

平成27年度 博士論文

景気・為替・物価変動の連関ダイナミクス：複素ヒルベルト主成分分析

新潟大学大学院自然科学研究科 博士後期課程
数理物質科学専攻

F13J011D

吉川 悠一

概 要

本研究の対象とするのは物価指数である。物価指数は「経済の体温計」とも呼ばれており、物価の不安定な動きは、経済の健全な発展を阻害する。物価指数、特に消費者物価指数は日本銀行が金融政策における判断材料として使用しているほか、賃金、家賃や公共料金改定の際に参考にされるなど、経済政策を的確に推進する上で重要な指標となっている。政策が効果的であるかどうかは、価格の決定メカニズムに大きく依存する。そのため、物価ダイナミクスの研究は経済学において最重要課題の一つとなっている。従来の物価変動に関する研究は、一般(総合)物価と貨幣数量の関係を調べるなど、もっぱらマクロな変数を用いた分析が主であった。ミクロの価格についての研究は2000年以降よくなされてきたが、個別の物価間の相互作用という観点では限定的な範囲におさまっていた。

本研究では、景気、外国為替レートおよび国内物価の連関ダイナミクスを実証的に明らかにするため、景気動向指数(先行、一致、遅行)、円ドル為替レート、中分類物価指数(消費者、企業、輸入)を組み合わせた多変量時系列データ(1985年1月から2014年12月までの期間)に対して、主成分分析を拡張した複素ヒルベルト主成分分析法による解析を行った。従来の主成分分析の手法では同時刻の変量間で相関を見ているため異時刻での相関を抽出することは難しい。相関は同時刻で存在するとは限らず、むしろタイムラグのある動的な相関の存在が一般的である。このようなタイムラグのある相関を抽出する手法として複素ヒルベルト主成分分析がある。ヒルベルト変換によって複素化された時系列の位相が、変量間のリード・ラグ関係の情報を与える。

自己相関を保存したまま相互相関のみを壊すRotational Random Shuffling法を帰無仮説として主成分の統計的有意性を検定したところ、有意な主成分が6個得られた。その内、最大固有値、第2最大固有値に対応する第1主成分と第2主成分が、季節変動とは無関係のモードである。第1主成分では、景気動向先行指数、為替レート、輸入物価指数がリードし、その影響が景気、さらに国内物価へと順繰りに伝播していく。第2主成分では、景気動向が国内物価の変動に先駆けている(第1主成分とは対照に、景気動向と為替レート、「石油・石炭・天然ガス」を除く輸入物価とは逆サイクル)。特筆すべき事実は、中下流にあたる国内物価に影響が波及していく際のリード・ラグ関係が第1,2主成分の間で酷似していることであり、国内物価間の普遍的な連関構造の存在が示唆される。また、それらの主成分は大きな経済イベントのショックに対してそれぞれ異なった反応を示す。ただし、ショック時以外でも一定の強度持っていたことから、特定の経済イベントに特徴的な構造ではなく、平時から存在しているゆらぎが経済イベントの要因によってその特徴をそのままに駆動されていると考えられる。

目次

1	はじめに	3
1.1	先行研究	3
2	手法	5
2.1	複素ヒルベルト主成分分析 (CHPCA)	5
2.2	ランダム行列理論 (RMT)	7
2.3	Rotational Random Shuffling(RRS)	8
3	解析データ	10
4	解析結果	14
4.1	固有値分布	14
4.2	固有ベクトル成分	15
4.3	固有ベクトル成分の大きさの有意性	15
4.4	主成分の時間変化	17
4.5	第 1, 第 2 主成分の構造	23
4.6	企業・消費者物価への波及構造	23
4.7	主成分の経済ショックに対する応答特性	27
4.8	景気循環との関係	32
5	おわりに	35
5.1	まとめ	35
A	主成分分析 (PCA)	38
A.1	主成分の導出	38
B	ランダム行列理論	42
B.1	カイラルランダム行列の固有値分布	42
B.1.1	導出のための準備	44
B.1.2	固有値分布の導出	46
C	ヒルベルト変換	49
D	季節調整をした場合の解析結果	50
D.1	前年同月比	51
D.2	固有値分布	51
D.3	固有ベクトル成分	52
E	PCA と CHPCA との対応	54

1 はじめに

1.1 先行研究

近年、一部の物理学者が経済・社会の現象に複雑系科学の見地から興味をもち、精力的に研究を始めた。コンピュータの飛躍的な発展とそれに伴う情報処理技術の高度化によって、株式市場、為替市場、企業財務、企業間取引関係をはじめとして様々な経済データが多量に入手できるようになり、経済・社会現象への実証的なアプローチが可能となった。特に、そのような経済物理学の分野では、主成分分析 (PCA) とランダム行列理論 (RMT) とを組み合わせた手法を用いて多変量時系列データに潜む統計的に有意な相関構造を抽出・解析する研究が盛んに行われている [1-6]。

PCA において、大きな固有値を持った主成分のどこまでを統計的に有意なものとしみなすかは、最も重要な課題である。従来、有意な主成分は半経験的な基準が用いられてきた。この問題に対し明確な理論的背景を持つ判定基準として、物理学者によって導入されたのが RMT である。しかし、有限長の時系列データが大きな自己相関を持っていると、擬似的に相互相関が生じ、RMT による判定基準は、過剰に有意な主成分を見積もる傾向がある。このような場合に対応した判定基準として Rotational Random Shuffling (RRS) 法が提案されている [7]。これは時系列データの自己相関を残し相互相関だけを破壊する方法であり、これを用いることで時系列データの自己相関による擬似相互相関効果を見積もることができる。また、従来の主成分分析の手法では同時刻の変量間で相関を見ているため異時刻での相関構造を抽出することは難しい。相関は同時刻で存在するとは限らず、むしろタイムラグのある動的な相関の存在が一般的である。このようなタイムラグのある相関構造を抽出する手法として、PCA を拡張した複素ヒルベルト主成分分析 (CHPCA) [8,9] がある。CHPCA はヒルベルト変換を用いた実データの複素化に基づいており、これによって実データ内のリード・ラグ関係を位相差として抽出することができる。

本研究の対象とするのは物価指数である。日本における物価指数には総務省統計局が毎月調査している消費者物価指数と、日本銀行が毎月調査している企業物価指数がある。物価指数は「経済の体温計」とも呼ばれており、物価の不安定な動きは、経済の健全な発展を阻害する。物価指数、特に消費者物価指数は日本銀行が金融政策における判断材料として使用しているほか、賃金、家賃や公共料金改定の際に参考にされるなど、経済政策を的確に推進する上で重要な指標となっている。政策が効果的であるかどうかは、価格の決定メカニズムに大きく依存する。そのため、物価ダイナミクスの研究は経済学において最重要課題の 1 つとなっている。

従来の経済学における物価変動に関する研究は、一般 (総合) 物価と貨幣数量の関係を調べるなど、もっぱらマクロな変数を用いた分析が主であった。フィリップ

曲線が示すように、一般には好況時にはインフレに、不況時にはデフレという傾向が知られており、物価と景気動向との間には密接な関係があると認識されている。また、我が国の経済は原材料の多くを輸入に頼っていることから、輸入価格に強い関係を持つ為替レートが国内物価に与える影響も大きいと思われる。金融政策の目標が国内物価の安定であるならば、為替レートやそれに同期する輸入物価の変動が国内物価にどのような影響を与えるのかを把握しておくことは、金融政策の立案にあたって重要であろう。

2000 年以降、ミクロの個別価格に焦点を当てた研究も [10] も行われ始めた。例えば、個別の 350 品目について価格の更新頻度を調べた研究 [11] では、個別価格は期待されるほど硬直的ではなく、しばしば更新され、その頻度は価格ごとに様々であることが明らかにされた。このような価格硬直性の実証的研究は、マネタリズムの正否の文脈で行われている。価格が粘着性を持つ理由としては、大別してメニューコスト仮説と情報コスト仮説がある。メニューコスト仮説は、価格更新にはメニューの改定をはじめとして様々な物理的コストが必要であるとの考え方である。それに対して、情報コスト仮説は、企業が製品の価格を更新する際には、種々の情報の収集コストや得られた多量の情報の処理コストが発生すると主張する。企業が収集する情報には、マクロの経済状況ばかりではなく、周囲との関係性についての情報も含まれる。情報コスト仮説を突き詰めれば、物価間の相互作用という観点に到達する。しかし、そのような観点は、原油価格が国内物価に与える影響といった限定的な品目間の範囲にとどまっていた。つい最近、網羅的な個別物価の集団に対して、前術の最新手法である CHPCA を用いた解析が行われた [12]。得られた第 1 主成分は、個別物価同士の連関が複雑に絡み合った集団運動の存在を示唆している。

以上の研究背景を踏まえ、本研究では、個別物価に加えて景気動向指数、為替レート、マネーストックを加えたデータを用意する CHPCA と RMT, RRS を組み合わせた解析に加え、オリジナルと季節調整済みデータの 2 通りのデータの結果の比較を行うことで、より詳細に季節性と自己相関による効果を分離し、これら個別物価・景気・為替・マネー間に内在する相互連関構造のダイナミクスを実証的に明らかにすることを目的とする。なお、品目レベルの詳細分類の個別物価データを用いた先行研究 [12] とは異なり、ここでは業種レベルの中分類に基づく物価データを解析する。あまりにデータのレゾリューションを高めると、ノイズが大きくなり、物価間の集団運動がかえって観測しにくくなる可能性があるためである。また、このデータ選択は、吉川 [19] による経済学についての視点「本来、経済学は二階建て」（マクロ経済と企業との間に産業を配置し、マクロ経済学にとってのミクロの経済主体は各企業ではなく各種の産業であるとする考え）とも合致する。

2 手法

2.1 複素ヒルベルト主成分分析 (CHPCA)

従来の主成分分析では、相関を求める際に同時刻の変量間で相関をとっていたため、タイムラグのある相関を抽出することは困難であった。複素ヒルベルト主成分分析 (CHPCA) はそのようなタイムラグのある相関を抽出するために気象学者によって開発された手法である [8,9]。現在では、気象だけでなく株式市場や地震データなどの解析にも用いられている。ここでは具体的な手順を説明する。

まず、元の時系列 $x_\mu(t)$ ($\mu = 1, \dots, N$) に、虚部として $y_\mu(t)$ を加えて複素数に拡張した時系列を

$$\xi_\mu(t) = x_\mu(t) + iy_\mu(t), \quad (2.1.1)$$

とする。ここでの虚部 $y_\mu(t)$ は $x_\mu(t)$ のヒルベルト変換

$$y_\mu(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_\mu(u)}{t-u} du. \quad (2.1.2)$$

であり、 u についての積分はコーシーの主値積分である。実際の計算では離散値に対応したヒルベルト変換を行っている。ヒルベルト変換についての詳細は付録にまとめた。 $y_\mu(t)$ は $x_\mu(t)$ の位相を $\pi/2$ 進めたものになっている。複素時系列 $\{\xi_\mu(t)\}$ から複素相関行列

$$\tilde{C} = \frac{1}{T} \Xi \Xi^\dagger, \quad (2.1.3)$$

を作成する。ここで、

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

である。 Ξ は $\xi_\mu(t)$ を要素とする $N \times T$ の行列であり、 Ξ^\dagger は Ξ のエルミート共役である。複素相関行列 \tilde{C} について固有値問題

$$\tilde{C} \alpha_\ell = \lambda_\ell \alpha_\ell, \quad (2.1.5)$$

$$\alpha_\ell^\dagger \cdot \alpha_m = \delta_{\ell m}. \quad (2.1.6)$$

を解くことが複素ヒルベルト主成分分析 (CHPCA) に対応している。ここで、固有値 λ_ℓ とそれに対応する固有ベクトル α_ℓ である。 \tilde{C} はエルミート行列なので、その固有値は実数として得られる。一方、固有ベクトル成分は複素数であり、その絶対値と位相から多変量時系列データに潜む相関の大きさとリード・ラグ関係を

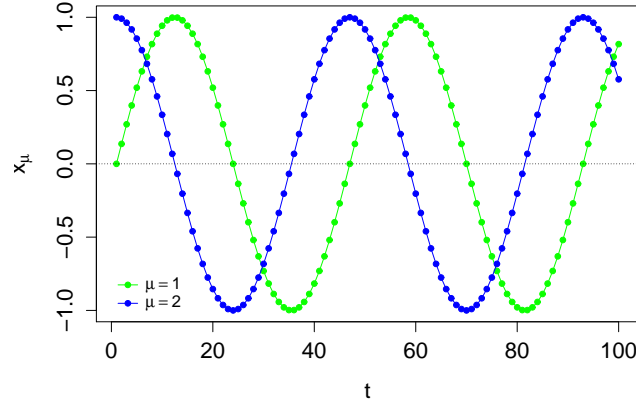


図 2.1: sin と cos の時系列の例

読み取ることができる。また、相関行列 $\tilde{\mathbf{C}}$ は、

$$\sum_{\ell=1}^N \lambda_{\ell} = N, \quad (2.1.7)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \sum_{\ell=1}^N \lambda_{\ell} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^{\dagger}, \quad (2.1.8)$$

と表わせる。固有値の値が大きい方から $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ とした。

CHPCA の検出能力の例として以下の sin と cos の時系列に対して適用した結果を示す：

$$x_1(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{23}\right), x_2(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{23}\right) \quad (2.1.9)$$

$t = 0, 1, 2, \dots, 99$, であり、プロットしたものが図 2.1 である。

PCA の相関行列を計算すると以下ようになる：

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -0.046 \\ -0.046 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1.10)$$

ここで、 $C_{12} = -0.046$ は 2 つの時系列の間にあるタイムラグのある相関を検出できていないと言える。

次に CHPCA の手順に従って複素化し、複素相関行列を計算すると以下のようになる：

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.985e^{+0.515\pi} \\ 0.985e^{-0.515\pi} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.11)$$

さらに、その固有値と固有ベクトルは

$$\lambda_1 = 1.985, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-0.515\pi} \end{pmatrix}, \quad (2.1.12)$$

$$\lambda_2 = 0.015, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{+0.515\pi} \end{pmatrix}, \quad (2.1.13)$$

となる。検出された位相差 0.515π は実際の位相差 0.5π と非常に近い値が得られている。さらに、絶対値 $|\tilde{C}_{12}| = 0.985$ はこのタイムラグのある相関を非常に強く検出できている事を表している。第1固有ベクトルはこの \sin と \cos のタイムラグのある集団運動を表しており、このように、CHPCA ではリード・ラグ関係のある相関を検出することができる。

2.2 ランダム行列理論 (RMT)

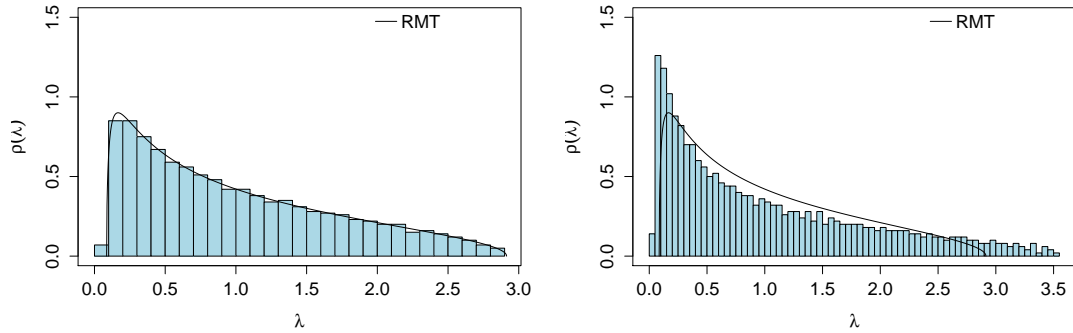


図 2.2: 左：ランダムデータから作成した相関行列の固有値分布と RMT 理論曲線。右：ランダムデータの差分から作成した相関行列の固有値分布。

主成分分析では N 個の観測変数と同じ数の主成分が作成されることになるので、適当な数の有意だと思われる主成分だけを採用して、それ以降の主成分は切り捨てる必要がある。その判断基準として経験的には以下のような手法が用いられている。

1. 固有値が 1 以上
2. 累積寄与率が 70%を超えたところまで
3. 寄与率に急激な変化が起きている部分まで

相関行列の固有値はその主成分がもつ情報量に対応しており、平均 0、分散 1 に標準化された時系列の場合、平均値は 1 になる。そのため、固有値が 1 以上というのは平均以上の情報量を持っている主成分ということになる。また、寄与率は以下の式で与えられる：

$$C_m = \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^N \lambda_i}. \quad (2.2.1)$$

寄与率は第 m 主成分が元のデータに含まれる特徴をどの程度表現しているかを示す指標である。累積寄与率が 70% というのは採用した主成分によって元の時系列の 70% を復元できる事を表している。上位 70% までの主成分に有意な情報が含まれており、残りは統計ノイズであろうという判断である。

しかしこれらの判定基準には理論的な根拠が薄く、半経験的に得られた基準である。そこで、理論的な判定基準を与えるために注目されたのがランダム行列理論である。

有意な主成分と統計ノイズとを区別するための帰無仮説として、RMT から導かれるランダム相関行列の固有値分布が用いられている。ランダムデータから作成されたランダム複素相関行列の固有値 λ は $Q = T/(2N) > 1$ を一定のまま $N, T \rightarrow \infty$ の極限で、次の確率密度関数に従う¹：

$$\rho(\lambda) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda}, \quad (2.2.2)$$

$$\lambda_{\pm} = \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{Q}}\right)^2. \quad (2.2.3)$$

これはランダム相関行列の固有値は $[\lambda_-, \lambda_+]$ の範囲内に分布することを表している。図 2.2 左はランダム複素相関行列の固有値分布の数値計算をプロットしたものである。もし実際の相関行列の固有値が λ_+ より大きい場合、それらの固有値と対応する固有ベクトルは有意であると判定する事ができる。

2.3 Rotational Random Shuffling(RRS)

先にも述べたように時系列データに自己相関が含まれていると RMT は有意な主成分を過剰に見積もる傾向があり、統計ノイズとの区別のための有用性が減少してしまう。RMT はデータがランダムな場合の参照系であるため、自己相関と相互相関とを区別しない。図 2.2 右はランダム時系列の差分を取って作成された時系列の固有値分布である。差分を取ることであられる自己相関による効果によって、RMT による理論曲線をはみ出して固有値が分布している。Rotational Random Shuffling(RRS) はそのようなケースにおいて RMT のかわりによりロバストな帰無仮説を提供する。RRS では各時系列に周期的境界条件を課し時系列方

¹通常の PCA では $Q = T/N$ であるが CHPCA の固有値分布に拡張した RMT では $Q = T/(2N)$ となることがわかっている [13]

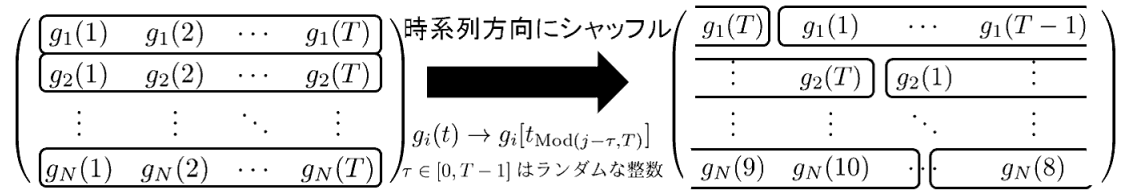


図 2.3: Rotational Random Shuffling の概略図

向のリングを作り，各時系列をそれぞれランダムに回転させる操作をする。この操作によって自己相関を残したまま相互相関のみ破壊される。RRS されたデータの固有値分布を帰無仮説とすることで統計ノイズと有意な固有値とを区別することができる。しかし理論曲線から解析的に求まる RMT と違い固有値分布を実際に計算する必要がある。

3 解析データ

解析対象として、以下の8種類のカテゴリーを組み合わせた総項目数 $N = 83$, 1985年1月から2014年12月まで時系列長 $T = 360$ ヶ月の月次データを扱う。

- 消費者物価指数 (CPI)² 45項目
- 企業物価指数 (PPI)³ 23項目
- 輸入物価指数 (IPI)^{*3} 10項目
- 円ドル為替レート (USD/JPY)⁴
- 景気動向指数先行指数 (Leading Index)⁵
- 景気動向指数一致指数 (Coincident Index)^{*5}
- 景気動向指数遅行指数 (Lagging Index)^{*5}
- マネーストック (Money Stock)⁶

消費者物価指数 (CPI)

消費者物価指数は、全国の世帯が購入する家計に係る財及びサービスの価格等を総合した物価の変動を時系列的に測定したものである。家計の消費構造を一定のものに固定し、これに要する費用が物価の変動によって、どう変化するかを指数値で示したもので、総務省統計局によって毎月作成されている。指数計算に採用している各品目のウェイトは総務省統計局実施の家計調査の結果等に基づいており、品目の価格は総務省統計局実施の小売物価統計調査によって調査された小売価格を用いている。消費者物価指数は世帯が消費する財・サービスの価格の変動を測定することを目的としていることから、商品やサービスと一体となって徴収される消費税分を含めた消費者が実際に支払う価格を用いて作成されている。結果は各種経済施策や年金の改定などに利用されている。

企業物価指数 (PPI)

国内企業物価指数 (PPI) とは企業物価指数のうち、国内の企業間取引、つまり国内で生産した国内需要家向けの財 (国内市場を経由して最終的に輸出するものを除く) の価格を対象としたものであり、日本銀行により毎月作成されている。消費税を含むベースで作成されている。国内で生産した国内需要家向けの財 (国内市場

²2010年基準 中分類 総務省統計局 <http://www.stat.go.jp>

³2010年基準 中分類 日本銀行 <http://www.boj.or.jp>

⁴東京市場 ドル・円 17時時点/月中平均 日経 NEEDS

⁵Composite Index 2010年基準 外れ値処理有り 内閣府 <http://www.cao.go.jp>

⁶現行の M2 統計と過去の旧 M2+CD, M2+CD 統計とを接続して対象期間のマネーストック時系列を作成した。いずれも日本銀行公表。

を經由して最終的に輸出するものを除く)であり、消費税を含むベースで作成されている。

輸入物価指数 (IPI)

輸入物価指数 (IPI) とは企業物価指数のうち、輸入品を対象としたものである。通関段階 (原則として CIF 建て) における荷降ろし時点の価格を対象としたものであり。日本銀行により毎月作成されている。消費税は含まない。

景気動向指数

景気動向指数は、生産、雇用など様々な経済活動での重要かつ景気に敏感に反応する指標の動きを統合することによって、景気の現状把握及び将来予測に資するために作成された指標であり、内閣府から毎月発表されている。景気動向指数には、コンポジット・インデックス (CI) とディフュージョン・インデックス (DI) がある。CI は構成する指標の動きを合成することで景気変動の大きさやテンポ (量感) を、DI は構成する指標のうち、改善している指標の割合を算出することで景気の高経済部門への波及の度合い (波及度) を測定することを主な目的としている。CI と DI には、それぞれ、景気に対し先行して動く先行指数、ほぼ一致して動く一致指数、遅れて動く遅行指数の 3 本の指数がある。景気の現状把握に一致指数を利用し、先行指数は、一般的に、一致指数に数ヶ月先行することから、景気の動きを予測する目的で利用する。遅行指数は、一般的に、一致指数に数ヶ月から半年程度遅行することから、事後的な確認に用いる。景気動向指数は、各経済部門から選ばれた指標の動きを統合して、単一の指標によって景気を把握しようとするものであり、すべての経済指標を総合的に勘案して景気を捉えようとするものではないことに留意する必要がある。

事前調整

消費者物価指数と企業物価指数の元データは消費税を含んだ形で作成されているが、ここでは消費税施行・税率増の月 (89 年 4 月, 97 年 4 月, 14 年 4 月) の対数差分後の値を前後の月の平均に置き換える処理をし、消費税の影響を取り除いている。詳細な項目は表 1 にまとめた。

また、各変数が異なる単位で測定されている場合には、単位の取り方によって異なる主成分が得られることになる。また、たとえ単位が同じであったとしても、大きく分散の異なる変数に対してそのまま主成分分析を適用すれば、その結果は分散の大きな変数の影響を強く受けることになり、変数間の関係を正しく把握することはできない。従って、ここでは事前調整として前月との対数差分

$$r_{\mu}(t) = \log x_{\mu}(t) - \log x_{\mu}(t-1). \quad (3.0.1)$$

を取った後,

$$\tilde{r}_{\mu}(t) = \frac{r_{\mu}(t) - \langle r_{\mu} \rangle}{\sigma_{\mu}} \quad (3.0.2)$$

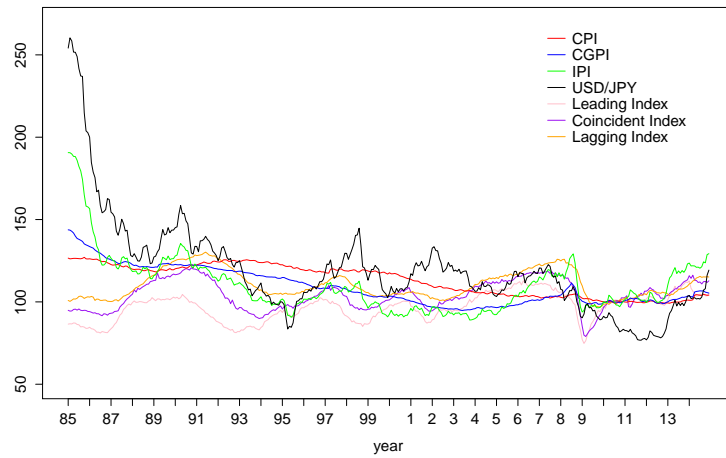


図 3.1: 解析対象の時系列 (カテゴリ平均)

の操作をし、平均0、分散1に標準化した。ここで $\langle r_\mu \rangle$ は r_μ の時間平均、 σ_μ は r_μ の標準偏差である。この操作によって時系列の長さは1985年2月から2014年12月までの359ヶ月となる。

定常性の検定の為に、原系列に対してPhillips-Perron法による単位根検定を行ったところ、4CPI乳卵類、5CPI野菜・海藻、6CPI果物、24CPI衣料、25CPIシャツ・セーター・下着類のみが定常だと判断された。また、対数差分後の時系列に対して同様の検定を行ったところ全ての時系列が検定をパスし、定常性を確認した。

表 1: 解析データの項目一覧

1	CPI	穀類	46	PPI	食料品・飲料・たばこ・飼料
2	CPI	魚介類	47	PPI	繊維製品
3	CPI	肉類	48	PPI	製材・木製品
4	CPI	乳卵類	49	PPI	パルプ・紙・同製品
5	CPI	野菜・海藻	50	PPI	化学製品
6	CPI	果物	51	PPI	石油・石炭製品
7	CPI	油脂・調味料	52	PPI	プラスチック製品
8	CPI	菓子類	53	PPI	窯業・土石製品
9	CPI	調理食品	54	PPI	鉄鋼
10	CPI	飲料	55	PPI	非鉄金属
11	CPI	酒類	56	PPI	金属製品
12	CPI	外食	57	PPI	はん用機器
13	CPI	家賃	58	PPI	生産用機器
14	CPI	設備修繕・維持	59	PPI	業務用機器
15	CPI	電気代	60	PPI	電子部品・デバイス
16	CPI	ガス代	61	PPI	電気機器
17	CPI	他の光熱	62	PPI	情報通信機器
18	CPI	家庭用耐久財	63	PPI	輸送用機器
19	CPI	室内装備品	64	PPI	その他工業製品
20	CPI	寝具類	65	PPI	農林水産物
21	CPI	家事雑貨	66	PPI	鉱産物
22	CPI	家事用消耗品	67	PPI	電力・都市ガス・水道
23	CPI	家事サービス	68	PPI	スクラップ類
24	CPI	衣料	69	IPI	食料品・飼料
25	CPI	シャツ・セーター・下着類	70	IPI	繊維品
26	CPI	履物類	71	IPI	金属・同製品
27	CPI	他の被服類	72	IPI	木材・同製品
28	CPI	被服関連サービス	73	IPI	石油・石炭・天然ガス
29	CPI	医薬品・健康保持用摂取品	74	IPI	化学製品
30	CPI	保健医療用品・器具	75	IPI	はん用・生産用・業務用機器
31	CPI	保健医療サービス	76	IPI	電気・電子機器
32	CPI	交通	77	IPI	輸送用機器
33	CPI	自動車等関係費	78	IPI	その他産品・製品
34	CPI	通信	79	USD/JPY	円ドル為替レート
35	CPI	授業料等	80	Leading Index	景気動向先行指数
36	CPI	教科書・学習参考教材	81	Coincident Index	景気動向一致指数
37	CPI	教養娯楽用耐久財	82	Lagging Index	景気動向遅行指数
38	CPI	教養娯楽用品	83	Money Stock	マネーストック
39	CPI	書籍・他の印刷物			
40	CPI	教養娯楽サービス			
41	CPI	理美容サービス			
42	CPI	理美容用品			
43	CPI	身の回り用品			
44	CPI	たばこ			
45	CPI	他の諸雑費			

4 解析結果

4.1 固有値分布

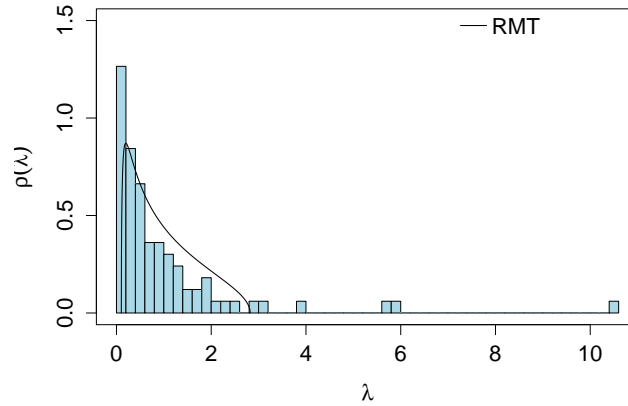


図 4.1: 実データの複素相関行列の固有値分布

図 4.1 は解析対象から作成した複素相関行列の固有値分布である。RMT によるデータがランダムな場合の固有値分布の上限 $\lambda_+ (= 2.82)$ を超える固有値は 6 個得られた ($\lambda_1 = 10.43, \lambda_2 = 5.97, \lambda_3 = 5.68, \lambda_4 = 3.98, \lambda_5 = 3.04, \lambda_6 = 2.86$)。これらの固有値に対応する主成分はランダムではない有意な主成分だと言える。第 6 主成分までの累積寄与率は $(31.97/83 = 0.385)$ となり、データ全体の変動の 38.5% を上位 6 個の主成分の表す集団運動によって説明できることを言っている。ただし、RMT はデータがランダムな場合の参照系であり、自己相関と相互相関とを区別しない。今、興味があるのは相互相関構造であるので、それらの区別のために RRS による解析も行う。

図 4.2 は RRS 後の固有値分布である。RMT による理論曲線の右側にはみ出して固有値が分布している、これはデータに含まれる自己相関による効果である。RRS では、どの行をどれだけシフトするかによって固有値の分布が変化するため、乱数を変えて 1000 回サンプルを取り $\langle \lambda_\ell \rangle + 3\sigma_\ell$ を各固有値の判定基準とする。 $\langle \lambda_\ell \rangle$ は RRS 後の ℓ 番目の固有値の平均値、 σ_ℓ は ℓ 番目の固有値の標準偏差を意味している。 ℓ 番目の固有値が RRS 後の $\langle \lambda_\ell \rangle + 3\sigma_\ell$ より大きければその固有値に対応する主成分は有意な相互相関を含んだ主成分だと判定する。この基準を当てはめると、有意な固有値は 6 個得られた。このケースにおいては RMT と変わらない結果となった。

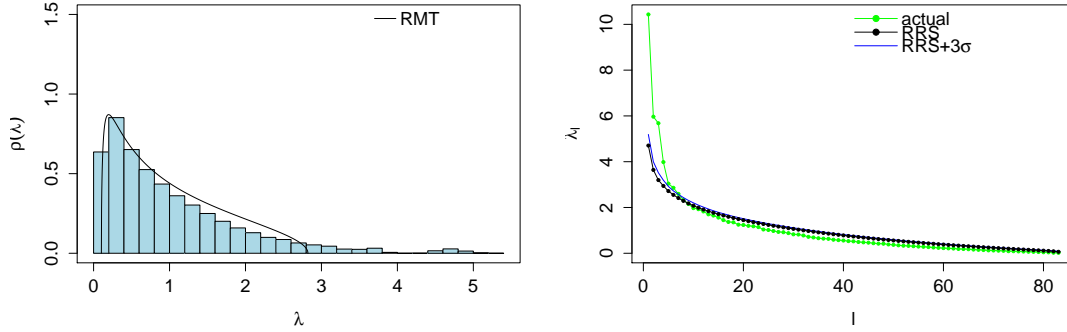


図 4.2: RRS 後の複素相関行列の固有値分布 (1000 サンプル)

4.2 固有ベクトル成分

図 4.3 は有意だと判断された上位 6 個の主成分に対応する固有ベクトル成分を複素平面上にプロットしたものである。各主成分に対応する固有ベクトル成分を見ることができ、大きく寄与する項目を明らかにすることができ、具体的な項目間の相関構造を知ることができる。各固有ベクトルは、

$$\|\alpha_\ell\|^2 = \sum_{i=1}^N \|\alpha_{\ell i}\|^2 = N. \quad (4.2.1)$$

と規格化してある。絶対値が相関の大きさ、位相差がリード・ラグ関係を表している。時間発展方向は時計回りになっており、図 4.3 の Mode 1 を例とすると、景気動向先行指数は、景気動向一致指数に対して時間的に先行している事を示している。

4.3 固有ベクトル成分の大きさの有意性

絶対値が相関の大きさを表しているため、絶対値が大きい項目ほど相関構造の中で重要な位置を占めると思われるが、どこまでの大きさの絶対値を持つ項目を重要だと見なせるだろうか。それを検証するためにデータに無相関な乱数時系列を追加し、乱数時系列を追加したことに対する固有ベクトルのふるまいを調べた。乱数時系列を 1 つ、元のデータに加えた (84 個目の時系列として) データを用意し、同様の CHPCA による解析を行った。図 4.4 は乱数時系列を追加した場合の固有ベクトル成分の絶対値である。乱数時系列を更新し 1000 回サンプルを取っており、その平均値と $\pm 2\sigma$ をプロットした。本来無相関な乱数時系列においても、時系列が有限である事に由来する統計ノイズによりいくつかの絶対値を取りうる事が分かる。上位の固有ベクトルほど乱数時系列の相関が小さく、また分散も小さい

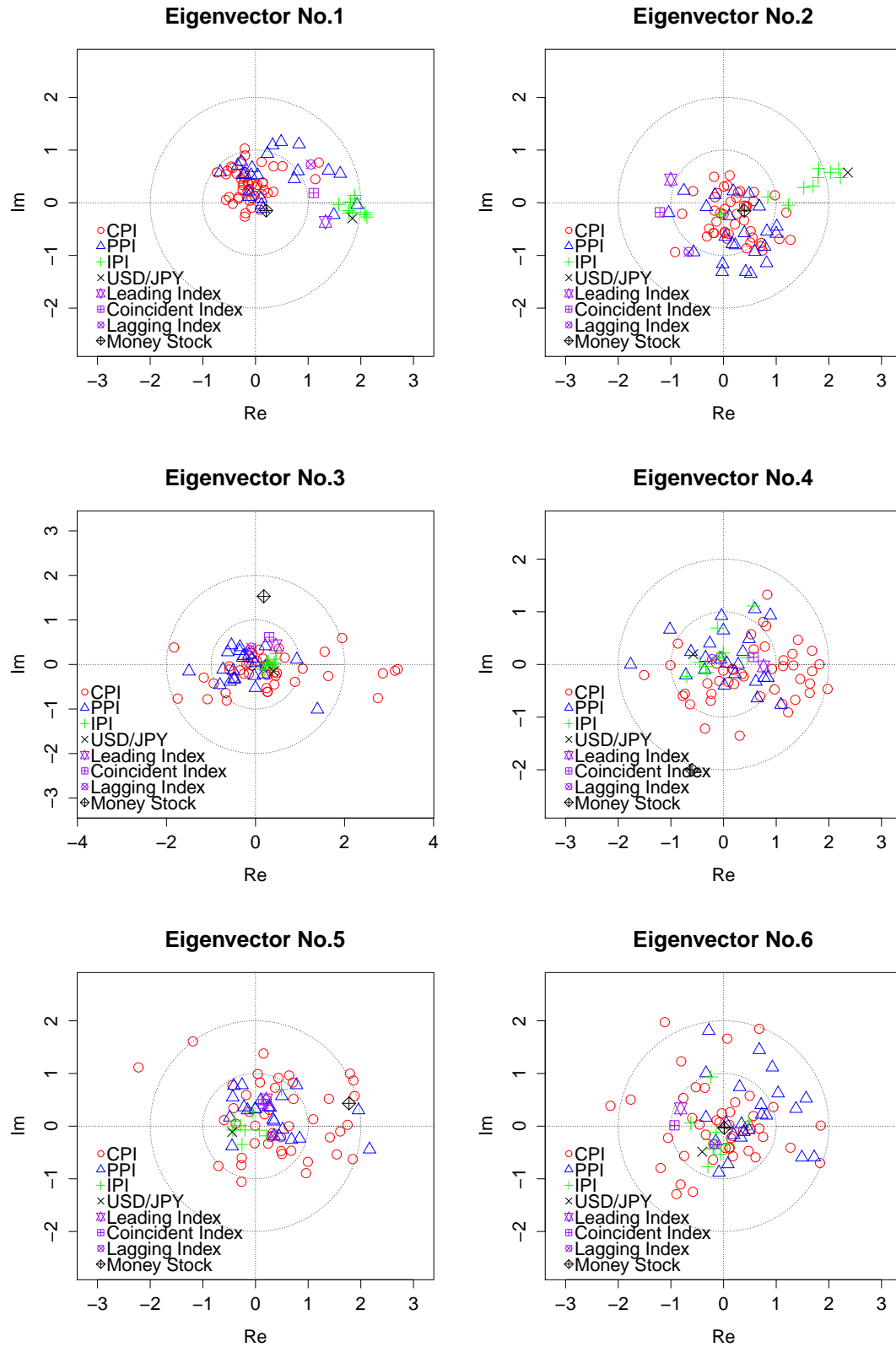


図 4.3: 複素平面上における固有ベクトル成分。時間発展方向は時計回りになっている。

ことから、より頑強な構造を持っていると言える。乱数でない項目の中には乱数時系列と同程度の絶対値のものもあるが、それらは統計ノイズによるものなのかここでは判断ができない。対して、乱数時系列の取りうる値より大きい項目については偶然によるものではない有意なものだと言えるだろう。以後、乱数時系列成分の値の平均値 $+2\sigma$ より大きい成分を有意な成分とみなして見ていく。

4.4 主成分の時間変化

主成分の時間変化を調べるためにモードシグナルを導入する。元の時系列の基底 (単位基底) \mathbf{e}_μ から、得られた固有ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_\ell$ を新しい基底とする基底変換を行う：

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{\mu=1}^N \xi_\mu(t) \mathbf{e}_\mu = \sum_{\ell=1}^N a_\ell(t) \boldsymbol{\alpha}_\ell, \quad (4.4.1)$$

ここで、

$$a_\ell(t) = \boldsymbol{\alpha}_\ell^\dagger \cdot \boldsymbol{\xi}(t). \quad (4.4.2)$$

である。展開係数 $a_\ell(t)$ を ℓ 番目の主成分のモードシグナルと呼ぶ。モードシグナルはその主成分の時間的なふるまいを表している。またモードシグナルには以下の性質がある：

$$\langle a_\ell^* a_m \rangle = \delta_{\ell m} \lambda_\ell. \quad (4.4.3)$$

モードシグナルの変動の分散と固有値の大きさは一致する。つまり、上位の主成分程激しい時間変動をしていることを表している。図 4.5 は上位 6 個の主成分に対応するモードシグナル、図 4.6 はモードシグナルの絶対値である。これを見ると、第 3 から第 6 モードシグナルは周期的な変動が強いように見える。

図 4.10 は上位 6 個の固有値に対応するモードシグナル $a_\ell(t)$ のパワースペクトル密度である。第 3 から第 6 モードシグナルには顕著な周期性が見て取れる。同じデータセットに対して季節調整として前年同月比を取る操作を行い、同様に解析を行うと (季節調整済みデータの解析結果は付録にまとめた。), 季節調整済みのデータでは 5 個の有意な主成分が得られた。

オリジナルと季節調整済みデータから得られた固有ベクトルの比較の為に、cosine similarity

$$\cos \theta_{\ell\alpha} = \frac{|\boldsymbol{\alpha}_\ell^* \cdot \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m|}{|\boldsymbol{\alpha}_\ell^*| |\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m|}. \quad (4.4.4)$$

を計算した。 $\theta_{\ell\alpha}$ は 2 つのベクトル $\boldsymbol{\alpha}_\ell$ と $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ とのなす角である。表 4.4 は固有ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_\ell$ と季節調整済みのデータの固有ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_m$ の cosine similarity と、 $N(=83)$ 次元ベクトルがランダムな場合を帰無仮説とした時の p 値である。第 1, 2 主成分は類似度が高い固有ベクトルを持つモードが季節調整済みのデータにも現れたのに対して、第 3 から第 6 主成分は類似度が高い固有ベクトルは季節調整済みのデータには存在しなかった。これらの事から第 3 から第 6 主成分は季節変動による擬

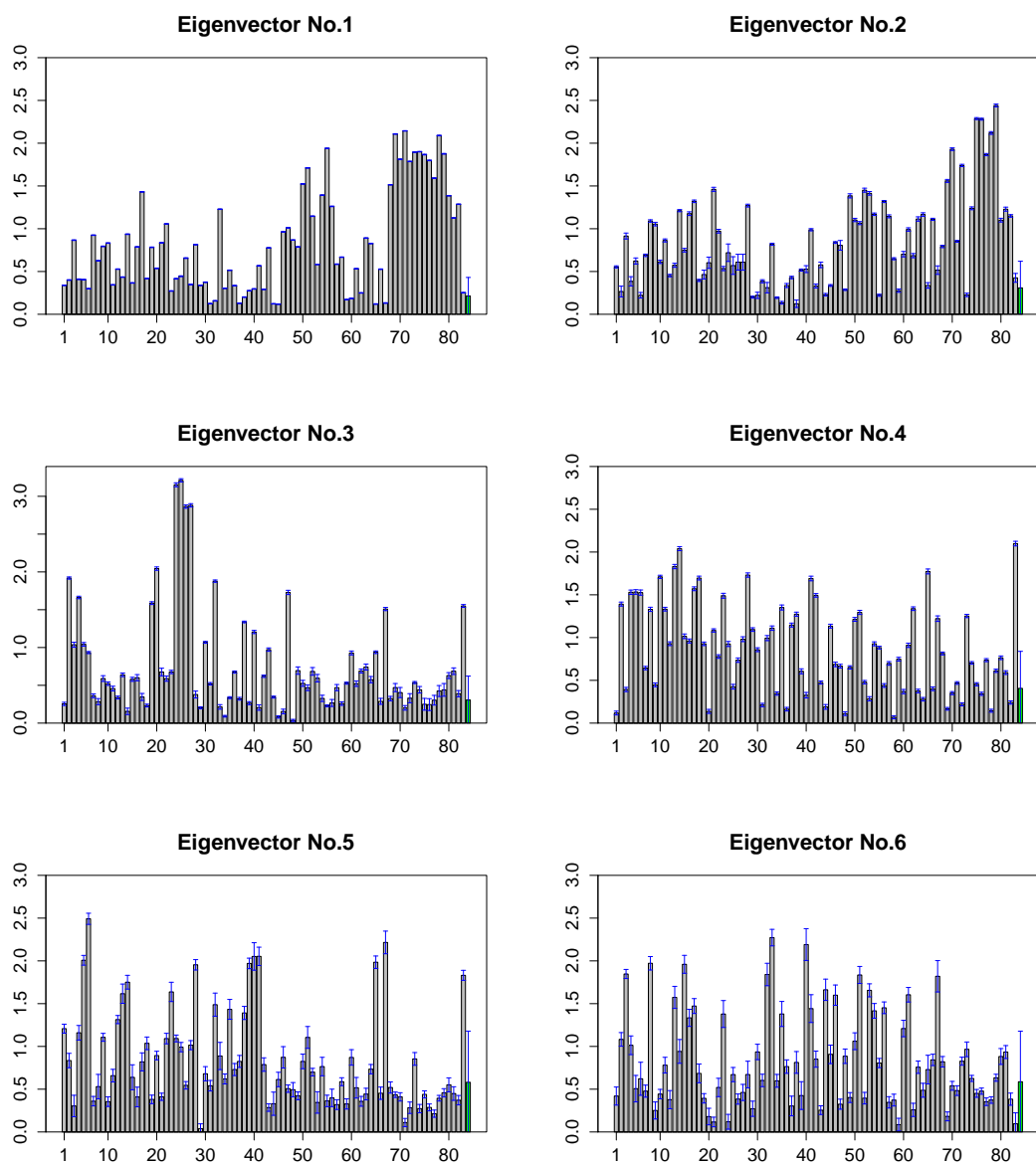


図 4.4: 乱数時系列を追加した場合の固有ベクトル成分の絶対値, x 軸: 絶対値, y 軸: 項目のインデックス, 84 番目 (緑) が追加した乱数時系列に対応する成分。(1000 サンプル平均と $\pm 2\sigma$)

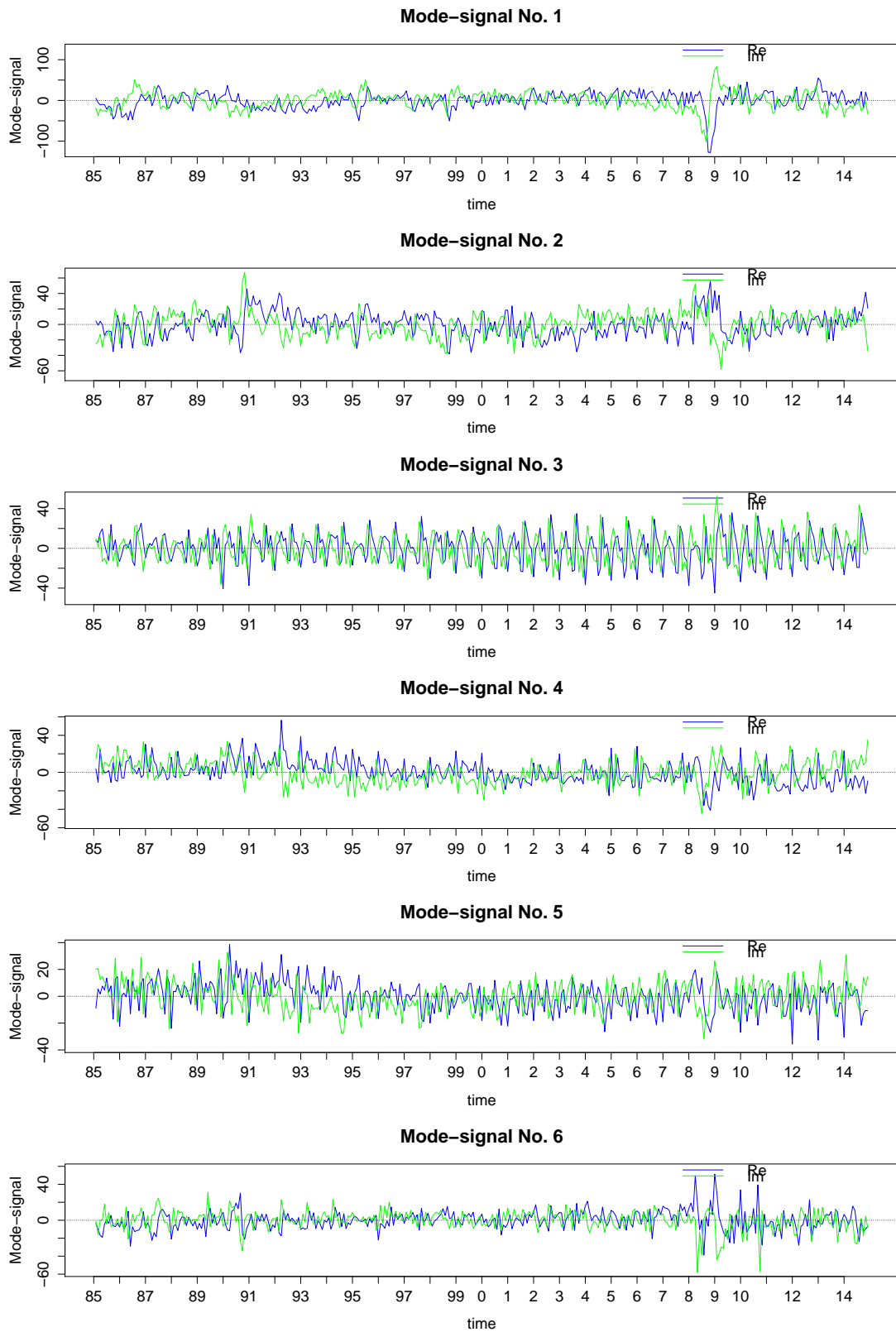


図 4.5: 上位 6 個の主成分に対応するモードシグナル

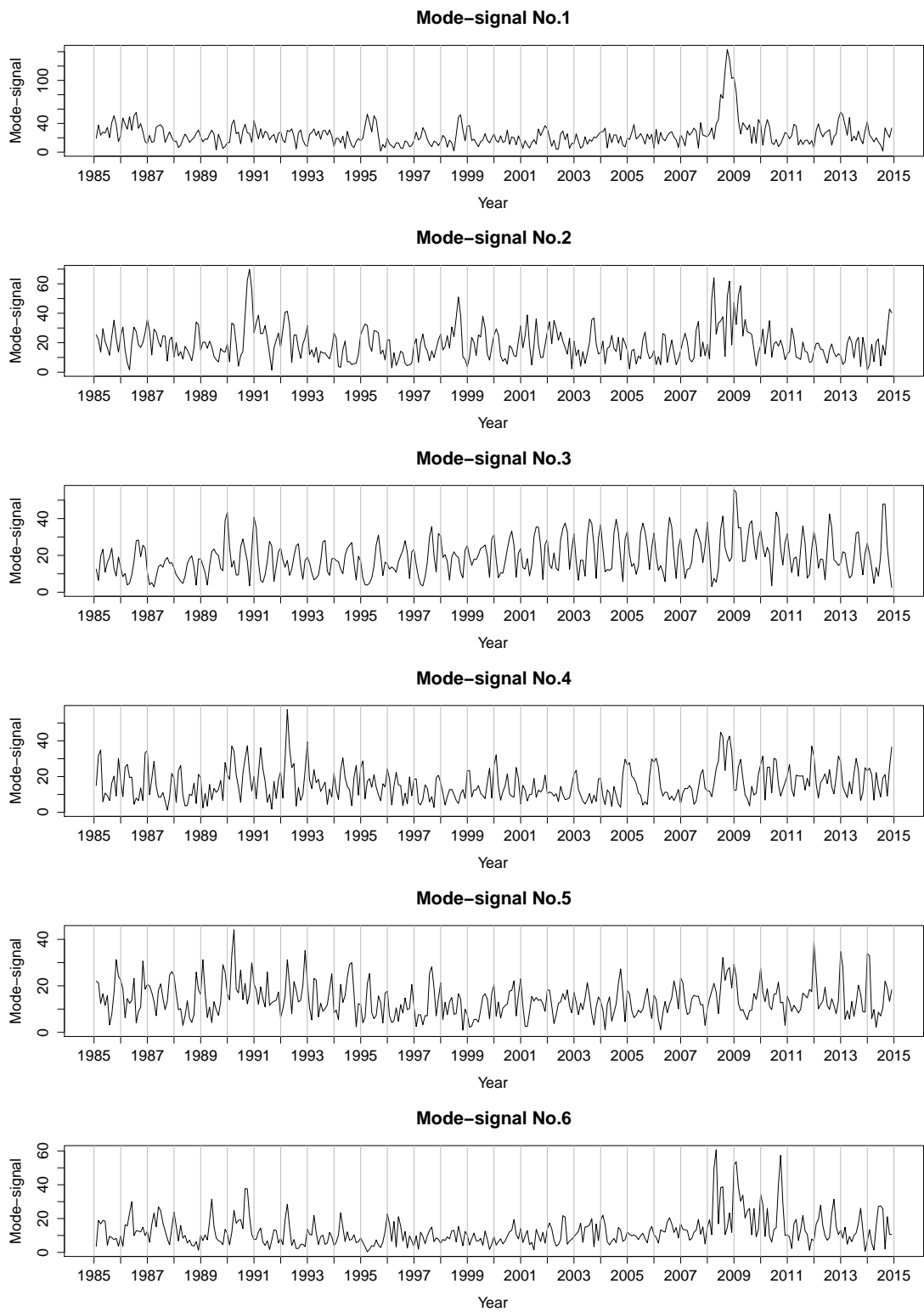


図 4.6: モードシグナルの絶対値

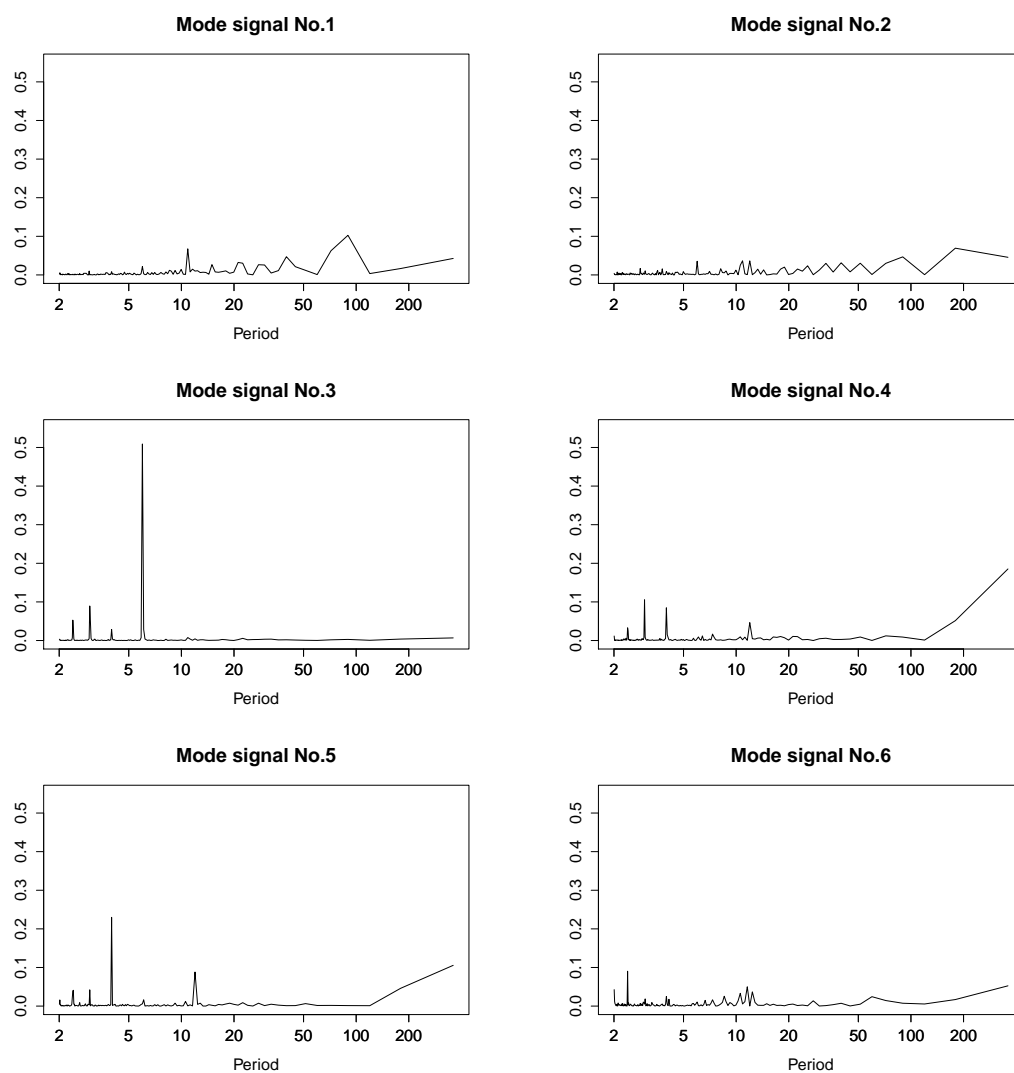


図 4.7: モードシグナルのパワースペクトル密度

表 2: オリジナルデータの固有ベクトル $\alpha_\ell (\ell = 1, \dots, 6)$ と季節調整済みデータの固有ベクトル $\tilde{\alpha}_m (m = 1, \dots, 5)$ の cosine similarity と, $N(=83)$ 次元ベクトルがランダムな場合を帰無仮説とした時の p 値。

$\ell \backslash m$	1	2	3	4	5	p 値	$\cos \theta$
1	0.960	0.100	0.065	0.017	0.080	0.05	0.215
2	0.079	0.895	0.158	0.048	0.050	0.01	0.280
3	0.144	0.158	0.235	0.067	0.210	0.001	0.353
4	0.089	0.250	0.316	0.142	0.296	1.3×10^{-6}	0.5
5	0.078	0.080	0.270	0.247	0.303	1.3×10^{-13}	0.7
6	0.046	0.045	0.381	0.487	0.192	2.6×10^{-31}	0.9

似的な相関構造を抽出した主成分であると考えられる。ここでは、季節変動について詳しく見ていく事はせず第1, 第2主成分に注目していくこととする。上位2個の主成分の累積寄与率は19.8%となる。物価全体の変動のおよそ2割は季節性ではない相関を持った集団運動によって説明できると言える。

4.5 第1, 第2主成分の構造

第1, 2主成分の2個が季節性でもノイズによるものでもない有意な相関構造を表している事がわかった。表4.5は第1, 2主成分の有意と判断された項目である。位相差 π は同時刻における反相関の関係を示しているため、位相を π 反転させ、絶対値を負とした。

図4.8は第1固有ベクトルの成分を x 軸に位相を y 軸に絶対値をプロットしたものである。これを見ると、景気動向先行指数・輸入物価指数・為替レートが先行し、続いて景気動向一致指数、さらに景気動向遅行指数・企業物価指数から消費者物価指数へと繋がるラグのある一連の相関を示している。原材料にあたる輸入物価が先行して国内物価と正の相関をもっていることから、為替レートの変動やそれに伴う輸入物価の変動が国内の景気・物価に与える影響を表していると考えられる。下流にあたる企業物価から消費者物価へと影響が波及していくにしたがってその相関が小さくなっていく様子が見られるが、これは価格の粘着性を表していると思われる。

図4.8の第2主成分の固有ベクトル成分を見ると、景気動向先行指数と一部の企業物価が先行し、続いて景気動向一致指数・輸入物価指数(反相関)・為替レート(反相関)、さらに続いて景気動向遅行指数・企業物価から消費者物価への一連の相関を示している。為替レートと景気動向一致指数が同時刻の反相関(景気が良くなるとその国の通貨は強くなるという通常の経済状態に対応)な事から、国内の景気そのものが物価に与える影響を表していると考えられる。

第1, 2主成分のどちらにおいてもマネーストックの有意な相関は検出されなかった。

4.6 企業・消費者物価への波及構造

図4.9は第1, 2固有ベクトル成分のうち有意な相関の大きさをもつ企業・消費者物価の項目を位相でプロットしたものである。第1, 2主成分ともに企業・消費者物価のリード・ラグ関係はよく似ている事がわかる。表4.6は国内物価(CPI,PPI)の68項目のみのデータに対してCHPCAを適用して得られた固有ベクトルと、解析データの固有ベクトルの国内物価に対応する部分の類似度である。国内物価のみの解析ではここで得られた第1, 第2主成分は分離せず一つの主成分として抽出される。第1主成分では為替や輸入物価の変動が、第2主成分では国内の景気が国内物価(企業・消費者物価)を駆動する要因であると考えられるが、その影響が下流にあたる国内物価へ波及していく様子は要因の違いに関わらずよく似ている。このことは、国内物価間に普遍的な連関構造が存在している事を示唆している。これらの主成分は要因の違いにより区別できるが、国内物価のみを見ていたのでは得られなかった情報である。

表 3: 第 1, 2 固有ベクトルの有意な成分。Abs が負は反相関。太字は第 1, 2 固有ベクトルに共通する項目。

Mode 1			Mode 2		
Abs	θ [rad]	Category	Abs	θ [rad]	Category
1.38	0	80 Leading Index	1.09	0	80 Leading Index
1.87	0.11	79 USD/JPY 円ドル為替レート	0.79	0.12	68 PPI スクラップ類
1.51	0.11	68 PPI スクラップ類	-1.23	0.38	74 IPI 化学製品
2.13	0.14	71 IPI 金属・同製品	-0.85	0.55	71 IPI 金属・同製品
1.79	0.16	76 IPI 電気・電子機器	1.22	0.56	81 Coincident Index
2.1	0.16	69 IPI 食料品・飼料	-1.73	0.6	72 IPI 木材・同製品
1.86	0.17	75 IPI はん用・生産用・業務用機器	1.06	0.6	51 PPI 石油・石炭製品
2.08	0.18	78 IPI その他産品・製品	-1.55	0.6	69 IPI 食料品・飼料
1.78	0.18	72 IPI 木材・同製品	-2.27	0.63	76 IPI 電気・電子機器
1.93	0.24	55 PPI 非鉄金属	-2.43	0.65	79 USD/JPY 円ドル為替レート
1.58	0.24	77 IPI 輸送用機器	0.81	0.67	33 CPI 自動車等関係費
1.8	0.27	70 IPI 繊維品	-1.86	0.68	77 IPI 輸送用機器
1.89	0.3	74 IPI 化学製品	-2.11	0.69	78 IPI その他産品・製品
1.88	0.34	73 IPI 石油・石炭・天然ガス	-2.28	0.7	75 IPI はん用・生産用・業務用機器
1.12	0.43	81 Coincident Index	-1.92	0.76	70 IPI 繊維品
1.7	0.6	51 PPI 石油・石炭製品	1.31	1.21	17 CPI 他の光熱
1.22	0.64	33 CPI 自動車等関係費	1.14	1.37	82 Lagging Index
1.52	0.68	50 PPI 化学製品	1.1	1.44	50 PPI 化学製品
0.86	0.81	48 PPI 製材・木製品	0.71	1.53	24 CPI 衣料
1.42	0.83	17 CPI 他の光熱	1.31	1.97	56 PPI 金属製品
1.28	0.87	82 Lagging Index	1.16	1.97	54 PPI 鉄鋼
1.01	0.91	47 PPI 繊維製品	0.69	2.08	7 CPI 油脂・調味料
1.39	1.2	54 PPI 鉄鋼	0.8	2.19	47 PPI 繊維製品
0.86	1.2	3 CPI 肉類	0.84	2.25	46 PPI 食料品・飲料・たばこ・飼料
0.77	1.38	43 CPI 身の回り用品	1.38	2.3	49 PPI パルプ・紙・同製品
1.25	1.44	56 PPI 金属製品	1.44	2.35	52 PPI プラスチック製品
1.14	1.55	52 PPI プラスチック製品	0.97	2.45	22 CPI 家事用消耗品
0.96	1.6	46 PPI 食料品・飲料・たばこ・飼料	1.1	2.55	66 PPI 鉱産物
0.78	1.69	16 CPI ガス代	0.91	2.58	3 CPI 肉類
0.52	1.76	66 PPI 鉱産物	0.7	2.59	60 PPI 電子部品・デバイス
0.66	1.94	58 PPI 生産用機器	1.41	2.61	53 PPI 窯業・土石製品
0.53	2	61 PPI 電気機器	1.17	2.67	16 CPI ガス代
1.05	2.03	22 CPI 家事用消耗品	0.86	2.68	11 CPI 酒類
0.92	2.06	7 CPI 油脂・調味料	1.09	2.69	8 CPI 菓子類
0.82	2.17	64 PPI その他工業製品	1.14	2.74	57 PPI はん用機器
0.83	2.17	21 CPI 家事雑貨	1.05	2.74	9 CPI 調理食品
0.62	2.18	8 CPI 菓子類	0.75	2.75	15 CPI 電気代
0.58	2.19	57 PPI はん用機器	0.99	2.97	61 PPI 電気機器
0.58	2.26	53 PPI 窯業・土石製品	1.26	2.98	28 CPI 被服関連サービス
0.53	2.26	12 CPI 外食	1.16	3.03	64 PPI その他工業製品
0.78	2.28	49 PPI パルプ・紙・同製品	1.45	3.05	21 CPI 家事雑貨
0.53	2.38	20 CPI 寝具類	1.11	3.14	63 PPI 輸送用機器
0.44	2.39	25 CPI シャツ・セーター・下着類	1.21	3.4	14 CPI 設備修繕・維持
0.65	2.42	26 CPI 履物類	0.68	3.45	62 PPI 情報通信機器
0.79	2.42	9 CPI 調理食品	0.98	3.7	41 CPI 理美容サービス
0.83	2.43	10 CPI 飲料			
0.81	2.56	28 CPI 被服関連サービス			
0.78	2.64	19 CPI 室内装備品			
0.89	2.69	63 PPI 輸送用機器			
0.93	2.74	14 CPI 設備修繕・維持			
0.51	3.19	35 CPI 授業料等			
0.56	3.31	41 CPI 理美容サービス			
0.43	3.45	13 CPI 家賃			

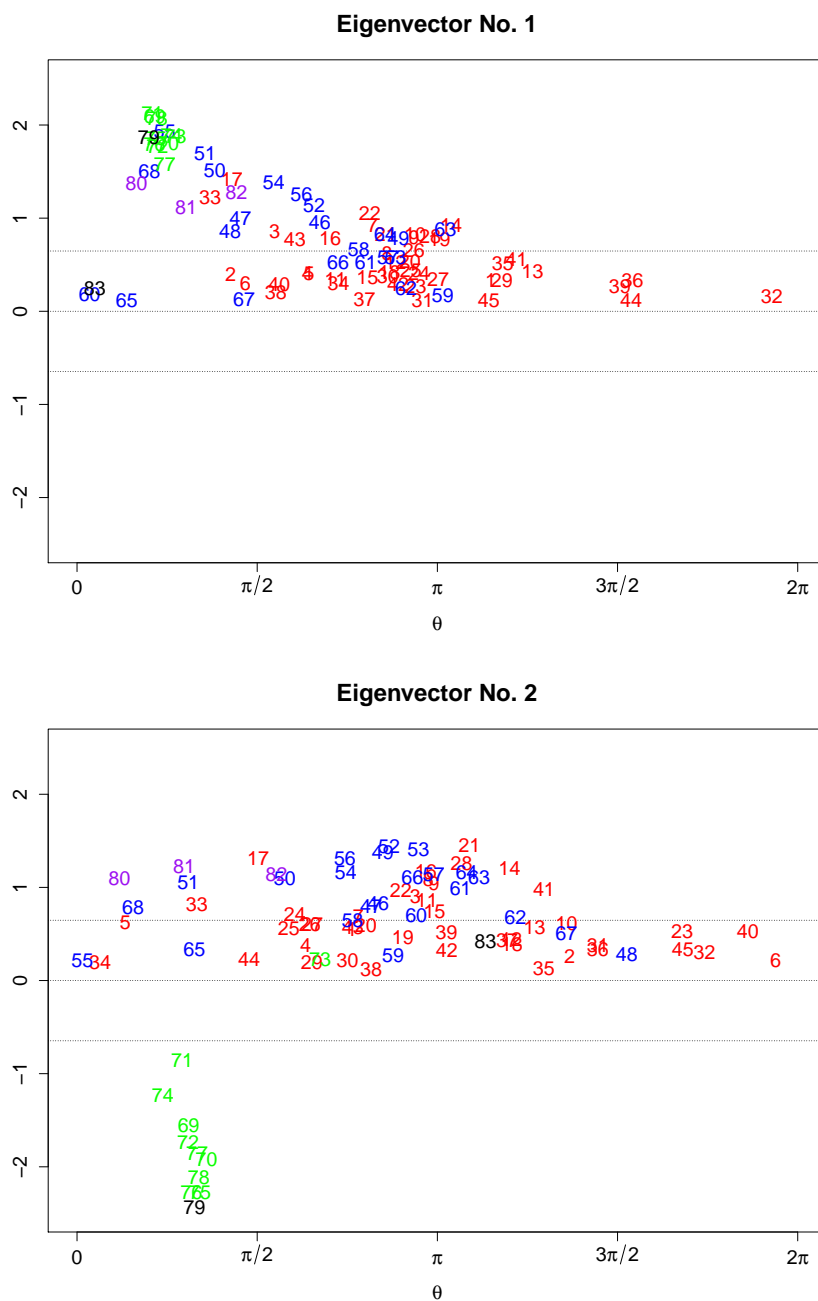


図 4.8: 上段：第1固有ベクトル成分，下段：第2固有ベクトル成分。 x 軸：位相， y 軸：絶対値。点線は有意な成分の判定基準，反相関を表す位相差 π は位相を反転させた上で絶対値を負としてプロットした

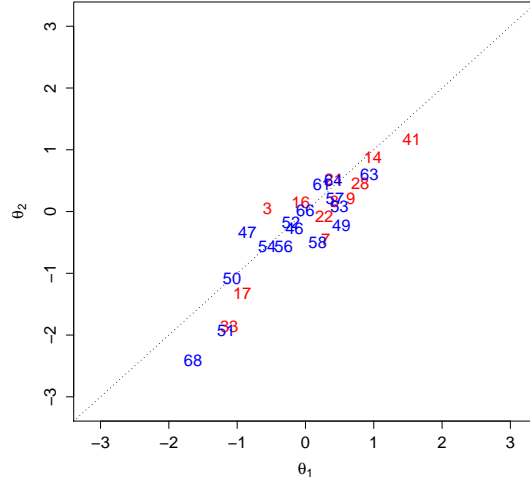


図 4.9: x 軸に第 1 主成分, y 軸に第 2 主成分の国内物価の位相をプロット

表 4: オリジナルデータの固有ベクトル α_ℓ と国内物価のみのデータの固有ベクトル α_m の cosine similarity。

$\ell \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	0.959	0.105	0.092	0.063	0.118	0.052
2	0.830	0.354	0.131	0.112	0.221	0.058
3	0.278	0.955	0.005	0.020	0.061	0.024
4	0.121	0.038	0.979	0.094	0.043	0.024
5	0.032	0.074	0.165	0.900	0.366	0.058
6	0.079	0.058	0.057	0.391	0.863	0.224

4.7 主成分の経済ショックに対する応答特性

主成分の時間的なふるまいについて詳しく見るために、モードシグナルからモード相対強度 $I_\ell(t)$ と累積相対強度 $S_\ell(t)$ を定義する：

$$I_\ell(t) = \frac{|a_\ell(t)|^2}{\sum_{\ell=1}^N |a_\ell(t)|^2}. \quad (4.7.1)$$

$$S_\ell(t) = \frac{\sum_{t'=1}^t I_\ell(t')}{\sum_{t'=1}^T I_\ell(t')}. \quad (4.7.2)$$

モード相対強度はその時刻において主成分全体の中での強度の割合を示している。図 4.11 はモード相対強度 $I_\ell(t)$ ，図 4.11 は第 1，2 モードシグナルの累積相対強度 $S_\ell(t)$ である。傾きが大きい時刻においてその主成分の影響が強く現れていることを示している。第 1 主成分はプラザ合意，記録的円高，アジア通貨危機に端を発する円急騰，リーマン・ショックの時期に，第 2 主成分はバブル崩壊，アジア通貨危機に端を発する円急騰の時期のそれぞれ異なる経済イベントのショックに対して強く反応している様子がみてとれる。ただし，ショック時以外でも一定の傾きをもっていることから特定の経済イベントに特徴的な構造ではなく，平時から存在している構造が経済イベントの要因によってその構造をそのままに駆動されていると考えられる。

第 1 主成分では景気と為替レートが正の相関，第 2 主成分では景気と為替レートは負の相関であり，これらの違いにより特徴づけられた。これらは同じ時期に現れるとすると矛盾していることになるため，経済イベント時にはどちらかが優勢だと思われる。もし，為替レートの影響が支配的な経済イベントであれば，第 1，2 モードシグナルの為替レートへの寄与の向きは揃うが，景気動向への寄与は同時には揃わない。景気動向が支配的な経済イベントならばその逆である。図 4.12 は第 1，2 モードシグナルの経済イベントと前後の期間における為替レートへの寄与と円ドル為替レートの元時系列，図 4.15 は景気動向一致指数への寄与と元時系列である。 ℓ 番目の主成分による各項目への寄与は，

$$\xi_{\ell\mu}(t) = a_\ell(t)\alpha_{\ell\mu}. \quad (4.7.3)$$

となる。また，式 4.4.1 から，全ての主成分に対して足し合わせれば複素時系列 $\xi_\mu(t)$ を再現する。複素時系列の実部が各項目への寄与にあたる。(a) のプラザ合意 (1985.3) の時期では第 1，2 モードシグナルの為替レートの寄与の向きが揃っているが，景気動向指数では揃っていないため，ここでは為替レートが支配的なイベントだと言える。同様に見ていくと，(b) のバブル崩壊 (1991.3) の時期では景気動向が，(c) の記録的な円高 (1995.9) の時期では為替レートが，(d) のアジア通貨危機に端を発する円急騰 (1998.10) の時期では為替レートが，(e) のリーマン・ショックの時期では景気動向がそれぞれ支配的なイベントだと言える。第 1，2 主成分の反応によって経済イベントを特徴づけた事になる。

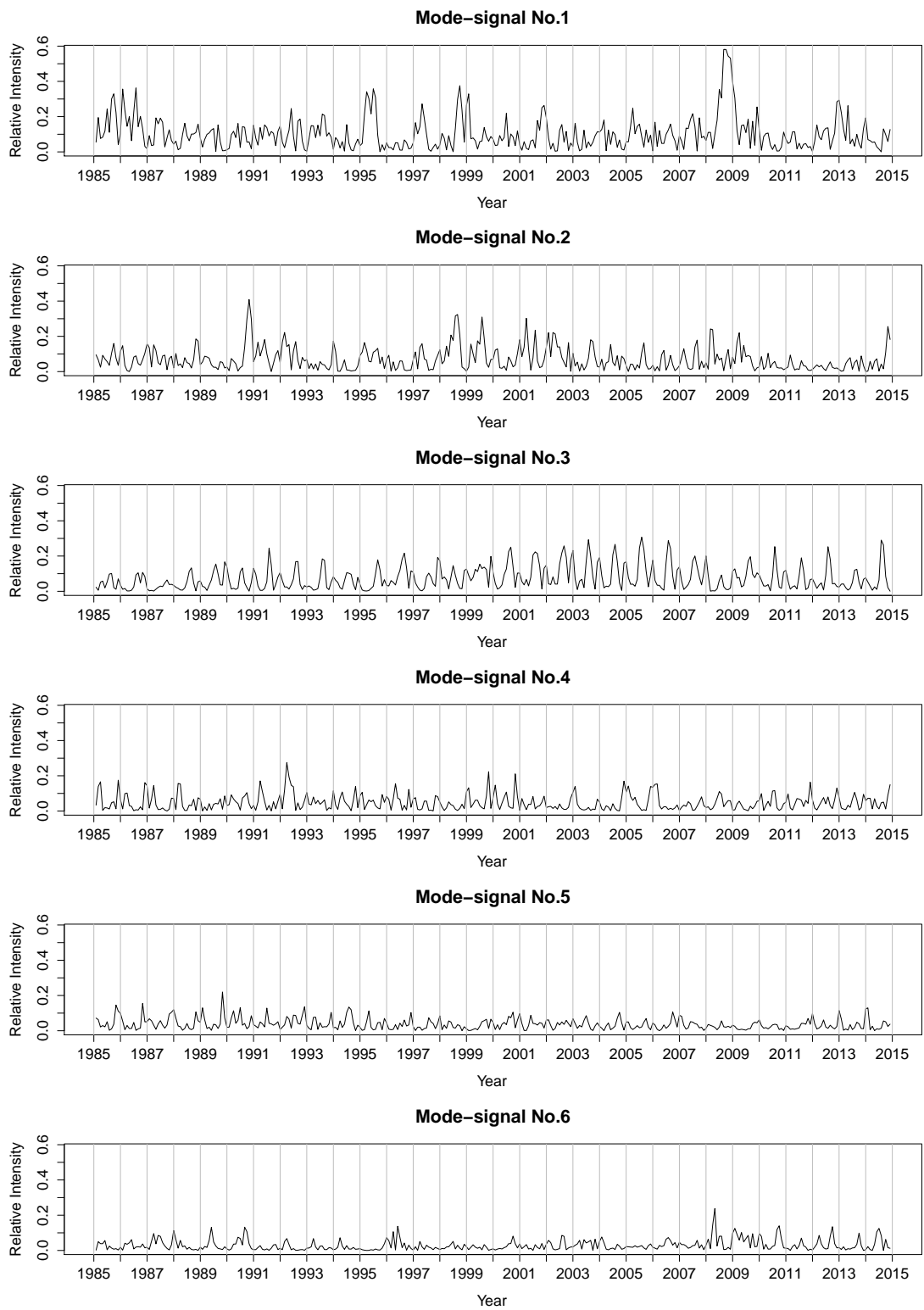


図 4.10: モード相対強度

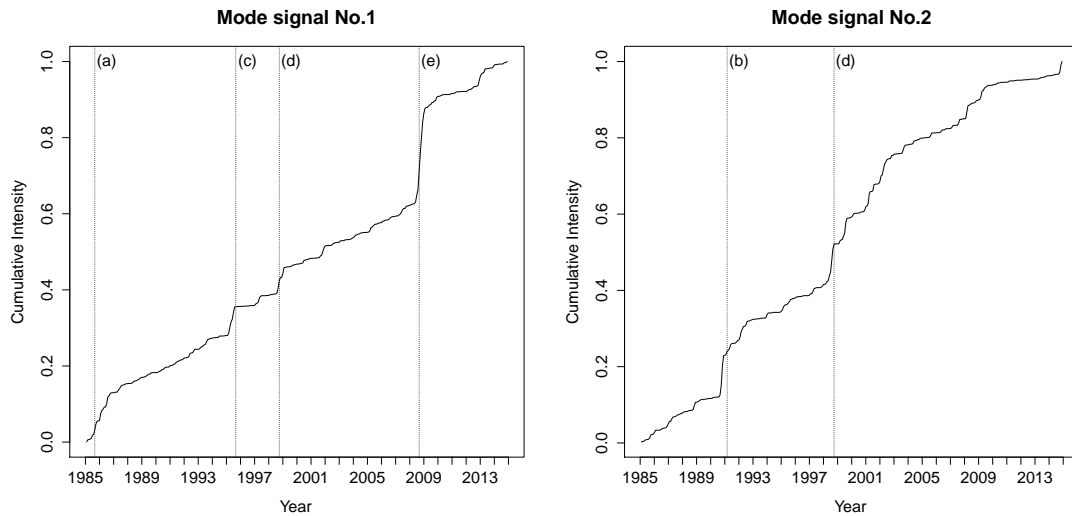


図 4.11: モードシグナルの累積相対強度，累積値を1と規格化している。(a) プラザ合意，(b) バブル崩壊，(c) 記録的円高，(d) アジア通貨危機に端を発する円高，(e) リーマン・ショック。

図 4.11 を見ると，ここで為替レートが支配的なイベントとした時期では第1主成分が反応しており，リーマン・ショックを除く景気動向が支配的な時期では第2主成分が反応している。リーマン・ショック以外では，経済イベントの特徴と，反応している主成分を駆動する要因が一致しており自然である。リーマン・ショックでは例外的な反応が見られたが，その原因を探るためにリーマン・ショックについてもう少し詳しく見ていくことにする。

図 4.14 は第1，2主成分の為替レートへの寄与の累積と為替レートの元時系列をプロットしたものである。リーマン・ショック前後の時期では，第1,2主成分のどちらも激しい変動をしているが，第2主成分の方が早い時期から激しい変動をしており期間も長い。その期間に含まれる形で第1主成分も大きな変動をしており，ショック時では第1主成分の方が第2主成分と比べて大きく変動している。リーマン・ショックそのものには第1主成分が大きく反応したが，第2主成分はその背後にあり，発端ともなったサブプライム住宅ローン危機に反応していると考えられる。第2主成分ではこの期間，一貫して円安に寄与しているが，第1主成分ではリーマン・ショック時に円高に寄与しており，実際の為替レートでは円高になっている(第1，2主成分どちらにおいても景気への寄与は不況に作用している)。第2主成分の影響を第1主成分が覆い隠した形になっている。これらの事から，この期間ではリーマン・ショックと，サブプライム住宅ローン危機という特徴の異なる2つの経済イベントが合わさった，ハイブリッドなショックであったと考えられる。

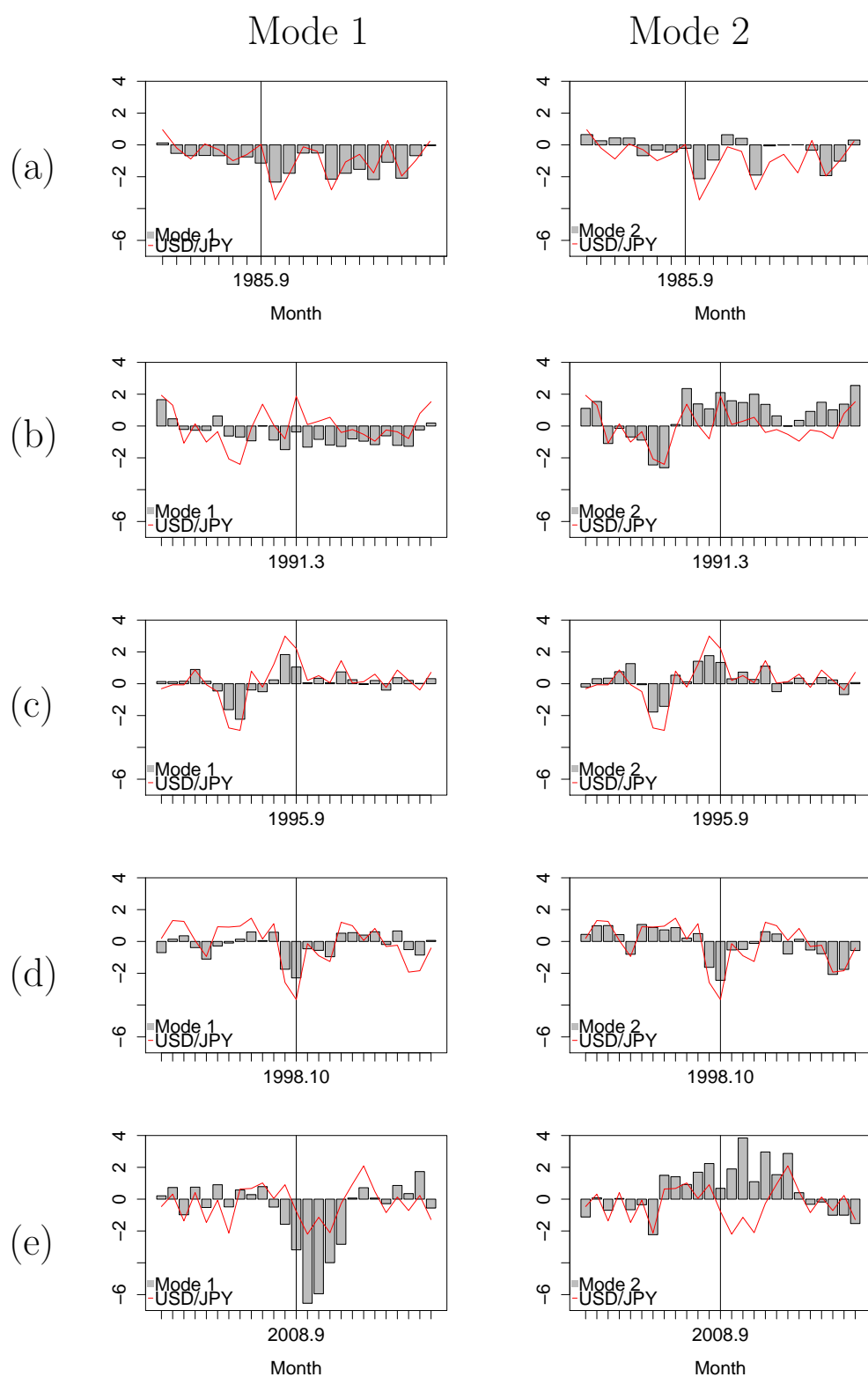


図 4.12: 主成分の為替レートへの寄与と為替レート時系列 (事前調整後), 左列: 第 1 主成分, 右列: 第 2 主成分。(a): プラザ合意 (1985.9), (b): バブル崩壊 (1991.3), (c): 記録的円高, (d): アジア通貨危機に端を発する円急騰 (1998.10), (e): リーマン・ショック。

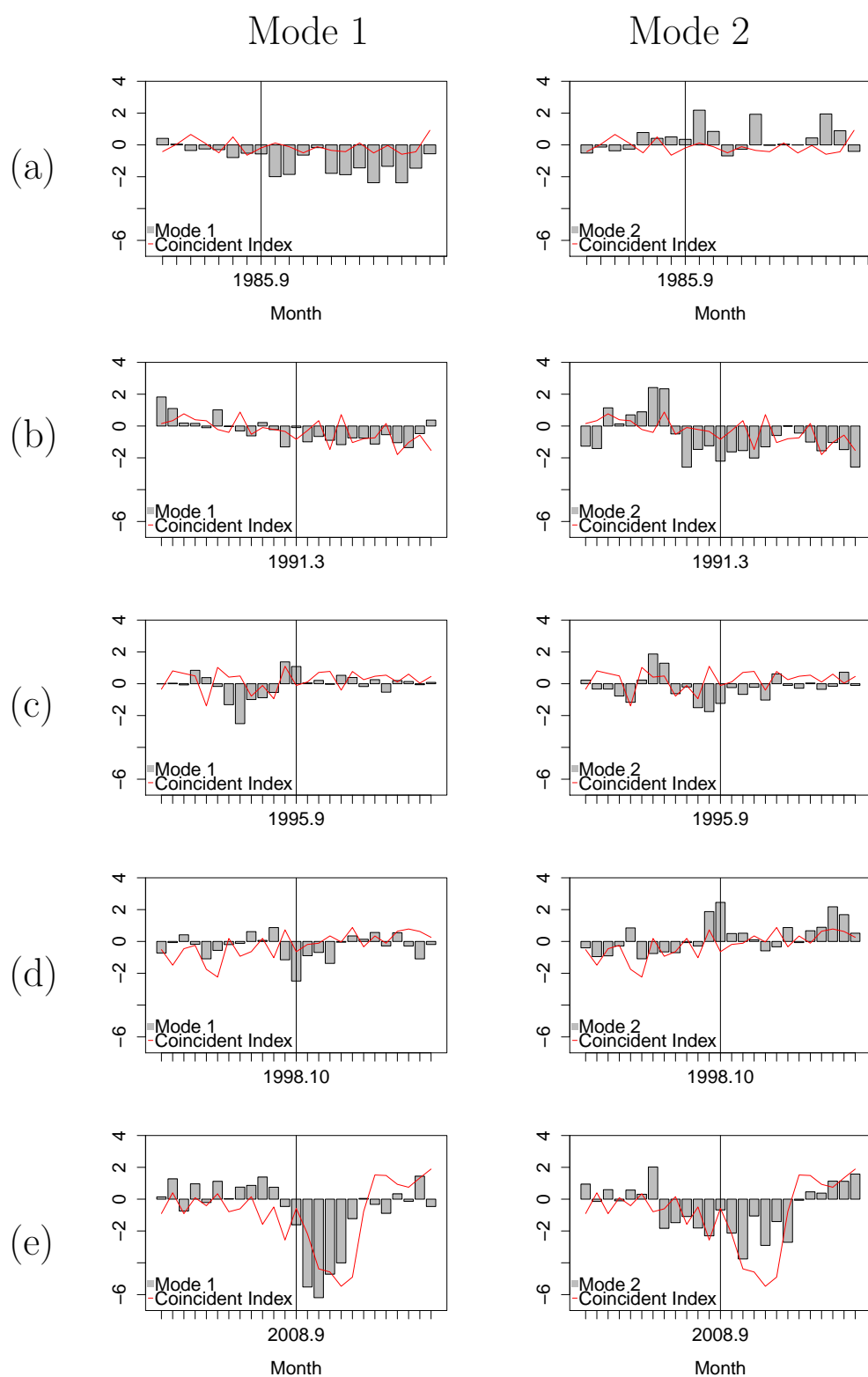


図 4.13: 主成分の景気動向一致指数への寄与と景気動向一致指数時系列 (事前調整後), 左列: 第 1 主成分, 右列: 第 2 主成分。(a): プラザ合意 (1985.9), (b): バブル崩壊 (1991.3), (c): 記録的円高, (d): アジア通貨危機に端を発する円急騰 (1998.10), (e): リーマン・ショック。

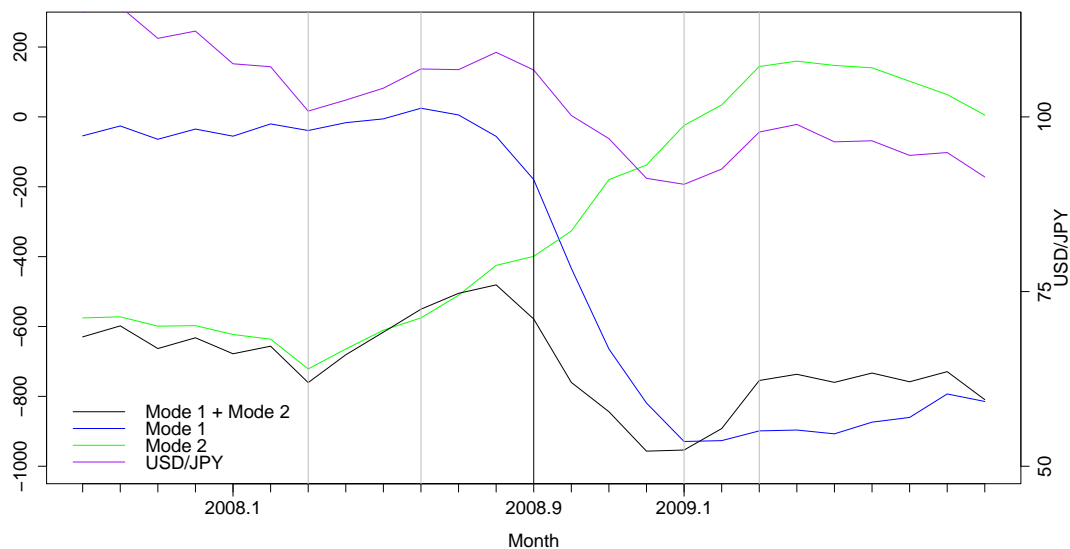


図 4.14: 主成分の為替レートへの寄与の累積値と為替レートの元時系列。2008 年 9 月リーマン・ショック

4.8 景気循環との関係

一般に物価変動と景気とは深い結び付きがあることが知られているが、第 1, 2 主成分とも景気動向指数が高い相関を示していた事からもこの事が言える。図 4.15 は第 1, 2 主成分の景気動向一致指数への寄与である。正であれば景気に上向きに寄与し、負ではその逆である。時期によって正負の方向が揃っている傾向が見て取れる。第 1, 2 主成分のどちらにおいても景気動向と物価指数とは正の相関であるので、継続的な正方向への寄与はインフレを伴った好況期を、負方向ではデフレを伴った不況期を表していると考えられる。好況期と不況期が循環的に見られる景気循環の考えとも一致する。

では、第 1, 2 主成分で景気循環のどの程度まで説明できるだろうか。図 4.16 は、第 1, 2 主成分の景気動向一致指数への寄与の累積と、景気動向一致指数時系列に、表 5 にまとめた景気の山・谷の時期をプロットしたものである⁷。第 1, 2 主成分を合わせた累積寄与率は 19.8%であるので、全体の変動のおよそ 2 割の変動を表したものにすぎないが、概ね景気の山と谷とを再現できている。しかし、2000 年 11 月をピークとする IT 景気や、2011 年 3 月に起きた東日本大震災による景気の落ち込みには反応していない。その理由としては、それらの要因による景気の変動には第 1, 2 主成分で表されるような物価変動を伴っていなかったからだと考えられる。

⁷参考 内閣府公表 景気基準日付

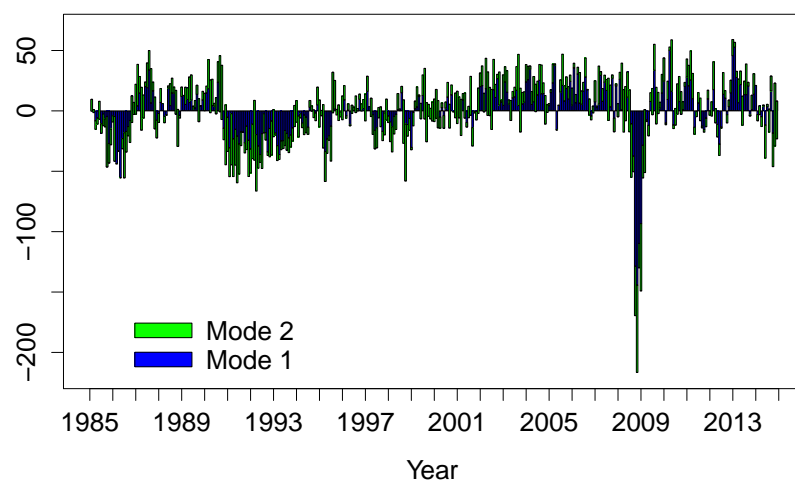
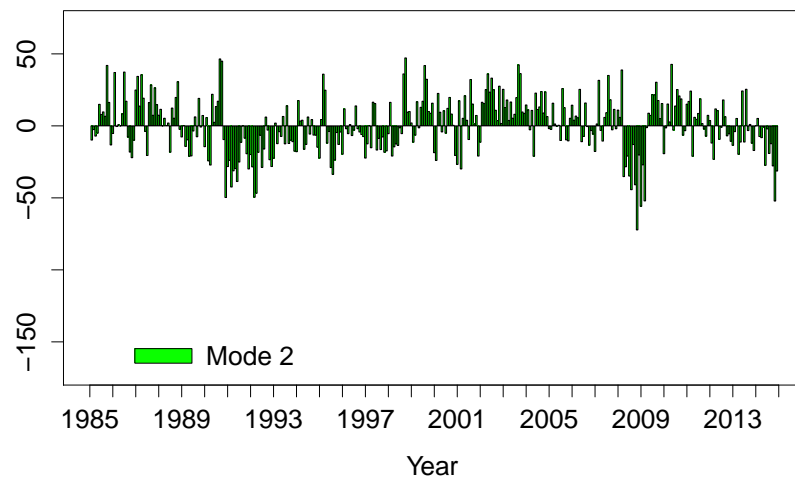
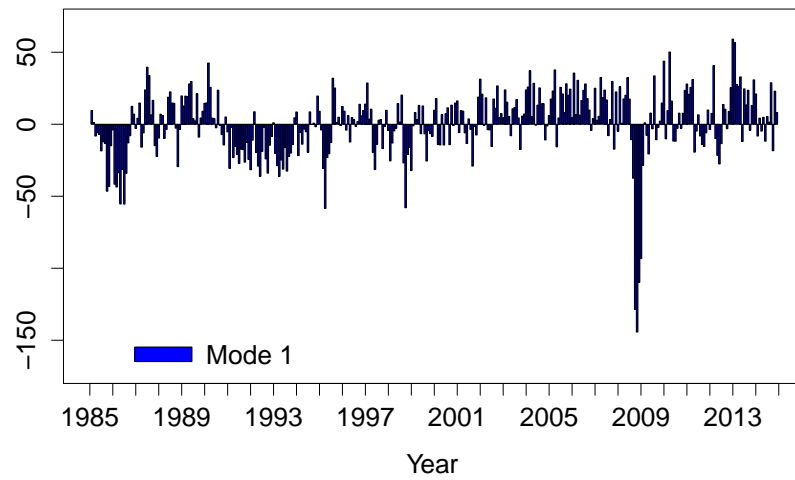


図 4.15: 主成分の景気動向一致指数への寄与, 下段は第 1, 2 主成分からの寄与の和。

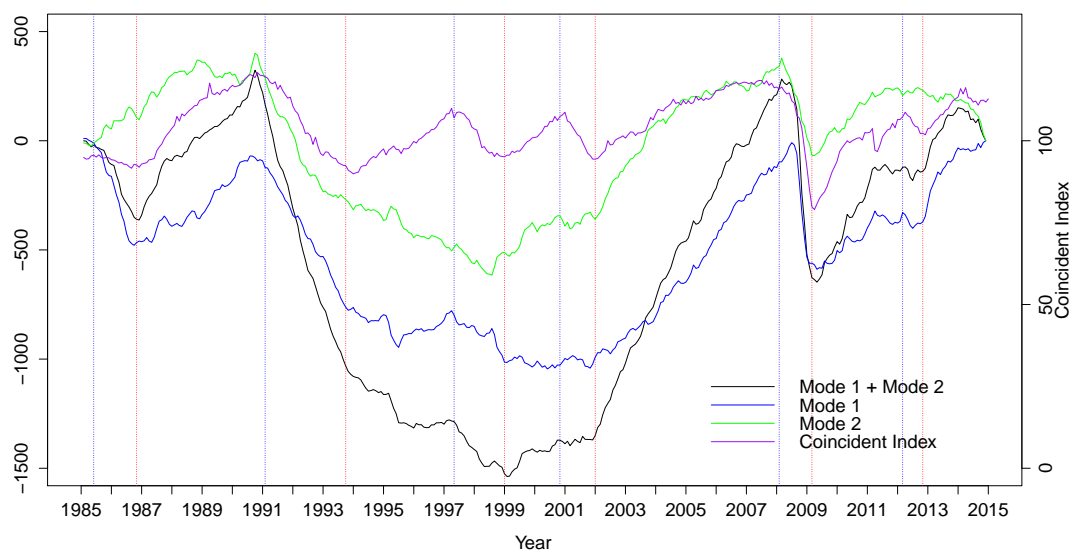


図 4.16: 主成分の景気動向一致指数への寄与の累積値と景気動向一致指数の元時系列。青縦線：景気の山，赤縦線：景気の谷。

表 5: 景気基準日付

谷	1983.2
	ハイテク景気
山	1985.6
	円高不況
谷	1986.11
	バブル景気
山	1991.2
	第1次平成不況
谷	1993.10
	カンフル景気
山	1997.5
	第2次平成不況
谷	1999.1
	IT 景気
山	2000.11
	第3次平成不況
谷	2002.1
	いざなぎ景気
山	2008.2
	世界金融不況
谷	2009.3
	デジャブ景気
山	2012.3
	欧州経済危機
谷	2012.11

5 おわりに

5.1 まとめ

本研究では、景気・為替・個別物価間に潜む相互関連構造のダイナミクスの実証的な解明という観点から、1985年1月から2014年12月の期間の景気・為替・物価指数・マネーストックを組み合わせたデータに対して複素ヒルベルト主成分分析とRMT、RRSを組み合わせた解析を行った。結果、統計的に有意な主成分は6個得られた。さらに、季節調整済みデータに対する同様の解析結果と比較を行い、季節変動による擬似相関の分離を行い、季節性でも統計ノイズによるものでもない有意な主成分として、第1主成分と第2主成分の2個を得ることができた。

得られた2個の主成分はそれぞれ異なる要因が物価に与える影響を表している主成分だと考えられる。第1主成分では景気動向先行指数・為替レート・輸入物価指数が先行し国内の景気や企業・消費者物価指数へと影響が伝播していく動的な構造を表しているもので、原材料にあたる輸入物価が先行して国内物価と正の相関をもっていることから、為替レートの変動やそれに伴う輸入物価の変動が国内の景気・物価に対する影響を抽出した主成分だと考えられる。

第2主成分は景気動向一致指数と為替レート・輸入物価指数が同時刻の反相関を示しているもので、景気が良くなるとその国の通貨は強くなるという通常の経済状態を表している。そのため、国内の景気そのものが物価に与える影響を表している主成分だと考えられる。このように異なる要因が物価に与える影響を抽出した主成分が得られたが、第1,2主成分のどちらにおいても下流にあたる国内物価へと影響が波及していく際のリード・ラグ関係はよく似ており、国内物価間には要因の違いに大きく依存しない普遍的な動的相関構造が存在している事を示唆している。国内物価のみのデータに対してCHPCAによる解析を行うと、この2個の主成分は分離せず、一つの主成分として抽出される。国内物価のみに注目しては得られない相関構造を抽出できたと言える。経済学において、貨幣数量説に代表されるようにマネーストックと一般物価との関係はよく論じられているが、第1,2主成分のどちらにおいてもマネーストックとの有意な相関は検出されなかった。

さらに、主成分の時間的なふるまいを調べたところ、第1,第2主成分ともにそれぞれ異なった経済イベントのショックに対して強く反応していることがわかった。ただしショック時以外でも一定の強度を持っていた事から、特定の経済イベントに特徴的な変動構造ではなく、平時から存在しているゆらぎが経済イベントの要因によってその特徴をそのままに駆動されていると考えられる。

ケーススタディとして、経済イベントに対する第1,2主成分の応答を見ることで、経済イベントを特徴づける事を試みた。結果、為替レートが支配的な経済イベントと景気動向が支配的なものとに分類できた。しかし、リーマン・ショックについては、景気動向が支配的な、サブプライム住宅ローン危機によるものと、為替レートが支配的な、リーマンブラザーズ倒産のショックが合わさったハイブリッ

ドな経済イベントであることがわかった。

次に、景気循環との関係を調べたところ、全体のおよそ2割の変動を表したものにすぎない第1, 2主成分のみでも、概ねよく景気の山と谷とを表せていた。しかし、IT 景気や東日本大震災における景気の変動については第1, 2主成分は反応していない結果が得られた。これらによる景気の変動は、第1, 2主成分で表されるような物価変動を伴っていなかったからだと考えられる。景気変動にも物価変動を伴うものとそうでないものとに分類できることがわかった。

このように異なる要因が組み合わさったイベントに対しても、今回用いた複素ヒルベルト主成分分析の手法は有効であると言える。また、得られた主成分から、経済イベントにおいて支配的な要因の分類や景気変動の種類の分類が可能であることも示せた。

今後は、得られた主成分の構造と実際の経済との対応について、より詳細な解釈を行っていきたい。

謝辞

本博士論文は、筆者が新潟大学大学院自然科学研究科数理物質科学専攻博士後期課程在学中において行った研究をまとめたものです。本研究に関して終始ご指導を頂きました家富洋教授に心より感謝致します。また、新潟大学理学部の田中環教授，山田修司教授，渡邊恵一教授，蛭川潤一准教授，奥西巧一准教授は，博士論文の審査委員を快く引き受けてくださいました。深く感謝申し上げます。

新潟大学理学部の大野義章教授，物性理論研究室の皆様には学部4年次から長いこと学生生活全般にわたり親身に指導していただきました事感謝致します。

新潟大学理学部OBの新井優太博士，新潟大学理学部の飯野隆史博士には詳細な研究の方針やコンピュータについてから発表の練習まで多岐にわたり指導していただき感謝致します。最後に，これまでの大学生活でお世話になった皆様に再度お礼申し上げます。

A 主成分分析 (PCA)

主成分分析とは、多くの量的変数をより低い次元の合成変数 (主成分) に変換し、データが有している情報を縮約しより解釈しやすくするための分析方法である。すなわち、主成分分析とは、 P 個の変数 $\{x_p\} (p = 1, 2, \dots, P)$ の持つ情報を、情報の損失を最小限に抑えながら、 $\{x_p\}$ の一次結合として与えられる互いに独立な $M (M \leq P)$ 個の主成分 $\{z_m\}$

$$z_m = \sum_{p=1}^P w_{pm} x_p \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (\text{A.0.1})$$

を用いて表現する手法である。なお、 z_m は第 m 主成分と呼ばれ、その結合係数 $\{w_{pm}\}$ は以下の条件を満足するように決定される。

第 1 主成分 z_1 の分散は $\{x_p\}$ のあらゆる 1 次式の持つ分散の中で最大であり、第 m 主成分 $\{z_m\}$ の分散は $\{z_{m'}\} (m' = 1, 2, \dots, m-1)$ の全てと無相関な 1 次式の持つ分散の中で最大である。ただし、

$$\sum_{p=1}^P w_{pm}^2 = 1 \quad (\text{A.0.2})$$

とする。

A.1 主成分の導出

主成分の分散が最大となるように主成分を決定する方法について述べる。いま、 P 個の変数について N 個のサンプルがある場合を考え、測定値を $\{x_{np}^*\} (n = 1, 2, \dots, N; p = 1, 2, \dots, P)$ とする。また各変数についてその平均値 $\{\bar{x}_p\}$ からの偏差 $\{x_{np}\}$ を導入する。すなわち、

$$x_{np} = x_{np}^* - \bar{x}_p \quad (\text{A.1.1})$$

とする。このとき、測定データ全体は次の行列 \mathbf{X} で与えられる。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1P} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NP} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

第 1 主成分 z_1 は式 (A.0.1) で与えられるので、その結合係数を

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{P1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

とすると n 番目のサンプル

$$\mathbf{x}_n = (x_{n1} \ x_{n2} \ \cdots \ x_{nP}) \quad (\text{A.1.4})$$

に対応する第 1 主成分 z_1 の値 t_{n1} は

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sum_{p=1}^P w_{p1} x_{np} \\ &= \mathbf{x}_n \mathbf{w}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

となる。この第 1 主成分 z_1 の値 t_{n1} を第 1 主成分得点と呼ぶ。 N 個のサンプルに対応する第 1 主成分得点を 1 つのベクトルにまとめ、

$$\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{N1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.6})$$

とおくと、

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{X} \mathbf{w}_1 \quad (\text{A.1.7})$$

が成り立つ。第 1 主成分得点の平均値 \bar{t}_1 は

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_{n1} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{w}_1 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{p=1}^P w_{p1} x_{np} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=1}^P w_{p1} \left(\sum_{n=1}^N x_{np} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

であるから、第 1 主成分 z_1 の分散 $\sigma_{z_1}^2$ は

$$\begin{aligned} \sigma_{z_1}^2 &= \frac{1}{N-1} \mathbf{t}_1^\top \mathbf{t}_1 \\ &= \frac{1}{N-1} (\mathbf{X} \mathbf{w}_1)^\top (\mathbf{X} \mathbf{w}_1) \\ &= \mathbf{w}_1^\top \mathbf{V} \mathbf{w}_1 \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1.9})$$

となる。なお、行列 \mathbf{V} は共分散行列と呼ばれる非負定値行列であり、

$$\mathbf{V} = \frac{1}{N-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \quad (\text{A.1.10})$$

で与えられ、その (i, j) 要素 v_{ij} は

$$\begin{aligned} v_{ij} &= \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N x_{ni} x_{nj} \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_{ni}^* - \bar{x}_i)(x_{nj}^* - \bar{x}_j) \end{aligned} \quad (\text{A.1.11})$$

である。また、明らかに $v_{ij} = v_{ji}$ すなわち $\mathbf{V} = \mathbf{V}^\top$ が成り立つ。

前節の条件より、第1主成分 z_1 は式 (A.0.2) の下でその分散 $\sigma_{z_1}^2$ が最大となるように決定されなければならない。この最適化問題は Lagrange 乗数法を用いて解くことができる。すなわち、Lagrange 乗数 λ を導入して

$$J_1 = \mathbf{w}_1^\top \mathbf{V} \mathbf{w}_1 - \lambda(\mathbf{w}_1^\top \mathbf{w}_1 - 1) \quad (\text{A.1.12})$$

と置き、 J_1 を最大にするような結合係数 \mathbf{w}_1 を求めれば良い。そこで、 J_1 を \mathbf{w}_1 で偏微分して0とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{w}_1} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial J_1}{\partial w_{11}} \\ \frac{\partial J_1}{\partial w_{21}} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_1}{\partial w_{P1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \sum_{p=1}^P v_{1p} w_{p1} \\ 2 \sum_{p=1}^P v_{2p} w_{p1} \\ \vdots \\ 2 \sum_{p=1}^P v_{Pp} w_{p1} \end{pmatrix} - 2\lambda \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{P1} \end{pmatrix} \\ &= 2\mathbf{V} \mathbf{w}_1 - 2\lambda \mathbf{w}_1 \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.1.13})$$

となることから

$$(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{w}_1 = \mathbf{0} \quad (\text{A.1.14})$$

という条件式が得られる。これは固有値問題に他ならず、Lagrange 乗数 λ が満たすべき条件は固有方程式

$$\det |\mathbf{V} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (\text{A.1.15})$$

を用いて表すことも出来る。以上より、Lagrange 乗数 λ 及び第 1 主成分 z_1 の結合係数 \mathbf{w}_1 はそれぞれ共分散行列 \mathbf{V} の固有値および固有ベクトルとして与えられることがわかる。

さて、共分散行列 \mathbf{V} は P 次元正方行列であるため、その固有値 λ は P 個存在するが、その中のいずれの固有値が第 1 主成分 z_1 の分散 $\sigma_{z_1}^2$ を最大にする結合係数 (固有ベクトル) \mathbf{w}_1 に対応しているのであろうか。この問題について考えてみよう。第 1 主成分 z_1 の分散 $\sigma_{z_1}^2$ は式 (A.1.9) で与えられ、その結合係数 \mathbf{w}_1 は条件: 式 (A.1.15) を満足しなければならない。そこで、式 (A.1.9) に式 (A.1.15) を代入し、 $\mathbf{w}_1^\top \mathbf{w}_1 = 1$ に注意すると

$$\begin{aligned}\sigma_{z_1}^2 &= \mathbf{w}_1^\top \mathbf{V} \mathbf{w}_1 \\ &= \mathbf{w}_1^\top \lambda \mathbf{w}_1 \\ &= \lambda\end{aligned}\tag{A.1.16}$$

を得る。これより、第 1 主成分 z_1 の分散 $\sigma_{z_1}^2$ は共分散行列 \mathbf{V} の固有値 λ に等しいことがわかる。従って、最大にすべき第 1 主成分 z_1 の分散 $\sigma_{z_1}^2$ は共分散行列 \mathbf{V} の最大固有値に等しくなり、その結合係数 \mathbf{w}_1 は最大固有値に対応する固有ベクトルとして求めることができる。

第 2 主成分以下の結合係数 $\{\mathbf{w}_m\} (m = 2, 3, \dots, M)$ も第 1 主成分と同様な手順で求めることができる。ただし、第 m 主成分 $z_m (m = 2, 3, \dots, M)$ の分散 $\sigma_{z_m}^2$ が主成分 $\{z_{m'}\} (m' = 1, 2, \dots, m-1)$ の全てと無相関な 1 次式を持つ分散の中で最大となるように、結合係数 \mathbf{w}_m を決定しなければならない。当然ながら式 (A.0.2) も満たさなければならない。

ここでは、数学的帰納法を用いて、第 m 主成分の結合係数 \mathbf{w}_m を導出する方法を示す。いま、第 $m-1$ 主成分まで求められており、それらの結合係数 $\{\mathbf{w}_i\} (i = 1, 2, \dots, m-1)$ は条件

$$(\mathbf{V} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{w}_i = \mathbf{0}\tag{A.1.17}$$

$$\mathbf{w}_i^\top \mathbf{w}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}\tag{A.1.18}$$

を満たしているとして、第 m 主成分の結合係数 \mathbf{w}_m を Lagrange 乗数法を用いて求める。すなわち、

$$J_m = \mathbf{w}_m^\top \mathbf{V} \mathbf{w}_m - \lambda_m (\mathbf{w}_m^\top \mathbf{w}_m - 1) - \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i \mathbf{w}_m^\top \mathbf{w}_i\tag{A.1.19}$$

とにおいて、 J_m を最大にするような \mathbf{w}_m を求めることにする。ここで、右辺最終項が第 m 主成分 $z_m (m = 2, \dots, M)$ と主成分 $z_{m'} (m' = 1, 2, \dots, m-1)$ の全てが無

相関となる条件を表している。 J_m を \mathbf{w}_m で偏微分して $\mathbf{0}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_m}{\partial \mathbf{w}_m} &= 2\mathbf{V}\mathbf{w}_m - 2\lambda_m\mathbf{w}_m - \sum_{i=1}^{m-1} \mu\mathbf{w}_i \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{A.1.20}$$

となる。 $\mathbf{w}_j^\top (j = 1, 2, \dots, m-1)$ を左から掛けて、式 (A.1.18) を用いると,

$$\mathbf{w}_j^\top \mathbf{V}\mathbf{w}_m - \mu_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m-1)\tag{A.1.21}$$

を得る。ここで、左辺第1項は、 $\mathbf{V} = \mathbf{V}^\top$ および式 (A.1.17) より

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_j^\top \mathbf{V}\mathbf{w}_m &= \mathbf{w}_m^\top \mathbf{V}\mathbf{w}_j \\ &= \mathbf{w}_m^\top \lambda_j \mathbf{w}_j \\ &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m-1)\end{aligned}\tag{A.1.22}$$

となることから、式 (A.1.21) は

$$\mu_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m-1)\tag{A.1.23}$$

となる。この結果を式 (A.1.20) に代入すると、最終的に

$$(\mathbf{V} - \lambda_m \mathbf{I})\mathbf{w}_m = \mathbf{0}\tag{A.1.24}$$

を得る。これは (A.1.17) 式と同一の式であり、第 m 主成分 z_m の分散 $\sigma_{z_m}^2$ もまた共分散行列 \mathbf{V} の固有値に等しいことが分かる。ただし、大きい方から $m-1$ 個の固有値とそれに対応する固有ベクトルはすでに第 $m-1$ 番目までの主成分を表すのに使われているため、第 m 主成分 z_m の分散 $\sigma_{z_m}^2$ は共分散行列 \mathbf{V} の m 番目に大きい固有値に等しくなり。結合係数 \mathbf{w}_m はその固有値に対応する固有ベクトルして求めることができる。

B ランダム行列理論

B.1 カイラルランダム行列の固有値分布

経済では複数の時系列データを同時に扱う場合が多い。例えば、同じ時間間隔で測られた長さ T の時系列データが N 種類あるとき、そのようなデータをまとめて1つの行列で表すことがある。その場合、一般に行の大きさと列の大きさは等しくなく、大きさが $N \times T$ の矩形行列で表される。いま、そのような行列を \mathbf{H} と書くことにする。多くの場合、 \mathbf{H} そのものではなく、 $\mathbf{C} = \mathbf{H}\mathbf{H}^\top$ で表されるような行列を扱うことが多い。この場合、 \mathbf{C} は大きさが $N \times N$ の正方行列になる。

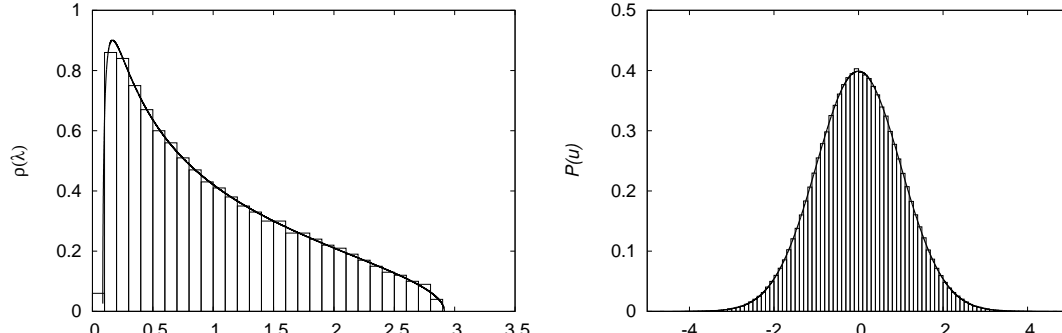


図 B.1: カイラル Gauss 型ランダム行列の固有値・固有ベクトル成分の分布, 左: 固有値の確率密度と理論曲線, 右: 固有ベクトル成分の確率密度と Porter-Thomas 分布。

いま, 標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数を成分とし, 大きさが 1000×2000 の行列

$$\mathbf{H} = [h_{ij}], \quad h_{ij} \in N(0, 1) \quad (\text{B.1.1})$$

を作り, $\mathbf{C} = \mathbf{H}\mathbf{H}^\top$ を計算する。ランダム行列理論では, このような行列をカイラル Gauss 型ランダム行列または Wishart 行列と呼ぶ。そして固有値 λ を求めると, 図 B.1(a) の確率密度が得られる。この図から, 行列要素がランダムであるにもかかわらず λ はなんらかの規則に従って分布していることが分かる。また, 図 B.1(b) は固有ベクトルの成分の確率密度である。ここでは $1000 \times 1000 = 10^6$ 個の成分の確率密度を表している。固有ベクトルの規格化は $\sum_{j=1}^N u_{ij}^2 = N, N = 1000$ である。図 B.1(b) に描かれた曲線は, 1956 年に C.E.Porter と R.G.Thomas によって提案されたものであり [14], Porter-Thomas 分布と呼ばれている。これは Gauss 型直交アンサンブルの場合

$$P(u_{i,j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_{i,j}^2}{2}\right) \quad (\text{B.1.2})$$

で与えられ Gauss 分布と同じである。

また, 一様分布 $U(-0.5, 0.5)$ に従う確率変数を成分とし, 大きさが $N = 1000 \times 2000$ の行列

$$\mathbf{H} = [h_{ij}], \quad h_{ij} \in U(-0.5, 0.5) \quad (\text{B.1.3})$$

を作り, $\mathbf{C} = \mathbf{H}\mathbf{H}^\top$ を計算する。このような行列を, カイラル一様ランダム行列と呼ぶことにする。そして固有値 λ を求めると, 図 B.2(a) の確率密度が得られる。これと図 B.1(a) を比較することによって, λ はカイラル Gauss 型ランダム行列の

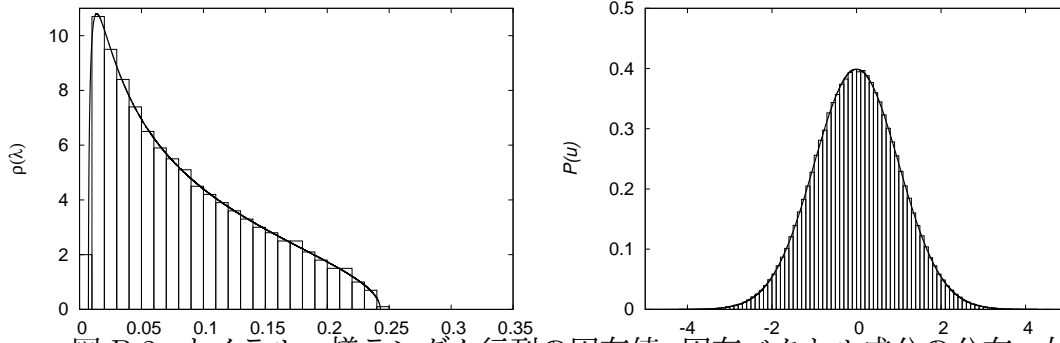


図 B.2: カイラル一様ランダム行列の固有値・固有ベクトル成分の分布, 左: 固有値の確率密度と理論曲線, 右: 固有ベクトル成分の確率密度と Porter-Thomas 分布。

場合と同様な分布に従っていることが分かる。ただし、分布範囲が異なっていることに注意する必要がある。図 B.2(b) は、固有ベクトルの成分の確率密度である。この場合も、 $1000 \times 1000 = 10^6$ 個の成分の確率密度を表している。これまでと同様に、 $\sum_{j=1}^N u_{ij}^2 = N, N = 1000$ と規格化している。この図と、図 B.1(b) を比較して分かるように、 u_{ij} は Porter-Thomas 分布に従っている。

図 B.1(a) や図 B.2(a) に描かれた曲線は、1988 年に A.Edelman によって導出され [15]、その後 A.M.Sengupta と P.P.Mitra によっても導出されたもので [16]、その確率密度 $\rho(\lambda)$ は、 $Q := T/N$ を固定したまま $N \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$ とした場合に

$$\rho(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda} \quad (\text{B.1.4})$$

で与えられる。ここで、 σ^2 は確率変数の分散で、 \mathbf{H} の各成分が $N(0, 1)$ に従う場合は $\sigma^2 = 1$ 、 $U(-0.5, 0.5)$ に従う場合は $\sigma^2 = 1/12$ である。また

$$\lambda_{\pm} = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{Q} \pm 2\sqrt{\frac{1}{Q}} \right) \quad (\text{B.1.5})$$

であり、固有値 λ は $[\lambda_-, \lambda_+]$ の範囲にのみ存在する。以下では、文献 [17] に従って式 (B.1.4) を導出する。

B.1.1 導出のための準備

以下では、(B.1.4) を導出するが、そのための準備として、Dirac のデルタ関数、レゾルベントについて説明する。

Dirac のデルタ関数

Dirac のデルタ関数は、いろいろな形で表現できる。例えば

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (\text{B.1.6})$$

と書ける。また、上の式は

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Im \frac{1}{\pi x - i\epsilon} \quad (\text{B.1.7})$$

とも書ける。ここで \Im は、複素数の虚部をとることを意味する。つまり、複素数 z を虚数単位 i を用いて $z = \Re z + i\Im z$ と書き、 $\Re z$ を z の実部と呼び、 \Im を z の虚部と呼ぶ。またデルタ関数は

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \quad (\text{B.1.8})$$

と表わされることもある。

行列式と逆行列

正則な N 次元正方行列を $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ で表し、その第 (i, j) 余因子を \tilde{a}_{ij} で表すと \mathbf{A} の行列式 $\det(\mathbf{A})$ は、例えば

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^N a_{ij} \tilde{a}_{ij} \quad (\text{B.1.9})$$

で与えられる。これは、第 j 列に関する行列の展開と呼ばれる。また、行列式は Gauss 積分を用いて表すこともできる。一般に Gauss 積分は a が正の実数の場合に

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{B.1.10})$$

と計算できる。これを行列 \mathbf{A} が対称行列の場合に N 個の実変数の積分へ一般化すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dx_i \exp \left(- \sum_{i,j=1}^N x_i a_{ij} x_j \right) = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det(\mathbf{A})}} = \sqrt{\pi^N \det(\mathbf{A}^{-1})} \quad (\text{B.1.11})$$

となる。ここで \mathbf{A}^{-1} は \mathbf{A} の逆行列である。

逆行列は

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\Delta}{\det(\mathbf{A})} \quad (\text{B.1.12})$$

で与えられる。ここで Δ は余因子行列と呼ばれ、その成分は

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \text{minor}(\mathbf{A})_{ij} \quad (\text{B.1.13})$$

で与えられる。ここで $\text{minor}(\mathbf{A})_{ij}$ は行列 \mathbf{A} の第 i 行と第 j 列を取り除いた小行列の行列式小行列式である。したがって、逆行列の成分は

$$A_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} \text{minor}(\mathbf{A})_{ij}}{\det(\mathbf{A})} \quad (\text{B.1.14})$$

と表現できる。

スペクトルとレゾルベント

線形代数で扱う空間は有限次元空間であり、線形変換、ノルム、2点間の距離が定義され、距離に関して完備であった。関数解析で扱う Banach 空間は、これらの特徴をもつ無限次元空間のことである。また、線形代数で扱う有限次元空間では内積も定義されたが、内積が定義される Banach 空間は Hilbert 空間と呼ばれる。線形代数では行列が定義され、例えば、大きさが $N \times T$ の行列によって、 T 次元空間は N 次元空間へと一次変換される。関数解析で扱う線型作用素とは、線形代数における行列を無限次元空間へと拡張したものである。

いま、大きさが $N \times N$ の行列 \mathbf{H} に対して

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (\text{B.1.15})$$

を満たす N 次元ベクトル $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ が存在するとき、スカラー λ を行列 \mathbf{H} の固有値と呼び、 \mathbf{u} を固有値 λ に対する固有ベクトルと呼ぶ。もしも λ が \mathbf{H} の固有値でない場合は、任意の N 次元ベクトル \mathbf{v} に対して

$$(\lambda\mathbf{1} - \mathbf{H})\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad (\text{B.1.16})$$

を満たす \mathbf{u} が存在する。ここで $\mathbf{1}$ は単位行列である。したがって

$$\mathbf{u} = (\lambda\mathbf{1} - \mathbf{H})^{-1}\mathbf{v} \quad (\text{B.1.17})$$

である。

いま、 \mathbf{H} を Banach 空間 \mathbf{X} の中で稠密に定義された閉作用素とし、その定義域を $D(\mathbf{H})$ とする。そして z を複素数とした場合に、 $\mathbf{H}\mathbf{u} = z\mathbf{u}$ を満たす $\mathbf{u} \in D(\mathbf{H})$ は $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ のみで、 $(z\mathbf{1} - \mathbf{H})^{-1}$ は \mathbf{X} 全体で定義されているとき、 z の全体をレゾルベント集合と呼ぶ、そして、この z に対して

$$R(z) := (z\mathbf{1} - \mathbf{H})^{-1} \quad (\text{B.1.18})$$

を \mathbf{H} のレゾルベントと呼ぶ。

また、 $\mathbf{H}\mathbf{u} = z\mathbf{u}$ となる $\mathbf{u} \in D(\mathbf{H})$ 、 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ が存在する場合や、 $\mathbf{H}\mathbf{u} = z\mathbf{u}$ となる $\mathbf{u} \in D(\mathbf{H})$ は $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ のみであるが、 $(z\mathbf{1} - \mathbf{H})^{-1}$ は \mathbf{X} 全体で定義されていない場合は、 z の全体をスペクトル (Spectrum) と呼ぶ。特に、前者の場合は z を \mathbf{H} の固有値と呼び、固有値全体を点スペクトルと呼ぶ。

B.1.2 固有値分布の導出

いま、行列 $\mathbf{H} = [h_{ij}]$ が大きさが $N \times N$ の対称行列で、各成分が独立同分布に従う確率変数だとする。そして、この行列の固有値を $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, N)$ とすると、固有値の確率密度 $\rho(\lambda)$ は

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \quad (\text{B.1.19})$$

で与えられる。また、行列 \mathbf{H} のレゾルベント $\mathbf{G}(\lambda)$ の成分は

$$G_{ij}(\lambda) = (\lambda \mathbf{1} - \mathbf{H})_{ij}^{-1} \quad (\text{B.1.20})$$

で与えられ、 $\mathbf{G}(\lambda)$ のトレース (Trace, 対角和) は

$$\text{Tr} \mathbf{G}(\lambda) = \sum_{i=1}^N G_{ii}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_i} \quad (\text{B.1.21})$$

で与えられる。

いま、式 (B.1.7) を用いると式 (B.1.19) は

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \Im \frac{1}{\lambda - \lambda_i - i\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N\pi} \Im \text{Tr} \mathbf{G}(\lambda - i\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{B.1.22})$$

となる。したがって、レゾルベント $\mathbf{G}(\lambda)$ が計算出来れば、式 (B.1.22) より固有値の確率密度 $\rho(\lambda)$ が得られる。

式 (B.1.21) はさらに

$$\begin{aligned} \text{Tr} \mathbf{G}(\lambda) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \prod_i (\lambda - \lambda_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \det(\lambda \mathbf{1} - \mathbf{C}) := \frac{\partial}{\partial \lambda} Z(\lambda) \end{aligned} \quad (\text{B.1.23})$$

と変形できる。そのため、 $Z(\lambda) := \log \det(\lambda \mathbf{1} - \mathbf{C})$ が計算できれば、式 (B.1.22) と式 (B.1.23) を用いて $\rho(\lambda)$ が計算できる。

いま、Gauss 積分を使って行列式を定義した式 (B.1.11) を用いると

$$Z(\lambda) = \log \det(\lambda \mathbf{1} - \mathbf{C}) = -2 \log I(\lambda), \quad (\text{B.1.24})$$

$$I(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{k=1}^T x_i x_j h_{ik} h_{jk} \right) \prod_{i=1}^N \left(\frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (\text{B.1.25})$$

となる。これを計算すれば、式 (B.1.23) より $\text{Tr} \mathbf{G}(\lambda)$ が計算できる。しかし、 $\text{Tr} \mathbf{G}(\lambda)$ は、 $N \rightarrow \infty$ の極限において自己平均性を示すと考えられるので、 \mathbf{H} のアンサンブルに対して平均すればよい。つまり、式 (B.1.24) を \mathbf{H} に対して平均したものを用いればよい。式 (B.1.24) は $N \rightarrow \infty$ の極限で、対数の平均と平均の対数は等しくなるので、以下ではこの順で計算する。つまり式 (B.1.24) を

$$\langle Z(\lambda) \rangle = \langle -2 \log I(\lambda) \rangle = -2 \log \langle I(\lambda) \rangle \quad (\text{B.1.26})$$

として計算する。平均の計算と対数の計算は一般には可換ではないが、式 (B.1.26) が成り立つことはレプリカ法によって証明されている。

いま、 $N \times T$ 個の変数 h_{ik} は、独立同分布として平均値が 0 で分散が σ^2/T の Gauss 分布に従う確率変数だとすると、式 (B.1.25) と式 (B.1.26) で平均の計算に関係する部分は

$$\left\langle \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{k=1}^T x_i x_j h_{ik} h_{jk} \right) \right\rangle = \left(1 - \frac{\sigma^2}{T} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{-T/2} \quad (\text{B.1.27})$$

である。いま

$$q := \frac{\sigma^2}{T} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (\text{B.1.28})$$

を定義し、式 (B.1.8) のように Dirac のデルタ関数を

$$\delta \left(q - \frac{\sigma^2}{T} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) := \int \frac{1}{2\pi} \exp \left[i\zeta \left(q - \frac{\sigma^2}{T} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \right] d\zeta \quad (\text{B.1.29})$$

で定義して、式 (B.1.25) を x_i について積分すると

$$Z(\lambda) = -2 \log \left[\frac{T}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{N}{2} (\log(\lambda - \sigma^2 z) + Q \log(1 - q) + Qqz) \right\} dq dz \right] \quad (\text{B.1.30})$$

となる。ここで、 $z := 2i\zeta/T$ と $Q := T/N$ を定義した。

いま、 Q を固定したまま $T \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ の極限をとると、式 (B.1.30) では鞍点が支配的になる。ここで鞍点の条件は

$$Qq = \frac{\sigma^2}{\lambda - \sigma^2 z}, \quad (\text{B.1.31})$$

$$z = \frac{1}{1 - q} \quad (\text{B.1.32})$$

である。式 (B.1.31), 式 (B.1.32) を $q(\lambda)$ について解くと

$$q(\lambda) = \frac{\sigma^2(1 - Q) + Q\lambda \pm \sqrt{[\sigma^2(1 - Q) + Q\lambda]^2 - 4\sigma^2 Q\lambda}}{2Q\lambda} \quad (\text{B.1.33})$$

となる。式 (B.1.30) とを積分して式 (B.1.23) を用いると

$$G(\lambda) = \frac{N}{\lambda - \sigma^2 z(\lambda)} = \frac{NQq(\lambda)}{\sigma^2} \quad (\text{B.1.34})$$

となる。そして、式 (B.1.22) を用いると

$$\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{4\sigma^2 Q \lambda - [\sigma^2(1-Q) + Q\lambda]^2}}{2\pi\lambda\sigma^2} \quad (\text{B.1.35})$$

$$= \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda} \quad (\text{B.1.36})$$

となる。ここで

$$\lambda_{\pm} = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{Q} \pm 2\sqrt{\frac{1}{Q}} \right) \quad (\text{B.1.37})$$

であり、式 (B.1.4) が導出できた。つまり、この式からわかるように、行列要素がランダムであれば、 $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ に分布する。そのため主成分分析で λ_+ より大きい固有値が現れた場合、ノイズではない有意な相関構造であると考えられることができる。

C ヒルベルト変換

信号 $x(t)$ の Hilbert 変換 $y(t)$ は以下の式で与えられる。

$$y(t) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{x(u)}{t-u} du, \quad (\text{C.0.38})$$

ここで、 du に関する積分はコーシーの主値積分である。今、実信号に対する Hilbert 変換を考え、特異点は無いものとする。

$x(t)$ のフーリエ変換とその逆変換を以下のように定義する：

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (\text{C.0.39})$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{C.0.40})$$

$y(t)$ のフーリエ変換 $y(\omega)$ は以下のようになり、

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{C.0.41})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{x(u)}{t-u} \quad (\text{C.0.42})$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega x(u) e^{-i\omega u} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega(t-u)} \frac{1}{t-u} \quad (\text{C.0.43})$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du x(u) e^{-i\omega u} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{t} e^{-i\omega t} \quad (\text{C.0.44})$$

$$= -\frac{1}{\pi} x(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{t} e^{-i\omega t} \quad (\text{C.0.45})$$

ここで,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{t} e^{-i\omega t} = \begin{cases} i\pi & (\omega > 0) \\ -i\pi & (\omega < 0) \end{cases} \quad (\text{C.0.46})$$

より,

$$y(\omega) = -ix(\omega) \cdot \text{sgn}(\omega), \quad \text{sgn} = \begin{cases} 1 & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega = 0) \\ -1 & (\omega < 0). \end{cases} \quad (\text{C.0.47})$$

これを逆変換すると,

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\omega t} \cdot \text{sgn}(\omega) d\omega, \quad (\text{C.0.48})$$

となり, $y(t)$ は $x(t)$ のフーリエ変換と逆変換を用いて計算できる。

離散ヒルベルト変換

実際の解析に用いるデータは離散値であるので, 離散値に対応した Hilbert 変換を計算する必要がある。離散値の Hilbert 変換の手順を示す。

元時系列 x_t のフーリエ変換と逆変換を以下のように定義する。

フーリエ変換

$$x_k = \sum_{t=0}^{T-1} x_t e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} \quad (\text{C.0.49})$$

フーリエ逆変換

$$x_t = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} x_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} \quad (\text{C.0.50})$$

フーリエ変換を用いると, 離散 Hilbert 変換は

$$x(t) = \sum_{k=0}^{T-1} x_k e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} \cdot x_k \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot \text{sgn}(k - \frac{T}{2}), \quad (\text{C.0.51})$$

$$\text{sgn}(k - \frac{T}{2}) = \begin{cases} 1 & (k > \frac{T}{2}) \\ 0 & (k = \frac{T}{2}) \\ -1 & (k < \frac{T}{2}) \end{cases} \quad (\text{C.0.52})$$

と表せる。これはフーリエ成分 x_k の正周波数成分の位相を $\pi/2$ 進ませ, 負周波数成分の位相を $\pi/2$ 遅らせた後にフーリエ逆変換することを表している。これによって y_t は x_t の位相を $\pi/2$ 進めた時系列として得られる。

D 季節調整をした場合の解析結果

解析対象のデータの中には図のように顕著な季節変動をするものが含まれている。このような季節変動を含む時系列データの解析の際には季節性による影響を

排除するために季節調整をするのが一般的である。複素ヒルベルト主成分分析においては季節性は季節性を表す主成分として分離されて抽出されると期待されるが、どの主成分が季節性を抽出したものなのかという判断において傍証とすべく季節調整を行ったデータを用意し本文と同様の解析を行った。ここにその結果をのせる。

D.1 前年同月比

ここでは季節調整として前年同月比をとる操作を行い、

$$\tilde{x}_\mu(t) = \frac{x_\mu(t)}{x_\mu(t-12)}. \quad (\text{D.1.1})$$

さらに本文と同様に対数差分を取り、その後 $N(0, 1)$ に標準化する。この操作によって季節変動を排除できるがラグ 12ヶ月の自己相関が現れる事がある。季節調整手法は色々存在するが前年同月比は最もシンプルな手法の一つである。

D.2 固有値分布

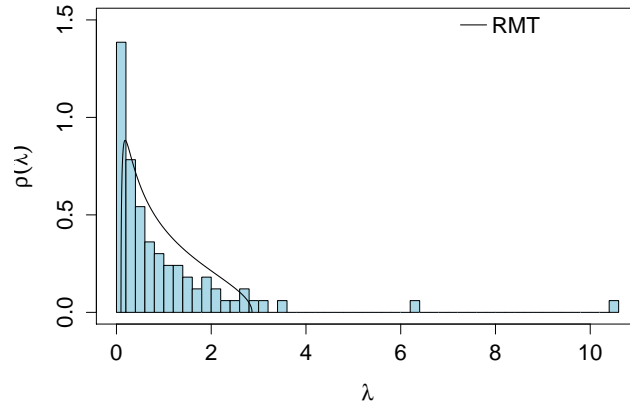


図 D.1: 複素相関行列の固有値分布

図 D.1 は複素相関行列の固有値分布である。RMT によるデータがランダムな場合の固有値分布の上限 $\lambda_+(= 2.85)$ を超える固有値は 5 個得られた ($\lambda_1 = 10.5, \lambda_2 = 6.26, \lambda_3 = 3.56, \lambda_4 = 3.07, \lambda_5 = 2.85$)。

図 D.2 は RRS 後の固有値分布である。乱数を変えて 1000 回サンプルを取り $\langle \lambda_\ell \rangle + 3\sigma_\ell$ を各固有値の判定基準とする。 $\langle \lambda_\ell \rangle$ は RRS 後の ℓ 番目の固有値の平均値、 σ は ℓ 番目の固有値の標準偏差を意味している。この基準を満たす固有値は 5 個得られた。

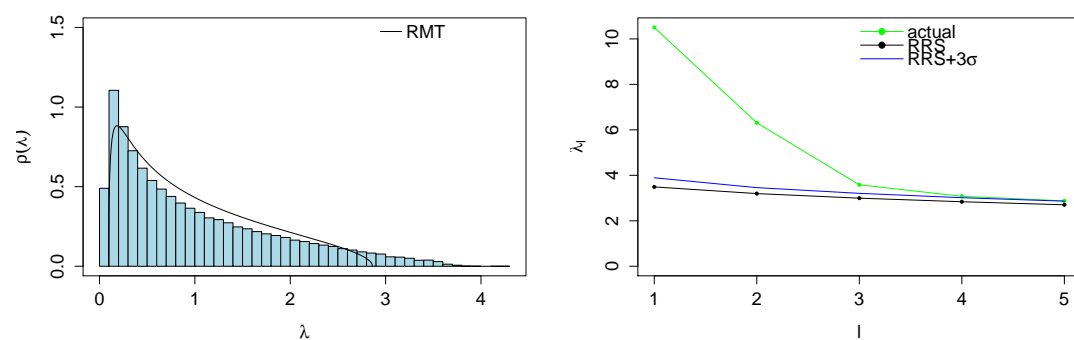


図 D.2: RRS 後の複素相関行列の固有値分布 (1000 サンプル)

D.3 固有ベクトル成分

図 D.3 は有意だと判断された上位 6 個の主成分に対応する固有ベクトル成分を複素平面にプロットしたものである。

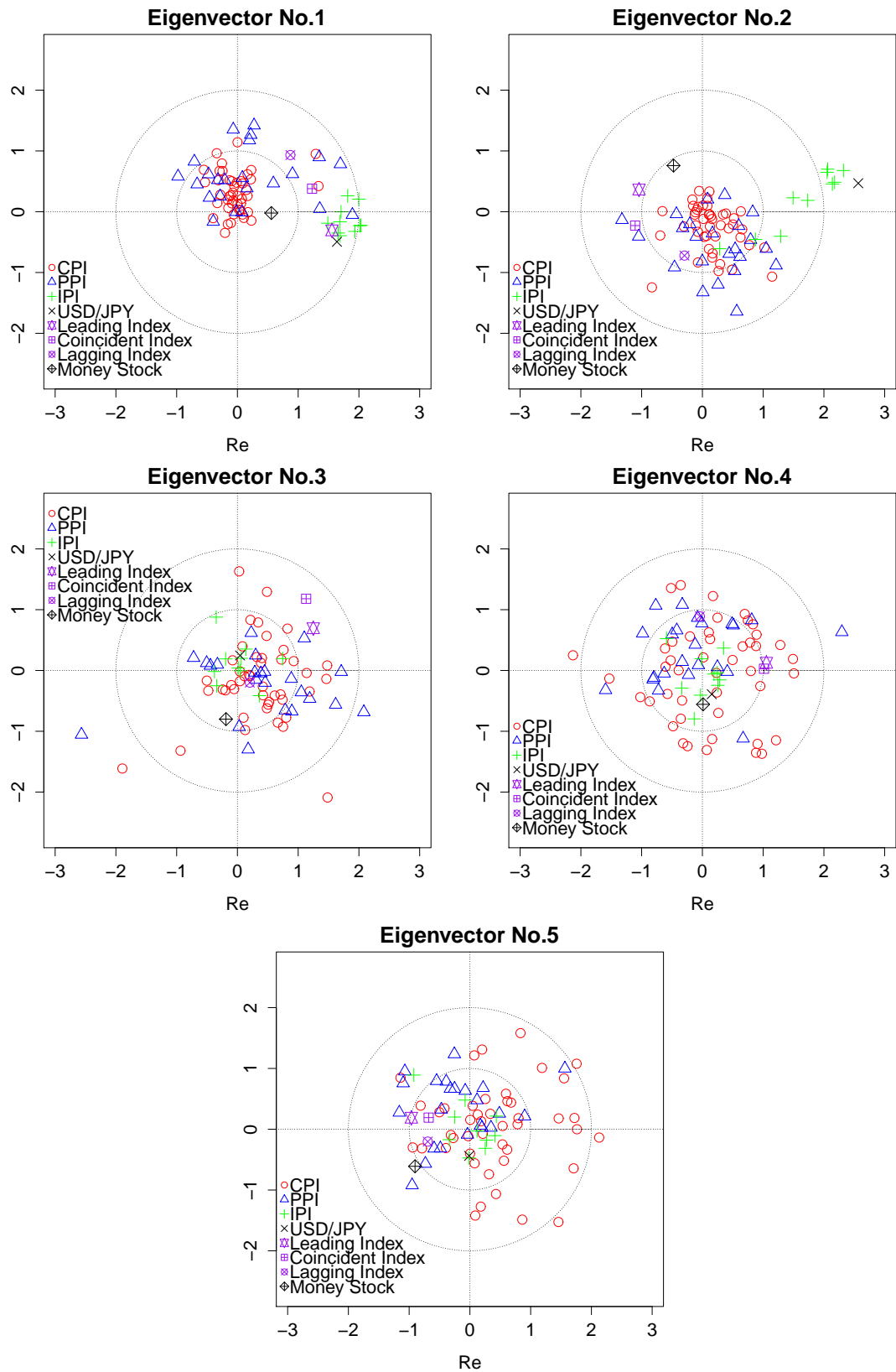


図 D.3: 上位 5 個の主成分に対応する固有ベクトル成分

E PCA と CHPCA との対応

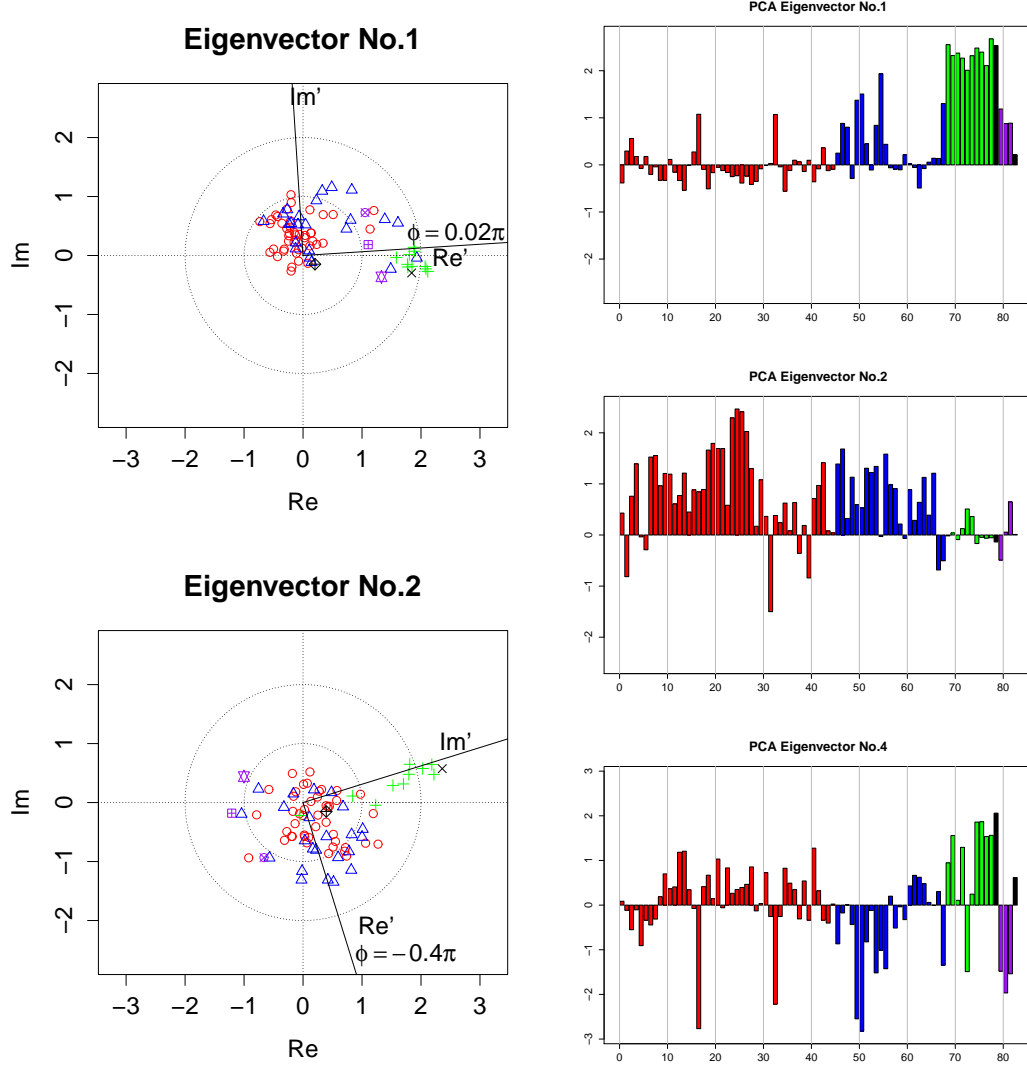


図 E.1: 固有ベクトル成分，左列：CHPCA，右列：PCA

CHPCA は PCA を時系列の複素化に基いて拡張した解析手法であるが，2つの手法で得られる結果にはどのような差があるだろうか。本章で解析対象としたものと同じデータに対して通常の PCA による解析を行うと RMT, RRS による判定基準をパスする固有値は 8 個得られた。図 E.1 は同じデータに対する CHPCA と PCA の結果の固有ベクトル成分の一部である。CHPCA と PCA を比べるために，CHPCA の固有ベクトルを ϕ 回転させた Re' 軸と Im' 軸への射影成分 $\text{Re}[\tilde{\alpha}_\ell]$ と $\text{Im}[\tilde{\alpha}_\ell]$ を考える。これらと PCA の固有ベクトル α_k との cosine similarity を計

算すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{Re}[\tilde{\alpha}_1] \cdot \alpha_1}{|\operatorname{Re}[\tilde{\alpha}_1]| |\alpha_1|} &= 0.984 \\
\frac{\operatorname{Im}[\tilde{\alpha}_1] \cdot \alpha_2}{|\operatorname{Im}[\tilde{\alpha}_1]| |\alpha_2|} &= 0.813 \\
\frac{\operatorname{Re}[\tilde{\alpha}_2] \cdot \alpha_2}{|\operatorname{Re}[\tilde{\alpha}_2]| |\alpha_2|} &= 0.790 \\
\frac{\operatorname{Im}[\tilde{\alpha}_2] \cdot \alpha_4}{|\operatorname{Im}[\tilde{\alpha}_2]| |\alpha_4|} &= 0.795
\end{aligned}$$

となる。CHPCA の一つの軸への射影成分が PCA から得られた固有ベクトルと良く一致している。さらに、CHPCA の第 1 固有ベクトルの Re' 軸が PCA の第 1 固有ベクトルに対応し、 Im' 軸が PCA の第 2 固有ベクトルに対応していることから、PCA では別の固有ベクトルとして得られた 2 つの構造が、CHPCA では位相差 $\pi/2$ の 1 つの構造として出てくることになる。言い直せば、通常の PCA では、本来リード・ラグ関係で結びついている 1 つの構造が、複数の静的な相関構造として抽出されてしまう事になる。このように、CHPCA では動的相関構造に加えて静的な相関構造の情報も含んでいる。ここでは、 ϕ は Re' 軸と Im' 軸と PCA の固有ベクトルの cosine similarity の和,

$$\frac{\operatorname{Re}[\tilde{\alpha}_i] \cdot \alpha_j}{|\operatorname{Re}[\tilde{\alpha}_i]| |\alpha_j|} + \frac{\operatorname{Im}[\tilde{\alpha}_i] \cdot \alpha_k}{|\operatorname{Im}[\tilde{\alpha}_i]| |\alpha_k|} \quad (\text{E.0.1})$$

が、全ての j, k の組み合わせの中から最も高くなるようにとった。

参考文献

- [1] L. Laloux, P. Cizeau, J. P. Bouchaud, and M. Potters, Phys. Rev. Lett. **83**, 1467(1999).
- [2] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. A. N. Amaral, T. Guhr, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E **65**, 066126(2002)
- [3] A. Utsugi, K. Ino, and M. Oshikawa, Phys. Rev. E **70**, 026110(2004)
- [4] D. H. Kim and H. Jeong, Phys. Rev. E **72**, 046133(2005)
- [5] V. Kulkarni and N. Deo, Eur. Phys. J. B. **60**, 101(2007)
- [6] R. K. Pan and S. Sinba, Phys. Rev. E **76**, 046116(2007)
- [7] H. Iyetomi et al., Phys. Rev. E **83**, 016103(2011)
- [8] T. Barnett, Mon. Wea. Rev. **111**, 756(1983).
- [9] A. Hannachi, I. T. Jolliffe, and D. B. Stephenson, Int. J. Climatol. **27**, 1119(2007)
- [10] Klenow, Peter J and Benjamin A Malin. Handbook of Monetary Economics 3A, North-Holland, 2011, chapter 6.
- [11] Journal of Political Economy, Octoberr 2004, 112, 947-85.
- [12] Yoshikawa, Hiroshi and Aoyama, Hideaki and Fujiwara, Yoshi and Iyetomi, Hiroshi, Deflation/Inflation Dynamics: Analysis Based on Micro Prices (February 15, 2015). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2565599> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2565599>
- [13] Y. Arai, T. Yoshikawa and H. Iyetomi, Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, vol. 255, pp. 111-119, 2013.
- [14] C.E.Porter and R.G.Thomas. Fluctuations of nuclear reaction widths. *Physical Review*, Vol. 104, No. 2, pp. 483-491, Oct 1956.
- [15] A.Edelman. Eigenvalues and Condition Numbers of Random Matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 9, No. 4, pp. 543-560, 1988.
- [16] A.M.Sengupta and P.P.Mitra. Distributions of singular values for some random matrices. *Physical Review E*, Vol. 60, No. 3, pp. 3389-3392, 1999.

- [17] J.P.Bouchud and M.Potters. *Theory of Financial Risk and Derivate Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2003. 森平爽一郎, 森谷博之, 熊谷善彰 (訳), 『金融リスクの理論－経済物理からのアプローチ』. 朝倉書店, 2003.
- [18] 青山秀明, 家富洋, 池田裕一, 相馬亘, 藤原義久『経済物理学』共立出版, 2008
- [19] 吉川 洋: 「現代マクロ経済学」, 創文社, 2000.