4}} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dy y^2 T^3 \frac{7\pi}{12} G_F^2 \theta^2 T^5 \frac{y}{(1+x^2 y^2)^2} \frac{1}{e^y + 1} \quad (2.117)$$

$$= 0.146 G_F \theta^2 M_1 T^2 x \int_0^\infty dy \frac{y^3}{(1+x^2 y^2)^2 (e^y + 1)} \quad (2.118)$$

ここで、時間をスケール因子に置き換えると、

$$d \ln a = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} dt = H dt \quad (2.119)$$

より

$$\frac{d}{dt}(n_1 a^3) = \frac{\gamma}{H} n_\nu a^3 \quad (2.120)$$

となり、宇宙膨張に対するレートは

$$\frac{\gamma}{H} = \frac{0.146 G_F M_p}{0.331 \sqrt{g_*}} \theta^2 M_1 x \int_0^\infty dy \frac{y^3}{(1+x^2 y^2)^2 (e^y + 1)} \quad (2.121)$$

$$= 0.127 g_*^{-1/2} \left(\frac{m_D}{0.1 \text{ eV}} \right)^2 \frac{\text{keV}}{M_1} x \int_0^\infty dy \frac{y^3}{(1+x^2 y^2)^2 (e^y + 1)} \quad (2.122)$$

である。これは図 2.5 のようになり、ピークは

$$\left. \frac{\gamma}{H} \right|_{T=T_{max}} = 0.0189 \left(\frac{m_D}{0.1 \text{ eV}} \right)^2 \frac{\text{keV}}{M_1}, \quad (2.123)$$

$$T_{max} = 133 \text{ MeV} \left(\frac{M_1}{\text{keV}} \right)^{1/3} \quad (2.124)$$

である。常に N_1 が生成するレートはハッブルレートよりも小さく ($\gamma/H < 1$)、熱平衡には達しない。

2.3.3 X 線観測

質量が keV 程度の右巻きニュートリノは、主にニュートリノ 2 つと反ニュートリノ 1 つに崩壊するが、これは観測する事は困難である。一方図 2.6 のように 1 ループで光子とニュートリノに崩壊するモードは観測可能である。その崩壊レートは

$$\Gamma_{N_1 \rightarrow \nu \gamma} = \frac{9}{256 \pi^4} \alpha G_F^2 |\Theta_1|^2 M_1^5 \quad (2.125)$$

$$= \frac{1}{1.8 \times 10^{21} \text{ s}} |\Theta_1|^2 \left(\frac{M_1}{\text{keV}} \right)^5 \quad (2.126)$$

である [48, 49]。これは 2 体崩壊であるから、X 線観測において $M_1/2$ のところにスペクトルのピークが見られるはずである [47]。しかし、HEAO による背景 X 線の観測 [50] や、XMM-Newton による M31 (アンドロメダ銀河) の観測 [51]、Chandra による Draco の観

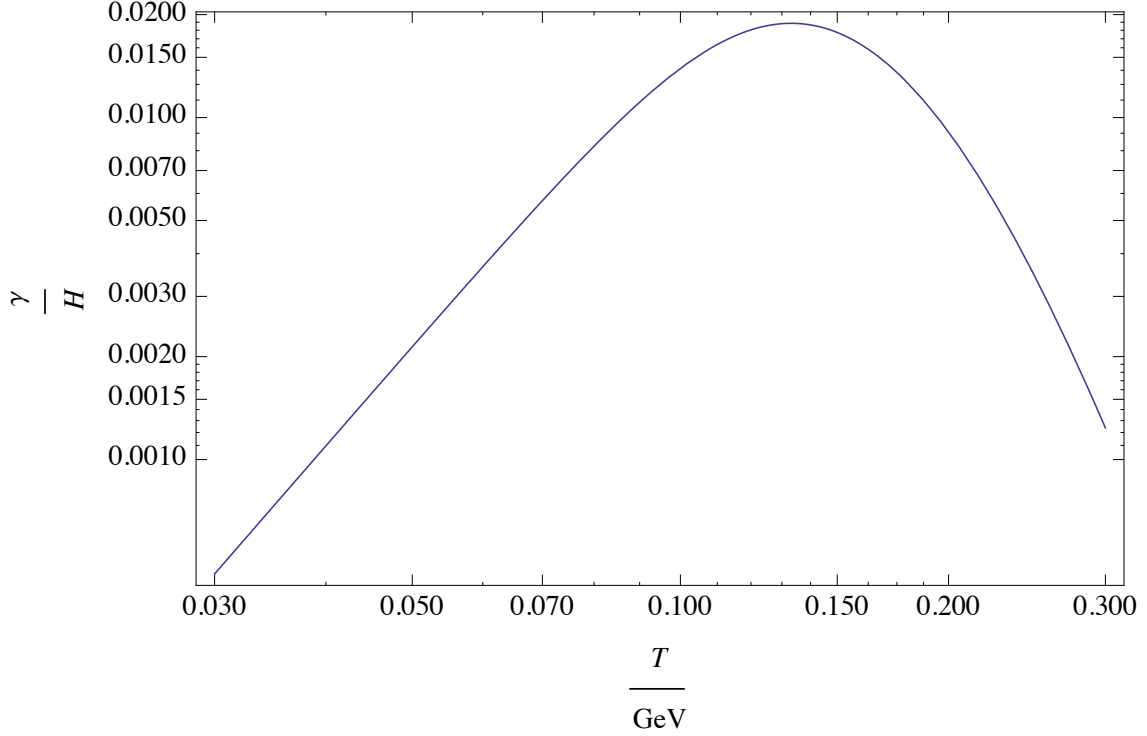


図 2.5: 暗黒物質候補の重いニュートリノ N_1 の作られるレート。 $m_D = 0.1\text{eV}$, $M_1 = 1\text{keV}$, $g_* = 10.75$ とした。

測 [52] 等でそのようなピークは見つかっていない事から崩壊レートに上限が付き、(2.126) によって $M_1 - \Theta_1^2$ 平面で制限が得られる [53]。その近似式は

$$|\Theta_1|^2 \lesssim 1.8 \times 10^{-5} \left(\frac{\text{keV}}{M_1} \right)^5 \quad (2.127)$$

である [54]。この制限は、重いニュートリノの寿命が宇宙の晴れ上がりの時の宇宙年齢も長く、かつ N_1 の残存量が暗黒物質の残存量と等しい場合に対して適用される。

X線観測衛星を表 2.2 にまとめた。ASTRO-H については、2016 年、機器の異常により運用は中止となった。今後の計画としては、2028 年打ち上げに向けて主に ESA によって研究がされている Advanced Telescope for High ENergy Astrophysics (ATHENA) [57] がある。

2014 年、XMM-Neton および Chandra を解析した二つのグループにより、3.5 keV 付近のピークが指摘された [55, 56]。これをこの右巻きニュートリノ暗黒物質の崩壊だとすると、そのパラメータは

$$M_1 = 7 \text{ keV}, |\Theta_1|^2 \sim 10^{-11} \quad (2.128)$$

となる [55, 56]。一方で日本のすぎくの解析では（その解析方法によっては）ピークが見えない [58] など、状況ははっきりとしていない。ASTRO-H（ひとみ）のコラボレーションによる 3.5 keV 付近の解析も行われたが、ピークの存在は確認されていない [59]。よりエネルギー分解能の高い、将来実験による検証に期待したい。

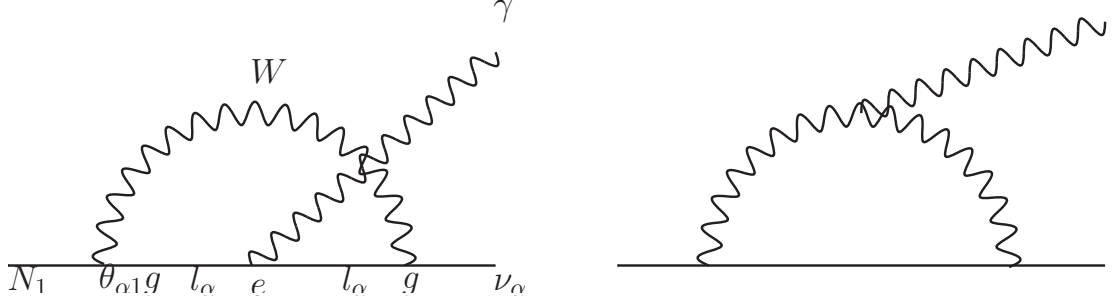


図 2.6: 重いニュートリノの放射性崩壊 $N \rightarrow \nu\gamma$ のファインマン図。

表 2.2: 主な X 線観測衛星。ただし MAXI は国際宇宙ステーション内にある。各衛星には複数の観測装置が搭載されているが、バンドパスについてはそれら全てで観測可能な範囲を示し、有効面積は最も大きいものについて示した。

ミッション名	打ち上げ年	バンドパス/keV	有効面積/cm ²	参考文献
HEAO-1	1977-79	0.2-10000	800	[60]
Chandra	1999	0.3-10	670	[60]
XMM-Newton	1999	0.15-15	1300	[60]
MAXI	2009	0.5-30	5000	[60]
ASTRO-H	2016	0.3-600	360	[61]
ATHENA	2028	0.3-12	200000	[57]

2.3.4 Tremaine-Gunn 境界

Tremaine-Gunn 境界 ([62, 63]) は、右巻きニュートリノに限らず、フェルミオンの暗黒物質の質量に下限を与える。以下でこれを導出する。この制限は暗黒物質のすべてをフェルミオンが占める場合の制限なので、図 3.1 には載せていない。

一般に、フェルミオンは位相空間において一つの自由度につき $(2\pi)^3$ 以上の体積を占める。その粒子の自由度を g_{DM} とおくと、位相空間での密度は数密度を運動量空間での体積で割ったもので、これは運動量分布に相当するので、

$$\frac{n}{\langle p^2 \rangle^{3/2}} < \frac{1}{(2\pi)^3} \max f(p) = \frac{g_{\text{DM}}}{(2\pi)^3} \quad (2.129)$$

となる。ここで、位相空間での密度に比例する観測可能な量 Q を次のように定義する。

$$Q \equiv \frac{\rho}{\langle v^2/3 \rangle^{3/2}} \quad (2.130)$$

$$= 3^{3/2} m_{\text{DM}}^4 \frac{n}{\langle p^2 \rangle^{3/2}} \quad (2.131)$$

(2.129) より、

$$m > \left(\frac{(2\pi)^3}{3^{3/2} g_{\text{DM}}} Q \right)^{1/4} \quad (2.132)$$

よって、観測対象における暗黒物質の位相空間密度が高いほど、質量の制限は強くなる。その最も良い例は矮小楕円体銀河で、1.4.1 でも説明したように質量光度比が大きく暗黒

表 2.3: 非常に暗い矮小楕円対銀河の位相空間密度 [24]。

銀河	速度分散 $\sigma/(\text{km/s})$	中心密度 $\rho/(\text{M}_\odot\text{pc}^{-3})$	位相空間密度 q
Ursa Major II	6.7 ± 1.4	0.79 ± 0.36	$(3.7 \pm 3.1) \times 10^{-3}$
Leo T	7.5 ± 1.6	0.19 ± 0.08	$(1.9 \pm 1.5) \times 10^{-3}$
Ursa Major I	7.6 ± 1.6	0.25 ± 0.08	$(5.6 \pm 2.9) \times 10^{-4}$
Leo IV	3.3 ± 4.6	0.19 ± 0.20	$(5.3 \pm 9.9) \times 10^{-3}$
Coma Berenices	4.6 ± 0.8	2.09 ± 0.86	$(2.2 \pm 1.4) \times 10^{-2}$
Canes Venatici II	4.6 ± 1.0	0.49 ± 0.25	$(5.1 \pm 4.1) \times 10^{-3}$
Canes Venatici I	7.6 ± 0.4	0.08 ± 0.02	$(1.7 \pm 0.5) \times 10^{-4}$
Hercules	5.1 ± 0.9	0.10 ± 0.04	$(7.7 \pm 5.2) \times 10^{-4}$

物質が支配的な天体である。観測結果を表 2.3 にまとめた。暗黒物質の速度分散は恒星の速度分散に等しいと仮定している。無次元量 q を

$$Q = q \frac{M_\odot/\text{pc}^3}{(\text{km/s})^3} = 7.84q \text{keV}^4 \quad (2.133)$$

とおき、典型的な値でくくりだすと、 $g_{\text{DM}} = 2$ のとき、

$$m > 1.0 \text{ keV} \left(\frac{q}{5 \times 10^{-3}} \right)^{1/4} \quad (2.134)$$

が得られる。

ここでは暗黒物質の位相空間の密度の一般的な上限として (2.129) を用いたが、暗黒物質の生成のモデルによって決まる運動量分布 $f(p)$ を用いれば、より強い制限が得られる場合もある。そのうちのひとつとして、Dodelson-Widrow 機構 (2.110) のように、軽いニュートリノの運動量分布に比例している場合を考える。

$$f_N(p) = \frac{\beta}{e^{p/T} + 1}, \quad (2.135)$$

$$\beta = 0.0112 \frac{\Omega_N}{\Omega_{\text{DM}}} \frac{\text{keV}}{M_1} \quad (2.136)$$

より

$$\max f(p) = \beta \quad (2.137)$$

であるので

$$\frac{Q}{3^{3/2} M_1^4} < \frac{\beta}{(2\pi)^3} \quad (2.138)$$

$$\Rightarrow M_1 > 5.5 \text{keV} \left(\frac{\Omega_{\text{DM}}}{\Omega_N} \right)^{1/3} \left(\frac{q}{5 \times 10^{-3}} \right)^{1/3} \quad (2.139)$$

が得られる。

N_1 が Dodelson-Widrow 機構で作られる場合、X 線からの制限により $M_1 \lesssim 5\text{keV}$ 、一方 Tremaine-Gunn 境界から $M_1 \gtrsim 6\text{keV}$ と、緊張がある。また Ly- α の森の観測による暗黒物質の自由流長の上限から

$$M_1 > 8 \text{ keV} \quad (2.140)$$

が得られており [64]、単純な Dodelson-Widrow 機構で生成される N_1 は暗黒物質の全てにはなれないと考えられている [65]。解決する方法としては、 $O(100)$ MeV 程度の重いニュートリノの崩壊のエントロピーによって自由流長を小さくする方法や、2.3.2 節では無視したレプトン数の非対称性のポテンシャルへの影響を取り入れる方法がある [66, 67]。

今までのように、標準模型に右巻きニュートリノを導入するだけでなく、さらなる拡張をすれば、振動以外の方法で N_1 を作る事ができる。筆者は、右巻きニュートリノのゲージ相互作用を導入する場合の研究を行った [1]。このとき暗黒物質は作られ過ぎてしまうが、それをレプトジェネシスの際のエントロピー生成を考慮すれば上手くいくパラメータを示した。

2.4 大統一理論

標準模型を超えた有力な理論として、大統一理論がある。大統一理論とは、標準模型に含まれる 3 つの力を 1 つの力にまとめるものである。物理学の歴史を見ても、電気と磁気の統一から電磁気学が生まれ、さらに弱い相互作用も含めて電弱理論が生まれ、成功を収めてきた。さらに大統一理論では力のみならず質量も統一される。すなわち、標準模型では無関係であるクォークとレプトンの質量に関係がつく。本節では大統一理論における右巻きニュートリノの役割を議論をする。

2.4.1 SU(5) 大統一理論の問題点

大統一理論には、SU(5)、SO(10) など様々なゲージ群に基づくものが存在する。ここでは最も単純な SU(5) のものを考える [68]。このゲージ群を標準模型の群に破るために、24 表現ヒッグス 24_H を導入する。24 表現は標準模型の群 (1.1) のもとで次のように変換する。

$$24 \rightarrow (1, 1, 0) + (1, 3, 0) + (8, 1, 0) + (3, 2, -5/6) + (3^*, 2, 5/6) \quad (2.141)$$

これが次のような真空期待値を持つことで標準模型の群に破れる。

$$\langle 24_H \rangle = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix} V \quad (2.142)$$

クォークとレプトン、標準模型のヒッグスは以下のように 5_F^* 、 10_F 、 5_H 表現に入る。これらの記法を用いて、フェルミオンの質量を与えるラグランジアンは次のようにかける。

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = y_{ij} 10_{Fi}^{\alpha\beta} 5_{F\alpha j}^* 5_{H\beta}^* + Y_{ij}^u \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} 10_{Fi}^{\alpha\beta} 10_{Fj}^{\gamma\delta} 5_H^\epsilon \quad (2.143)$$

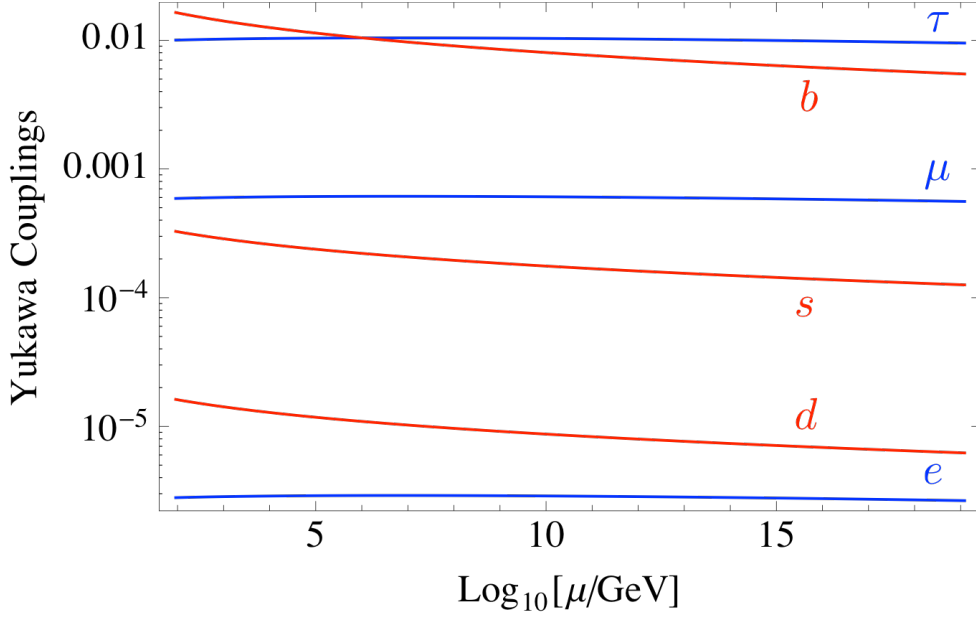


図 2.7: ダウン系列クォーク (d, s, b) と荷電レプトン (e, μ, τ) の湯川結合の発展。各世代とも大統一理論のスケールでは一致していない。

ここで $i, j = 1, 2, 3$ は世代の添え字、 $\alpha, \beta = 1, \dots, 5$ は $SU(5)$ の添え字である。第1項がダウン系列のクォークと荷電レプトン、第2項がアップ系列のクォークの質量を与える。すなわち、このラグランジアンでは、大統一理論のスケールで

$$m_d = m_e, \quad m_s = m_\mu, \quad m_b = m_\tau \quad (2.144)$$

となる。しかし観測されている値を繰り込み群方程式に入れて計算すると、これらの関係は成り立っていないことがわかる [69]。図 2.7 に繰り込み群による発展を示した。 $\mu = m_Z$ での湯川結合のインプットには [109] を用いた。

第一、第二世代のずれについては、Planck スケールからくる高次元項で説明できる [70]。

$$\delta m \sim \frac{M_G}{M_P} v \sim 0.1 \text{ GeV} \frac{M_G}{10^{15.5} \text{ GeV}} \quad (2.145)$$

ここで M_G はゲージ結合が一致する大統一スケールである。第三世代のずれを説明するには、大統一スケールを大きく取る方法もあるが、その場合は核子崩壊実験 (スーパーカミオカンデ [71] や将来のハイパーカミオカンデ [72, 73]) による検証が困難となり、またニュートリノ質量から示唆されるスケール (\sim 図 4.2 の M_1 の上限) から遠くなるというデメリットがある。以下では別の方法を考える。

2.4.2 右巻きニュートリノによる b - τ 統一

上で説明した $SU(5)$ 模型には3つの問題がある。

1. ニュートリノが質量を持たない
2. ゲージ結合定数が一点で一致しない

3. ボトムクォーク b とタウレプトン τ の湯川結合が一致しない

本小節ではこれらを解決するため、新たな場を導入することを考える。

まずニュートリノ質量については、2.1節で見たように右巻きニュートリノ、すなわちゲージ相互作用をしないフェルミオン $(1,1,0)$ を導入することで解決できる。(2.141) から分かるように、このフェルミオンは $SU(5)$ のもとで 24 表現 (2.141) に埋め込むことができる。この 24 表現のうち、右巻きニュートリノ以外はゲージ結合の発展を変えるため、ゲージ結合定数を統一することができる³ [76–79] (図 2.8)。この図では $(1,3,0)_F, (1,3,0)_H, (8,1,0)_F$ が大統一スケールよりも非常に軽い場合を描いている。

以下で、右巻きニュートリノの繰り込み群への寄与により、3つ目の問題が解決されることを見る。ここでは簡単のため

$$y_{\tau 1} = \dots y_{\tau n} \equiv y_\nu, |y_\nu| \gg |y_{eI}|, |y_{\mu I}|, M_1 = \dots M_N = M \quad (2.146)$$

の場合を考える。これらの仮定は以下の議論で本質的ではなく、例えば右巻きニュートリノが入る点での折れ曲がりか滑らかになるといった程度である。この仮定のもとで、 $\mu > M$ での繰り込み群方程式は [107, 108],

$$16\pi^2 \frac{dy_t}{dt} = y_t \left(\frac{3}{2}y_t^2 - \frac{3}{2}y_b^2 + T - \frac{17}{20}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_3^2 \right), \quad (2.147)$$

$$16\pi^2 \frac{dy_b}{dt} = y_b \left(\frac{3}{2}y_b^2 - \frac{3}{2}y_t^2 + T - \frac{1}{4}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_3^2 \right), \quad (2.148)$$

$$16\pi^2 \frac{dy_\tau}{dt} = y_\tau \left(\frac{3}{2}y_\tau^2 - \frac{3}{2}ny_\nu^2 + T - \frac{9}{4}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 \right), \quad (2.149)$$

$$16\pi^2 \frac{dy_\nu}{dt} = y_\nu \left(\frac{3}{2}ny_\nu^2 - \frac{3}{2}y_\tau^2 + T - \frac{9}{20}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 \right), \quad (2.150)$$

$$T \equiv 3y_t^2 + 3y_b^2 + y_\tau^2 + ny_\nu^2, \quad (2.151)$$

となる。(2.148) と (2.149) より、ニュートリノ湯川結合は y_b を大きくし、 y_τ を小さくするという、統一に好都合な方向の寄与をすることがわかる。以下、大統一理論の条件を満たすニュートリノ湯川結合の境界条件 $y_\nu(\mu = M)$ を求める。(2.148)-(2.150) より、 y_t を消去すると、

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} \ln \frac{y_\nu y_b^2}{y_\tau^2} = \frac{11}{2}ny_\nu^2 + \frac{71}{20}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 16g_3^2. \quad (2.152)$$

を得る。ただし右辺の y_b と y_τ の寄与は小さいので無視した。この式を積分し、大統一理論の条件

$$y_b(t_G) = y_\tau(t_G) \quad (t_G \equiv \ln(M_G/m_Z)) \quad (2.153)$$

を用いると、ボトム–タウ統一を満たすニュートリノ湯川結合が次のようにもとまる。

$$y_\nu(t_N) = \left[\frac{16\pi^2}{5\mathcal{N}(t_G - t_N)} \left(1 - \left(\frac{y_b(t_N)}{y_\tau(t_N)} \right)^{\frac{10}{3}} \left(\frac{\alpha_1(t_N)}{\alpha_1(t_G)} \right)^{-\frac{71}{24b_1}} \left(\frac{\alpha_2(t_N)}{\alpha_2(t_G)} \right)^{\frac{15}{8b_2}} \left(\frac{\alpha_3(t_N)}{\alpha_3(t_G)} \right)^{\frac{40}{3b_3}} \right) \right]^{1/2}. \quad (2.154)$$

³ $_{24F}$ ではなく、ヒッグス場 15_H を加えてゲージ結合の統一と II 型シーソー機構を実現する模型もある [74, 75]。

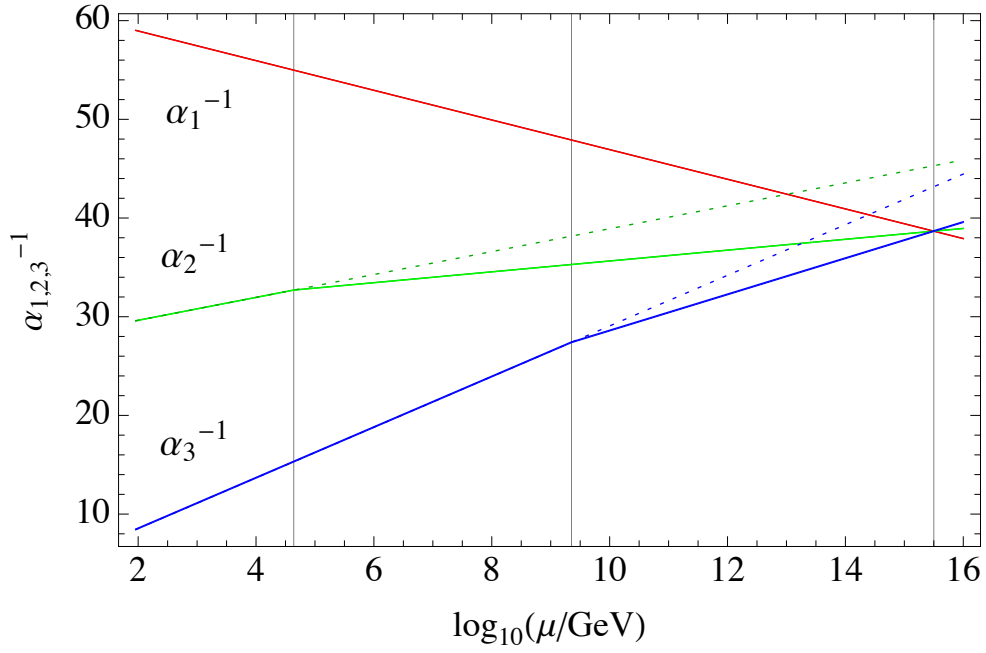


図 2.8: ゲージ結合 $\alpha_{1,2,3}$ の発展。実線は標準模型、点線は $24_{F,H}$ に含まれる新粒子の寄与によりゲージ結合が統一される例。1 σ の誤差を含めて描いている。大統一スケールは $10^{15.5}\text{GeV}$ にとった。垂直な3本の実線は左からそれぞれ、フェルミオン及びスカラー $(1,3,0)_{F,H}$ の質量、フェルミオン $(8,1,0)_F$ の質量、大統一スケールを表す。筆者の論文 [2] より転載。

ただしゲージ結合定数の部分は

$$(b_1, b_2, b_3) = (41/10, -3/2, -5) \quad (2.155)$$

である。(eyntn) をもとに実際に繰り込み群を走らせてみると、ボトム・タウ統一が実現している事がわかる (図 2.9、2.10、2.11)。よって、この模型では単純な $SU(5)$ 模型の3つの問題を同時に解決できた。

あまり右巻きニュートリノの質量が大統一スケールに近いと、ニュートリノ湯川結合が摂動性の上限

$$y_\nu(t_G) < \sqrt{4\pi} \quad (2.156)$$

を超えてしまう。この事から右巻きニュートリノの世代数に応じて質量の上限が決まる (図 2.12)。以上の結果を表 2.4 にまとめた。

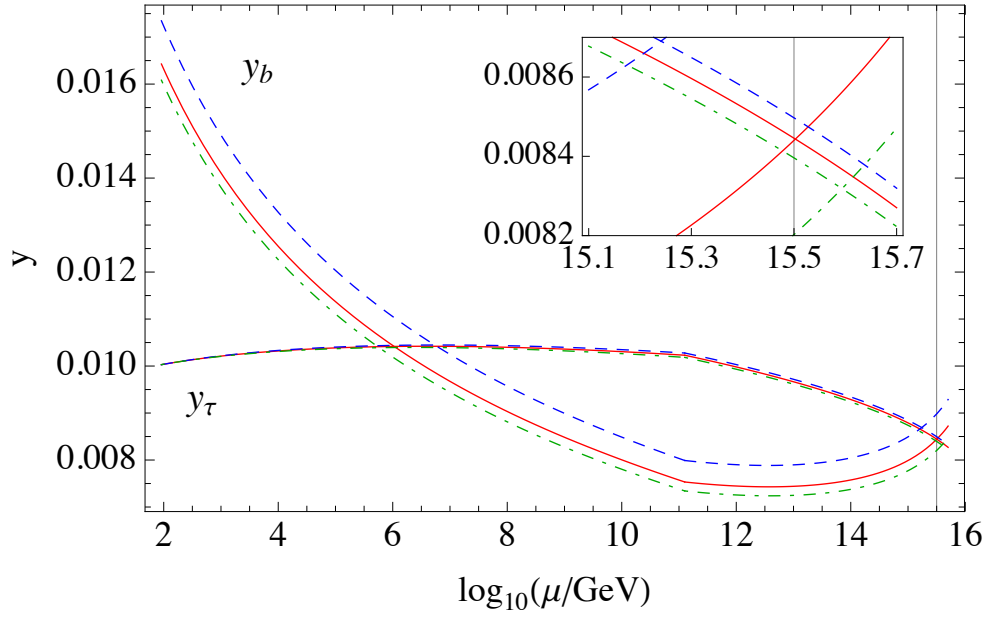


図 2.9: b と τ の繰り込み群による発展。 $\mathcal{N} = 1$, $M = 10^{11.1}\text{GeV}$, $M_G = 10^{15.5}\text{GeV}$ の場合。ダッシュ、ドットダッシュの線はインプットパラメータ [109] の誤差を表す。垂直な線は大統一スケール $\mu = M_G$ 。右上は大統一スケール付近の拡大図。筆者の論文 [2] より転載。

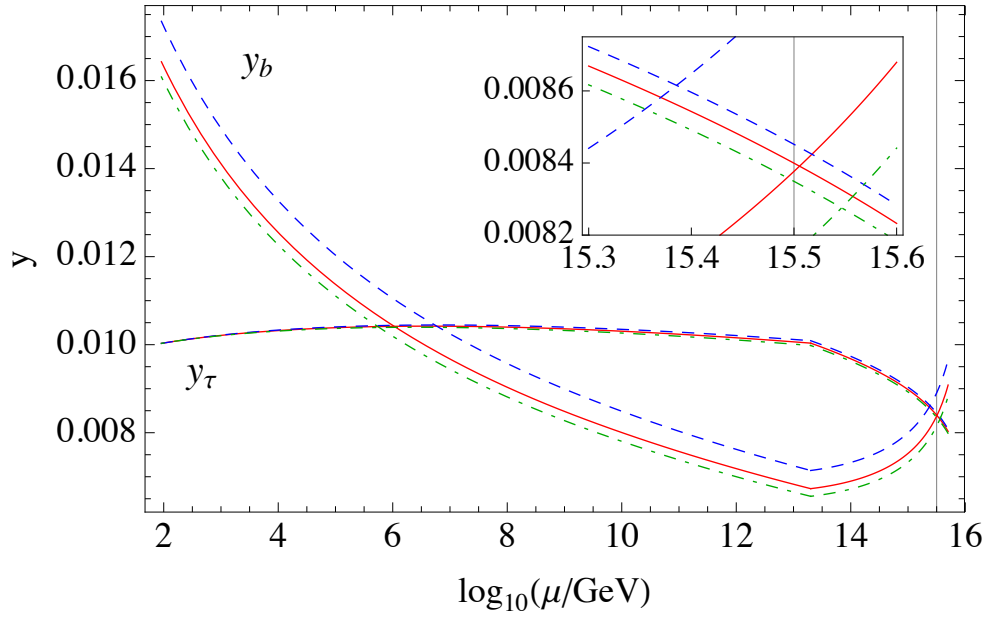


図 2.10: $\mathcal{N} = 2$, $M = 10^{13.3}\text{GeV}$ 、他は図 2.9 と同様。

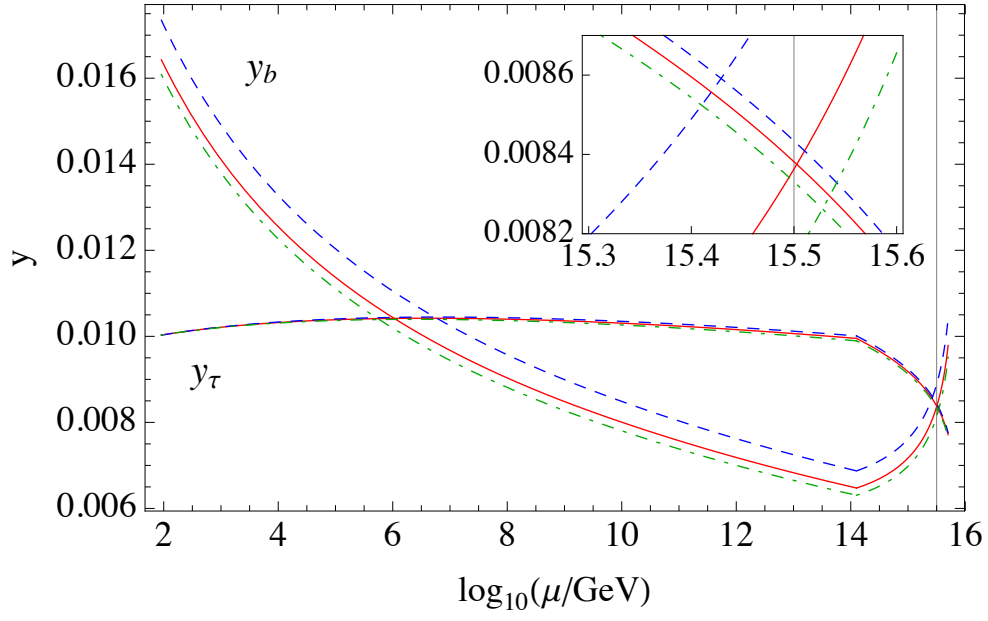


図 2.11: $\mathcal{N} = 3$, $M = 10^{14.1}\text{GeV}$ 、他は図 2.9 と同様。

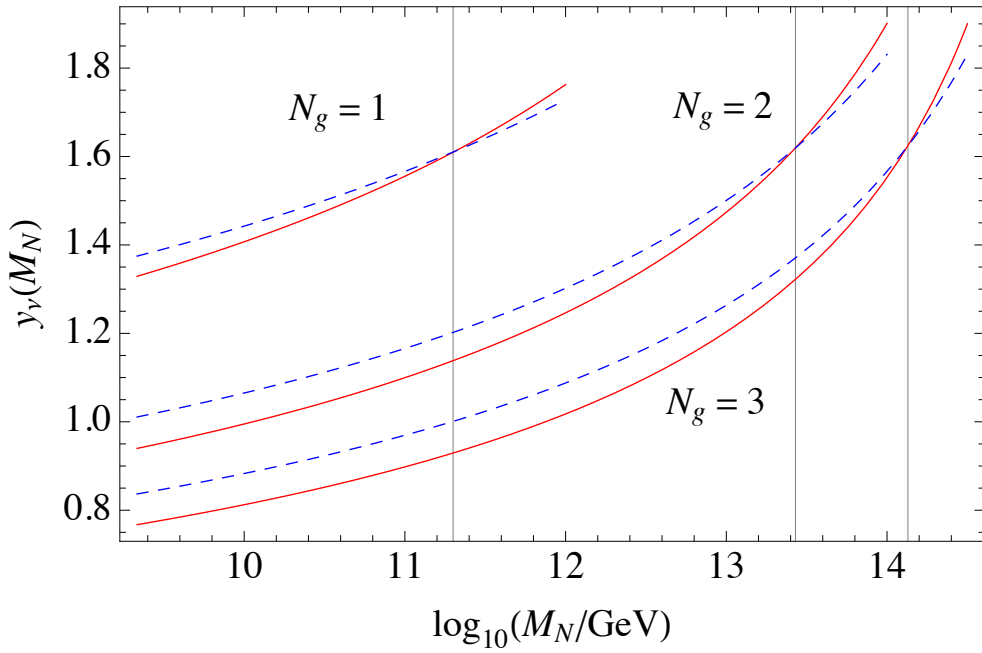


図 2.12: 実線は b - τ 統一を実現するニュートリノ湯川結合。ダッシュは摂動性からの上限。筆者の論文 [2] より転載。

表 2.4: b - τ 統一を実現する右巻きニュートリノの質量の上限と湯川結合。“Central” はインプットすべてを中央値にとったもの。“Best” は 1σ の誤差の中で最大の $y_b(m_Z)$ 、最小の $y_t(m_Z)$ と $\alpha_3(m_Z)$ にとったもの。“Worst” は “Best” の逆の場合である。

\mathcal{N}	$\log_{10}(M/\text{GeV})$			$y_\nu(t_N)$		
	Worst	Central	Best	Worst	Central	Best
$(M_G = 10^{15.5}\text{GeV})$						
1	10.7	11.1	12.1	1.53	1.58	1.75
2	13.1	13.3	13.8	1.53	1.58	1.75
3	13.9	14.1	14.4	1.53	1.62	1.77
$(M_G = 10^{16.0}\text{GeV})$						
1	10.4	10.9	12.0	1.43	1.49	1.64
2	13.2	13.5	14.0	1.43	1.50	1.64
3	14.1	14.3	14.7	1.42	1.49	1.66

第3章 右巻きニュートリノへの制限

右巻きニュートリノは、現象への影響が豊富にあり、図 3.1 のように様々な観測、実験からパラメーターに対する制限が得られている。本章ではこれまでの制限と将来実験の感度を説明する。様々な制限をまとめたレビューの例として [80, 81] がある。

地上実験からは混合に対し上限が付くが、宇宙観測からは下限も得られている。筆者らの研究により得られた、ニュートリノ質量を出すための下限（図 3.1 の ‘Seesaw’）及び上限（‘ $M_2 = M_1$ ’）については次章で説明する。

混合 $\Theta_{\alpha 1}$ ($\alpha = e, \mu, \tau$) への制限は、見るモードによって α は異なる。例えば、ニュートリノを出さない二重 β 崩壊 [83–85] は荷電レプトンとしては電子が関わるので、 Θ_{e1} へのみ感度がある。一方 $\mu \rightarrow e\gamma$ の探索実験 (MEG, [86]) からは $|\Theta_{e1}\Theta_{\mu 1}|$ に上限が付けられている [87]。本章では次章で重要になる、フレーバーの和をとった混合

$$|\Theta_1|^2 \equiv \sum_{\alpha} |\Theta_{\alpha 1}|^2 \quad (3.1)$$

に対する制限を示す。右辺の項の内、 $|\Theta_{\tau 1}|$ に対する制限が最もゆるいので、この和の上限はほぼ $\alpha = \tau$ の項で決まる。

3.1 地上実験からの制限

3.1.1 中間子及び荷電レプトンの崩壊

中間子 X ($X = \pi, K, D$) 及び荷電レプトンの崩壊から制限がつけられている。最も解析が容易なのは荷電レプトンを生成する 2 体崩壊 $X^\pm \rightarrow \alpha^\pm N$ である [88]。2 体崩壊では、生成した荷電レプトンのエネルギーは運動量とエネルギーの保存則より一位に定まり、

$$E_\alpha = \frac{m_X^2 + m_\alpha^2 - M_1^2}{2m_X} \quad (3.2)$$

で与えられる。荷電レプトンのエネルギースペクトルにこのピークが見えないことから、 $|\Theta_{\alpha 1}|^2$ に上限を課することができる。制限のつく領域は、 $E_\alpha > m_\alpha$ より、 $M_1 < m_X - m_\alpha$ の範囲である。例えば、 $\pi \rightarrow \mu N$ の仮定であれば、 $M_1 < 34$ MeV の範囲である。K 中間子 ($m_{K^\pm} = 493.677 \pm 0.016$ MeV) の崩壊についても同様に、 $M_1 < m_{K^\pm} - m_\mu = 388$ MeV の範囲について制限がつけられる。 τ 成分の制限は得られていないので、図 3.1 には載っていない。

同様にミューオン τ やタウオン τ の崩壊からも制限が得られる。 τ の場合は、

$$\tau^- \rightarrow N \pi^- \pi^+ \pi^- \quad (3.3)$$

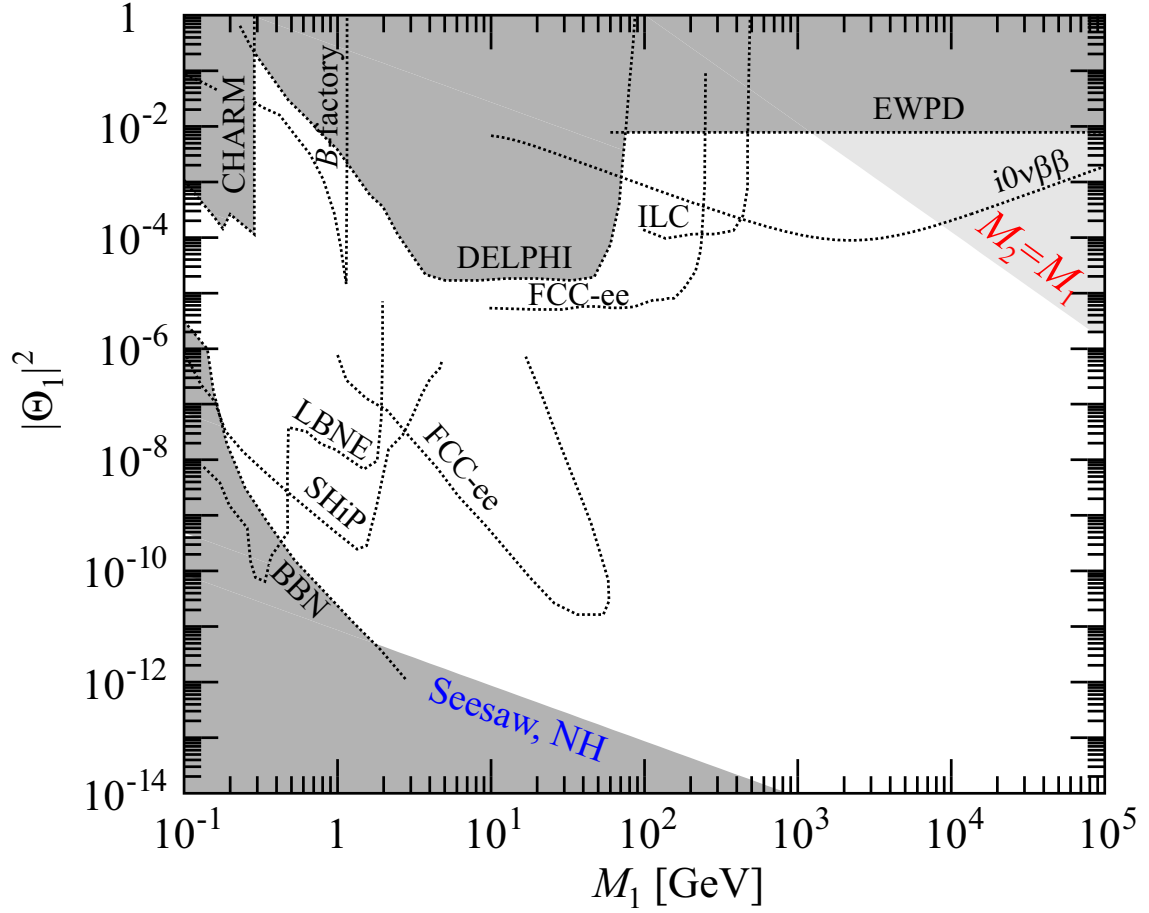


図 3.1: 重いニュートリノの質量 M_1 と混合 Θ_1^2 への制限 ([81] を参考)。灰色で塗られた領域が排除されている。黒点線は将来実験の感度を表す。ラベルは実験名や制限の由来を表す (本文を参照)。制限の参考文献は、CHARM [92]、DELPHI [97]、EWPd [82,87]、BBN [103,104]。将来実験の感度は、 B -factory [89]、ILC [96]、 $i0\nu\beta\beta$ [4]、FCC-ee [82,98]、LBNE [93]、SHiP [94,95] のものを描いた。‘ $M_2 = M_1$ ’、‘Seesaw’ の制限に関しては次章で説明する。

のように、生成したクォークが荷電中間子にハドロン化する過程で精度良く質量とエネルギーを再構成できる。この過程により $\Theta_{\tau 1}$ に制限が得られる [89]。約 10^7 個の τ の崩壊による感度を図 3.1 の ‘*B*-factory’ に載せた。

3.1.2 重いニュートリノの崩壊

中間子の崩壊やニュートリノと原子核の散乱などによって作られた重いニュートリノはその後崩壊し、荷電レプトンを生成する。その生成粒子は衝突位置から離れたところに検出器を置く事で観測可能である。そのような過程は観測されていないことから、混合に制限をつける事ができる。

重いニュートリノの崩壊 $N \rightarrow 3\nu, l^+l^-\nu$ のファインマン図は、ミューオンの崩壊 $\mu^- \rightarrow e^-\nu\nu$ と同様であるので (図 2.4 参照)、崩壊レートは次のように表せる [90]。

$$\frac{1}{\tau_N} \simeq \kappa(M_1)\Gamma_\mu \left(\frac{M_1}{m_\mu}\right)^5 |\Theta_1|^2 \quad (3.4)$$

$$\simeq \kappa(M_1)\frac{G_F^2 M_1^5}{192\pi^3} |\Theta_1|^2 \quad (3.5)$$

Γ_μ はミューオンの崩壊レート、 $\kappa(m_S)$ は重いニュートリノの可能な崩壊モードで決まる。重いニュートリノの崩壊モードは質量とともに増えていく (詳しくは [80] の Appendix, Table 6 を参照)。 $M_N < 1$ MeV では

$$N \rightarrow \nu\nu\nu \quad (3.6)$$

が支配的である (付録 F 参照)。例えば 1 ループでの崩壊 $N \rightarrow \nu\gamma$ のレートは $\Gamma_{N \rightarrow \nu\gamma}/\Gamma_{N \rightarrow 3\nu} \sim \alpha \sim 1/100$ と小さい。 $1 \text{ MeV} < M_N < 135 \text{ MeV}$ では $N \rightarrow \nu e^+ e^-$ が加わり、これは検出可能な崩壊である。

重いニュートリノ N の寿命を τ_N 、相対論的効果を表すガンマ因子を $\gamma_N \equiv E_N/M_N$ とおくと、 N が崩壊するまでに移動する距離は $L_d = \tau_N \gamma_N$ である。検出器に入る N のうち検出器の中で崩壊する割合は、検出器の長さを h とおくと、 $1 - e^{-h/L_d} \simeq h/L_d$ である。ただし $h/L_d \ll 1$ とした。結局、中間子の崩壊で作られた N の崩壊が検出される回数は

$$N = N_X Br B_{vis} \frac{h}{L_d} \Omega \epsilon \quad (3.7)$$

と表せる [91]。 N_X は生成源の中間子 X の数、 $B(X \rightarrow N)$ は X の崩壊で N が作られる分岐比、 B_{vis} は N の崩壊のうち崩壊先が検出可能な分岐比、 Ω と ϵ は検出器のアクセプタンスと効率である。例えば π 中間子の崩壊の場合、 $B(\pi \rightarrow \mu N) \propto |\Theta_{\mu I}|^2$ 、 $L_d^{-1} \propto \tau_N \propto |\Theta_{e I}|^2$ であるから、 $|\Theta_{e I} \Theta_{\mu I}|$ に上限がつく。CHARM 実験では全ての α に対する制限が得られているが、図 3.1 には最も弱い $|\Theta_{\tau 1}|$ に対する上限を図示している [92]。

将来実験として DUNE が計画されている (以前は LBNE と呼ばれていた) [93]。この実験では、チャームクォークの入った中間子の崩壊で右巻きニュートリノを作り、30 m 離れた位置で検出器しようというものである。図 3.1 の感度は 5×10^{21} 個の陽子をターゲットに衝突させた場合のものである。またレプトン数を破る崩壊の探索実験として SHiP [94, 95] が計画されている。これは CERN の陽子ビームを用いて大量の D メソンを生成するものである。

右巻きニュートリノが電弱スケール以上の質量の場合、 $N \rightarrow eW$ のように崩壊することができる。過去の LEP の制限は弱い、将来の ILC では大きく改善できる。図 3.1 では $\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}$, 500 fb^{-1} のルミノシティの場合を描いている [96]。FCC についても $\sqrt{s} = 250 \text{ GeV}$ の場合について載せた [82](図 3.1 の右上の ‘FCC-ee’)

3.1.3 Z ボソンの崩壊

$M_1 < m_Z$ の時、Z ボソンは次の二体崩壊を起こし得る。

$$Z \rightarrow \nu_{L\alpha} N \quad (3.8)$$

この N の崩壊を探すことにより、 $|\Theta_{\alpha 1}|^2$ に上限が得られる。全てのフレーバー α に対して制限が得られることに注意する。1990 年代、CERN の加速器 Large Electron-Positron Collider (LEP) に置いて、電子と陽電子の衝突によって大量 (10^6 個程度) の Z ボソンが生成された。その実験グループの一つ、DELPHI によって混合への制限が得られた [97]。

また、将来の電子-陽電子衝突実験として Circular Electron-Positron Collider (CEPC) や Future Circular Collider (FCC) がある。特に後者では Z ボソンを最大で 10^{12} 個程度作る計画もあり、さらに良い精度で右巻きニュートリノを探索することができる (図 3.1 の左下の “FCC-ee”) [98]。

3.1.4 電弱精密測定

右巻きニュートリノが存在する場合、ニュートリノの質量行列は $3 + n$ 次の行列全体を対角化して得られる。すなわち、 3×3 のアクティブな部分のみの混合行列に対して、 $\Theta_{\alpha 1}$ の影響がある。様々な電弱相互作用の測定、すなわち Z ボソンの観測されない崩壊幅、PMNS 行列のユニタリー性、中間子の崩壊におけるレプトンユニバーサル性の破れなどの観測結果に対するグローバルフィットにより、混合への上限が得られている (図 3.1 の “EWPD”) [82, 87]。質量が考慮する過程のエネルギースケールより大きい時、非ユニタリー性の制限は右巻きニュートリノが直接関わるのではなく、アクティブニュートリノのみの過程からの制限であるので、質量に依存しない制限となっている。

3.1.5 電子電子衝突

右巻きニュートリノがマヨラナである場合、レプトン数の破れによる特徴的な反応が起きうる。その一つの例がニュートリノを出さない逆二重 β 崩壊 (Inverse neutrinoless double beta decay)

$$e^- e^- \rightarrow W^- W^- \quad (3.9)$$

である [99]。t チャネルでニュートリノを飛ばし、そのマヨラナ性によりレプトン数が破れている ($L = 2 \rightarrow 0$ 、図 3.2)。筆者らは、複数年の右巻きニュートリノの寄与を考え、将来実験 (ILC [100] 及び CLIC [101]) の感度を求めた [4]。図 3.1 の ‘ $i0\nu\beta\beta$ ’ は、CLIC における $\sqrt{s} = 3 \text{ TeV}$, 100 fb^{-1} のルミノシティの場合の感度である。ただしこの感度まで探るには右巻きニュートリノが 3 世代以上必要である [4]。

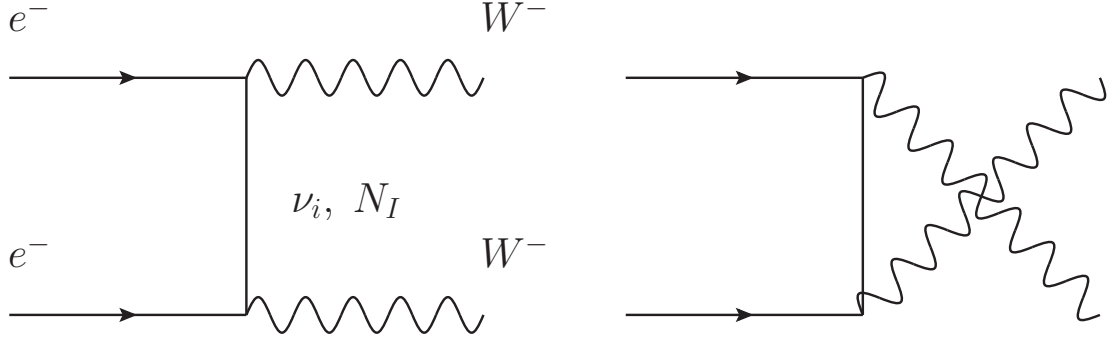


図 3.2: ニュートリノを出さない逆二重 β 崩壊 $e^-e^- \rightarrow W^-W^-$ のファインマン図。レプトン数が2減少している。

3.2 宇宙観測からの制限

3.2.1 ビッグバン元素合成

標準的な宇宙模型において、初期宇宙における軽元素 (H, D, ^3He , ^4He , ^7Li) の生成を記述する機構はビッグバン元素合成 (Big-Bang Nucleosynthesis, BBN) と呼ばれ、観測と良く一致している。BBN のレビューとして [102] を挙げておく。元素が作られている際に重いニュートリノが存在すると、そのエネルギーの分膨張が速くなり、 ^4He の量が観測と合わなくなってしまう。また、重いニュートリノの崩壊によって軽いニュートリノの運動量分布が変わる事も元素合成に影響する。このことから重いニュートリノは十分早く崩壊しなくてはならない。

1 MeV < M_1 < 200 MeV のとき、 N が BBN 前に崩壊する条件として

$$\tau_N \sim 1\text{s} \left(\frac{10 \text{ MeV}}{M_1} \right)^5 |\Theta_1|^{-2} \lesssim 0.1\text{s} \quad (3.10)$$

を得る [103, 104]。図 3.1 の ‘BBN’ に示した。これは前小節の制限とは異なり、混合に下限を与える。

宇宙論からの制限を適用する場合には注意が必要である。BBN の制限では、かつて右巻きニュートリノが熱平衡に達していた場合の残存量を仮定している。例外として、宇宙の再加熱温度が BBN の起きる温度に近い場合や、右巻きニュートリノの熱浴からの脱結合後にエントロピー生成が起きた場合には、その残存量は少なくなるので制限は緩くなる。

右巻きニュートリノが暗黒物質である場合の、宇宙観測からの制限については、2.3.3, 2.3.4 節で説明した。

第4章 右巻きニュートリノへの理論的制限

本章では、標準模型に右巻きニュートリノを加えた模型において、右巻きニュートリノと左巻きニュートリノの混合に理論的な下限及び上限が存在することを示す。筆者らの論文 [5] に基づく。バリオン非対称性の起源や暗黒物質が右巻きニュートリノであることは仮定せず、シーソー機構のみを仮定する。

もしも左巻き及び右巻きニュートリノが一代であれば、(2.9) からわかるように、軽いニュートリノと重いニュートリノの質量が決まれば、湯川結合、及び軽いニュートリノと重いニュートリノの混合は（無意味な位相を除いて）決まる。すなわち、

$$m = \frac{y^2 v^2}{M} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{mM}}{v} \Leftrightarrow \Theta \equiv \frac{yv}{M} = \sqrt{\frac{m}{M}} \quad (4.1)$$

実際には m は 3×3 、 M は $n \times n$ 、 y は $3 \times n$ の行列であるから、(4.1) のように単純ではない。これはおおよそ混合の下限である事が後にわかる。

4.1 混合の下限

(4.1) からわかるように、湯川結合がもし小さ過ぎれば、左巻きニュートリノの質量は観測値よりも小さくなってしまう。筆者らは、混合を左巻きニュートリノのフレーバーについて和をとった量、

$$|\Theta_1|^2 \equiv \sum_{\alpha} |\Theta_{\alpha 1}|^2 \quad (4.2)$$

に下限が付くことを示した。

まず、湯川結合に関して Casas-Ibarra パラメトリゼーション (2.70) を用いると（付録 B も参照）

$$\Theta_{\alpha 1} = \frac{y_{\alpha 1} v}{\sqrt{M_1}} = i \frac{(U \sqrt{m^{\text{diag}}} R)_{\alpha 1}}{\sqrt{M_1}} \quad (4.3)$$

となるので、

$$|\Theta_1|^2 = \frac{1}{M_1} \sum_{j=1}^3 m_j |R_{j1}|^2 \quad (4.4)$$

となる。 R はシーソー機構のみでは決まらない、湯川結合の自由度を表していて、

$$RR^T = 1 \quad (4.5)$$

を満たす複素行列である。 $n = 3$ の時のみ直行行列となることに注意する。

$\mathcal{N} = 2, 3$ のとき、 R は次の性質を満たす。

$$(R^T R)_{11} = \sum_{j=1}^3 R_{j1}^2 = \sum_{j=1}^3 (R_{j1}^{r2} - R_{j1}^{i2} + 2i R_{j1}^r R_{j1}^i) = 1 \quad (4.6)$$

ここで R^r と R^i は R の実部と虚部を表す。この式の実部から、

$$\sum_{j=1}^3 (R_{j1}^{r2} - R_{j1}^{i2}) = 1 \quad (4.7)$$

を得る。この式を用いて、混合の下限が得られる。

$$\begin{aligned} M_1 |\Theta_1|^2 &= m_l \left(1 - \sum_{j=1}^3 (R_{j1}^{r2} - R_{j1}^{i2}) \right) + \sum_{j=1}^3 m_j (R_{j1}^{r2} + R_{j1}^{i2}) \\ &= m_l + \sum_{j=1}^3 \{ (m_j - m_l) R_{j1}^{r2} + (m_j + m_l) R_{j1}^{i2} \} \\ &\geq m_l, \end{aligned} \quad (4.8)$$

m_l は、最小のニュートリノ質量である ($\mathcal{N} = 2$ の時は非 0 のもの)。具体的に書くと、

$$m_l = \begin{cases} m_2 & (n = 2, \text{NH}) \\ m_1 & (n = 2, \text{IH}) \\ m_1 & (n = 3, \text{NH}) \\ m_3 & (n = 3, \text{IH}) \end{cases} \quad (4.9)$$

である。

右巻きニュートリノ 4 世代以上 ($\mathcal{N} \geq 4$) では混合に下限はつかない。例えば

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

ととれば、 $RR^T = 1$ を満たす。一方、

$$(R^T R)_{11} = 0 \quad (4.11)$$

であるので、 $|\Theta_1|^2 = 0$ となる。このことは、軽いニュートリノの質量固有値は高々 3 個 (rank 3) であり、4 世代以上の場合は最も軽い重いニュートリノがシーソー機構に寄与する必要がないことを表している。

この下限の帰結として、右巻きニュートリノを暗黒物質にする場合には $\mathcal{N} \geq 3$ であることが言える (この結果は [105] で指摘されていた)。なぜなら、 $\mathcal{N} = 2$ かつ制限の緩い NH の場合、表 1.2 より

$$m_l = \sqrt{\delta m^2} = 8.68 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad (4.12)$$

であるので、シーソー機構からの下限 (4.8) は

$$|\Theta_1|^2 \geq \frac{m_l}{M_1} = 8.68 \times 10^{-6} \frac{\text{keV}}{M_1} \quad (4.13)$$

となる。この下限以上の混合では、(2.114) より Dodelson-Widrow 機構によって N_1 が作られるので、その質量は Tremaine-Gunn 境界 (2.134) または自由流長への制限 (2.140) より

$$M_1 \gtrsim 6 \text{ keV} \quad (4.14)$$

である。よって

$$|\Theta_1|^2 \gtrsim 1 \times 10^{-6} \frac{6 \text{ keV}}{M_1} \quad (4.15)$$

である。一方 X 線からの制限 (2.127) は

$$|\Theta_1|^2 \lesssim 3 \times 10^{-9} \left(\frac{6 \text{ keV}}{M_1} \right)^5 \quad (4.16)$$

であり、シーソー機構からの下限と両立できない。すなわち、右巻きニュートリノを暗黒物質とする場合は、(4.12) を逃れるために、 $\mathcal{N} \geq 3$ であり、かつ最小のニュートリノ質量が非常に小さいことが必要と言える。

4.2 混合の上限

R の成分は複素三角関数で表すことができ、絶対値は 1 よりも大きくなれる。(4.2) から、 $|R_{j1}|$ が 1 よりも大きくなれば、 $|\Theta_1|^2$ は一世代のシーソー機構から示唆される値 m_j/M_1 よりも大きくなることが分かる。

実際、実験で探索できる混合の領域ではそのようになっている。例えば、 Z ボソンの崩壊の制限は $|\Theta_1|^2 \lesssim 10^{-5}$ ($M_1 = 10 \text{ GeV}$) [97] である。この上限では $M_1 |\Theta_1|^2 \sim 100 \text{ keV} \gg m_j$ となる。

しかし、混合は自由に大きくなれるわけではない。シーソー関係式の対角成分の式は

$$\sum_j m_j U_{\alpha j}^2 = - \sum_I M_I \Theta_{\alpha I}^2. \quad (4.17)$$

となる。この節では混合の上限を考えるので、少なくとも一つのフレーバー $\alpha = e, \mu, \tau$ について、 $M_1 |\Theta_{\alpha 1}|^2 \gg m_j$ である。例えば DELPHI による制限では、図 3.1 より $M_1 \sim 10 \text{ GeV}$ 付近で

$$|\Theta_1|^2 < 10^{-5} \quad (4.18)$$

であるので、その上限付近では

$$M_1 |\Theta_1|^2 \simeq 100 \text{ keV} \quad (4.19)$$

である。このような大きな寄与は、2世代目以降の右巻きニュートリノの寄与とキャンセルし、eV オーダーのニュートリノ質量を再現しなくてはならない。このキャンセルについては4.4節でも述べる。すると、シーソー関係式の対角成分 (4.17) で支配的な項について

$$M_1 \Theta_{\alpha 1}^2 = - \sum_{I=2}^{\mathcal{N}} M_I \Theta_{\alpha I}^2 \quad (4.20)$$

が成り立つ。三角不等式と混合の定義 (2.13) により

$$|\Theta_{\alpha 1}|^2 = \left| \sum_{I=2}^{\mathcal{N}} \frac{M_I}{M_1} \Theta_{\alpha I}^2 \right| \quad (4.21)$$

$$\leq \sum_{I=2}^{\mathcal{N}} \frac{M_I}{M_1} |\Theta_{\alpha I}|^2 \quad (4.22)$$

$$= \sum_{I=2}^{\mathcal{N}} \frac{M_I}{M_1} \left| \frac{y_{\alpha I} v}{M_I} \right|^2 \quad (4.23)$$

$$= \frac{v^2}{M_1} \sum_{I=2}^{\mathcal{N}} \frac{|y_{\alpha I}|^2}{M_I} \quad (4.24)$$

$$\leq \frac{v^2}{M_1 M_2} \sum_{I=2}^{\mathcal{N}} |y_{\alpha I}|^2 \quad (4.25)$$

最後の等号は $M_2 = \dots = M_{\mathcal{N}}$ の時に成立する。よって湯川結合への上限を混合の上限に直すことができる。摂動性の条件として

$$|y_{\alpha I}| \leq \sqrt{4\pi} \quad (4.26)$$

を用いれば、

$$|\Theta_{\alpha 1}|^2 \leq \frac{4\pi(\mathcal{N}-1)v^2}{M_1 M_2}, \quad (4.27)$$

となる。この式は本章で最も重要なものである。この式から、2世代目の右巻きニュートリノの質量 M_2 が大きいほど、制限は厳しくなる。この式を得る際に、1世代目でなく2世代目以降の摂動性 $y_{\alpha I}$ ($I \geq 2$) が用いられていることに注意する。1世代目自身の摂動性の上限

$$|\Theta_{\alpha 1}|^2 = \left| \frac{y_{\alpha 1} v}{M_1} \right|^2 \leq \frac{4\pi v^2}{M_1^2} \quad (4.28)$$

と比較して、 $M_2 \gg M_1$ であれば4.27の方がはるかに強い制限を与える。もしも今後実験で右巻きニュートリノが見つかった場合、(4.27) によって2世代目の右巻きニュートリノの質量の上限が得られる。

湯川結合は繰り込み群により変化する。以下では摂動性を Planck スケールまで保証するために繰り込み群を考える。(4.27) から、世代数 \mathcal{N} への依存性は弱い (2世代と3世代ではたかだか2倍程度の違い) ので、今後は2世代の場合を考える。

重いニュートリノの質量以上のスケールでは、1ループの繰り込み群方程式ので重要な項のみを考えると以下の通りになる¹ [107,108]。

$$16\pi^2 \frac{dy_t}{dt} = y_t \left(\frac{3}{2}y_t^2 + T - \frac{17}{20}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_3^2 \right), \quad (4.29)$$

$$16\pi^2 \frac{dy^\nu}{dt} = y^\nu \left(\frac{3}{2}y^\nu y^{\nu\dagger} + T - \frac{9}{20}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 \right), \quad (4.30)$$

$$T \equiv 3y_t^2 + \text{tr}(y^\nu y^{\nu\dagger}) \quad (4.31)$$

ただし $t \equiv \ln(\mu/m_Z)$ である。荷電レプトンの繰り込み群への寄与は無視できるほど小さいので、左巻きレプトンの基底をニュートリノ質量行列が対角なものに取った。

$$y^\nu \equiv -iU^\dagger y \quad (4.32)$$

この基底であれば、 U に含まれる未知のパラメーター、ディラック及びマヨラナ位相に依存せずに議論が行える。混合 $|\Theta_I|^2$ は基底に依存しないことに注意する。

$$|\Theta_I|^2 = ((yvM^{-1})^\dagger(yvM^{-1}))_{II} = ((y^\nu vM^{-1})^\dagger(y^\nu vM^{-1}))_{II} \quad (4.33)$$

湯川結合の発展の例を図4.1に示した。インプットパラメータはすべて文献 [8,109,110] の最適値を用いた。今の基底 (4.32) では、順階層の場合 $y_{1I}^\nu = 0$ である。図4.1からも分かるように、ニュートリノ湯川は単調増加であるので、摂動性の条件を

$$|y_{jI}^\nu(\mu = M_P)| < \sqrt{4\pi} \quad (4.34)$$

ととる。ここで μ は繰り込み群のスケール、 $M_P = 2.4 \times 10^{18}$ GeV である。この Planck スケール以上では重力の効果が無視できず、未知の理論に切り変わると期待される。上限を課すエネルギースケール付近で湯川結合は急上昇するので、他のスケールで上限を課しても結果はあまり変わらない。トップクォークの湯川結合 y^t は高エネルギー領域では $|y^\nu|$ より小さいので、こちらの摂動性も保たれている。

ここで摂動性の必要性について述べる。上の繰り込み群方程式は摂動論の第一近似でも止まるものであるが、湯川結合が大きき1程度を超えるとこの近似が良い保証がなくなる。ある湯川結合の低エネルギーでの値が大きい場合、

$$\frac{dy}{dt} \sim y^3 \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow y^2 \sim \frac{1}{C-t} \quad (4.36)$$

となり、単調増加していく (C は定数、図4.1も参照)。もしもこの傾向が続くのなら、湯川結合はあるエネルギースケールで発散してしまう。未知の非摂動的な効果により湯川結合の発展の仕方が変わり発散しないのならば、摂動性は必ずしも必要はないが、そのような仮定はここではしない。

摂動性とは別に、湯川結合への上限として、真空の安定性からくるものがある [111,112]。ヒッグス場の4点結合 λ の繰り込み群方程式に対する右巻きニュートリノの寄与は

$$16\pi^2 \frac{d\lambda}{dt} = (\text{標準模型の項}) + 4\lambda \text{tr}(y^\dagger y) - 8\text{tr}(y^\dagger y)^2 \quad (4.37)$$

¹湯川結合をうまく組み合わせることで (1ループで) エネルギーに依存しない量をクォーク、レプトンについて二つずつ作ることができる [3,106]。

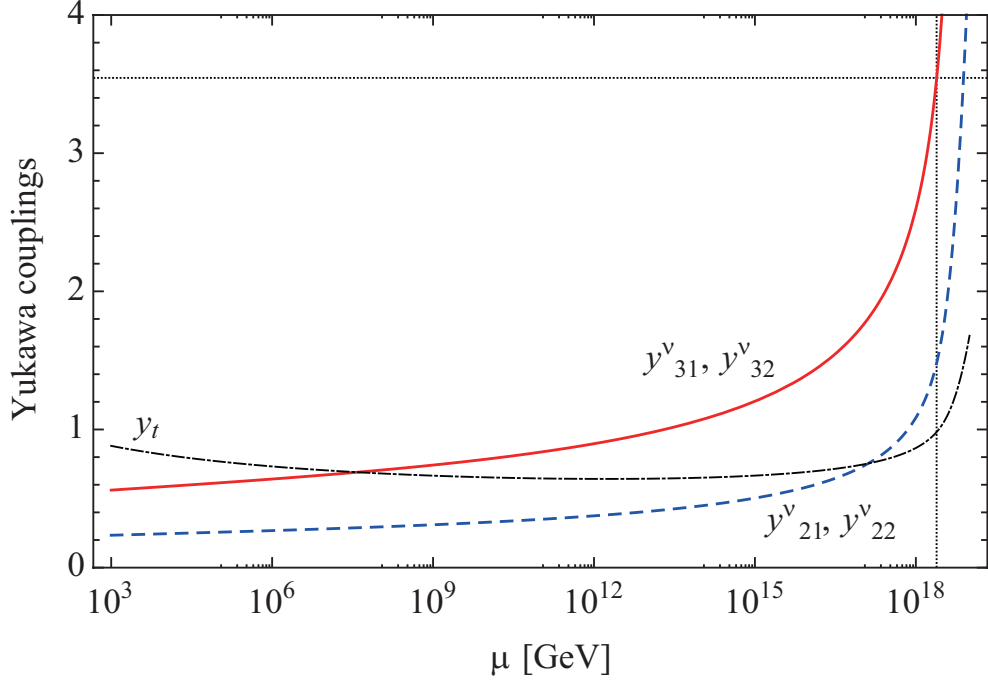


図 4.1: トップクォーク y_t (黒点破線)、及びニュートリノ湯川結合と $|y_{iI}^\nu|$ ($i = 2$ は赤実線、 $i = 3$ は青破線) の繰り込み群による発展 ($M_1 = M_2$ 、 $|y_{32}^\nu(M_P)| = \sqrt{4\pi}$ 、順階層性 (NH) の場合)。赤実線、青破線は $M_1 = \mu$ の時の初期条件 $|y_{iI}^\nu(\mu = M_1)|$ の上限ともみなせる。 $\mu = M_P$ 及び湯川結合が $\sqrt{4\pi}$ の点線も描いた。筆者らの論文 [5] より転載。

であるので、ニュートリノの湯川結合が1程度の時は右辺第3項の方が大きいので、 λ に負の寄与をする。その寄与が大きければ真空が不安定になってしまう。このことから湯川結合は1程度より小さい必要がある。 $M_1 = 10^{13\sim 14}$ GeV のときおよそ $y_\nu < 0.5$ であり [111]、摂動性の条件 (図 4.1 より $y_\nu < 1$) よりも若干厳しい。ただしこの議論はトップクォークの質量の誤差に大きく依存していることもあり、本研究ではより保守的な摂動性を課すことにする。仮に湯川結合の上限の由来をこの真空の安定性や他のものとしても、その上限の桁が大きくずれない限り、本研究の結果は本質的に変わらない。

4.3 結果

混合 $|\Theta_1|^2$ への制限を 図 4.2 に示した。実験的制限については 前章を参照。摂動性からの上限 (図 4.2 の赤実線) は、 $M_2 = M_1$ の場合は $\propto M_1^{-2}$ 、 M_2 を固定した場合は $\propto M_1^{-1}$ の依存性があり、(4.27) を再現している。 $M_2 = M_1$ の場合の摂動性からの上限については、順階層及び逆階層の両方の場合を描いたが、その差は無視できるほど小さいことが分かる。摂動性の上限により、 $M_2 > 10^9$ GeV の場合、混合 $|\Theta_1|^2$ は ' $M_2 = 10^9$ GeV' の線よりも下である必要がある。第一世代の右巻きニュートリノは $\mathcal{O}(10^{15})$ GeV よりも重くなれないことも見て取れる。(4.27) から分かるように、右巻きニュートリノの世代数は上限をほとんど変えないが、下限は大きく変わり得る (4.8)。

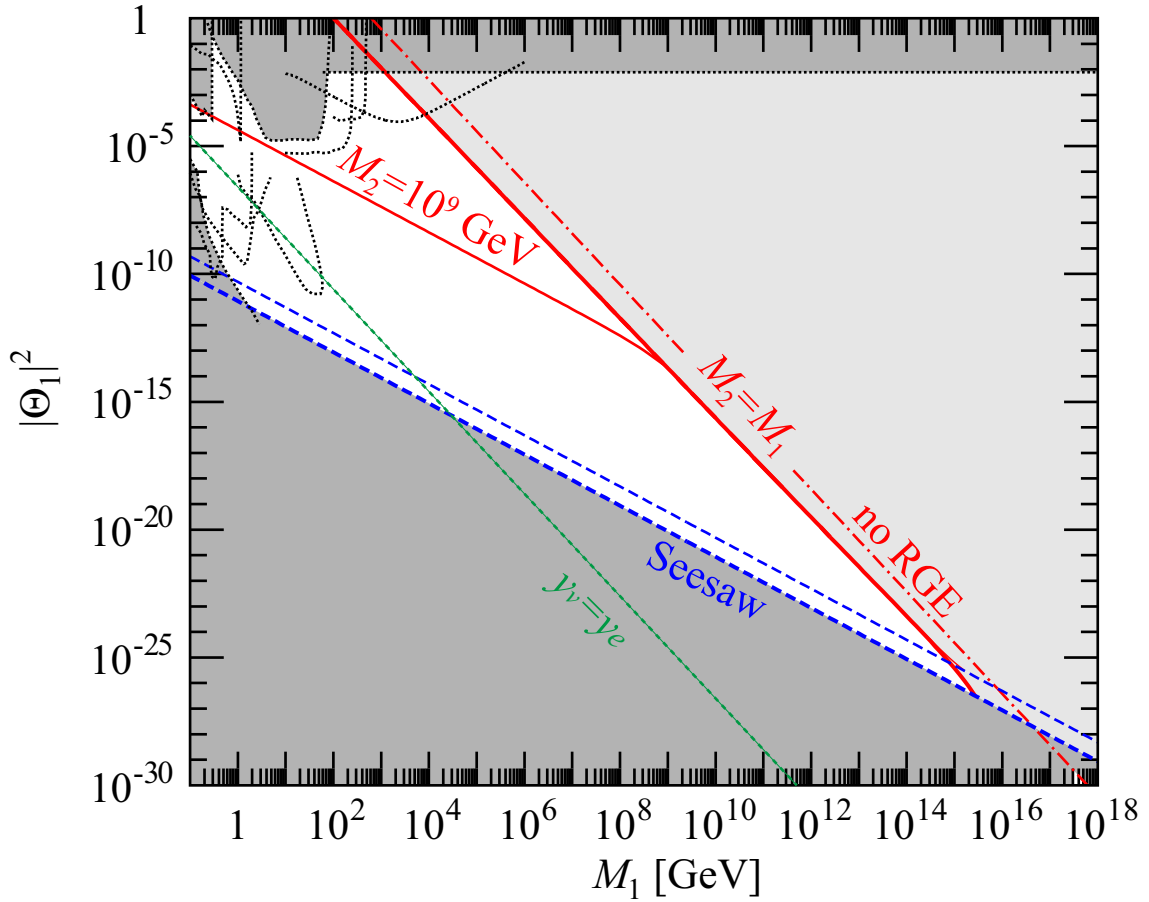


図 4.2: 混合への制限。色で塗られた部分が排除されている。摂動性からの上限を赤線で表した。(4.27) の制限で $\mathcal{N} = 2$, $M_2 = M_1$ とした場合を点破線 (‘no RGE’) で表した。2本の青破線 ‘Seesaw’ は (4.8) の順階層 (下) 及び逆階層 (上) の場合を示している。黒点線は実験・観測からの制限を表す (第3章、図 3.1 を参照)。緑点線 ‘ $y_\nu = y_e$ ’ はニュートリノ湯川結合が電子のものと等しくなる線を表す。

標準模型で最も小さい湯川結合を持つのは電子で、

$$y_e = m_e/v = 511 \text{ keV}/174.1 \text{ GeV} = 2.94 \times 10^{-6} \quad (4.38)$$

である。ニュートリノ湯川結合もこの値以上であれば、標準模型以上に小さいパラメータは不要という意味で、自然とも言える。参考のため、この下限を図に ‘ $y_\nu = y_e$ ’ として載せた。

実験的に重要な質量領域を拡大したものを図 4.3 に示した。本研究で最も重要な点は、摂動性の上限が第2世代の質量 M_2 に依存することである。もしも M_2 が大きければ、将来実験で N_1 を見つけることは困難となる。逆に、もし発見されれば、2世代目の右巻きニュートリノの質量に上限が付く。例えば、 $M_1 \sim 10 \text{ GeV}$ 、 $|\Theta_1|^2 \sim 10^{-5}$ の所に見つかれば、2世代目の右巻きニュートリノの質量は $\sim 10^9 \text{ GeV}$ よりも小さいことが示唆される。すなわち、シンプルなレプトジェネシス [37] では $M_2 > 10^9 \text{ GeV}$ が必要であるため [41]、このモデルは好ましくないことになる ($\mathcal{N} = 3$ の場合)。この場合、他の機構、共鳴レプトジェネシス [43] やニュートリノ振動によるバリオジェネシス [44, 45] が必要となる。

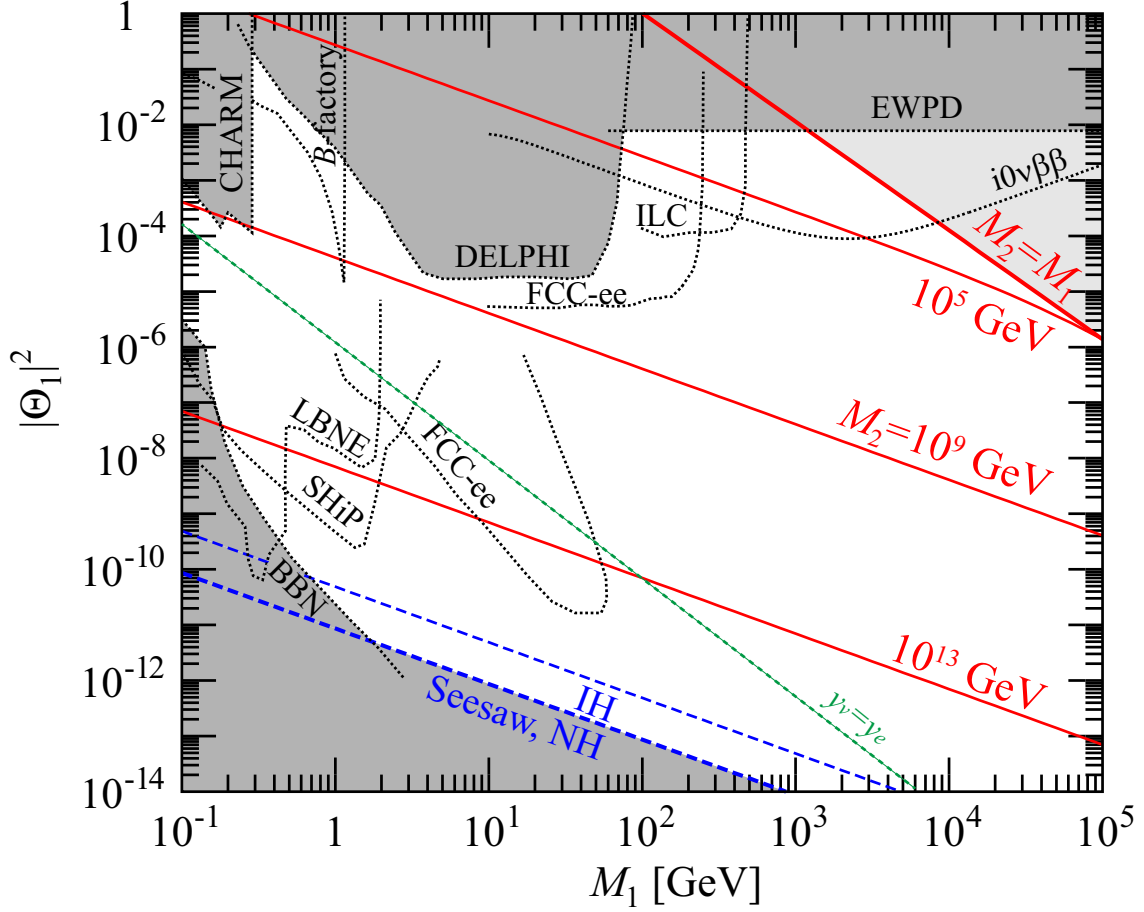


図 4.3: 混合への制限のうち将来実験で探索可能な領域の拡大図。図 4.2 及び図 3.1 と共通な線の意味は同様。赤実線の ' $M_2 = M_1$ ', ' 10^5 GeV', ' $M_2 = 10^9$ GeV', ' 10^{13} GeV' はそれぞれ 2 世代目の右巻きニュートリノの質量 M_2 がラベルの値である場合の、摂動性からの上限を表す。青太破線の ' Seesaw, NH ' は $\mathcal{N} = 2$ 、順階層の場合、青破線の ' IH ' は $\mathcal{N} = 2$ 、順階層の場合の下限 (4.9)。

4.4 輻射補正について

上で見たように、実験で右巻きニュートリノを発見したい場合、混合はシーソー機構から示唆される値よりも非常に大きくなくてはならない。このとき、各右巻きニュートリノのシーソー機構への寄与は互いにキャンセルする必要がある。一般にこのキャンセルは輻射補正に対して安定ではない [113, 114]。ここでは質量が縮退している場合には輻射補正の項でもキャンセルが起きることを確かめる。

軽いニュートリノ質量行列への 1 ループ補正は次のようになる [114]。

$$m = m_{\text{tree}} + m_{1\text{-loop}}, \quad (4.39)$$

$$(m_{1\text{-loop}})_{\alpha\beta} = \sum_I \Theta_{\alpha I} \Theta_{\beta I} M_I f(M_I), \quad (4.40)$$

$$f(M_I) \equiv \left(\frac{M_I}{4\pi v} \right)^2 \left\{ \frac{3 \ln(M_I^2/m_Z^2)}{M_I^2/m_Z^2 - 1} + \frac{\ln(M_I^2/m_H^2)}{M_I^2/m_H^2 - 1} \right\} \quad (4.41)$$

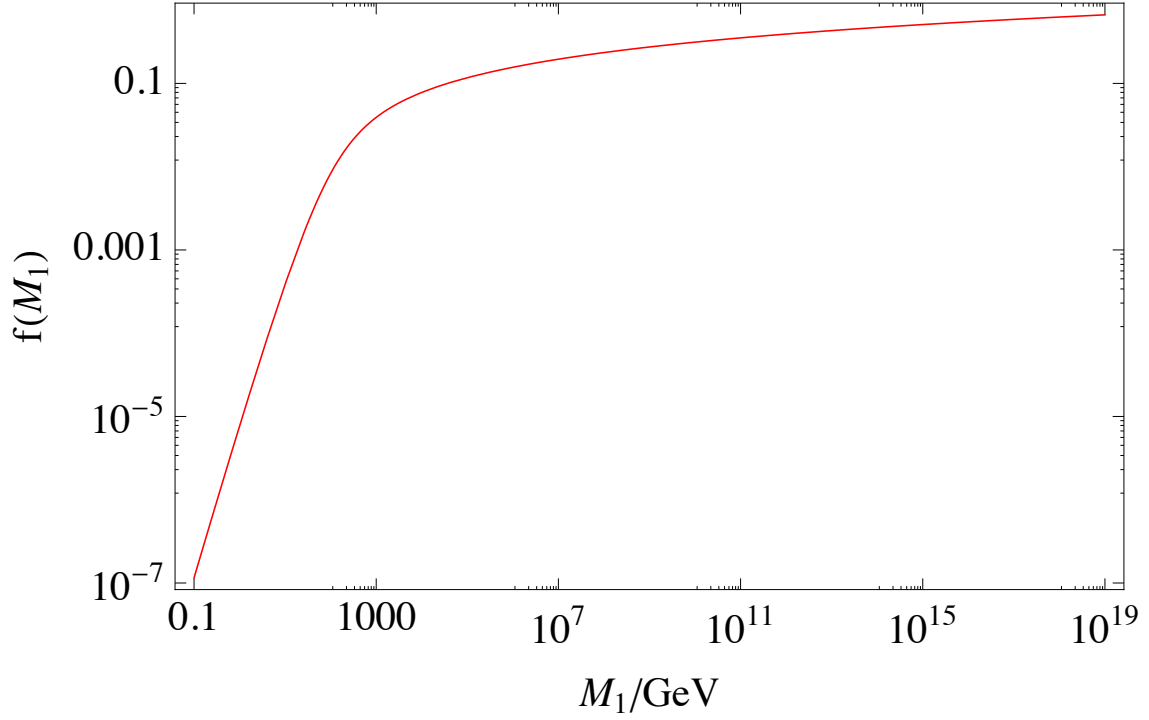


図 4.4: シーソー機構への右巻きニュートリノの寄与の 1-ループファクター (4.41) の大きさ。

これは $M_I \gg m_Z$ の極限で [113] の結果に一致する。この関数は図 4.4 のように振る舞う。ヒッグス質量としては

$$m_H = 125.7 \text{ GeV} \quad (4.42)$$

を用いた [8]。この図からも分かるように、

$$\lim_{M \rightarrow 0} f(M) = 0, \quad f(10^3 \text{ GeV}) = 0.039, \quad f(10^{15} \text{ GeV}) = 0.51 \quad (4.43)$$

であり、Planck スケールでも 1 を超えない。

簡単のため 2 世代で大きなキャンセルがある場合を考える。このとき、支配的な寄与 ($|\mu_{\alpha\beta}| \gg O(0.1)\text{eV}$) と微小量 $|\epsilon| \ll 1$ を用いて次のように表せる。

$$M_1 \Theta_{\alpha 1} \Theta_{\beta 1} = \mu_{\alpha\beta} (1 + \epsilon_{\alpha\beta 1}) \quad (4.44)$$

$$M_2 \Theta_{\alpha 2} \Theta_{\beta 2} = -\mu_{\alpha\beta} (1 + \epsilon_{\alpha\beta 2}) \quad (4.45)$$

このとき、支配的な項はキャンセルし、

$$(m_{\text{tree}})_{\alpha\beta} = -M_1 \Theta_{\alpha 1} \Theta_{\beta 1} - M_2 \Theta_{\alpha 2} \Theta_{\beta 2} \quad (4.46)$$

$$= \mu_{\alpha\beta} (-\epsilon_{\alpha\beta 1} + \epsilon_{\alpha\beta 2}) \quad (4.47)$$

となる。一方、輻射補正の寄与は

$$(m_{1\text{-loop}})_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha 1} \Theta_{\beta 1} M_1 f(M_1) + \Theta_{\alpha 2} \Theta_{\beta 2} M_2 f(M_2) \quad (4.48)$$

$$= \mu_{\alpha\beta} [f(M_1) - f(M_2) + \epsilon_1 f(M_1) - \epsilon_2 f(M_2)] \quad (4.49)$$

となる。よって、 M_1 と M_2 が近づくほど、この 1 ループ補正は小さくなることがわかる。 $M_1 = M_2$ であれば、この補正はループファクター f の分だけツリーの寄与よりも小さく、シーソー関係式は壊されないことがわかる。右巻きニュートリノの質量が縮退しておらず、 $|\mu_{\alpha\beta}f| \gg O(0.1) \text{ eV}$ の場合、(4.47) と (4.49) の間でさらにキャンセルが必要となる。

第5章 結論

本論文では、新粒子右巻きニュートリノを素粒子標準模型に加えた模型を中心に、その多様な性質を解説した。ニュートリノ振動実験によりニュートリノは質量を持つことが判明しているが、このことは現在の素粒子標準模型では説明不可能である。ニュートリノ質量の起源としては様々な模型が考案されているが、本論文では右巻きニュートリノを導入する模型を考えた。右巻きニュートリノはゲージ重項であることから、Majorana 質量 M_I を持つことができる。この Majorana 質量が Dirac 質量より非常に大きいことを仮定することで、小さなニュートリノ質量が得られる (2.16)。この機構はシーソー機構と呼ばれる。この質量を得る際に、左巻きニュートリノと右巻きニュートリノの間に混合が起きる。その混合 Θ は右巻きニュートリノの質量固有状態の相互作用の大きさを決めるため、現象論や実験的観測の議論に重要なパラメータである。

右巻きニュートリノを導入する最大の動機はニュートリノ質量であったが、それだけでなく様々な現象を引き起こし、標準模型の他の問題をも解決する可能性がある。特に重要なものが、宇宙のバリオン数非対称性である。右巻きニュートリノの湯川相互作用では CP が破れ、熱平衡からのずれも再現できることから、宇宙初期 (温度 $T \gtrsim 100$ GeV) に物質を反物質よりも多く作ることが可能である。その例としてレプトジェネシスを解説した。また他の問題として、宇宙の暗黒物質がある。暗黒物質は安定または長寿命で標準模型の粒子との相互作用は弱く、十分重い必要がある。軽いニュートリノは暗黒物質となりうるが、全ての暗黒物質を占めることはできない。右巻きニュートリノの混合が十分小さい場合、暗黒物質となることが可能である。筆者は熱平衡に達した右巻きニュートリノがレプトジェネシスの際のエントロピー生成で薄まり、暗黒物質の残存量となる模型を実現するパラメータを求めた [1]。

大統一理論における右巻きニュートリノについても議論した。最も単純な SU(5) 模型には問題があるが、24 表現フェルミオン 24_F を加えることで SU(5) 模型の 2 つの問題、すなわちニュートリノ質量とゲージ結合の統一が解決できることは知られていた (図 2.8)。筆者は 24_F に含まれる右巻きニュートリノに着目し、その繰り込み群への寄与によって SU(5) 模型の 3 つ目の問題、 $b-\tau$ 統一も解決できることを示した (図 2.9, 2.10, 2.11) [2]。

このように導入する動機や利点は多くあるものの、右巻きニュートリノは未発見であり、現在までに様々な制限が得られてきた。右巻きニュートリノの性質は混合 Θ (2.13) と質量によって決まる。本論文では筆者らが研究した電子電子衝突実験 [4] や、中間子、 Z ボソンの崩壊、電弱精密測定、ビッグバン元素合成など、加速器実験や宇宙観測からの主な制限、将来の感度をまとめた (図 3.1)。

筆者らは最も軽い右巻きニュートリノの混合 Θ_1 (4.2) の大きさに対し、シーソー機構の条件と理論の摂動性から下限及び上限が得られることを示した [5]。その結果をまとめたものが図 4.2、4.3 である。まず下限についてのべる。先行研究では、混合の下限はオーダーの見積もりしか得られておらず、どのような混合の組み合わせに下限がつくのかも分

かっていなかった。我々は混合のフレーバーの和をとったものに下限が存在することを示した (4.8)。この下限は、もし混合が小さすぎると、シーソー機構で得られるニュートリノ質量 (2.16) が小さすぎてしまうことに由来する。この下限は右巻きニュートリノの世代数 N に強く依存する。2 世代の場合は 0 でない最も軽いニュートリノ質量で決まる。3 世代では最も軽いニュートリノ質量で決まり、これは 0 でも良い。4 世代以上では下限は存在しない。この世代依存性は、ニュートリノ質量固有値の数 (2 又は 3) より多くの右巻きニュートリノはシーソー機構に寄与する必要がないことから来ている。2.3 節のように右巻きニュートリノを暗黒物質にする場合は、2 世代の下限と、X 線観測 (2.3.3 小節) の制限及び Tremaine-Gunn 境界 (2.3.4 小節) は同時に満たせないので、3 世代以上必要である。

一方摂動性からの混合への上限については、まず右巻きニュートリノのシーソー機構への寄与の間にキャンセルが必要なことに着目し、第一世代の混合 $|\Theta_{\alpha 1}|$ の上限を第二世代以降のニュートリノ湯川結合で表した (4.25)。さらにこの湯川結合に上限があることより、この混合への上限を得た。湯川結合の上限は、もし 1 程度以上であると、繰り込み群の自分自身の項によりすぐに発散に向かってしまうことから得られる (図 4.1 及び (4.36) 参照)。真空の安定性の上限も同じオーダーである。まず繰り込み群を考えない場合の解析的な上限式 (4.27) を得た。この式で上限は世代数 N への依存性が弱いことが分かるので (2 世代と 3 世代で 2 倍程度)、繰り込み群を用いた数値計算では 2 世代の場合を考えた。その結果と第 3 章で説明した実験の制限及び感度を合わせたのが図 4.2, 4.3 である。4.2 で、上限 ($\propto M_1^{-2}$) と下限 ($\propto M_1^{-1}$) が $M_1 \sim 10^{15}$ GeV で交わっており、右巻きニュートリノが 2 世代の場合 M_1 はこれ以上重くなれないことが分かる。

この摂動性からの混合への上限で重要な点は、それが 2 世代目の重いニュートリノの質量に依存することである。このことは世代数には寄らない ((4.27) 参照)。図 4.3 から分かるように、2 世代目の質量 M_2 が 1 世代目と縮退している場合が最も制限が弱い。 M_2 が大きくなるほど摂動性の上限は厳しくなっていき、将来実験の感度を超える。すなわち将来実験で 1 世代目の右巻きニュートリノを見つけるには、2 世代目も十分軽い必要がある。逆にもし 1 世代目の右巻きニュートリノが実験で発見され、パラメータ M_1 と $|\Theta_1|^2$ が計測されれば、(4.27) によって M_2 の上限が得られる。例えば ILC において $M_1 = 100$ GeV, $|\Theta_1|^2 = 10^{-3}$ であれば、図 4.3 より $M_2 \lesssim 10^5$ GeV である。この事は低エネルギーの実験によって、レプトジェネシス (シンプルモデルでは $M_2 \gtrsim 10^9$ GeV、2.2.3 小節参照) のような高エネルギーの現象を制限できる事を意味し、非常に重要である。

謝辞

指導教員である浅賀岳彦准教授には、博士課程での2年半、研究の議論や論文の指導、さらに大学院での研究生活全般において多大なお世話になりました。心から感謝致します。また、様々な質問にお答えいただき、コメントを下された谷本盛光名誉教授や中野博章准教授、江尻信司准教授をはじめ、新潟大学の方々に深く感謝致します。

筆者の研究活動及び本論文の作成はJSPS 科研費 JP16J03591 の助成を受けたものです。また日本学術振興会より特別研究員奨励費として経済的支援をいただきました。ここに感謝いたします。

付 録 A 質量行列の対角化

本付録では複素数の行列を正の成分を持つ対角行列に変換する方法を説明する [7]。

A.1 Dirac 質量項

まず、一般に N 次正方複素行列は次のバイユニタリー変換によって対角化出来る事を示す。これは Dirac 質量項 (1.54) を対角化する際に現れる。

$$V_L^\dagger M V_R = M^{\text{diag}}, \quad M_{kj}^{\text{diag}} \equiv m_k \delta_{kj}, \quad m_k \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

V_L 、 V_R はユニタリー行列である。一般には m_k は M の固有値ではない事に注意する。

まず、エルミート行列はユニタリー行列で対角化出来る事から、

$$V_L^\dagger M M^\dagger V_L = A, \quad A_{jk} = a_j \delta_{jk} \quad (\text{A.2})$$

と書ける。 MM^\dagger の固有値 a_j は実で非負である。

$$a_j = \sum_k (V_L^\dagger M)_{jk} (M^\dagger V_L)_{kj} \quad (\text{A.3})$$

$$= \sum_k (V_L^\dagger M)_{jk} (V_L^T M^*)_{jk} \quad (\text{A.4})$$

$$= \sum_k \left| (V_L^\dagger M)_{jk} \right|^2 \quad (\text{A.5})$$

$$\geq 0 \quad (\text{A.6})$$

ここで行列 B と C を

$$B_{jk} \equiv \sqrt{a_j} \delta_{jk}, \quad (\text{A.7})$$

$$C \equiv M^{-1} V_L B \quad (\text{A.8})$$

と定義すると、 C はユニタリー行列となる。

$$C^\dagger C = B^\dagger V_L^\dagger (M^{-1})^\dagger M^{-1} V_L B \quad (\text{A.9})$$

$$= B(V_L^\dagger M M^\dagger V_L)^{-1} B \quad (\text{A.10})$$

$$= B A^{-1} B \quad (\text{A.11})$$

$$= B(BB)^{-1} B \quad (\text{A.12})$$

$$= 1, \quad (\text{A.13})$$

$$C C^\dagger = M^{-1} V_L B B^\dagger V_L^\dagger (M^{-1})^\dagger \quad (\text{A.14})$$

$$= M^{-1} V_L A V_L^\dagger (M^{-1})^\dagger \quad (\text{A.15})$$

$$= M^{-1} M M^\dagger (M^{-1})^\dagger \quad (\text{A.16})$$

$$= 1 \quad (\text{A.17})$$

よって、(A.8) から

$$V_L^\dagger M C = B \quad (\text{A.18})$$

となり、 $B \equiv M^{\text{diag}}, C \equiv V_R$ と書けば、(A.1) に一致する。

A.2 Majorana 質量項

次に、 M が対称行列の場合、ユニタリー行列 V を用いて

$$V_L^T M V_L = M^{\text{diag}} \quad (\text{A.19})$$

と対角化出来る事を示す。これは Majorana 質量項を対角化する際に現れる (1.62)。ここでは $m_k \neq m_j$ ($k \neq j$) を仮定する。

まず、上で示した (A.1) より、バイユニタリー変換によって

$$V^\dagger M W = M^{\text{diag}} \quad (\text{A.20})$$

と対角化できる。このとき

$$M M^\dagger = V M^{\text{diag}} W^\dagger W M^{\text{diag}} V^\dagger = V (M^{\text{diag}})^2 V^\dagger, \quad (\text{A.21})$$

$$M^T (M^T)^\dagger = (W^\dagger)^T M^{\text{diag}} V^T (V^T)^\dagger M^{\text{diag}} W^T = (W^\dagger)^T (M^{\text{diag}})^2 W^T \quad (\text{A.22})$$

となり、 M は対称行列より

$$V (M^{\text{diag}})^2 V^\dagger = (W^\dagger)^T (M^{\text{diag}})^2 W^T \quad (\text{A.23})$$

$$\implies W^T V (M^{\text{diag}})^2 = (W^\dagger) (M^{\text{diag}})^2 W^T V \quad (\text{A.24})$$

となる。すなわち、 $(M^{\text{diag}})^2$ と $W^T V \equiv D$ は可換である。仮定 $m_k \neq m_j$ ($k \neq j$) により、 D は対角行列である。また D はユニタリーであるので次の形になる。

$$D_{kj} = e^{i\phi_k} \delta_{kj} \quad (\text{A.25})$$

よって、

$$M = (W^T)^\dagger D M W^\dagger \quad (\text{A.26})$$

$$= (W^\dagger)^T D^{1/2} M D^{1/2} W^\dagger \quad (\text{A.27})$$

$$= (D^{1/2} W^\dagger)^T M D^{1/2} W^\dagger \quad (\text{A.28})$$

となる。よって $V_L \equiv D^{1/2} W^\dagger$ とおけば、(A.19) が得られる。

A.3 固有状態

最後に、 M が与えられた場合に m_k と V_L を求める方法を説明する。(A.19) より、

$$M V_L = V_L^* M^{\text{diag}} \quad (\text{A.29})$$

ここで V_L の j 列目の列ベクトルを $v^{(j)}$ とおく。

$$v_k^{(j)} \equiv V_{L,kj} \quad (\text{A.30})$$

このとき (A.29) は

$$M v^{(j)} = m_j v^{(j)*} \quad (\text{A.31})$$

となる。この式から、 V_L が実でなければ、 m_j は M の固有値ではない事が分かる。この式を実部と虚部に分けると

$$(\text{Re}[M] + i\text{Im}[M])(\text{Re}[v^{(j)}] + i\text{Im}[v^{(j)}]) = m_j(\text{Re}[v^{(j)}] - i\text{Im}[v^{(j)}]) \quad (\text{A.32})$$

これは次のように書ける。

$$\mathfrak{M} \begin{pmatrix} \text{Re}[v^{(j)}] \\ \text{Im}[v^{(j)}] \end{pmatrix} = m_j \begin{pmatrix} \text{Re}[v^{(j)}] \\ \text{Im}[v^{(j)}] \end{pmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

$$\mathfrak{M} \equiv \begin{pmatrix} \text{Re}[M] & -\text{Im}[M] \\ -\text{Im}[M] & -\text{Re}[M] \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

よって、 m_j は \mathfrak{M} の固有値で、 $v^{(j)}$ は固有ベクトルによって決定できることが分かる。 M が N 次行列のとき、 \mathfrak{M} の固有値は $2N$ 個になるが、正の固有値は N 個である。なぜなら、(A.33) は

$$\mathfrak{M} \begin{pmatrix} -\text{Im}[v^{(j)}] \\ \text{Re}[v^{(j)}] \end{pmatrix} = -m_j \begin{pmatrix} -\text{Im}[v^{(j)}] \\ \text{Re}[v^{(j)}] \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

と書き直せるので、 m_j が固有値ならば $-m_j$ も固有値になるためである。

付 録 B 一般的な Casas-Ibarra パラメ トリゼーション

Casas-Ibarra パラメトリゼーション [42] は、湯川結合定数を混合角や質量を用いて表す事ができ便利である。ここでは一般的な次のニュートリノの質量行列を考える [40]。

$$\begin{pmatrix} M_L & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

ここで次の行列を定義する。

$$X_\nu \equiv m_\nu - M_L = -m_D M_R^{-1} m_D^T \quad (\text{B.2})$$

X_ν と M_R は対称行列であるので、付録 A より対角行列を用いて次のように表せる。

$$X_\nu = V_\nu X_\nu^{\text{diag}} V_\nu^T = [V_\nu (X_\nu^{\text{diag}})^{1/2}] [V_\nu (X_\nu^{\text{diag}})^{1/2}]^T, \quad (\text{B.3})$$

$$M_R = V M_R^{\text{diag}} V^T = [V (M_R^{\text{diag}})^{1/2}] [V (M_R^{\text{diag}})^{1/2}]^T \quad (\text{B.4})$$

シーソー関係式より、

$$[V_\nu^* (X_\nu^{\text{diag}})^{1/2}] [V_\nu^* (X_\nu^{\text{diag}})^{1/2}]^T = -m_D ([V^* (M_R^{\text{diag}})^{1/2}]^T)^{-1} [V^* (M_R^{\text{diag}})^{1/2}]^{-1} m_D^T \quad (\text{B.5})$$

であるので、

$$R \equiv -i [V_\nu (X_\nu^{\text{diag}})^{1/2}]^{-1} m_D ([V (M_R^{\text{diag}})^{1/2}]^T)^{-1} \quad (\text{B.6})$$

$$(\text{B.7})$$

と定義すると、シーソー関係式は

$$R R^T = 1 \quad (\text{B.8})$$

となり、 R が複素直交行列であれば良い事になる。 R の定義より、

$$m_D = yv = i [V_\nu (X_\nu^{\text{diag}})^{1/2}] R [V (M_R^{\text{diag}})^{1/2}]^T \quad (\text{B.9})$$

$$= i V_\nu (X_\nu^{\text{diag}})^{1/2} R (M_R^{\text{diag}})^{1/2} V^T \quad (\text{B.10})$$

となる。

標準模型の拡張として右巻きニュートリノの導入のみをする場合のように、 $M_L = 0$, $M_R \simeq M_N^{\text{diag}}$ の場合、 $X_\nu = m_\nu$, $V_\nu = U$, $V = 1$ であるから、

$$m_D = i U (m_\nu^{\text{diag}})^{1/2} R (M_N^{\text{diag}})^{1/2} \quad (\text{B.11})$$

となる。

付 録 C Davidson-Ibarra境界

ここでは Davidson-Ibarra 境界を求める際に用いる不等式

$$\frac{|\sum_i m_i^2 \text{Im}[R_{iI}^2]|}{\sum_i m_i |R_{iI}|^2} < m_3 - m_1 \quad (\text{C.1})$$

を求める (2.72)。

R は複素直交行列である。直交条件 $\sum_i R_{iI} R_{iJ} = \delta_{IJ}$ から $\sum_i \text{Im}[R_{iI}^2] = 0$ なので、 $\text{Im}[R_{iI}]$ の相対符号として次の三通りがある。

$$(a) \text{Im}[R_{3I}^2] > 0, \text{Im}[R_{2I}^2] > 0, \text{Im}[R_{1I}^2] < 0 \quad (\text{C.2})$$

$$(b) \text{Im}[R_{3I}^2] > 0, \text{Im}[R_{2I}^2] < 0, \text{Im}[R_{1I}^2] > 0 \quad (\text{C.3})$$

$$(c) \text{Im}[R_{3I}^2] > 0, \text{Im}[R_{2I}^2] < 0, \text{Im}[R_{1I}^2] < 0 \quad (\text{C.4})$$

ただし (2.72) は全体の絶対値をとるので $\text{Im}[R_{3I}^2] > 0$ を固定した。以下では $m_3 > m_2 > m_1$ を用いる。

(a) の場合、

$$\left| \sum_i m_i^2 \text{Im}[R_{iI}^2] \right| = |(m_3^2 - m_1^2) \text{Im}[R_{3I}^2] + (m_2^2 - m_1^2) \text{Im}[R_{2I}^2]| \quad (\text{C.5})$$

$$\leq (m_3^2 - m_1^2) |\text{Im}[R_{3I}^2]| + (m_2^2 - m_1^2) |\text{Im}[R_{2I}^2]| \quad (\text{C.6})$$

$$\leq (m_3 - m_1) \{ (m_3 + m_1) |\text{Im}[R_{3I}^2]| + (m_2 + m_1) |\text{Im}[R_{2I}^2]| \} \quad (\text{C.7})$$

$$= (m_3 - m_1) \{ m_3 |\text{Im}[R_{3I}^2]| + m_2 |\text{Im}[R_{2I}^2]| + m_1 (|\text{Im}[R_{3I}^2]| + |\text{Im}[R_{2I}^2]|) \} \quad (\text{C.8})$$

$$= (m_3 - m_1) \{ m_3 |\text{Im}[R_{3I}^2]| + m_2 |\text{Im}[R_{2I}^2]| + m_1 |\text{Im}[R_{1I}^2]| \} \quad (\text{C.9})$$

$$< (m_3 - m_1) \sum_i m_i |R_{iI}|^2 \quad (\text{C.10})$$

$$= (m_3 - m_1) \sum_i m_i |R_{iI}|^2 \quad (\text{C.11})$$

となり成立する。 $\sum_i \text{Re}[R_{iI}^2] = 1$ より R_{iI} の全てが純虚数にはならないため、(C.10) の不等号には等号は付かない。(b) の場合、

$$\left| \sum_i m_i^2 \text{Im}[R_{iI}^2] \right| = |(m_3^2 - m_2^2) \text{Im}[R_{3I}^2] + (m_1^2 - m_2^2) \text{Im}[R_{1I}^2]| \quad (\text{C.12})$$

$$\leq (m_3^2 - m_2^2) |\text{Im}[R_{3I}^2]| + (m_2^2 - m_1^2) |\text{Im}[R_{1I}^2]| \quad (\text{C.13})$$

$$\leq (m_3 - m_1) \{ (m_3 + m_2) |\text{Im}[R_{3I}^2]| + (m_2 + m_1) |\text{Im}[R_{1I}^2]| \} \quad (\text{C.14})$$

$$< (m_3 - m_1) \sum_i m_i |R_{iI}|^2 \quad (\text{C.15})$$

となる。(c) の場合も同様に

$$\left| \sum_i m_i^2 \text{Im}[R_{iI}^2] \right| = |(m_2^2 - m_3^2) \text{Im}[R_{2I}^2] + (m_1^2 - m_3^2) \text{Im}[R_{1I}^2]| \quad (\text{C.16})$$

$$\leq (m_3^2 - m_2^2) |\text{Im}[R_{2I}^2]| + (m_3^2 - m_1^2) |\text{Im}[R_{1I}^2]| \quad (\text{C.17})$$

$$\leq (m_3 - m_1) \{ (m_3 + m_2) |\text{Im}[R_{2I}^2]| + (m_3 + m_1) |\text{Im}[R_{1I}^2]| \} \quad (\text{C.18})$$

$$< (m_3 - m_1) \sum_i m_i |R_{iI}|^2 \quad (\text{C.19})$$

となるので、(2.72) が示された。

付 録 D 量子異常

D.1 共变的量子異常

古典場で記述される作用が持つ対称性は、量子化した場の理論では破れている場合がある。これを量子異常と呼ぶ。本付録では、バリオン数生成のために必要となる、量子異常によるフェルミオン数の破れを求める [115]。

一般的なラグランジアンとして

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{D} \psi, \quad (\text{D.1})$$

$$\not{D} \equiv \gamma^\mu (\partial_\mu - i L_\mu T^a P_L - i R_\mu T^a P_R), \quad (\text{D.2})$$

$$P_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad (\text{D.3})$$

$$P_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (\text{D.4})$$

を考える。結合定数はゲージ場の定義に含めている。例えば、 $R_\mu = 0, T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ とすれば Weinberg-Salam 理論の $SU(2)$ の部分となる。 ψ と $\bar{\psi}$ の変換は一般に

$$\psi'(x) = \exp[i\omega_L^a T^a P_L + i\omega_R^a T^a P_R] \psi(x), \quad (\text{D.5})$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) \exp[-i\omega^a T^a P_R - i\omega_R^a T^a P_L] \quad (\text{D.6})$$

と書ける。 $\omega_L = \omega_R$, $T^a = 1$ の場合は位相の変換である。

作用の経路積分は

$$Z = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi [\mathcal{D}A_\mu] \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right] \quad (\text{D.7})$$

である。 N_0 は規格化因子で、ゲージ固定は重要でないのでゲージ場の積分を $[\mathcal{D}A_\mu]$ と書いている。変換 (D.5), (D.6) によってラグランジアンは

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}(x) \exp[-i\omega_L^a T^a P_R - i\omega_R^a T^a P_L] i \not{D} \exp[i\omega_L^a T^a P_L + i\omega_R^a T^a P_R] \psi(x) \quad (\text{D.8})$$

$$= \mathcal{L} + \bar{\psi} [(-i)(\omega_L P_R + \omega_R P_L) i \not{D} + i \not{D} (\omega_L P_L + \omega_R P_R)] \psi \quad (\text{D.9})$$

$$= \mathcal{L} + \bar{\psi} [[\omega_L, \not{D}(L)] P_L + [\omega_R, \not{D}(R)] P_R] \psi \quad (\text{D.10})$$

$$= \mathcal{L} + \omega_L^a D_\mu(L) (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_L \psi) + \omega_R^a D_\mu(R) (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_R \psi) \quad (\text{D.11})$$

と変化する。ただし、

$$\omega_{L,R} \equiv \omega_{L,R}^a T^a, \quad (\text{D.12})$$

$$D_\mu(L) (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_L \psi) \equiv \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_L \psi) + f^{abc} L_\mu^b (\bar{\psi} \gamma^\mu T^c P_L \psi), \quad (\text{D.13})$$

$$D_\mu(R) (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_R \psi) \equiv \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_R \psi) + f^{abc} R_\mu^b (\bar{\psi} \gamma^\mu T^c P_L \psi) \quad (\text{D.14})$$

である。積分測度の変化は、ヤコビアン J を用いて、

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' = J^{-1}\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \quad (\text{D.15})$$

となる。フェルミオンの経路積分は左微分で定義されているため、ヤコビアンの逆数が掛かる。この時の Z は

$$Z = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi [\mathcal{D}A_\mu] \exp \left[i \int d^4x \{ \mathcal{L} + \omega_L^a D_\mu(L) (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_L \psi) + \omega_R^a D_\mu(R) (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_R \psi) \} - \ln J \right] \quad (\text{D.16})$$

となるが、変換 (D.5), (D.6) によって Z が変化しないことから、 ω の一次の項を比べて

$$\begin{aligned} D_\mu(L) (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_L \psi) &= i \frac{\delta \ln J}{\delta \omega_L^a} \Big|_{\omega_L=0} \\ D_\mu(R) (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_R \psi) &= i \frac{\delta \ln J}{\delta \omega_R^a} \Big|_{\omega_R=0} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

となる。古典的にはこれらの右辺は 0 であるから、量子異常はフェルミオン場の積分測度の変化に由来する事が分かる。

以下でヤコビアン J を求める。積分測度の変化は

$$\mathcal{D}\psi' = (\det[e^{i\omega_L(x)P_L + i\omega_R(x)P_R}])^{-1} \mathcal{D}\psi \quad (\text{D.18})$$

$$= \exp[-\text{Tr}[i\omega_L(x)P_L + i\omega_R(x)P_R]] \mathcal{D}\psi \quad (\text{D.19})$$

$$\mathcal{D}\bar{\psi}' = \exp[\text{Tr}[i\omega_L(x)P_R + i\omega_R(x)P_L]] \mathcal{D}\bar{\psi} \quad (\text{D.20})$$

となるので、ヤコビアンは

$$i \ln J = -\text{Tr}[\omega_L(x)P_L + i\omega_R(x)P_R] + \text{Tr}[\omega_L(x)P_R + i\omega_R(x)P_L] \quad (\text{D.21})$$

と表せる。トレースを計算するために、

$$\not{D}^\dagger = \gamma^\mu (\partial_\mu - iL_\mu P_R - iR_\mu P_L) \quad (\text{D.22})$$

$$\neq \not{D} \quad (\text{D.23})$$

より、

$$\not{D}^\dagger \not{D} \varphi_n = \lambda_n^2 \varphi_n, \quad \int \varphi_m^\dagger(x) \varphi_n(x) d^4x = \delta_{mn}, \quad (\text{D.24})$$

$$\not{D} \not{D}^\dagger \phi_n = \lambda_n^2 \phi_n, \quad \int \phi_m^\dagger(x) \phi_n(x) d^4x = \delta_{mn} \quad (\text{D.25})$$

$$(\text{D.26})$$

で定義される完全系を用いて、フェルミオン場を次のように展開する。

$$\psi = \sum_n a_n \varphi_n, \quad \bar{\psi} = \sum_n \bar{b}_n \phi_n^\dagger \quad (\text{D.27})$$

このとき、 ψ についてのトレースは

$$\text{Tr}[\omega_L(x)P_L + \omega_R(x)P_R] = \int d^4x \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \varphi_n^\dagger(x) \{\omega_L(x)P_L + \omega_R(x)P_R\} \varphi_n(x) \quad (\text{D.28})$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \int d^4x \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^\dagger(x) \{\omega_L(x)P_L + \omega_R(x)P_R\} f(\lambda_n^2/M^2) \varphi_n(x) \quad (\text{D.29})$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \int d^4x \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^\dagger \{\omega_L P_L + \omega_R P_R\} f(\not{D}^\dagger \not{D}/M^2) \varphi_n \quad (\text{D.30})$$

となる。 $f(x)$ は無限和の切断を滑らかな関数で置き換えるために導入したもので、次の性質を満たす任意の関数である。

$$f(0) = 1 \quad (\text{D.31})$$

$$f(\infty) = f'(\infty) = f''(\infty) = 0 \quad (\text{D.32})$$

$\bar{\psi}$ についても、基底 (D.25) を用いると、

$$\text{Tr}[\omega_L(x)P_R + \omega_R(x)P_L] = \lim_{M \rightarrow \infty} \int d^4x \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^\dagger \{\omega_L P_R + \omega_R P_L\} f(\not{D} \not{D}^\dagger/M^2) \phi_n \quad (\text{D.33})$$

となる。ここで、

$$\not{D}^\dagger \not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu - iL_\mu) \gamma^\nu (\partial_\nu - iL_\nu) P_L + (L \rightarrow R) \quad (\text{D.34})$$

$$\equiv \not{D}(L)^2 P_L + (L \rightarrow R), \quad (\text{D.35})$$

$$\not{D} \not{D}^\dagger = \not{D}(L)^2 P_R + (L \leftrightarrow R) \quad (\text{D.36})$$

を用いると、

$$\{\omega_L P_L + \omega_R P_R\} f(\not{D}^\dagger \not{D}/M^2) = \omega_L \not{D}(L)^2 P_L + \omega_R \not{D}(R)^2 P_R \quad (\text{D.37})$$

$$\{\omega_L P_R + \omega_R P_L\} f(\not{D} \not{D}^\dagger/M^2) = \omega_L \not{D}(L)^2 P_R + \omega_R \not{D}(R)^2 P_L \quad (\text{D.38})$$

となる。

$f(x)$ によって積分は収束するので、(D.30),(D.33) の基底を平面波にとる。

$$\sum_n \varphi_n^\dagger f(\not{D}(L)^2/M^2) P_L \varphi_n \quad (\text{D.39})$$

$$\rightarrow \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} f(\not{D}(L)^2/M^2) P_L e^{ikx} \quad (\text{D.40})$$

などにより、

$$i \ln J = \int d^4x \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \{-\omega_L f(\not{D}(L)^2/M^2) P_L + \omega_L f(\not{D}(L)^2/M^2) P_R + (L \leftrightarrow R)\} e^{ikx} \quad (\text{D.41})$$

$$= \int d^4x \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \{\omega_L \gamma^5 f(\not{D}(L)^2/M^2) - (L \rightarrow R)\} e^{ikx} \quad (\text{D.42})$$

となる。ここで

$$\not{D}(L)^2 = \gamma^\mu D_\mu(L) \gamma^\nu D_\nu(L) \quad (\text{D.43})$$

$$= \frac{1}{2}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]) D_\mu(L) D_\nu(L) \quad (\text{D.44})$$

$$= g^{\mu,\nu} D_\mu D_\nu + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][D_\mu(L), D_\nu(L)] \quad (\text{D.45})$$

$$= D^\mu(L) D_\mu(L) - \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}(L), \quad (\text{D.46})$$

$$[D_\mu, e^{ikx}] = ik_\mu e^{ikx} \quad (\text{D.47})$$

を用いると、

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \gamma^5 f(\not{D}(L)^2/M^2) e^{ikx} \quad (\text{D.48})$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^5 f \left((ik^\mu + D^\mu(L))(ik_\mu + D_\mu(L)) - \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}(L) \right) / M^2 \quad (\text{D.49})$$

$$= M^4 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \gamma^5 f \left(\left\{ ik'^\mu + \frac{D^\mu(L)}{M} \right\} \left\{ ik'_\mu + \frac{D_\mu(L)}{M} \right\} - \frac{i}{4M^2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}(L) \right) \quad (\text{D.50})$$

となる。被積分関数の f を $1/M$ で展開すると、 $(1/M)^5$ 以上の項は $M \rightarrow \infty$ によって消える事と、トレースによって残るのは γ^5 と γ 行列 4 つの積の項のみであるので、

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M^4 \text{tr} \omega_L \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \gamma^5 f \left((ik'^\mu + D^\mu(L)/M)(ik'_\mu + D_\mu(L)/M) - \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}(L)/M^2 \right) \quad (\text{D.51})$$

$$= \frac{1}{2} \text{tr} \omega_L \left(-\frac{i}{4} F_{\mu\nu}(L) \right)^2 \text{tr} \gamma^5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} f''(-k'^\mu k'_\mu) \quad (\text{D.52})$$

$$= \frac{-1}{32} \text{tr}[\omega_L F_{\mu\nu}(L) F_{\rho\sigma}(L)] 4 \text{tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] (-i) \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} f''(|k_E|^2) \quad (\text{D.53})$$

$$= \frac{i}{8} \text{tr}[\omega_L F_{\mu\nu}(L) F_{\rho\sigma}(L)] (-4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}) \int_0^\infty \frac{\pi^2 x dx}{(2\pi)^4} f''(x) \quad (\text{D.54})$$

$$= \frac{1}{2} \text{tr}[\omega_L F_{\mu\nu}(L) \tilde{F}^{\mu\nu}(L)] \frac{1}{16\pi^2} f(0) \quad (\text{D.55})$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \text{tr}[\omega_L F_{\mu\nu}(L) \tilde{F}^{\mu\nu}(L)] \quad (\text{D.56})$$

となる。ただし、 $\epsilon^{0123} = 1$ の記法を用いる。 $f(x)$ の具体的な形には依らない事が分かる。以上から

$$i \ln J = \int d^4 x \frac{1}{32\pi^2} \text{tr}[\omega_L F_{\mu\nu}(L) \tilde{F}^{\mu\nu}(L) - \omega_R F_{\mu\nu}(R) \tilde{F}^{\mu\nu}(R)] \quad (\text{D.57})$$

となるので、(D.17) より、量子異常の式

$$\begin{aligned} D_\mu(L) (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_L \psi) &= \frac{1}{32\pi^2} \text{tr}[T^a F_{\mu\nu}(L) \tilde{F}^{\mu\nu}(L)] \\ D_\mu(R) (\bar{\psi} \gamma^\mu T^a P_R \psi) &= -\frac{1}{32\pi^2} \text{tr}[T^a F_{\mu\nu}(R) \tilde{F}^{\mu\nu}(R)] \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

が得られる。

$\omega_L = \omega_R$, $T^a = 1$, $F_{\mu\nu} \rightarrow gF_{\mu\nu}$ とすると、

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = \frac{g^2}{32\pi^2}\text{tr}\left\{F_{\mu\nu}(L)\tilde{F}^{\mu\nu}(L) - F_{\mu\nu}(R)\tilde{F}^{\mu\nu}(R)\right\} \quad (\text{D.59})$$

となる。すなわち、左巻きの粒子と右巻きの粒子が同じゲージ場に結合する理論 (QED や QCD など) ではこの量子異常は消える。Weinberg-Salam 理論の $SU(2)$ の部分では、 $R_\mu = 0$ である事を用いれば、バリオン数カレントとレプトン数カレントの定義 (1.151),(1.152) から、バリオン数とレプトン数の破れの式 (1.159) が得られる。

D.2 ハイパーチャージの一意性

この節で、標準模型におけるハイパーチャージ Y の一意性と、右巻きニュートリノを導入した場合を議論する [6]。

ゲージ対称性は場の量子化した後も保たれている必要があるので、ゲージ変換に対しては量子異常は消える必要がある。その条件は、(D.58) の右辺の全ての粒子について和をとったものが0になる事である。そこで右辺トレースは完全対称な部分と完全反対称な部分に分けると、

$$\text{tr}[T^a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}] = \text{tr}[T^a (\frac{1}{2}\{T^b, T^c\} + \frac{1}{2}[T^b, T^c])] F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{D.60})$$

$$= \frac{1}{2}\text{tr}[T^a \{T^b, T^c\}] F_{\mu\nu}^b \tilde{F}^{c\mu\nu} \quad (\text{D.61})$$

のように反対称な部分は消えるので、量子異常が消える条件は

$$\sum_{i,L} \text{tr}[T^a \{T^b, T^c\}]^i - \sum_{i,R} \text{tr}[T^a \{T^b, T^c\}]^i = 0 \quad (\text{D.62})$$

となる。

粒子 i のハイパーチャージを Y_i とおく。 $U(1)_Y$ のゲージ変換をした時、標準模型のうち $SU(3)$ のゲージ場の項から出る量子異常が消える条件は

$$2Y_{Q_L} = Y_{q_R^U} + Y_{q_R^D} \quad (\text{D.63})$$

となる。同様に、 $SU(2)$ と $U(1)$ のゲージ場の項から

$$3Y_{Q_L} + Y_{L_L} = 0 \quad (\text{D.64})$$

$$6T_{Q_L}^3 + 2Y_{L_L}^3 = 3Y_{q_R^U}^3 + 3Y_{q_R^D}^3 + Y_{l_R}^3 \quad (\text{D.65})$$

となる。

変数は $Y_{Q_L}, Y_{q_R^U}, Y_{q_R^D}, Y_{L_L}, Y_{l_R}$ の5つで、条件式よりも多く一意には決まらない。そこで、ラグランジアン (1.21) のうち、Higgs 場と結合している項がゲージ一重項である事を用いると

$$Y_{Q_L} = Y_{q_R^U} - Y_H \quad (\text{D.66})$$

$$Y_{Q_L} = Y_{q_R^D} + Y_H \quad (\text{D.67})$$

$$Y_{L_L} = Y_{l_R} + Y_H \quad (\text{D.68})$$

を得る。独立な式は5つで、(D.64) は (D.66) と (D.67) の和に等しい。ハイパーチャージ全ての定数倍の自由度は残るので、一般性を失う事無く $Y_H = 1$ ととることができる。このとき、(D.65) は三重根を持ち、表 1.1 の値に一致する。

右巻きニュートリノが存在する場合、そのハイパーチャージを Y_{ν_R} とおくと、(D.65) は

$$6T_{Q_L}^3 + 2Y_{L_L}^3 = 3Y_{q_R^U}^3 + 3Y_{q_R^D}^3 + Y_{l_R}^3 + Y_{\nu_R}^3 \quad (\text{D.69})$$

となる。このとき、ハイパーチャージは

$$\begin{aligned} Y_{Q_L} &= (1 - Y_{\nu_R})/3 \\ Y_{q_R^U} &= Y_{Q_L} + 1 = (4 - Y_{\nu_R})/3 \\ Y_{q_R^D} &= Y_{Q_L} - 1 = -(2 + Y_{\nu_R})/3 \\ Y_{L_L} &= -3Y_{Q_L} = -1 + Y_{\nu_R} \\ Y_{l_R} &= -3Y_{Q_L} - 1 = -2 + Y_{\nu_R} \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

となる。この解は Higgs 場と右巻きニュートリノの項から来る式

$$Y_{L_L} = Y_{\nu_R} - Y_H \quad (\text{D.71})$$

を常に満たしており、解は一意に決まらない。

また、別の量子異常として重力的量子異常がある。重力は全ての粒子に同じく作用する事から、量子条件が消える条件は

$$6T_{Q_L} + 2Y_{L_L} = 3Y_{q_R^U} + 3Y_{q_R^D} + Y_{l_R} + Y_{\nu_R} \quad (\text{D.72})$$

となる。これは Higgs 場との結合を用いずにハイパーチャージを決定するために用いることができるが、上に挙げた式と独立ではなく、解 (D.70) は常にこれを満たす。

以上から、右巻きニュートリノが存在する場合、ニュートリノの質量項が Dirac 質量項しか無いときは現実のハイパーチャージの値を説明する事ができない事が分かる。(2.4) のように Majorana 質量項がある場合では、 $U(1)_Y$ 対称性を破らないために $Y_{\nu_R} = 0$ が必要となり、(D.70) からハイパーチャージが一意に決まる。

付 録 E 巻きつき数

ここでは、量子異常によるバリオン及びレプトン数の変化を表す式 (1.159) の具体例を計算する。以下では Minkowski 時空を Euclid 化する。

$$x_0 = ix_4, \quad x^0 = -ix_4 \quad (\text{E.1})$$

$$W_0 = iW_4, \quad W^0 = -iW_4 \quad (\text{E.2})$$

$$g_{\mu\nu} = (-1, -1, -1, -1) \quad (\text{E.3})$$

ここではまたゲージ結合定数 g をゲージ場 W の定義に吸収する。

$$W_\mu \equiv gW_\mu^a T^a \quad (\text{E.4})$$

このため、 $gW_{\mu\nu} \rightarrow W_{\mu\nu}$ である。(1.159) のトレース部分は

$$\begin{aligned} & \text{tr} [W_{\mu\nu} \tilde{W}_{\mu\nu}] \\ &= \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [W_{\mu\nu} W_{\lambda\rho}] \\ &= 2\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [W_{\mu\nu} (\partial_\lambda W_\rho + W_\lambda W_\rho)] \\ &= 2\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [\partial_\lambda (W_{\mu\nu} W_\rho) - \partial_\lambda (W_{\mu\nu}) W_\rho + W_{\mu\nu} W_\lambda W_\rho] \\ &= 2\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [\partial_\lambda (W_{\mu\nu} W_\rho) - \partial_\lambda ([W_\mu, W_\nu]) W_\rho + 2(\partial_\mu W_\nu + W_\mu W_\nu) W_\lambda W_\rho] \\ &= 2\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [\partial_\lambda (W_{\mu\nu} W_\rho) - 2(\partial_\lambda W_\mu W_\nu + W_\mu \partial_\lambda W_\nu) W_\rho - 2\partial_\lambda W_\mu W_\nu W_\rho + 2W_\mu W_\nu W_\lambda W_\rho] \\ &= 2\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [\partial_\lambda (W_{\mu\nu} W_\rho) - 4\partial_\lambda W_\mu W_\nu W_\rho + 2\partial_\lambda W_\nu W_\rho W_\mu + 2W_\mu W_\nu W_\lambda W_\rho] \\ &= 2\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [\partial_\lambda (W_{\mu\nu} W_\rho) - 2\partial_\lambda W_\mu W_\nu W_\rho + 2W_\mu W_\nu W_\lambda W_\rho] \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

である。この第3項は消える。なぜならトレースの性質により

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [W_\mu W_\nu W_\lambda W_\rho] = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [W_\nu W_\lambda W_\rho W_\mu] \quad (\text{E.6})$$

$$= -\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [W_\mu W_\nu W_\lambda W_\rho] \quad (\text{E.7})$$

となるためである。よって、

$$\text{tr} [W_{\mu\nu} \tilde{W}_{\mu\nu}] = 2\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [\partial_\lambda (W_{\mu\nu} W_\rho) - 2\partial_\lambda W_\mu W_\nu W_\rho] \quad (\text{E.8})$$

$$= 2\partial_\lambda \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} \left[W_{\mu\nu} W_\rho - \frac{2}{3} W_\mu W_\nu W_\rho \right] \quad (\text{E.9})$$

と全微分の形でかける。よって Gauss の法則により表面での積分となる。

$$\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \text{tr} [W_{\mu\nu}^a \tilde{W}_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \partial_\lambda \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} \left[W_{\mu\nu} W_\rho - \frac{2}{3} W_\mu W_\nu W_\rho \right] \quad (\text{E.10})$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int dV_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} \left[W_{\mu\nu} W_\rho - \frac{2}{3} W_\mu W_\nu W_\rho \right] \quad (\text{E.11})$$

作用は有限であるので、表面では

$$W_{\mu\nu}|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (\text{E.12})$$

であるので、

$$\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \text{tr} [W_{\mu\nu}^a \tilde{W}_{\mu\nu}] = \frac{1}{24\pi^2} \int dS_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [W_\nu W_\lambda W_\rho] \quad (\text{E.13})$$

となる。一般に無限遠で真空となるゲージ場の配位は

$$W_\mu \equiv f_i(r^2) w \partial_\mu w^\dagger, \quad w(x) \in SU(2) \quad f(\infty) = 1 \quad (\text{E.14})$$

と表せるので、

$$\frac{1}{24\pi^2} \int dS_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [W_\nu W_\lambda W_\rho] = \frac{1}{24\pi^2} \int dS_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [(w \partial_\nu w^\dagger)(w \partial_\lambda w^\dagger)(w \partial_\rho w^\dagger)] \quad (\text{E.15})$$

$$= n \quad (\text{E.16})$$

となる。 n は巻きつき数と呼ばれる整数である。

この積分の具体例を計算する。最も簡単な例として、 $w = (\text{定数})$ の場合には上の積分は 0 となり、巻きつき数 $n = 0$ に相当する。

次に

$$w = (x^4 + ix^i \sigma^i)/r \quad (\text{E.17})$$

の場合に $n = 1$ となることを示す。まず

$$ww^\dagger = \frac{1}{r^2} ((x^4)^2 + ix^i \sigma^i x^4 - ix^i \sigma^i + x^i x^j \sigma^i \sigma^j) \quad (\text{E.18})$$

$$= \frac{1}{r^2} ((x^4)^2 + ix^i \sigma^i x^4 - ix^i \sigma^i + x^i x^j (\delta_{ij} + i\epsilon^{ijk}) \sigma^k) \quad (\text{E.19})$$

$$= 1 \quad (\text{E.20})$$

$$= w^\dagger w \quad (\text{E.21})$$

より $w \in SU(2)$ である。この式を微分して、

$$\partial_\mu (ww^\dagger) = w \partial_\mu w^\dagger + (\partial_\mu w) w^\dagger = 0 \quad (\text{E.22})$$

より

$$\text{tr} [(w \partial_\nu w^\dagger)(w \partial_\lambda w^\dagger)(w \partial_\rho w^\dagger)] = \text{tr} [(w \partial_\nu w^\dagger)(-\partial_\lambda w w^\dagger)(w \partial_\rho w^\dagger)] \quad (\text{E.23})$$

$$= -\text{tr} [w \partial_\nu w^\dagger \partial_\lambda w \partial_\rho w^\dagger] \quad (\text{E.24})$$

となる。 w の微分は

$$\partial_i w^\dagger = i\sigma_i/r - w^\dagger x_i/r^2 \quad (\text{E.25})$$

$$\partial_4 w^\dagger = 1/r - w^\dagger x_4/r^2 \quad (\text{E.26})$$

より、便宜上 $\sigma_4 \equiv -i$ とおくと、

$$\partial_\mu w^\dagger = i\sigma_\mu/r - w^\dagger x_\mu/r^2 \quad (\text{E.27})$$

となる。積分の表面を超球にとると、

$$dS_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [(w\partial_\nu w^\dagger)(w\partial_\lambda w^\dagger)(w\partial_\rho w^\dagger)] \quad (\text{E.28})$$

$$= dS \frac{x_\mu}{r} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [(w\partial_\nu w^\dagger)(w\partial_\lambda w^\dagger)(w\partial_\rho w^\dagger)] \quad (\text{E.29})$$

$$= -dS \frac{x_\mu}{r} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [w\partial_\nu w^\dagger \partial_\lambda w \partial_\rho w^\dagger] \quad (\text{E.30})$$

$$= -i^2(-i)dS \frac{x_\mu}{r^4} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [w\sigma_\nu \sigma_\lambda \sigma_\rho] \quad (\text{E.31})$$

となる。反対称性により (E.27) のうち残るのは第1項であることを用いた。トレースを計算すると、

$$x_i \epsilon_{i4jk} \text{tr} [w\sigma_4 \sigma_j \sigma_k] = -ix_i \epsilon_{i4jk} \text{tr} [w(\delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l)] \quad (\text{E.32})$$

$$= x_i \epsilon_{i4jk} \epsilon_{jkl} \text{tr} [w\sigma_l] \quad (\text{E.33})$$

$$= x_i \epsilon_{i4jk} \epsilon_{jkl} \text{tr} \left[\frac{ix^m \sigma^m}{r} \sigma_l \right] \quad (\text{E.34})$$

$$= x_i \epsilon_{i4jk} \epsilon_{jkl} \frac{ix_m}{r} 2\delta_{ml} \quad (\text{E.35})$$

$$= 2x_i \epsilon_{i4jk} \epsilon_{jkl} \frac{ix_l}{r} \quad (\text{E.36})$$

$$= 2 \times 2x_i \delta_{il} \frac{ix_l}{r} \quad (\text{E.37})$$

$$= 4i \frac{x_i x_i}{r}, \quad (\text{E.38})$$

$$x_4 \epsilon_{4ijk} \text{tr} [w\sigma_i \sigma_j \sigma_k] = x_4 \epsilon_{4ijk} \text{tr} [w\sigma_i i\epsilon_{jkl}\sigma_l] \quad (\text{E.39})$$

$$= i\epsilon_{jkl} x_4 \epsilon_{4ijk} \text{tr} [w(\delta_{il} + i\epsilon_{ilm}\sigma_m)] \quad (\text{E.40})$$

$$= i\epsilon_{jkl} x_4 \epsilon_{4ijk} \left(\delta_{il} \frac{2x^4}{r} + i\epsilon_{ilm} \frac{2x^m}{r} \right) \quad (\text{E.41})$$

$$= -2i\delta_{il} x_4 \left(\delta_{il} \frac{2x^4}{r} + i\epsilon_{ilm} \frac{2x^m}{r} \right) \quad (\text{E.42})$$

$$= -4i\delta_{il} x_4 \delta_{il} \frac{x^4}{r} \quad (\text{E.43})$$

$$= 12i \frac{(x_4)^2}{r} \quad (\text{E.44})$$

よって

$$\frac{x_\mu}{r^4} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr} [w\sigma_\nu \sigma_\lambda \sigma_\rho] = 12i \frac{(x_4)^2}{r} + 3 \times 12i \frac{x_i x_i}{r} \quad (\text{E.45})$$

$$= 12ir \quad (\text{E.46})$$

以上より、巻きつき数は

$$n = \frac{1}{24\pi^2} \int \frac{dS}{r^4} (-i) 12ir \quad (\text{E.47})$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial S^3} d\Omega \quad (\text{E.48})$$

$$= 1 \quad (\text{E.49})$$

が得られる。

一般に、

$$w = [(x^4 + ix^i \sigma^i)/r]^m \quad (\text{E.50})$$

のとき、

$$n = m \quad (\text{E.51})$$

であることを証明できる [115]。

付 録 F 崩壊幅

ここでは、重いニュートリノの崩壊幅を求める。

F.1 $N \rightarrow L\Phi$

この幅は温度がスファレロンが有効な時期 ($T \geq O(100)$ GeV) に使うので、Higgs 場が真空期待値を持つ前を考える。ラグランジアンは (2.4) より

$$\mathcal{L} = -y_{\alpha I} \overline{L_{L\alpha}} \tilde{\Phi} \nu_{RI} - y_{\alpha I}^* \overline{\nu_{RI}} \tilde{\Phi}^\dagger L_{L\alpha} \quad (\text{F.1})$$

である。Feynman 図は図 2.2(a) である。散乱振幅は

$$\mathcal{M}_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} = y_{\alpha I} \bar{u}_\alpha P_R u_I \quad (\text{F.2})$$

である。絶対値の 2 乗をとり、スピンについて平均を取る。また $N_I \rightarrow l_\alpha \phi^+$, $\nu_\alpha \phi^0$ の 2 通りをまとめて書いているので 2 倍すると、

$$2 \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi}|^2 = |y_{\alpha I}|^2 \text{tr}[\not{p}_\alpha P_R (\not{p}_I + M_I) P_L] \quad (\text{F.3})$$

$$= |y_{\alpha I}|^2 \text{tr}[\not{p}_\alpha \not{p}_I P_R] \quad (\text{F.4})$$

$$= 2 |y_{\alpha I}|^2 p_\alpha p_I \quad (\text{F.5})$$

となる。崩壊幅は、(G.29) を用いて

$$\Gamma_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} = \frac{1}{2M_I} \int d\Pi_{L_\beta, \Phi} \tilde{\delta}^2 |y_{\alpha I}|^2 (p_\alpha p_I) \quad (\text{F.6})$$

$$= \frac{1}{2M_I} \frac{1}{32\pi^2} 2 |y_{\alpha I}|^2 \int d\Omega \frac{M_I^2}{2} \quad (\text{F.7})$$

$$= \frac{|y_{\alpha I}|^2}{16\pi} M_I \quad (\text{F.8})$$

となる。 α について和をとると、

$$\sum_\alpha \Gamma_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi} = \frac{(y^\dagger y)_{II}}{16\pi} M_I \quad (\text{F.9})$$

となる。 $N_I \rightarrow \overline{L}_\alpha \Phi^*$ の崩壊幅も同じであるので、それを足すと

$$\sum_\alpha \Gamma_{N_I \rightarrow L_\alpha \Phi, \overline{L}_\alpha \Phi^*} = \frac{(y^\dagger y)_{II}}{8\pi} M_I \quad (\text{F.10})$$

となる。

F.2 $N \rightarrow 3\nu$

$M_1 \ll m_Z$ の場合に、重いニュートリノから軽いニュートリノ 3 つへの崩壊幅を求める。低エネルギー有効ラグランジアンのうちニュートリノが関わる部分は、(1.37) と (2.23) より

$$\mathcal{L}_{eff}^{NC} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} j_Z^\mu j_{Z\mu} \quad (\text{F.11})$$

$$= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L) \quad (\text{F.12})$$

$$= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}'_L \gamma^\mu \nu'_L + \bar{\nu}'_L \gamma^\mu U^\dagger \Theta \nu'^c_R + \bar{\nu}'^c_R \gamma^\mu \Theta^\dagger U \nu'_L) (\bar{\nu}'_L \gamma_\mu \nu'_L + \bar{\nu}'_L \gamma_\mu U^\dagger \Theta \nu'^c_R + \bar{\nu}'^c_R \gamma_\mu \Theta^\dagger U \nu'_L) \quad (\text{F.13})$$

$$= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ (\bar{\nu}'_L \gamma^\mu \nu'_L) (\bar{\nu}'_L \gamma_\mu \nu'_L) + 2 (\bar{\nu}'_L \gamma^\mu \nu'_L) (\bar{\nu}'_L \gamma_\mu U^\dagger \Theta \nu'^c_R + \bar{\nu}'^c_R \gamma_\mu \Theta^\dagger U \nu'_L) \} + O(\Theta^2) \quad (\text{F.14})$$

$$= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ (\bar{\nu}' \gamma^\mu P_L \nu') (\bar{\nu}' \gamma_\mu P_L \nu') + 2 (\bar{\nu}' \gamma^\mu P_L \nu') (\bar{\nu}' \gamma_\mu U^\dagger \Theta P_L N + \bar{N} \gamma_\mu \Theta^\dagger U P_L \nu') \} + O(\Theta^2) \quad (\text{F.15})$$

となる。ただし ν' と N は

$$\nu' \equiv \nu'_L + \nu'^c_L, \quad N \equiv \nu'_R + \nu'^c_R \quad (\text{F.16})$$

で定義される Majorana 場である。(F.15) の第二項が三体崩壊 (2.4) を表している。(F.15) から、崩壊先の軽いニュートリノ 3 つのうち 2 つは同種である。散乱振幅は

$$\mathcal{M}_{N_I \rightarrow \nu_i \nu_j \nu_j} = \sqrt{2} G_F (\bar{u}_j \gamma^\mu P_L v_j) (\bar{u}_i \gamma_\mu (U^\dagger \Theta)_{iI} P_L u_I + \bar{v}_I \gamma_\mu (U^\dagger \Theta)_{iI}^* P_L u_i) \quad (\text{F.17})$$

である。世代は $i \neq j$ の場合を考え、後で i, j について和をとる。絶対値の 2 乗をとり、スピンのついて平均を取ると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{spins} |\mathcal{M}_{N_I \rightarrow \nu_i \nu_j \nu_j}|^2 \\ &= 2G_F^2 |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 \frac{1}{2} \text{tr} [\not{p}_j \gamma^\mu P_L \not{p}_{j'} \gamma^\nu P_L] \text{tr} [\not{p}_i \gamma_\mu P_L (\not{p}_I + M_I) \gamma_\nu P_L + (\not{p}_I - M_I) \gamma_\mu P_L \not{p}_i \gamma_\nu P_L] \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

$$\begin{aligned} &= 4G_F^2 |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 (p_j^\mu p_{j'}^\nu - (p_j p_{j'}) g^{\mu\nu} + p_j^\nu p_{j'}^\mu + i\epsilon^{\rho\mu\sigma\nu} p_{j\rho} p_{j'\sigma}) \\ & \quad (p_{i\mu} p_{I\nu} - (p_i p_I) g_{\mu\nu} + p_{i\nu} p_{I\mu} + i\epsilon_{\kappa\mu\tau\nu} p_i^\kappa p_I^\tau + p_{I\mu} p_{i\nu} - (p_i p_I) g_{\mu\nu} + p_{I\nu} p_{i\mu} + i\epsilon_{\kappa\mu\tau\nu} p_I^\kappa p_i^\tau) \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

$$= 16G_F^2 |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 ((p_j p_i)(p_{j'} p_I) + (p_j p_I)(p_{j'} p_i)) \quad (\text{F.20})$$

となる。ただし 1 行目で、一般的に Dirac 方程式が

$$(\not{p} - m) u^h(p) = 0, \quad \overline{v^{h'}} (\not{p} + m) = 0 \quad (\text{F.21})$$

$$\implies \overline{v^{h'}} (\not{p} + m) u^h(p) = 2m \overline{v^{h'}} u^h(p) = 0 \quad (\text{F.22})$$

より

$$\overline{v^{h'}} u^h(p) = 0 \quad (\text{F.23})$$

であることを用いた。崩壊幅は

$$\Gamma_{N_I \rightarrow \nu_i \nu_j \nu_j} = \frac{1}{2M_I} \int d\Pi_i d\Pi_j d\Pi_{j'} (2\pi)^4 \delta^4(p_i + p_j + p_{j'} - p_I) 16G_F^2 |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 \{(p_j p_i)(p_{j'} p_I) + (j \leftrightarrow j')\} \quad (\text{F.24})$$

$$= \frac{16}{M_I} G_F^2 |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 \int d\Pi_i p_{i\mu} p_{I\nu} \int d\Pi_j d\Pi_{j'} (2\pi)^4 \delta^4(p_i + p_j + p_{j'} - p_I) p_j^\mu p_{j'}^\nu \quad (\text{F.25})$$

ここで、一般に積分測度の Lorentz 不変性から来る公式

$$\int d\Pi_j d\Pi_{j'} (2\pi)^4 \delta^4(p_j + p_{j'} - Q) p_j^\mu p_{j'}^\nu = \frac{1}{96\pi} (Q^2 g^{\mu\nu} + 2Q^\mu Q^\nu) \quad (\text{F.26})$$

を用いると、

$$\Gamma_{N_I \rightarrow \nu_i \nu_j \nu_j} = \frac{16}{M_I} G_F^2 |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 \int d\Pi_i p_{i\mu} p_{I\nu} \frac{1}{96\pi} ((p_i - p_I)^2 g^{\mu\nu} + 2(p_i - p_I)^\mu (p_i - p_I)^\nu) \quad (\text{F.27})$$

$$= \frac{16}{M_I} \frac{1}{96\pi} G_F^2 |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 \int d\Pi_i ((p_i - p_I)^2 (p_i p_I) - 2(p_i p_I)((p_I p_i) - M_I^2)) \quad (\text{F.28})$$

$$= \frac{16}{M_I} \frac{1}{96\pi} G_F^2 |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 \int d\Pi_i (-4(p_i p_I)^2 + 3M_I^2 (p_i p_I)) \quad (\text{F.29})$$

$$= \frac{16}{M_I} \frac{1}{96\pi} G_F^2 |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{M_I/2} \frac{E_i dE_i}{2E_i} (-4(E_i M_I)^2 + 3M_I^2 E_i M_I) \quad (\text{F.30})$$

$$= \frac{G_F^2 M_I^5}{384\pi^3} |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 \quad (\text{F.31})$$

となる。終状態の世代について和をとると、

$$\sum_i |(U^\dagger \Theta)_{iI}|^2 = \sum_{i\alpha\beta} (U^\dagger)_{i\alpha} \Theta_{\alpha I} ((U^\dagger)_{i\beta} \Theta_{\beta I})^* \quad (\text{F.32})$$

$$= \sum_{i\alpha\beta} U_{\beta i} (U^\dagger)_{i\alpha} \Theta_{\alpha I} \Theta_{\alpha I}^* \quad (\text{F.33})$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha} \Theta_{\alpha I} \Theta_{\beta I}^* \quad (\text{F.34})$$

$$= \Theta_I^2 \quad (\text{F.35})$$

となるので、右巻きニュートリノの左巻きニュートリノへの三体崩壊の幅 ($i \neq j$) は

$$\sum_{i,j \neq i} \Gamma_{N_I \rightarrow \nu_i \nu_j \nu_j} = \frac{G_F^2 M_I^5}{192\pi^3} \Theta_I^2 \quad (\text{F.36})$$

となる。 $N_I \rightarrow \nu_i \nu_i \nu_i$ の場合についても同様にして求まる [116]。結局崩壊幅は次のようになる。

$$\sum_{i,j} \Gamma_{N_I \rightarrow \nu_i \nu_j \nu_j} = 2 \frac{G_F^2 M_I^5}{192\pi^3} \Theta_I^2 \quad (\text{F.37})$$

付 録 G CP の破れ

ここでは、CP 非対称性 $\epsilon_{I\alpha}$ (2.34)

$$\epsilon_{I\alpha} = \frac{|\mathcal{M}(N_I \rightarrow L_\alpha \Phi)|^2 - |\mathcal{M}(N_I \rightarrow \bar{L}_\alpha \Phi^*)|^2}{\sum_\alpha \{|\mathcal{M}(N_I \rightarrow L_\alpha \Phi)|^2 + |\mathcal{M}(N_I \rightarrow \bar{L}_\alpha \Phi^*)|^2\}} \quad (\text{G.1})$$

を計算する [38]。

まず、散乱振幅を湯川結合定数のみの部分 c とそれ以外の部分に分ける。

$$\mathcal{M}(N_I \rightarrow L_\alpha \Phi) = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1 = c_0 \mathcal{A}_0 + c_1 \mathcal{A}_1, \quad (\text{G.2})$$

$N_I \rightarrow L_\alpha \Phi$ は $N_I \rightarrow \nu_\alpha \phi^0$, $l_\alpha \phi^+$ の略記である。図 2.2 より、

$$c_0 = y_{\alpha I} \quad (\text{G.3})$$

$$c_1^{(b)} = c_1^{(c)} = y_{\alpha J} y_{\beta J} y_{\beta I}^* \quad (\text{G.4})$$

$$c_1^{(d)} = y_{\alpha J} y_{\beta J}^* y_{\beta I} \quad (\text{G.5})$$

である。CP 変換をした過程の散乱振幅は

$$\mathcal{M}(N_I \rightarrow \bar{L}_\alpha \Phi^*) = c_0^* \mathcal{A}_0 + c_1^* \mathcal{A}_1 \quad (\text{G.6})$$

このとき、CP 非対称性は (2.30) より 1 ループまでの近似で

$$\epsilon_{i\alpha} \equiv \frac{|c_0 \mathcal{A}_0 + c_1 \mathcal{A}_1|^2 - |c_0^* \mathcal{A}_0 + c_1^* \mathcal{A}_1|^2}{2 \sum_\alpha |c_0 \mathcal{A}_0|^2} \quad (\text{G.7})$$

$$= \frac{c_0 c_1^* \mathcal{A}_0 \mathcal{A}_1^* + c_0^* c_1 \mathcal{A}_0^* \mathcal{A}_1 - c_0^* c_1 \mathcal{A}_0 \mathcal{A}_1^* - c_0 c_1^* \mathcal{A}_0^* \mathcal{A}_1}{2 \sum_\alpha |c_0 \mathcal{A}_0|^2} \quad (\text{G.8})$$

$$= \frac{(c_0 c_1^* - c_0^* c_1)(\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_1^* - \mathcal{A}_0^* \mathcal{A}_1)}{2 \sum_\alpha |c_0 \mathcal{A}_0|^2} \quad (\text{G.9})$$

$$= 2 \frac{\text{Im}(c_0 c_1^*) \text{Im}(\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_1^*)}{\sum_\alpha |c_0|^2 |\mathcal{A}_0|^2} \quad (\text{G.10})$$

となる。結合定数が実数であれば CP は破れていない事が表れている。

まず分母は、

$$|\mathcal{A}_0|^2 = 2 \bar{u}_\alpha P_R u_I \bar{u}_I P_L u_\alpha \quad (\text{G.11})$$

$$= 2 \frac{1}{2} \text{tr}[\not{p}_\alpha P_R (\not{p}_I + M_I) P_L] \quad (\text{G.12})$$

$$= 2 p_\alpha \cdot p_I \quad (\text{G.13})$$

$$= M_I^2 \quad (\text{G.14})$$

となる。 L_α は二重項であるので2倍している。次に分子について、振幅の虚部は Cutkosky の切断則によって求まる事から、

$$\text{Im}(\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_1^*) = -\mathcal{A}_0 \sum_\beta \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} \mathcal{A}(N \rightarrow \bar{L}_\beta \Phi') \mathcal{A}(\bar{L}_\beta \Phi' \rightarrow L_\alpha \Phi) \quad (\text{G.15})$$

となる。図 2.2(b),(c) について、具体的に計算すると

$$\text{Im}(\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_1^*) = -2\bar{u}_{L_\alpha} P_R u_{N_I} \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} (\bar{u}_{L_\beta} P_L u_I)^* (\bar{u}_{L_\alpha} P_R \frac{i}{\not{p}_J - M_J} P_R u_\beta)^* \quad (\text{G.16})$$

$$= -2\bar{u}_{L_\alpha} P_R u_{N_I} \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} (\bar{u}_I P_R u_\beta) (\bar{u}_\beta P_L \frac{-i}{\not{p}_J - M_J} P_L u_\alpha) \quad (\text{G.17})$$

$$= 2\frac{1}{2} \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} \text{tr} \left[P_R (\not{p}_I + M_I) P_R \not{p}_\beta P_L \frac{i}{\not{p}_J - M_J} P_L \not{p}_\alpha \right] \quad (\text{G.18})$$

$$= \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} \frac{i M_I M_J}{p_J^2 - M_J^2} \text{tr} [\not{p}_\beta P_L \not{p}_\alpha] \quad (\text{G.19})$$

$$= 2i M_I M_J \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} \frac{p_\beta \cdot p_\alpha}{p_J^2 - M_J^2} \quad (\text{G.20})$$

一方図 2.2(d) は

$$\text{Im}(\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_1^*) = -2\bar{u}_{L_\alpha} P_R u_{N_I} \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} (\bar{u}_\beta P_R u_I)^* (\bar{u}_{L_\alpha} P_R \frac{i}{\not{p}_J - M_J} P_L u_\beta)^* \quad (\text{G.21})$$

$$= -2\bar{u}_{L_\alpha} P_R u_{N_I} \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} (\bar{u}_I P_L u_\beta) (\bar{u}_\beta P_R \frac{-i}{\not{p}_J - M_J} P_L u_\alpha) \quad (\text{G.22})$$

$$= 2\frac{1}{2} \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} \text{tr} \left[P_R (\not{p}_I + M_I) P_L \not{p}_\beta P_R \frac{i}{\not{p}_J - M_J} P_L \not{p}_\alpha \right] \quad (\text{G.23})$$

$$= \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} \frac{i}{p_J^2 - M_J^2} \text{tr} [\not{p}_I \not{p}_\beta \not{p}_J P_L \not{p}_\alpha] \quad (\text{G.24})$$

$$= 2i \frac{1}{M_I^2 - M_J^2} \int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} (2(p_I p_\beta)(p_I p_\alpha) - M_I^2(p_\beta p_\alpha)) \quad (\text{G.25})$$

ここで重心系では

$$p_I = (M_I, 0, 0, 0) \quad (\text{G.26})$$

より、運動量積分は

$$\int d\Pi_{L_\beta, \Phi'} \tilde{\delta} = \int \frac{d^3 p_\beta}{(2\pi)^3 2E_\beta} \frac{d^3 p_{\Phi'}}{(2\pi)^3 2E_{\Phi'}} (2\pi)^4 \delta(M_I - E_{\Phi'} - E_\beta) \delta^3(\mathbf{p}_{\Phi'} + \mathbf{p}_\beta) \quad (\text{G.27})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\Omega \int_0^\infty dE_\beta \delta(M_I - 2E_\beta) \quad (E_{\Phi'} = |\mathbf{p}_I - \mathbf{p}_\beta| = E_\beta) \quad (\text{G.28})$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \int d\Omega \quad (E_{\Phi'} = E_\beta = M_I/2) \quad (\text{G.29})$$

となる。

図 2.2(c) の場合

$$p_J = p_I, \quad (\text{G.30})$$

$$p_\beta \cdot p_\alpha = E_\beta E_\alpha - \mathbf{p}_\beta \cdot \mathbf{p}_\alpha = \frac{M_I^2}{4} (1 - \cos \theta) \quad (\text{G.31})$$

より、

$$\int d\Omega \frac{p_\beta \cdot p_\alpha}{p_J^2 - M_J^2} = \pi \frac{M_I^2}{M_I^2 - M_J^2} \quad (\text{G.32})$$

となる。図 2.2(b) の場合

$$p_J = p_\beta - p_\Phi \quad (\text{G.33})$$

$$p_J^2 = -2p_\beta \cdot p_\Phi = -\frac{M_I^2}{2}(1 + \cos \theta) \quad (\text{G.34})$$

より

$$\int d\Omega \frac{p_\beta \cdot p_\alpha}{p_J^2 - M_J^2} = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos \theta \frac{(M_I^2/4)(1 - \cos \theta)}{-(M_I^2/2)(1 + \cos \theta) - M_J^2} \quad (\text{G.35})$$

$$= \pi \int_{-1}^1 d\cos \theta \frac{1 + \cos \theta + 2M_J^2/M_I^2 - 2 - 2M_J^2/M_I^2}{1 + \cos \theta + 2M_J^2/M_I^2} \quad (\text{G.36})$$

$$= \pi \left[1 - 2 \left(1 + \frac{M_J^2}{M_I^2} \right) \ln(1 + \cos \theta + 2M_J^2/M_I^2) \right]_{-1}^1 \quad (\text{G.37})$$

$$= 2\pi \left\{ 1 - \left(1 + \frac{M_J^2}{M_I^2} \right) \ln \frac{M_I^2 + M_J^2}{M_I^2} \right\} \quad (\text{G.38})$$

図 2.2(d) の場合

$$\int d\Omega (2(p_I p_\beta)(p_I p_\alpha) - M_I^2(p_\beta p_\alpha)) = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos \theta \left(2 \left(\frac{M_I^2}{2} \right)^2 - M_I^2 \frac{M_I}{4}(1 - \cos \theta) \right) \quad (\text{G.39})$$

$$= 4\pi(M_I^4/2 - M_I^4/4) \quad (\text{G.40})$$

$$= \pi M_I^4 \quad (\text{G.41})$$

よって、CP 対称性は

$$\epsilon_{I\alpha} = 2 \frac{\frac{2}{32\pi^2} \sum_{\beta,J} \left\{ \text{Im}(y_{\alpha I} y_{\alpha J}^* y_{\beta J}^* y_{\beta I}) \pi M_I^2 g \left(\frac{M_J^2}{M_I^2} \right) + \text{Im}(y_{\alpha I} y_{\alpha J}^* y_{\beta J} y_{\beta I}^*) \pi \frac{M_I^4}{M_I^2 - M_J^2} \right\}}{\sum_{\alpha} |y_{\alpha I}|^2 M_I^2} \quad (\text{G.42})$$

$$= \frac{1}{8\pi} \frac{1}{(y^\dagger y)_{II}} \sum_J \left\{ \text{Im}(y_{\alpha I} y_{\alpha J}^* (y^\dagger y)_{II}) g \left(\frac{M_J^2}{M_I^2} \right) + \text{Im}(y_{\alpha I} y_{\alpha J}^* (y^\dagger y)_{IJ}) \frac{M_I^2}{M_I^2 - M_J^2} \right\} \quad (\text{G.43})$$

となる。 $g(x)$ は (2.36) で定義した。

参考文献

- [1] T. Tsuyuki, Phys. Rev. D **90**, 013007 (2014) [arXiv:1403.5053 [hep-ph]].
- [2] T. Tsuyuki, PTEP **2015**, 011B01 (2015) [arXiv:1411.2769 [hep-ph]].
- [3] T. Tsuyuki, Phys. Rev. D **91**, 076004 (2015) [arXiv:1501.07785 [hep-ph]].
- [4] T. Asaka and T. Tsuyuki, Phys. Rev. D **92**, no. 9, 094012 (2015) [arXiv:1508.04937 [hep-ph]].
- [5] T. Asaka and T. Tsuyuki, Phys. Lett. B **753**, 147 (2016) [arXiv:1509.02678 [hep-ph]].
- [6] M. Fukugita and T. Yanagida, “Physics of neutrinos and applications to astrophysics,” Berlin, Germany: Springer (2003) 593 p
- [7] C. Giunti and C. W. Kim, “Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics,” Oxford, UK: Univ. Pr. (2007) 710 p
- [8] K. A. Olive *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).
- [9] F. Capozzi, G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino and A. Palazzo, Phys. Rev. D **89**, 093018 (2014) [arXiv:1312.2878 [hep-ph]].
- [10] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], Astron. Astrophys. **571**, A1 (2014) [arXiv:1303.5062 [astro-ph.CO]].
- [11] A. D. Sakharov, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5**,32 (1967)
- [12] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **155**, 36 (1985).
- [13] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **191**, 171 (1987).
- [14] G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976) Erratum: [Phys. Rev. D **18**, 2199 (1978)].
- [15] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).
- [16] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, Phys. Rev. D **30**, 2212 (1984).
- [17] H. Aoyama and H. Goldberg, Phys. Lett. B **188**, 506 (1987).

- [18] A. Ringwald, Nucl. Phys. B **330**, 1 (1990).
- [19] O. Espinosa, Nucl. Phys. B **343**, 310 (1990).
- [20] S.-H. H. Tye and S. S. C. Wong, Phys. Rev. D **92**, no. 4, 045005 (2015) [arXiv:1505.03690 [hep-th]].
- [21] J. A. Harvey and M. S. Turner, Phys. Rev. D **42**, 3344 (1990).
- [22] S. Weinberg, Oxford, UK: Oxford Univ. Pr. (2008) 593 p
- [23] F. Zwicky, Helv. Phys. Acta **6**, 110 (1933). 英語訳は Gen Relativ Gravit (2009) 41:207—224.
- [24] J. D. Simon and M. Geha, Astrophys. J. **670**, 313 (2007) [arXiv:0706.0516 [astro-ph]].
- [25] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones and D. Zaritsky, Astrophys. J. **648**, L109 (2006) [astro-ph/0608407].
- [26] 祖父江義明、有本信夫、家定則 編、銀河 II 銀河系 (シリーズ現代の天文学 第5巻)、東京、株式会社日本評論社 (2008)
- [27] 二間瀬敏史、池内了、千葉柁司 編、宇宙論 II 宇宙の進化 (シリーズ現代の天文学 第3巻)、東京、株式会社日本評論社 (2007)
- [28] H. Georgi, AIP Conf. Proc. **23**, 575 (1975).
- [29] H. Fritzsch and P. Minkowski, Annals Phys. **93**, 193 (1975).
- [30] J. C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D **10**, 275 (1974) [Erratum-ibid. D **11**, 703 (1975)].
- [31] P. Minkowski, Phys. Lett., B67, 421, 1977; T. Yanagida, 1979, Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories, Tsukuba, Japan, 13—14 Feb 1979; M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, 1979, In “Supergravity”, p. 315, edited by F. van Nieuwenhuizen and D. Freedman, North Holland, Amsterdam; R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett., 44, 912, 1980.
- [32] R. N. Mohapatra and J. C. Pati, Phys. Rev. D **11**, 2558 (1975).
- [33] G. Senjanovic and R. N. Mohapatra, Phys. Rev. D **12**, 1502 (1975).
- [34] T. P. Cheng and L. F. Li, Phys. Rev. D **22**, 2860 (1980);
- [35] J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev. D **22**, 2227 (1980).
- [36] R. Foot, H. Lew, X. G. He and G. C. Joshi, Z. Phys. C **44**, 441 (1989).
- [37] M. Fukugita and T. Yanagida, Phys. Lett. B **174**, 45 (1986)

- [38] S. Davidson, E. Nardi and Y. Nir, Phys. Rept. **466**, 105 (2008) [arXiv:0802.2962 [hep-ph]].
- [39] C. S. Fong, E. Nardi and A. Riotto, Adv. High Energy Phys. **2012** (2012) 158303 [arXiv:1301.3062 [hep-ph]].
- [40] F. Bezrukov, A. Kartavtsev and M. Lindner, J. Phys. G **40**, 095202 (2013)
- [41] S. Davidson and A. Ibarra, Phys. Lett. B **535**, 25 (2002) [hep-ph/0202239].
- [42] J.A. Casas, A. Ibarra, Nucl. Phys. B **618** (2001) 171–204
- [43] A. Pilaftsis, Phys. Rev. D **56**, 5431 (1997) [hep-ph/9707235].
- [44] E. K. Akhmedov, V. A. Rubakov and A. Y. Smirnov, Phys. Rev. Lett. **81**, 1359 (1998) [hep-ph/9803255].
- [45] T. Asaka and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **620**, 17 (2005) [hep-ph/0505013].
- [46] S. Dodelson and L. M. Widrow, Phys. Rev. Lett. **72**, 17 (1994) [hep-ph/9303287].
- [47] K. Abazajian, G. M. Fuller and M. Patel, Phys. Rev. D **64**, 023501 (2001) [astro-ph/0101524].
- [48] P. B. Pal and L. Wolfenstein, Phys. Rev. D **25**, 766 (1982).
- [49] A. Kusenko, Phys. Rept. **48** 1 (2009) 1-28
- [50] A. Boyarsky, A. Neronov, O. Ruchayskiy and M. Shaposhnikov, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **370**, 213 (2006) [astro-ph/0512509].
- [51] A. Boyarsky, D. Iakubovskiy, O. Ruchayskiy and V. Savchenko, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **387**, 1361 (2008) [arXiv:0709.2301 [astro-ph]].
- [52] S. Riemer-Sorensen and S. H. Hansen, arXiv:0901.2569 [astro-ph.CO].
- [53] M. Drewes, arXiv:1303.6912v3 [hep-ph] (2013)
- [54] A. Boyarsky, O. Ruchayskiy and M. Shaposhnikov, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **59**, 191 (2009) [arXiv:0901.0011 [hep-ph]].
- [55] E. Bulbul, M. Markevitch, A. Foster, R. K. Smith, M. Loewenstein and S. W. Randall, Astrophys. J. **789**, 13 (2014) [arXiv:1402.2301 [astro-ph.CO]].
- [56] A. Boyarsky, O. Ruchayskiy, D. Iakubovskiy and J. Franse, Phys. Rev. Lett. **113**, 251301 (2014) [arXiv:1402.4119 [astro-ph.CO]].
- [57] D. Barret, K. Nandra, X. Barcons, A. Fabian, J-W d. Herder, L. Piro, M. Watson and J. Aird *et al.*, arXiv:1310.3814 [astro-ph.HE].

- [58] E. Bulbul, M. Markevitch, A. Foster, E. Miller, M. Bautz, M. Loewenstein, S. W. Randall and R. K. Smith, arXiv:1605.02034 [astro-ph.HE].
- [59] F. A. Aharonian *et al.* [Hitomi Collaboration], arXiv:1607.07420 [astro-ph.HE].
- [60] K. Arnaud, R. Smith, A. Siemiginowska, “Handbook of X-ray Astronomy”, Cambridge, the United Kingdom: Cambridge University Press (2011) 197 p
- [61] T. Takahashi, K. Mitsuda, R. Kelley, H. Aharonian, F. Aarts, H. Akamatsu, F. Akimoto and S. Allen *et al.*, arXiv:1210.4378 [astro-ph.IM].
- [62] S. Tremaine, J.E. Gunn, Phys. Rev. Lett. **42**, 407 (1979)
- [63] D. Gorbunov, A. Khmelnitsky, and V. Rubakov, JCAP **0810** (2008) 041
- [64] A. Boyarsky, J. Lesgourgues, O. Ruchayskiy and M. Viel, JCAP **0905**, 012 (2009) [arXiv:0812.0010 [astro-ph]].
- [65] L. Canetti, M. Drewes, T. Frossard and M. Shaposhnikov, Phys. Rev. D **87**, 093006 (2013) [arXiv:1208.4607 [hep-ph]].
- [66] X. D. Shi and G. M. Fuller, Phys. Rev. Lett. **82**, 2832 (1999) [astro-ph/9810076].
- [67] M. Laine and M. Shaposhnikov, JCAP **0806**, 031 (2008) [arXiv:0804.4543 [hep-ph]].
- [68] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).
- [69] H. Arason, D. J. Castano, B. Keszthelyi, S. Mikaelian, E. J. Piard, P. Ramond and B. D. Wright, Phys. Rev. D **46**, 3945 (1992).
- [70] J. R. Ellis and M. K. Gaillard, Phys. Lett. B **88**, 315 (1979).
- [71] H. Nishino *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. D **85**, 112001 (2012) [arXiv:1203.4030 [hep-ex]].
- [72] K. Abe, T. Abe, H. Aihara, Y. Fukuda, Y. Hayato, K. Huang, A. K. Ichikawa and M. Ikeda *et al.*, arXiv:1109.3262 [hep-ex];
- [73] M. Shiozawa, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **237-238**, 289 (2013).
- [74] I. Dorsner and P. Fileviez Perez, Nucl. Phys. B **723**, 53 (2005) [hep-ph/0504276];
- [75] I. Dorsner, P. Fileviez Perez and R. Gonzalez Felipe, Nucl. Phys. B **747**, 312 (2006) [hep-ph/0512068].
- [76] N. V. Krasnikov, Phys. Lett. B **306**, 283 (1993);
- [77] B. Bajc and G. Senjanovic, JHEP **0708**, 014 (2007) [hep-ph/0612029],
- [78] B. Bajc, M. Nemevsek and G. Senjanovic, Phys. Rev. D **76**, 055011 (2007) [hep-ph/0703080].

- [79] M. Ibe, JHEP **0908**, 086 (2009) [arXiv:0906.4667 [hep-ph]].
- [80] A. Atre, T. Han, S. Pascoli and B. Zhang, JHEP **0905**, 030 (2009) [arXiv:0901.3589 [hep-ph]].
- [81] F. F. Deppisch, P. S. Bhupal Dev and A. Pilaftsis, New J. Phys. **17**, no. 7, 075019 (2015) [arXiv:1502.06541 [hep-ph]].
- [82] S. Antusch and O. Fischer, JHEP **1505**, 053 (2015) [arXiv:1502.05915 [hep-ph]].
- [83] A. Faessler, M. Gonzalez, S. Kovalenko and F. Šimkovic, Phys. Rev. D **90**, no. 9, 096010 (2014) [arXiv:1408.6077 [hep-ph]].
- [84] A. Gando *et al.* [KamLAND-Zen Collaboration], Phys. Rev. Lett. **110**, no. 6, 062502 (2013) [arXiv:1211.3863 [hep-ex]].
- [85] M. Agostini *et al.* [GERDA Collaboration], Phys. Rev. Lett. **111**, no. 12, 122503 (2013) [arXiv:1307.4720 [nucl-ex]].
- [86] J. Adam *et al.* [MEG Collaboration], Phys. Rev. Lett. **110**, 201801 (2013) [arXiv:1303.0754 [hep-ex]].
- [87] S. Antusch and O. Fischer, JHEP **1410**, 094 (2014) [arXiv:1407.6607 [hep-ph]].
- [88] R. E. Shrock, Phys. Lett. B **96**, 159 (1980).
- [89] A. Kobach and S. Dobbs, Phys. Rev. D **91**, no. 5, 053006 (2015) [arXiv:1412.4785 [hep-ph]].
- [90] A. Y. Smirnov and R. Zukanovich Funchal, Phys. Rev. D **74**, 013001 (2006) [hep-ph/0603009].
- [91] A. Kusenko, S. Pascoli and D. Semikoz, JHEP **0511**, 028 (2005) [hep-ph/0405198].
- [92] J. Orloff, A. N. Rozanov and C. Santoni, Phys. Lett. B **550**, 8 (2002) [hep-ph/0208075].
- [93] C. Adams *et al.* [LBNE Collaboration], arXiv:1307.7335 [hep-ex].
- [94] W. Bonivento *et al.*, arXiv:1310.1762 [hep-ex].
- [95] S. Alekhin *et al.*, arXiv:1504.04855 [hep-ph].
- [96] S. Banerjee, P. S. B. Dev, A. Ibarra, T. Mandal and M. Mitra, Phys. Rev. D **92**, 075002 (2015) [arXiv:1503.05491 [hep-ph]].
- [97] P. Abreu *et al.* [DELPHI Collaboration], Z. Phys. C **74**, 57 (1997) [Z. Phys. C **75**, 580 (1997)].
- [98] A. Blondel *et al.* [FCC-ee study Team Collaboration], arXiv:1411.5230 [hep-ex].

- [99] T. G. Rizzo, Phys. Lett. B **116**, 23 (1982).
- [100] H. Baer *et al.*, arXiv:1306.6352 [hep-ph].
- [101] E. Accomando *et al.* [CLIC Physics Working Group Collaboration], hep-ph/0412251.
- [102] F. Iocco, G. Mangano, G. Miele, O. Pisanti and P. D. Serpico, Phys. Rept. **472**, 1 (2009) [arXiv:0809.0631 [astro-ph]].
- [103] A. D. Dolgov, S. H. Hansen, G. Raffelt and D. V. Semikoz, Nucl. Phys. B **590**, 562 (2000) [hep-ph/0008138].
- [104] O. Ruchayskiy and A. Ivashko, JCAP **1210**, 014 (2012) [arXiv:1202.2841 [hep-ph]].
- [105] T. Asaka, S. Blanchet and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **631**, 151 (2005) [hep-ph/0503065].
- [106] P. F. Harrison, R. Krishnan and W. G. Scott, Phys. Rev. D **82**, 096004 (2010) [arXiv:1007.3810 [hep-ph]].
- [107] B. Grzadkowski and M. Lindner, Phys. Lett. B **193**, 71 (1987).
- [108] S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner, M. Ratz and M. A. Schmidt, JHEP **0503**, 024 (2005) [hep-ph/0501272].
- [109] Z. z. Xing, H. Zhang and S. Zhou, Phys. Rev. D **86**, 013013 (2012) [arXiv:1112.3112 [hep-ph]].
- [110] M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni and T. Schwetz, JHEP **1411**, 052 (2014) [arXiv:1409.5439 [hep-ph]].
- [111] J. Elias-Miro, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, G. Isidori, A. Riotto and A. Strumia, Phys. Lett. B **709**, 222 (2012) [arXiv:1112.3022 [hep-ph]].
- [112] W. Rodejohann and H. Zhang, JHEP **1206**, 022 (2012) [arXiv:1203.3825 [hep-ph]].
- [113] W. Grimus and L. Lavoura, Phys. Lett. B **546**, 86 (2002) [hep-ph/0207229].
- [114] J. Lopez-Pavon, S. Pascoli and C. f. Wong, Phys. Rev. D **87**, no. 9, 093007 (2013) [arXiv:1209.5342 [hep-ph]].
- [115] 藤川和夫、ゲージ場の理論、東京、岩波書店 (2001)
- [116] Y. F. Li and Z. z. Xing, Phys. Lett. B **695**, 205 (2011) [arXiv:1009.5870 [hep-ph]].