博士論文の要旨及び審査結果の要旨

氏名	采女　祐野
学位	博　士（　理学　）
学位記番号	新大院博（理）第398号
学位授与の日付	平成27年3月23日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
博士論文名	The Alexandrov-Toponogov comparison theorem for radial curvature and its applications （放射曲率を用いたアレクサンドロフ・トポノゴフの比較定理とその応用）
論文審査委員	主査　教授・印南　信宏 副査　教授・小島　秀雄 副査　教授・羽鳥　理 副査　准教授・鈴木　有祐

博士論文の要旨

リーマン多様体上の測地線の幾何学において、断面曲率の大小比較から測地線の挙動を比較し、多様体の位相構造や幾何構造を研究する方法が用いられている。比較幾何学と呼ばれている研究手法の一つである。断面曲率の比較から測地三角形の性質を比較し、球面の特徴づけをする球面定理に応用する一連の理論がある。本論文では、この一連の展開を基点からの放射曲率の比較に変えて行っている。特に、アレキサンドルフの凸性、トポノゴフの比較定理、その応用として一つの直径球面定理が放射曲率の仮定の下で成立することが証明されている。

(M,o) は基点 o を持つ完備リーマン多様体で、点 p における放射曲率は、回転面 $(\tilde{M},\tilde{o})$ の $\tilde{o}$ からの距離が $d(o,p)$ である点 $\tilde{p}$ の曲率以上とする。このとき、(M,o) は $(\tilde{M},\tilde{o})$ を参照すると呼ばれる。また、$d(o,p)=d(\tilde{o},\tilde{p})$ なる点 p と $\tilde{p}$ を固定し、M の点 q に対して、$d(o,q)=d(\tilde{o},\tilde{q})$, $d(p,q)=d(\tilde{p},\tilde{q})$ なる点 $\tilde{q}$ を参照回転面上に取る。この点を q の参照点と呼び、q に対して $\tilde{q}$ を対応させる写像を参照写像と呼ぶ。３個の最短測地線 $T(o,p)$, $T(o,q)$, $T(p,q)$ を三辺とする測地三角形に対して、参照回転面上の３個の最短測地線 $T(\tilde{o},\tilde{p})$, $T(\tilde{o},\tilde{q})$, $T(\tilde{p},\tilde{q})$ でできる測地三角形を比較三角形と呼ぶ。アレキサンドルフの凸性は、測地三角形の頂点から底辺の点までの距離は比較三角形の対応する頂点と対応する底辺上の点までの距離以上であることを主張するものである。トポノゴフの比較定理は、測地三角形の内角は比較三角形の対応する内角以上であることを主張するものである。この論文で、これらの性質は測地三角形の辺 $T(p,q)$ の参照曲線と p と q の参照点を結ぶ最短線の位置関係で記述されることを見出し、その位置関係がある条件下で成り立つことを証明している。この論文で課した条件は、基点 o のカットローカスの参照点集合と参照曲面での $\tilde{p}$ のカットローカスが交わる場合でも、参照曲線が $\tilde{p}$ のカットローカスと上側から交わることを保証するものである。これまでに知られていた結果は、参照曲面として完備単連結定曲率曲面やフォンマンゴルト回転面であったが、発見した条件はこれらの場合では自動的に満たされているので完全な一般化になっている。この条件が満たされるか判定すること

は一般的には難しそうであるが、巧く判定できる場合もある。判定可能な場合として、M における o からの距離が最大となる点までの距離が、参照曲面の基点からの最遠点までの距離に近ければ、M は球面と同相になることを証明している。

論文は、参照回転面上で、点 $\tilde{p}$ からの等距離集合（円）や $d(\tilde{p},\tilde{q})+d(\tilde{o},\tilde{q})$ が一定となる点 $\tilde{q}$ の軌跡（楕円）がどのようになるかを調べることから始まる。次に、最短測地線の参照曲線の性質を調べている。特に、最短測地線 T(p,q) の参照曲線と最短測地線 $T(\tilde{p},\tilde{q})$ の位置関係を詳しく研究している。楕円が持っている巧い性質を使うために、M 上でも同様な点集合として楕円面、楕円体を考える。この楕円体が小さいときには、糸川-町頭-塩濱の定理から最短測地線 T(p,q) の参照曲線が最短測地線 $T(\tilde{p},\tilde{q})$ の上側の位置にあることが分かる。楕円体をだんだんと大きくしてもこの位置関係が変わることはなく、M 全体を覆うことができる。このようにして、最短測地線 T(p,q) の参照曲線が最短測地線 $T(\tilde{p},\tilde{q})$ の上側の位置にあることの証明が完結している。このことにより、アレキサンドルフの凸性とトポノゴフの比較定理が成立することになる。

球面定理の証明は、Grove-塩濱が直径球面定理を証明する際に考え出した距離関数の臨界点理論を使っている。また、カットローカスが母点に連続的に変化すること、回転球面の基点の最遠点の最小点は基点のみであることに注目して、定理の仮定を満たすような点の存在を保証する条件を見つけている。

審査結果の要旨

トポノゴフの最大直径球面定理の証明や Grove-塩濱が距離関数の臨界点理論を使った直径球面定理の証明にトポノゴフの比較定理が使われてから、この定理は多様体の位相構造や幾何構造の研究で重要な役割をしている。また、トポノゴフの分解定理の証明に使われた後には、非コンパクト多様体の研究にも利用されている。非コンパクト多様体の研究では、参照曲面の曲率を０以下の定数にする必要があった。しかし、回転面を参照曲面とすることにより、比較可能な非コンパクト多様体が大幅に増え、大域的な性質の研究に大いに役立つものと思われる。実際、近藤-田中によって、参照曲面の全曲率を利用した非コンパクト多様体の分類の研究がある。

論文は、回転面上の円や楕円といった基本的な図形について調べることから始まり、参照曲線の概念をしっかりと導入し詳細に研究している。特に、楕円の性質を巧妙に使うことによって研究が進展したように思われる。また、参照曲線と端点が一致する最短測地線の位置関係として、アレキサンドルフの凸性やトポノゴフの比較定理をとらえ、証明に結びつけた点は興味深い。そのような方法は、糸川-町頭-塩濱によって始められていたともいえるが、研究対象の主体としてとらえ系統的に扱ったのは初めてであろう。

球面定理に関しては、曲率に対する比較条件に加えて、直径や体積、単射半径等に条件を付けるのが普通である。その際に、次元に関係しないものが良いとされている。この論文で証明を与えた球面定理は、次元に依らず基点からの最遠点までの距離と基点の単射半径だけに依存する仮定である。仮定が非常に単純な部類に属する。

定理の証明には測地線の定性的な性質が駆使され非常に高いレベルである。また、定理の仮定を満たす例として一つの球面定理が証明されているが、この定理の証明にも回転面上の測地線の挙動およびカットローカスについての深い知識を必要とする。測地線の幾何学に関する基礎理論を十分に理解し駆使することができることを示す研究内容で高く評価できる。

よって、本論文は博士（理学）の博士論文として十分であると認定した。