

博士論文

**Baryogenesis via Right-handed
Neutrino Oscillation in the ν MSM**

石田 裕之

F09J008H

新潟大学

自然科学研究科

自然構造科学専攻

素粒子論研究室

目次

第1章	イントロダクション	3
第2章	素粒子標準模型を超えた物理の必要性	6
2.1	素粒子標準模型	6
2.2	ニュートリノの質量	8
2.2.1	ニュートリノ振動現象	8
2.2.2	ニュートリノ振動実験によるニュートリノ質量と混合角の実験値	10
2.2.3	ニュートリノ質量と右巻きニュートリノ	12
2.2.4	ニュートリノ質量とシーソー機構	14
2.3	宇宙バリオン数非対称性	16
2.3.1	観測事実	17
2.3.2	宇宙バリオン数生成	19
2.3.3	右巻きニュートリノを導入したバリオン数生成機構	21
第3章	The ν MSM 模型	25
3.1	模型について	25
3.2	ステライルニュートリノのゲージ相互作用	26
3.3	The ν MSM 模型におけるステライルニュートリノの役割	27
3.4	The ν MSM 模型における湯川結合定数	28
第4章	右巻きニュートリノの振動を通じたバリオン数生成機構	30
4.1	密度行列	30
4.2	密度行列による定式化	33
4.3	右巻きニュートリノの振動を通じたバリオン数生成	36
4.3.1	Akhmedov らによる解析	36
4.3.2	Asaka らによる解析	45
第5章	宇宙バリオン数非対称性とニュートリノパラメータの相関	46
5.1	生成されるバリオン数の解析解	46
5.2	$\text{Im}\omega = 0$ の場合	49

第 6 章 運動量依存性を考慮した発展方程式を用いた解析	53
6.1 運動量依存性を考慮した右巻きニュートリノの発展方程式の導出	53
6.2 運動量依存性を考慮した左巻きレプトンの発展方程式の導出	55
6.3 発展方程式の数値解析	58
6.4 運動量依存性の重要性	64
第 7 章 結論	70
付 録 A スファレロン過程による保存量の分配	73
付 録 B The ν MSM 模型における湯川結合定数の導出	79
付 録 C 有効ポテンシャルの評価	81
付 録 D 右巻きニュートリノの消滅率と生成率の評価	86

第1章 イントロダクション

『我々の宇宙は反粒子と比べ粒子が優勢な宇宙である。』この事実は、ウィルキンソンマイクロ波異方性探査機 (WMAP) 衛星による宇宙背景輻射の観測や、ビッグバン元素合成による軽元素残存量の予言によって确实視された [1]。そしてその粒子と反粒子の間の非対称性は、 10^{-10} オーダーという非常に小さい量であることが測られている。つまり初期宇宙で、100 億個の反粒子に対して、100 億 1 個の粒子が存在していた、ということになる。

歴史的に見ると、P. A. M. ディラックは 1930 年に反粒子の存在を予言していた。初めは『空孔理論』と呼ばれる理論で、ディラック方程式に現れる負のエネルギー解を理解するための仮説であった。空孔の考え方そのものは正しいものではなかったが、それは正のエネルギーをもった『反粒子』として解釈をすることができた。そして、1932 年に C. D. アンダーソンによって陽電子が観測され、反粒子の存在が確定した。また、ディラックの空孔理論が出された翌年 1931 年に、W. パウリによってニュートリノ仮説が出された。これは中性子の β 崩壊の観測から、その存在が確かなものとされた。また、 β 崩壊中に現れる粒子は、角運動量の保存からニュートリノの反粒子である。それにもかかわらず、今のところ宇宙のどこを探しても反粒子のみで構成されているものは観測されていない。では、粒子-反粒子間の非対称性はいつ生まれ、反粒子はどこへ行ってしまったのであろう？ この謎に対する確かな答えは今の理論では未だにない。

現在の宇宙論において、『平坦性問題』、『境界線問題』そして『モノポール問題』といった問題を解決するインフレーション宇宙 (指数関数的膨張宇宙) [2-5] は、観測データからも強く支持されている。インフレーションが起きているときは、真空のエネルギーが宇宙を支配している。よってインフレーション直後の宇宙は、バリオンと反バリオンの粒子数は対称な宇宙となる。しかし冒頭にも述べたとおり、宇宙の温度が MeV 程度の時期に起こる元素合成の前にはこれらの間に非対称性が生まれていなくてはいけない。この非対称性を生む機構を『バリオン数生成』 (baryogenesis) と呼ぶ。

1967 年に A. D. サハロフはバリオン数生成のために必要な 3 つの条件を提示した [6]。この条件を『サハロフの 3 条件』と呼ぶ。それらは、1.) バリオン数を破る過程が存在する。2.) C と CP 対称性を破る過程が存在する。3.) 熱平衡からずれた過程が存在する。というものである。Baryogenesis が成功するためには、これらがすべて満たされ

ている必要がある。しかし、素粒子標準模型においては、これら3つの条件すべてを満たすことができない。

さらに、パウリによって指摘されたニュートリノは、素粒子標準模型の枠組みでは質量をもっていない粒子であった。しかし、1998年に日本の Super Kamiokande 実験 [15] における、ニュートリノのフレーバー間振動の発見によって、ニュートリノには非常に小さいがゼロではない質量があることが確実視された。これらの事実により、素粒子標準模型は拡張が必要である。

宇宙バリオン数非対称性を説明するための模型の拡張は、これまでに様々な議論がなされている [7]。それらの拡張模型の中に、新粒子『右巻きニュートリノ』を導入するものがある。もしこの右巻きニュートリノが非常に重い質量をもっているとすると、その崩壊によってバリオン数非対称性の源となるレプトン数非対称性を生成することができる。この機構を『leptogenesis』 [8] と呼ぶ。加えて、この非常に重い右巻きニュートリノは観測されている非常に小さいニュートリノの質量をシーソー機構 [9] という機構によって自然に説明することができる。しかしながら、ここで導入される右巻きニュートリノは将来の実験や観測によって直接検証することができない。

一方、E. K. Akhmedov らによって非常に興味深い機構が提唱された [10]。ここで導入された右巻きニュートリノは電弱スケールよりも軽く、将来の直接検証が期待される。バリオン数生成機構としては、右巻きニュートリノのフレーバー間振動を通じたレプトン数の分離によるものである。

この機構は Neutrino Minimal Standard Model (the ν MSM 模型) [11, 12] という模型においても用いることができる。The ν MSM 模型は、標準模型に電弱スケールよりも軽い3つの右巻きニュートリノを導入したものである。この模型における右巻きニュートリノの湯川結合定数は非常に小さく抑制されているために、シーソー機構は依然として働く。ニュートリノの質量固有状態はその質量によって2種類に分類することが可能で、3つの質量が軽い状態をアクティブニュートリノ、3つの重い状態をステライルニュートリノと呼ぶ。アクティブニュートリノはニュートリノ振動を説明することが可能である。一方、3つのステライルニュートリノのうち最も軽いものは宇宙暗黒物質の候補となる。そして残りの2つのステライルニュートリノが、宇宙バリオン数非対称性を説明する。先述した通り、電弱スケールよりも軽い右巻きニュートリノは将来の直接検証に対し期待が持てる。さらに the ν MSM 模型においては、標準模型では説明できない問題の1つである宇宙暗黒物質もまた同時に説明することができる。よって本課題ではこの the ν MSM 模型の枠組みにおいてバリオン数生成を考察する。

本課題における目標は大きく分けて2つある。まず第一に、宇宙バリオン数非対称性の生成量とニュートリノパラメータの相関を示すことである。ニュートリノパラメー

タとは、アクティブニュートリノの質量と混合角、そしてステライルニュートリノの質量と混合角である。特にアクティブニュートリノに関するパラメータとの相関に着目して、これを示す。アクティブニュートリノのパラメータは、ニュートリノ振動実験によって今もなお測られ続けている。つまりこの相関が宇宙バリオン数非対称性生成の起源を現在の実験や観測で解明する鍵となる。

そして第二に、非対称性の発展を記述する密度行列の発展方程式を、密度行列に関する運動量依存性を考慮に入れて書き下すことである。先行研究では、密度行列の運動量依存性は近似的なものが用いられてきた。つまりある特定の運動量における発展のみを追っていた。それを改良し、運動量依存性を厳密に取り入れることで、これまでよりも精密に生成されるバリオン数を見積もることができる。

本博士論文は以下の通りに構成されている。まず第2章では、素粒子標準模型の拡張の必要性を議論する。次に第3章では本課題で考察する the ν MSM 模型を説明し、第4章でバリオン数生成機構について解説する。そして第5章では、生成されるバリオン数とニュートリノパラメータの間の相関を示す。続いて第6章では、運動量依存性を考慮した発展方程式を導出し、解析する。最後に結論を述べる。また、スファレロン過程における保存量の分配についての計算、ニュートリノ湯川結合定数の詳細、有効ポテンシャルの評価、そして右巻きニュートリノの消滅率と生成率の計算について付録をつけた。

第2章 素粒子標準模型を超えた物理の 必要性

素粒子標準模型 [14] は、 $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ群に基づいた、3世代のクォークとレプトンと呼ばれる物質粒子によって構成される量子論である。この素粒子標準模型は、現在の数多くの実験・観測事実を非常に精度よく予言することができる。

しかし、素粒子標準模型の枠組みでは説明のすることのできない実験・観測事実が見つかっている。特に本論文で着目する事柄は、ニュートリノの質量と宇宙バリオン数非対称性である。これらの問題は、新粒子『右巻きニュートリノ』を導入することで解決することができる。本論文では、右巻きニュートリノを導入した拡張模型として the ν MSM 模型 [11] を考える。本章では素粒子標準模型の枠組みで、上記の事柄がなぜ問題なのかということについて述べ、the ν MSM 模型の詳細については、第3章で説明する。

2.1 素粒子標準模型

ここでは、これまでに多くの成功を収めてきた素粒子標準模型 (以下、標準模型) について簡単に説明する。標準模型は $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ群に基づいた量子場の理論として構成されている。標準模型に導入した場のゲージ量子数とスピン量子数を表 2.1 にまとめた。標準模型のゲージ対称性を保ち、繰り込み可能なラグランジアンは次のように書くことができる。

$$\mathcal{L}_{\text{MSM}} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_Y, \quad (2.1)$$

ただし、ここにはゲージ固定項は含まれていない。今後、質量の固有状態に関するインデックスを i, j, \dots で表し、フレーバーの固有状態に関するインデックスを α, β, \dots で

場	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	スピン
G_μ^A	8	1	0	1
A_μ^a	1	3	0	
B_μ	1	1	0	
$\ell_L^\alpha = \begin{pmatrix} \nu_L^\alpha \\ e_L^\alpha \end{pmatrix}$	1	2	-1	$\frac{1}{2}$
e_R^α	1	1	-2	
$q_L^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^\alpha \\ d_L^\alpha \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{3}$	
u_R^α	3	1	$\frac{4}{3}$	
d_R^α	3	1	$-\frac{2}{3}$	
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}$	1	2	-1	

表 2.1: 標準模型における場のゲージ量子数とスピン量子数。

表すこととする。各項を明記すると次式で与えられる。

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{G\mu\nu}^A F_G^{A\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{A\mu\nu}^a F_A^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{B\mu\nu} F_B^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_F = \sum_f \bar{f} i \not{D} f, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_\Phi = |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_Y = \left[-F_{\alpha\beta}^{(e)} \bar{\ell}_L^\alpha \tilde{\Phi} e_R^\beta - F_{\alpha\beta}^{(u)} \bar{q}_L^\alpha \Phi u_R^\beta - F_{\alpha\beta}^{(d)} \bar{q}_L^\alpha \tilde{\Phi} d_R^\beta \right] + \text{h.c.}, \quad (2.5)$$

ここでパウリ行列 σ^2 を用いて $\tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2 \Phi^* = (\phi^+, -\phi^0)^T$ と定義した。また、式 (2.3) 中の f は対応するフェルミオンの場で、共変微分は次式で定義される。

$$D_\mu f = \left[\partial_\mu - ig_S G_\mu^A \hat{T}^A - ig A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - ig_Y B_\mu \frac{Y}{2} \right] f. \quad (2.6)$$

ここで \hat{T}^A と $\sigma^a/2$ は $SU(3)_c$ と $SU(2)_L$ の生成子である。また、 g_S 、 g 、 g_Y はそれぞれ、 $SU(3)_c$ 、 $SU(2)_L$ 、 $U(1)_Y$ のゲージ結合定数である。そして、式 (2.5) 中の $F_{\alpha\beta}^{(l)}$ ($l = e, u, d$) は湯川結合定数である。また、式 (2.2) 中の場の強さは次のように与えられる。

$$F_{B\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (2.7)$$

$$F_{A\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.8)$$

$$F_{G\mu\nu}^A = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A + g_S f^{ABC} G_\mu^B G_\nu^C, \quad (2.9)$$

ここで $A, B, C = 1, 2, \dots, 8$ は $SU(3)_c$ のカラーのインデックスで、 $a, b, c = 1, 2, 3$ は $SU(2)_L$ のインデックスを表す。

さらに、標準模型唯一のスカラー場であるヒッグス場、 Φ 、に関する項については次式で書かれる。

$$D_\mu \Phi = \left[\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + i \frac{g_Y}{2} B_\mu \right] \Phi, \quad (2.10)$$

$$V(\Phi) = -\mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4, \quad (2.11)$$

ここでポテンシャル (2.11) 中の μ は実の質量パラメータで、 λ は自己相互作用の結合定数である。

これらのラグランジアンで記述される標準模型は、これまでの LEP、SLD、LEP II 実験 [17] などで行われてきた精密測定の結果を非常に精度よく予言することができる。こうして標準模型はエネルギーが 100 GeV 程度よりも低いスケールにおける、素粒子の運動を記述するモデルとして扱われている。しかしながら、この非常に成功を収めている標準模型でも説明することのできない現象がある。次節以降で、本論文で注目するニュートリノの質量の問題と宇宙バリオン数非対称性の問題について述べていく。

2.2 ニュートリノの質量

長い間、標準模型の枠組みではニュートリノは質量をもたないとされてきた。しかし、1998 年に Sutr-Kamiokande 実験によってニュートリノには質量があるということが確認された [15]。ニュートリノは弱い相互作用を通じてフレーバーの固有状態 $|\nu_\alpha\rangle$ ($\alpha = e, \mu, \tau$) で生成され、質量の固有状態 $|\nu_i\rangle$ ($i = 1, 2, 3$) で伝播する。ニュートリノが質量 m_i をもつと仮定すると、質量の固有状態はフレーバーの固有状態の重ね合わせで記述され、時刻と共にフレーバーを変えていく [16]。この現象をニュートリノ振動現象と言う。この節ではニュートリノ振動現象について軽く触れ、ニュートリノが質量をもつためのモデルの拡張について述べる。

2.2.1 ニュートリノ振動現象

ここでは、ニュートリノのフレーバー遷移確率を計算していく。ニュートリノのフレーバーの固有状態 $|\nu_\alpha\rangle$ は質量の固有状態 $|\nu^i\rangle$ の重ね合わせとして記述され、

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu^i\rangle, \quad (2.12)$$

と書くことができる。ここで $U_{\alpha i}$ は質量の固有状態からフレーバーの固有状態へと基底を変えるユニタリー混合行列である。ある時刻、 t 、におけるフレーバーの固有状態

$|\nu^\alpha(t)\rangle$ は次のように表すことができる。

$$|\nu^\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} U_{i\beta}^\dagger e^{-iE_i t} |\nu^\beta\rangle = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu^\beta\rangle, \quad (2.13)$$

ここで、 E_i はニュートリノのエネルギーである。

式(2.13)より、時刻 t でフレーバーの固有状態 $|\nu^\alpha\rangle$ から、 $|\nu^\beta\rangle$ へ遷移する遷移振幅は、次のように与えられる。

$$\langle \nu^\beta | \nu^\alpha(t) \rangle = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t}. \quad (2.14)$$

相対論的極限 ($E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2} \simeq \mathbf{p} + \frac{m_i^2}{2\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \frac{m_i^2}{2E_i}$) において、遷移確率 $P_{\alpha \rightarrow \beta}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta} &= \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \right|^2 = \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)t} \\ &= \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \left(e^{-i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t} - 1 + 1 \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで質量二乗差を $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$ と定義した。第3項を、

$$\sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.16)$$

と変更することにより、遷移確率は次のように書き直される。

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i,j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \left(e^{-i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t} - 1 \right). \quad (2.17)$$

式(2.17)を2種類の場合に分けて考える。第一に、すべてのニュートリノの質量が完全に縮退している、つまり $m_i = m_j$ のとき、遷移確率は次のようになる。

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.18)$$

よってこの場合フレーバー混合は起きない。ニュートリノに質量がない場合でも明らかに同様のことが言える。次に、ニュートリノの質量が異なる場合、つまり $m_i \neq m_j$ のとき、式(2.17)の第2項は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\sum_{i>j} \left[U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \left(e^{-i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t} - 1 \right) + U_{\alpha j} U_{\beta j}^* U_{\alpha i}^* U_{\beta i} \left(e^{-i\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E}t} - 1 \right) \right] \\ &= \sum_{i>j} \left[B \left(e^{-i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t} - 1 \right) + B^* \left(e^{i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t} - 1 \right) \right] \\ &= \sum_{i>j} \left[\text{Re}B \left(e^{-i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t} + e^{i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t} - 2 \right) + \text{Im}B \left(i e^{-i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t} - i e^{i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t} \right) \right] \\ &= \sum_{i>j} \left[-4\text{Re}B \sin \left[\frac{\Delta m_{ij}^2}{4E}t \right] + 2\text{Im}B \sin \left[\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t \right] \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで $B \equiv U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}$ と定義し、実部と虚部に分けた。よって遷移確率は次のようになる。

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sum_{i>j} \left[4\text{Re}B \sin\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{4E}t\right) - 2\text{Im}B \sin\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}t\right) \right]. \quad (2.20)$$

上式より、混合行列、 U 、を決めることができれば、遷移確率を得ることができる。また、式(2.20)より、遷移確率は振動距離と呼ばれる $L_{ij} \equiv \frac{4\pi E}{m_i^2 - m_j^2}$ で定義される距離で決まる。この量によって、振動の効果が有効となるスケールを知ることができる。

例えばフレーバーの数が2つの場合を議論する。このとき混合行列は、混合角 θ を用いて次式で与えられる。

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

これを用いて遷移確率は次のように計算できる。

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sin^2\theta \sin^2 \frac{\Delta m_{\alpha\beta}^2 L}{4E}. \quad (2.22)$$

上式より、ニュートリノがフレーバー間振動を起こすためには次のような条件が必要となる。まず、混合角 θ がゼロではない値を持つこと。次にニュートリノが質量をもつこと、そしてその質量が等しくないことである。これらの条件が満たされていれば、ニュートリノのフレーバー間振動は起こる。

2.2.2 ニュートリノ振動実験によるニュートリノ質量と混合角の実験値

これまでも様々な実験がニュートリノ質量や混合角についてのデータを出してきた。いろいろな実験による質量二乗差と混合角に対する制限を図2.1にまとめている。振動実験は、大気ニュートリノ振動実験、太陽ニュートリノ振動実験、原子炉ニュートリノ振動実験そして加速器ニュートリノ実験という4つに分けることができる。大気ニュートリノ振動実験は、宇宙線が大気と衝突したときに生じる荷電中間子の崩壊によって作られたミューニュートリノ ν_μ が、タウニュートリノ ν_τ へ遷移したときの ν_μ の欠損を測っている。この実験で制限をすることのできる質量二乗差と混合角は Δm_{23}^2 と θ_{23} である。太陽ニュートリノ振動実験は、太陽での核融合時に生成された電子ニュートリノ ν_e の欠損を測っている。この実験で制限をすることのできる質量二乗差と混合角は Δm_{12}^2 と θ_{12} である。原子炉ニュートリノ実験は核反応時に生成される反電子ニュートリノ $\bar{\nu}_e$ の遷移確率を測っている。この実験で制限をすることのできるものは質量二乗差 Δm_{12}^2 と混合角 θ_{12} と θ_{13} である。さらに近年、加速器ニュートリノ実験 T2K 実

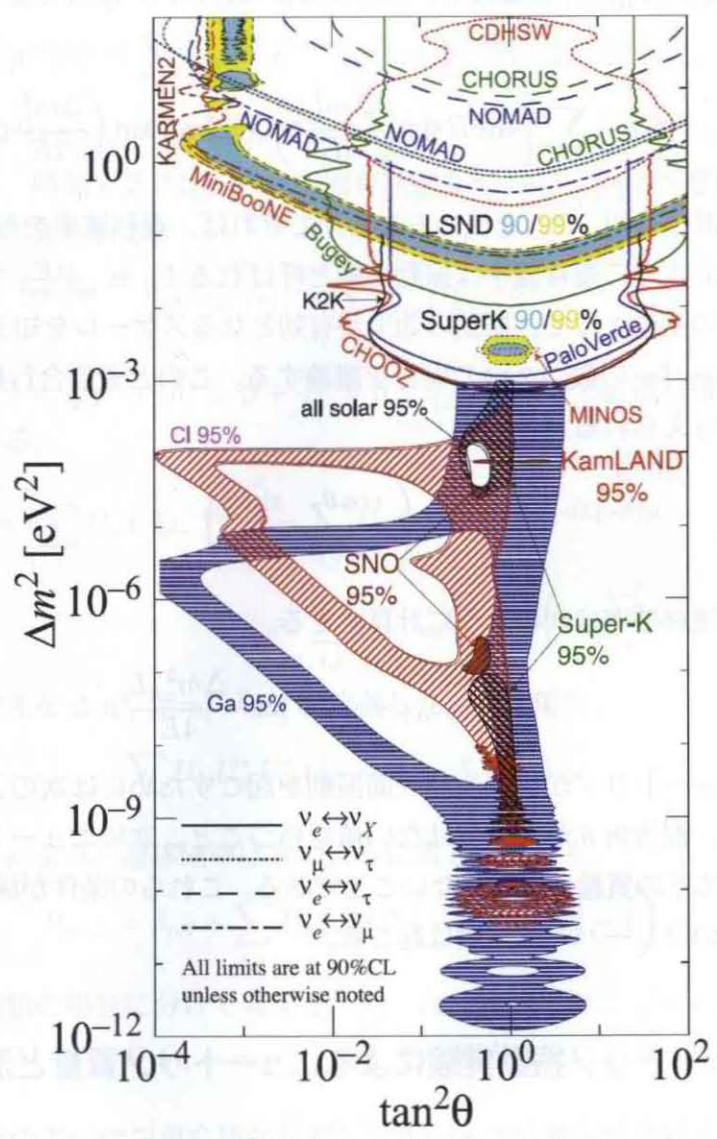


図 2.1: 様々な実験からの質量二乗差と混合角に対する制限。文献 [17] より転載。

験 [18] や原子炉ニュートリノ実験 Double Chooz 実験 [19] が、これまでの実験では有意な下限値を付けることのできなかった混合角 θ_{13} について、 3σ の信頼度においてゼロではない下限値を付けた。加速器ニュートリノ実験は、加速させた粒子をターゲットに衝突させたときに生じる荷電中間子の崩壊から生じるニュートリノを観測している。人工的に生成されたニュートリノなので、大気ニュートリノや太陽ニュートリノといった自然に生成されたニュートリノよりも正確にニュートリノ振動を測定することができる。

ニュートリノ振動実験で測られるのは式 (2.20) より、3 世代ニュートリノでは2つの

パラメータ	$\Delta m_{\text{atm}}^2/10^{-3}\text{eV}^2$	$\Delta m_{\text{sol}}^2/10^{-5}\text{eV}^2$	$\sin^2 \theta_{12}$	$\sin^2 \theta_{23}$	$\sin^2 \theta_{13}$
最適値	2.35	7.58	0.306	0.42	0.021
3σ	2.06 - 2.67	6.99 - 8.18	0.259 - 0.359	0.34 - 0.64	0.001 - 0.044

表 2.2: ニュートリノ質量と混合角の実験値

質量二乗差と、3つの混合角である。現在測られている質量二乗差の絶対値のうち1つが 10^{-3}eV^2 オーダーで、もう1つは 10^{-5}eV^2 オーダーである。また、3つの混合角のうち1つが $1/\sqrt{2}$ に近く、もう1つは $1/\sqrt{3}$ に近い。そして最後の1つは非常に小さいことがわかっている。参考文献 [20] におけるニュートリノ振動実験の三代解析の、それぞれの実験値の最適値と 3σ の信頼度における値を表 2.2 にまとめる。

2.2.3 ニュートリノ質量と右巻きニュートリノ

2.2.1節で、ニュートリノ振動現象について解説をした。この現象が起こるためには、ニュートリノは質量をもち、さらに異なるものになっていないといけないことを示した。しかし標準模型において、ニュートリノは質量をもつことができない。それは、標準模型には左巻きニュートリノのみが導入されているためである。

ここで、標準模型でのフェルミオンの質量獲得機構について述べる。クォーク、荷電レプトンの湯川相互作用項を書き下すと、

$$\mathcal{L}_Y = \left[-F_{\alpha\beta}^{(e)} \bar{\ell}_L^\alpha \tilde{\Phi} e_R^\beta - F_{\alpha\beta}^{(u)} \bar{q}_L^\alpha \Phi u_R^\beta - F_{\alpha\beta}^{(d)} \bar{q}_L^\alpha \tilde{\Phi} d_R^\beta \right] + \text{h.c.}, \quad (2.23)$$

ここで $F_{\alpha\beta}^{(u,d,e)}$ は湯川結合定数、 q_L は左巻き型のクォーク、 ℓ_α は左巻きレプトン、 Φ はヒッグス二重項、 e_R は右巻き荷電レプトン、そして u_R, d_R は右巻き型のクォークである。ヒッグスが真空期待値をもつと、 $\Phi = \langle \Phi \rangle + \Phi'$ 、式 (2.23) は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & - \left[F_{\alpha\beta}^{(e)} \langle \Phi \rangle \bar{\ell}_L^\alpha e_R^\beta + F_{\alpha\beta}^{(u)} \langle \Phi \rangle \bar{u}_L^\alpha u_R^\beta + F_{\alpha\beta}^{(d)} \langle \Phi \rangle \bar{d}_L^\alpha d_R^\beta \right. \\ & \left. + F_{\alpha\beta}^{(e)} \bar{\ell}_L^\alpha \tilde{\Phi}' e_R^\beta + F_{\alpha\beta}^{(u)} \Phi' \bar{q}_L^\alpha u_R^\beta + F_{\alpha\beta}^{(d)} \bar{q}_L^\alpha \tilde{\Phi}' d_R^\beta \right] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.24)$$

この中で、真空期待値に比例する部分を次のように読み替える。

$$m_{\alpha\beta}^{(e)} = F_{\alpha\beta}^{(e)} \langle \Phi \rangle, \quad m_{\alpha\beta}^{(u)} = F_{\alpha\beta}^{(u)} \langle \Phi \rangle, \quad m_{\alpha\beta}^{(d)} = F_{\alpha\beta}^{(d)} \langle \Phi \rangle, \quad (2.25)$$

この質量行列は一般には対角的ではないので、対角化し、質量固有値と固有状態を求める。式 (2.25) のような 3×3 行列は、一般に2つのユニタリ行列によって対角化可

能である。

$$m_{\text{diag}}^{(e)} = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) = U_L^{(e)\dagger} m_{\alpha\beta}^{(e)} V_R^{(e)}, \quad (2.26)$$

$$m_{\text{diag}}^{(u)} = \text{diag}(m_u, m_c, m_t) = U_L^{(u)\dagger} m_{\alpha\beta}^{(u)} V_R^{(u)}, \quad (2.27)$$

$$m_{\text{diag}}^{(d)} = \text{diag}(m_d, m_s, m_b) = U_L^{(d)\dagger} m_{\alpha\beta}^{(d)} V_R^{(d)}. \quad (2.28)$$

これらの対角化行列 U 、 V を用いて、質量固有状態は次のように与えられる。

$$u_i = U_L^{(u)} u_L + V_R^{(u)} u_R, \quad (2.29)$$

$$d_i = U_L^{(d)} d_L + V_R^{(d)} d_R, \quad (2.30)$$

$$e_i = U_L^{(e)} e_L + V_R^{(e)} e_R, \quad (2.31)$$

ここで、 e 、 u そして d はディラックの 4 成分スピノルである。こうしてユニタリー変換によって質量固有値と質量固有状態を得ることができた。

次に、クォークの荷電カレントの相互作用項を見る。質量の固有状態を用いて、これらの項は次のように書ける。

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma^\mu W_\mu^+ U_L^{(u)\dagger} U_L^{(d)} d + \text{h.c.}, \quad (2.32)$$

ここで、ユニタリー行列の積を次のように書き換える。

$$V_{KM} \equiv U_L^{(u)\dagger} U_L^{(d)}, \quad (2.33)$$

この行列は小林-益川行列 [29] と呼ばれる行列で、クォークのフレーバー混合を記述する行列である。自由度を数えると、一般に複素 N_F フレーバーのユニタリー行列は N_F^2 個のパラメータがある。しかし $2N_F - 1$ 個のパラメータはクォークの場の再定義によって吸収することが可能である。よって自由度は $(N_F - 1)^2$ 個残る。ここで $N_F = 3$ のときは 4 個の自由度があり、それらは 3 個の混合角と 1 個の位相である。具体例を書くと次のような行列である。

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} c_{12}^q c_{13}^q & s_{12}^q c_{13}^q & s_{13}^q e^{-i\delta^q} \\ -c_{23}^q s_{12}^q - s_{23}^q s_{13}^q c_{12}^q e^{i\delta^q} & c_{23}^q c_{12}^q - s_{23}^q s_{13}^q s_{12}^q e^{i\delta^q} & s_{13}^q c_{13}^q \\ s_{23}^q s_{12}^q - c_{23}^q s_{13}^q c_{12}^q e^{i\delta^q} & -s_{23}^q c_{12}^q - c_{23}^q s_{13}^q s_{12}^q e^{i\delta^q} & c_{23}^q c_{13}^q \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

ここで $s_{ij}^q = \sin \theta_{ij}^q$ 、 $c_{ij}^q = \cos \theta_{ij}^q$ で、 δ^q は CP 対称性を破るディラック位相である。

これまでの議論より、質量をもたせるためには左巻きと右巻きというカイラリティをもった場がどちらも必要であった。よってニュートリノに質量を与えるために、標準模型には含まれていない右巻きニュートリノ ν_{RI} ($I = 1, 2, 3$) を導入する。右巻きニュートリノは標準模型のゲージ重項として導入される。右巻きニュートリノを導入したことによって新たに加わる相互作用項と質量項は、

$$\delta\mathcal{L} = -F_{\alpha I} \bar{L}_\alpha \Phi \nu_{RI} - \frac{(M_M)_{IJ}}{2} \bar{\nu}_{RI}^C \nu_{RJ} + \text{h.c.}, \quad (2.35)$$

である。この M_M をマヨラナ質量行列と呼び、今後荷電レプトンの質量行列が対角的で且つ、マヨラナ質量行列が対角的、つまり、

$$(M_M)_{IJ} = M_I \delta_{IJ}, \quad (2.36)$$

という基底を取る。ヒッグスが真空期待値をもったとき、 $\Phi = \langle \Phi \rangle + \Phi'$ 、クォークの時と同様に、

$$\delta\mathcal{L} = -F_{\alpha I} \langle \Phi \rangle \bar{\nu}_{L\alpha} \nu_{RI} - \frac{M_I}{2} \bar{\nu}_{RI}^C \nu_{RI} - F_{\alpha I} \bar{L}_\alpha \Phi' \nu_{RI} + \text{h.c.}, \quad (2.37)$$

と書ける。第1項について $M_D \equiv F_{\alpha I} \langle \Phi \rangle$ と書き換え、質量行列 \hat{M} を用いるとニュートリノ質量項は次のように書き換えることができる。

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^C \end{pmatrix} \hat{M} \begin{pmatrix} \nu_L^C \\ \nu_R \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

ここでニュートリノの質量行列は次のように書ける。

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_I \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

ここで、 M_D 、 M_M 共に 3×3 行列なので、このニュートリノ質量行列は 6×6 の対称行列である。ディラック質量 M_D は対角的ではないので、このニュートリノ質量行列 \hat{M} を対角化することにより質量固有値と固有状態を求めていくが、それは次の節に譲る。

2.2.4 ニュートリノ質量とシーソー機構

これまでで、標準模型のゲージ重項である右巻きニュートリノを導入することで、ニュートリノに質量をもたせることができた。ここでは、ニュートリノの質量固有値と固有状態を導く。その際、シーソー機構 [9] により、ニュートリノ振動実験によって測られている非常に小さなニュートリノ質量が自然と導出されることを示す。

ニュートリノ質量行列は式 (2.39) で与えられる。この行列は 6×6 の対称行列なので、ユニタリー行列を用いて対角化できる。ディラック質量とマヨラナ質量に階層性があるとすると、次の行列によって固有値を近似的に求めることができる。

$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \Theta \\ -\Theta^\dagger & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

ここで Θ は $\Theta = M_D/M_I$ と定義され、十分に小さい。 $\mathcal{O}(\Theta)$ までで、確かに \hat{U}_1 のユニタリー性を示すことができる。

$$\hat{U}_1^\dagger \hat{U}_1 = \hat{U}_1 \hat{U}_1^\dagger = \begin{pmatrix} 1 + \Theta\Theta^\dagger & 0 \\ 0 & 1 + \Theta^\dagger\Theta \end{pmatrix} = 1 + \mathcal{O}(\Theta^2). \quad (2.41)$$

\hat{U}_1 によるユニタリー変換を行うと、

$$\begin{aligned}\hat{U}_1^\dagger \hat{M} \hat{U}_1^* &= \begin{pmatrix} 1 & -\Theta \\ \Theta^\dagger & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \Theta^* \\ -\Theta^{\dagger*} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\Theta M_D^T - M_D \Theta^\dagger + \Theta M_M \Theta^{\dagger*} & -\Theta M_D^T \Theta^* + M_D - \Theta M_M \\ M_D^T - \Theta^\dagger M_D \Theta^{\dagger*} - M_M \Theta^{\dagger*} & M_D^T \Theta^* + \Theta^\dagger M_D + M_M \end{pmatrix}, \quad (2.42)\end{aligned}$$

この行列がブロック対角的、

$$\hat{M}^{\text{BD}} = \begin{pmatrix} M_\nu & 0 \\ 0 & M_N \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

となっているとすると、次のような関係式を得ることができる。

$$-\Theta M_D^T - M_D \Theta^\dagger + \Theta M_M \Theta^{\dagger*} = M_\nu, \quad (2.44)$$

$$M_D - \Theta M_D^T \Theta^* - \Theta M_M = 0, \quad (2.45)$$

$$M_D^T - \Theta^\dagger M_D \Theta^{\dagger*} - M_M \Theta^{\dagger*} = 0, \quad (2.46)$$

$$M_D^T \Theta^* + \Theta^\dagger M_D + M_M = M_N. \quad (2.47)$$

$\mathcal{O}(\theta^2)$ の項を無視すると、 θ の1次の項までで得られる関係式は以下の通りである。

$$\Theta = M_D M_M^{-1}, \quad (2.48)$$

$$M_\nu = -M_D M_M^{-1} M_D^T, \quad (2.49)$$

$$M_N = M_M. \quad (2.50)$$

これらの関係式より、式(2.42)は次のように書き換えられる。

$$\hat{U}_1^\dagger \hat{M} \hat{U}_1^* = \hat{M}^{\text{BD}} = \begin{pmatrix} M_\nu & 0 \\ 0 & M_N \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

上記のように質量行列のブロック対角化を行うことができた。しかし、式(2.51)中の M_ν は一般的には対角的ではないので、これを対角化することを考える。この行列 M_ν は対称行列であるので、下記のようにユニタリー変換により対角化が可能である。

$$U^\dagger M_\nu U^* = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \equiv M_\nu^{\text{diag}}, \quad (2.52)$$

ここで U は 3×3 のユニタリー行列である。よって式(2.51)に示した行列は次のユニタリー行列を用いて完全に対角化できる。

$$\hat{U}_2 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

以上より、質量行列 \hat{M} は次のように対角化される。

$$\hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{U}^* = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, M_1, M_2, M_3), \quad (2.54)$$

ここで、

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \hat{U}_2 = \begin{pmatrix} U & \Theta \\ -\Theta^\dagger & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

とした。

式(2.49)に着目する。現在ニュートリノ振動で観測されているニュートリノ質量はクォークや荷電レプトンと比べて非常に小さい。よって、 M_ν は非常に小さく抑制されていないといけない。単純に考えて、この抑制の条件を満たすためには、分母、つまりマヨラナ質量 M_M がディラック質量 M_D と比べて十分に大きければいい。この機構をシーソー機構と呼ぶ。またこの条件が成り立つとき、式(2.48)より、 Θ は十分に小さい。

さらに、この対角化するためのユニタリー行列 \hat{U} は、左巻きニュートリノと右巻きニュートリノとの混合を引き起こす。ニュートリノの質量固有状態をそれぞれ ν_i と N_I ($i, I = 1, 2, 3$) とすると、フレーバー固有状態との関係式は次式で与えられる。

$$\hat{U} \begin{pmatrix} \nu_i \\ N_I^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{L\alpha} \\ \nu_{RI}^c \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

よってそれぞれのフレーバーの固有状態は次のように質量固有状態の線形和で書かれる。

$$\nu_{L\alpha} = U_{\alpha i} \nu_i + \Theta_{\alpha I} N_I^c, \quad (2.57)$$

$$\nu_{RI}^c = N_I^c - (\Theta^\dagger U)_{Ii} \nu_i, \quad (2.58)$$

ここで ν_i は質量固有値を m_i と書き、軽いニュートリノの質量固有状態でアクティブニュートリノと呼ばれる。このアクティブニュートリノの質量二乗差 $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ と、混合角が、現在振動実験で観測されている。混合角は、混合行列 $U_{\alpha i}$ に含まれる。一方質量固有値を M_I をもつ N_I は、重いニュートリノの質量固有状態でステライルニュートリノと呼ばれる。ステライルと呼ばれる由縁は、 N_I が $\Theta = M_D/M_M \ll 1$ がかかっている非常に抑制されたゲージ相互作用しか持たないためである。

2.3 宇宙バリオン数非対称性

ここではニュートリノの質量と同様に、標準模型の枠組みでは説明することのできない観測事実、宇宙バリオン数非対称性、について説明する。そしてこの問題に対しても『右巻きニュートリノ』の導入で解決ができることを示す。

2.3.1 観測事実

バリオンとは、3つのクォークから構成される粒子のことで、陽子や中性子はその例である。よってバリオン電荷を割り振ると、陽子や中性子を1として、クォークは1/3、反クォークは-1/3である。次に“バリオン数 n_B ” を定義する。バリオンの数密度 n_b からその反粒子(反バリオン)の数密度 $n_{\bar{b}}$ を引いた、 $n_B = n_b - n_{\bar{b}}$ で定義する。そして観測される残存量 Y_B を次のように定義する。

$$Y_B = \frac{n_B}{s}, \quad (2.59)$$

ここで s はエントロピー密度である。

ビッグバン元素合成と呼ばれる軽元素合成の理論は、現在の観測値を非常に精度よく予言している。このビッグバン元素合成の予言を壊さないような Y_B の値は、次のように与えられる [17]。

$$Y_B = (7.24 - 9.23) \times 10^{-11}, \quad (2.60)$$

さらに、スローン・デジタル・スカイサーベイ (SDSS) [30] や WMAP [1] といった宇宙観測より、この Y_B の値は以下のように測られている [1]。

$$Y_B = (8.58 - 9.01) \times 10^{-11}. \quad (2.61)$$

よって、理論と観測から示唆されている値が非常に精度よく一致しているので、現在の宇宙はバリオン数非対称な宇宙であると言える。今後理論の予言値と比較するときは、より制限の厳しい、観測からついている制限 (2.61) を用いることとする。

ビッグバン元素合成による軽元素の残存量の予言と宇宙背景輻射の観測からの制限は図 2.2 に示している。図 2.2 の横軸は、 η というパラメータで書かれている。このパラメータは、光子の数密度、

$$n_\gamma = \frac{g_\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3p f_\gamma(\mathbf{p}) = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3, \quad (2.62)$$

を用いて、

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma}, \quad (2.63)$$

で定義され、 Y_B と次の関係がある。

$$\eta = Y_B \frac{s}{n_\gamma}, \quad (2.64)$$

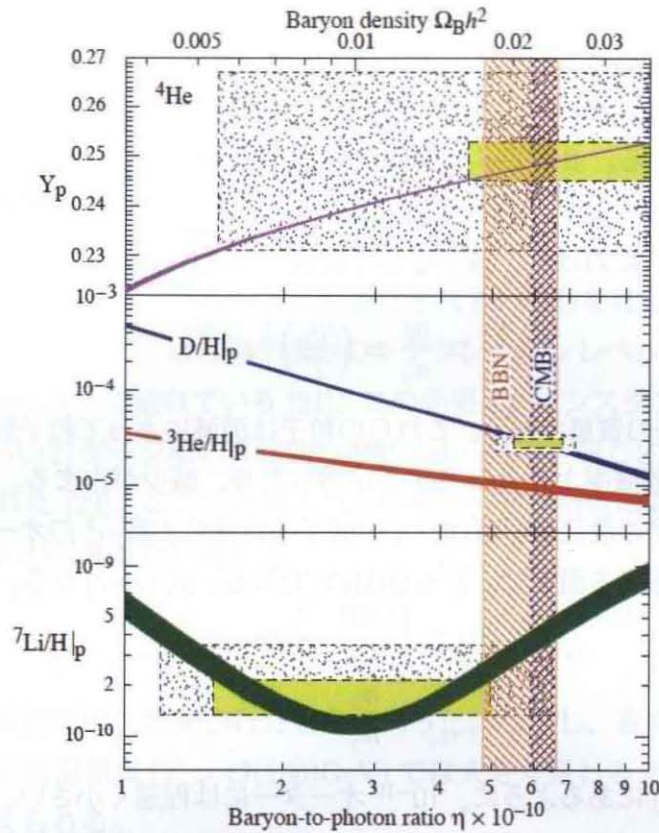


図 2.2: 軽元素の残存量の予言値と観測値。文献 [17] より転載。紫、青、赤そして緑の線がそれぞれ ^4He 、D、 ^3He そして ^7Li の残存量を表している。それぞれの箱は軽元素の観測値で、黄色の領域が 2σ の統計誤差を含めた領域で、大きい箱が 2σ の統計誤差と系統誤差をどちらも含めた領域である。オレンジの斜線の領域がビッグバン元素合成による予言値で、青い斜線の領域が宇宙背景放射の観測による観測値。

ここで s はエントロピー密度なので、

$$\frac{s}{n_\gamma} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3 \simeq 7.04, \quad (2.65)$$

と計算される。ここで、内部自由度は $g_{*S} = 3.91$ である。式 (2.61) から、宇宙観測によって制限される η の範囲は、

$$\eta = (6.04 - 6.34) \times 10^{-10}, \quad (2.66)$$

となる。

2.3.2 宇宙バリオン数生成

現在の宇宙の観測事実より、インフレーション宇宙 [2-5] は強く支持されている。インフレーションを仮定すると、インフレーション期の宇宙のエネルギーは真空のエネルギーが支配している。よってインフレーションが終わった直後非常に高温の宇宙では、バリオンの数と反バリオンの数は同数ある。つまり、 $\eta = 0$ を初期条件とする。宇宙の温度が $T \lesssim 1\text{GeV}$ における、核子そして反核子の残存量は次のように見積もられる。

$$\frac{n_b}{n_\gamma} \simeq \frac{n_{\bar{b}}}{n_\gamma} \simeq \left(\frac{m_p}{T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_p}{T}}, \quad (2.67)$$

ここで m_p は陽子の質量である。これらの粒子は消滅によって粒子数が減少するが、宇宙が冷える時に消滅率よりも宇宙膨張が勝った時、減少が止まる。熱平均を取った核子ないしは反核子の散乱断面積はパイ中間子の質量の2乗 m_π^2 のオーダーで見積もられるので、減少の止まる温度は、 $T \simeq 20\text{MeV}$ である。式 (2.67) から、減少が止まったときの残存量は、

$$\frac{n_b}{n_\gamma} \simeq \frac{n_{\bar{b}}}{n_\gamma} \simeq 10^{-18}, \quad (2.68)$$

となり、式 (2.66) にあるように、 10^{-10} オーダーには程遠く小さい。よって、元素合成を行うためにはバリオンの数と反バリオンの数に新たに非対称性を生まなくてはいけない。この非対称性の生成機構を宇宙バリオン数生成機構 (baryogenesis) と呼ぶ。

この宇宙バリオン数生成機構働くためには、サハロフの3条件 [6] と呼ばれる条件をすべて満たしている必要がある。それらの条件は、

- [i] バリオン数が破れた過程がある。
- [ii] C と CP 対称性が破れた過程がある。
- [iii] 熱平衡からずれた過程がある。

という3つである。条件 [i] は、インフレーション直後ではバリオン数 n_B はゼロなので、バリオン数を生み出す過程が必要なためである。条件 [ii] は、もしCが厳密な対称性であれば、バリオンを増やす過程と反バリオンを増やす過程が同数起きてしまい、非対称性が生成できない。さらに、CPが厳密な対称性であれば、バリオンを増やす過程と、バリオンを減らす過程が同数起きるので非対称性が生成できない。よってCとCPの両方が破れていなくてはならない。条件 [iii] は、もしすべての過程が熱平衡に入っていたとする。この場合、バリオン数を作る演算子 B の熱平均を取ると、

$$\langle B \rangle_T \equiv \text{Tr} (e^{-\beta H} B) = -\text{Tr} (e^{-\beta H} B), \quad (2.69)$$

となる。ここで最後の等式は、バリオン数を作る演算子を CPT 変換した際に現れる。よって、

$$\langle B \rangle_T = 0, \quad (2.70)$$

つまり、バリオン数が作られないということになるためである。よって条件 [i]、[ii] そして [iii] はすべて満たされていないといけない。

まず、標準模型においてこれらの条件が満たされているかを見る。条件 [i] についてだが、バリオン数やレプトン数は標準模型のラグランジアンレベルでは破れていない。しかし、量子異常によって破れている [21]。この効果は、インスタントンと呼ばれる非摂動効果による $SU(2)$ ゲージ場の真空間の遷移によって引き起こされることが 't Hooft によって指摘された [22]。ここで指摘された効果は、ゼロ温度における場の理論で計算されたもので、バリオン数の破れは、

$$\Gamma_{\text{ins}} = \exp \left[-\frac{16\pi^2}{g^2} \right] \simeq 10^{-170}, \quad (2.71)$$

で評価され、指数関数的に抑制されたものであった。しかし、真空間の遷移確率は電弱相転移時よりも高温領域 ($T > \mathcal{O}(100)\text{GeV}$) では大きく変わる [23-26]。その反応率は次のように与えられる。

$$\Gamma_{\text{sph}} \propto (\alpha_W T)^4, \quad (2.72)$$

ここで $\alpha_W = g^2/4\pi$ 。この反応率は単位体積当たりの反応率で定義されているので、次元換算より温度の 4 乗に比例している。詳しくは付録 A に記載するが、この有限温度効果をスファレロン過程と呼ぶ。

次に、 C と CP 対称性の破れは湯川相互作用のラグランジアンの中に現れる。2.2.3 節の式 (2.34) より、標準模型にはクォークセクターに CP 対称性を破る位相 δ^q が存在する。よって条件 [ii] もまた標準模型において満たすことができる。

最後に、条件 [iii] を考察していく。この条件が標準模型において満たされるためには、電弱相転移が強い 1 次相転移であることが要求される。電弱相転移が強い 1 次相転移であるためには、ヒッグスの質量に制限がつく。電弱相転移時の高温領域では、ヒッグスのポテンシャルの形が有限温度の効果で変わる。それに伴い、強い 1 次相転移の実現可能性について検証がされた [31]。ここではその解析について簡単に解説する。

ゼロ温度におけるヒッグス場のポテンシャルは次のように与えられる。

$$V_0 = -\frac{\mu^2}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{4}\Phi^4 + 2Bv_0^2\Phi^2 - \frac{3}{2}B\Phi^4 + B\Phi^4 \ln \left(\frac{\Phi^2}{v_0^2} \right), \quad (2.73)$$

ここで、 $B = \frac{3}{64\pi^2 v_0^4} (2m_W^4 + m_Z^4 - 4m_t^4)$ で定義され、 $v_0 = 246\text{GeV}$ はポテンシャル V_0 の最小値である。さらに、 λ 、 μ 、 v_0 と m_H の間には次の関係式が成り立つ。

$$\lambda = \frac{\mu^2}{v_0^2}, \quad (2.74)$$

$$m_H^2 = 2\mu^2. \quad (2.75)$$

ここではゼロ温度における解析だが、有限温度の効果を議論する必要がある。有限温度の効果を考慮したヒッグス場のポテンシャルは次のように与えられる。

$$V(\Phi, T) = D(T^2 - T_0^2)\Phi^2 - ET\Phi^3 + \frac{\lambda_T}{4}\Phi^4, \quad (2.76)$$

ここで D 、 E 、 T_0 と λ_T は次のように定義する。

$$D = \frac{1}{8v_0^2} (2m_W^2 + m_Z^2 + 2m_t^2), \quad (2.77)$$

$$E = \frac{1}{4\pi v_0^3} (2m_W^3 + m_Z^3), \quad (2.78)$$

$$T_0^2 = \frac{1}{4D} (m_H^2 - 8Bv_0^2), \quad (2.79)$$

$$\lambda_T = \lambda - \frac{3}{16\pi^2 v_0^4} \left(2m_W^4 \ln \frac{m_W^2}{a_B T^2} + m_Z^4 \ln \frac{m_Z^2}{a_B T^2} - 4m_t^4 \ln \frac{m_t^2}{a_F T^2} \right). \quad (2.80)$$

図 2.3 ではヒッグスの質量を $m_H = 50\text{GeV}$ 、トップクォークの質量を $m_t = 120\text{GeV}$ として解析されている。この図からもわかるように、有限温度の効果をとり入れることで、ヒッグス場のポテンシャルの形が変わり、1次相転移が実現できることがある。

また、格子シミュレーションによって、強い1次相転移が実現されるためにはヒッグスの質量には次のような制限が課される [32, 33]。

$$m_\Phi \lesssim 72 [\text{GeV}], \quad (2.81)$$

しかしこの制限は LEP と LEP II 実験によって出されたヒッグスの質量の下限 [17]

$$m_\Phi \gtrsim 114 [\text{GeV}], \quad (2.82)$$

から棄却される。つまり、電弱相転移が強い1次相転移という条件は実現できない。

バリオン数生成のためには、サハロフの3条件をすべて満たす必要があったが、3つの条件のうちの一つ、熱平衡からずれた過程が存在しないことを示した。よって、標準模型の枠組みではバリオン数生成を実現できない。

2.3.3 右巻きニュートリノを導入したバリオン数生成機構

右巻きニュートリノを導入した際のバリオン数生成機構はこれまでも非常に多くの機構が提唱されているが、ここでは2種類の生成機構を例示する。1つは leptogenesis [8]

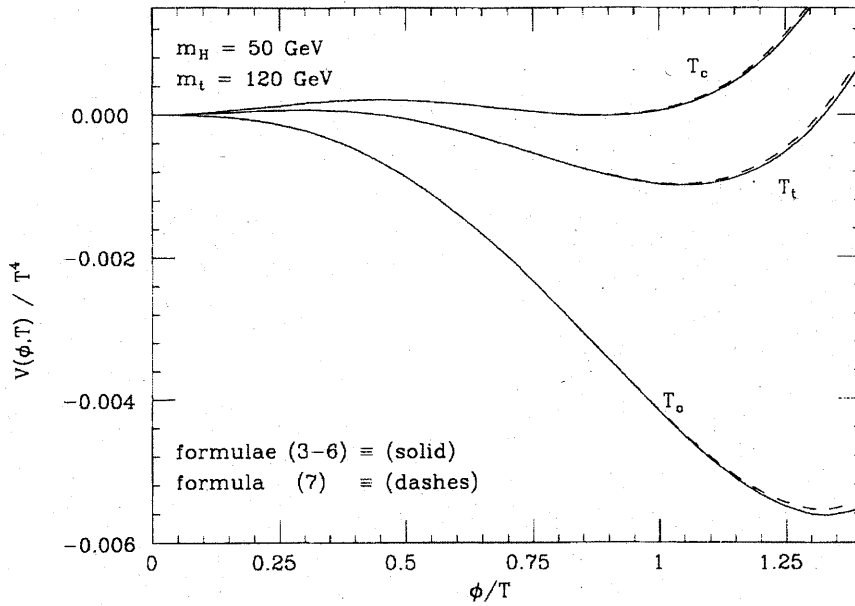


図 2.3: 有限温度の効果を取り入れたヒッグス場のポテンシャルの温度を変えたことによる違い。文献 [31] より転載。

と呼ばれる機構で、これは非常に重い右巻きニュートリノを導入し、これらの崩壊によってレプトン数が生成され、バリオン数へ転換される機構である。もう一方は、右巻きニュートリノの振動を通じた生成機構 [10, 12] である。これは初期宇宙において右巻きニュートリノが伝播しているときフレーバー間振動を起こし、そこで CP 対称性が破れているとレプトン数が生成される。その生成されたレプトン数が左巻きセクターと右巻きセクターに分けられ、左巻きセクターのレプトン数が部分的にバリオン数に転換されるものである。

Leptogenesis

この機構の大きな特徴は、右巻きニュートリノの質量スケールである。Leptogenesis のために必要とされる右巻きニュートリノは非常に重くなくてはならない。さらに、導入された右巻きニュートリノはマヨラナ粒子であるため、以下に書かれる 2 種類の崩壊過程がある。

$$N \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}, \quad (2.83)$$

$$\rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi. \quad (2.84)$$

もし CP 対称性が破れているとすると、この 2 種類の崩壊過程の崩壊率に差が出る。それは図 2.4 のダイアグラムの干渉項によって生じる。導入した右巻きニュートリノの質量を簡単のために $M_1 < M_2 < M_3$ と仮定すると、バリオン数生成に一番有効なのはこ

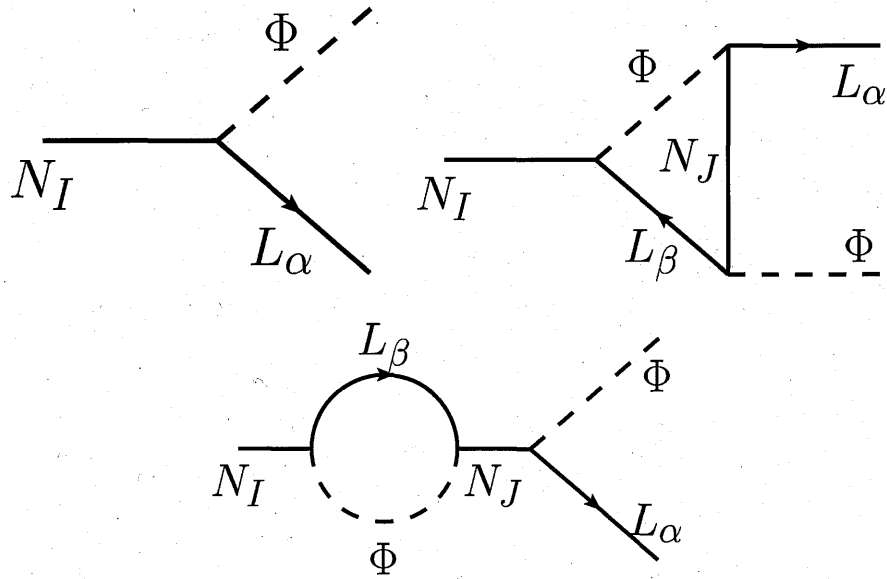


図 2.4: 右巻きニュートリノの崩壊過程の tree と 1 ループのダイアグラム

の中で最も軽い N_1 の崩壊に依るものである。レプトン数が生成される大きさは次の量を用いて計算することができる [34]。

$$\epsilon \equiv \frac{\Gamma(N_1 \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}) - \Gamma(N_1 \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi)}{\Gamma(N_1 \rightarrow L_\alpha + \bar{\Phi}) + \Gamma(N_1 \rightarrow \bar{L}_\alpha + \Phi)}, \quad (2.85)$$

この量を見積もると、次のように計算できる [9]。

$$\epsilon \simeq 1 \times 10^{-6} \times \left(\frac{M_1}{10^{10} \text{GeV}} \right) \delta, \quad (2.86)$$

ここで δ は CP 対称性の破れの大きさを表すパラメータである。

これを用いてバリオン対エントロピー比を求めると次のようになる [35, 36]。

$$\frac{n_B}{s} \simeq 3 \times 10^{-10} \delta \left(\frac{M_1}{10^{10} \text{GeV}} \right). \quad (2.87)$$

よって図 2.5 より、右巻きニュートリノの初期状態をゼロとすると、観測値を説明するためには、 $M_1 > 2.4 \times 10^9 \text{GeV}$ とならなくてはならない。

標準模型に非常に重い右巻きニュートリノを導入した拡張模型は、シーソー機構によってニュートリノ振動実験の示唆している小さなニュートリノ質量を説明することができる。さらにそれだけではなく、右巻きニュートリノの崩壊によって、バリオン数生成も実現することができる。しかしながら、このような非常に重い右巻きニュートリノは将来の実験でも直接検証が不可能である。

右巻きニュートリノの振動を通じたバリオン数生成機構

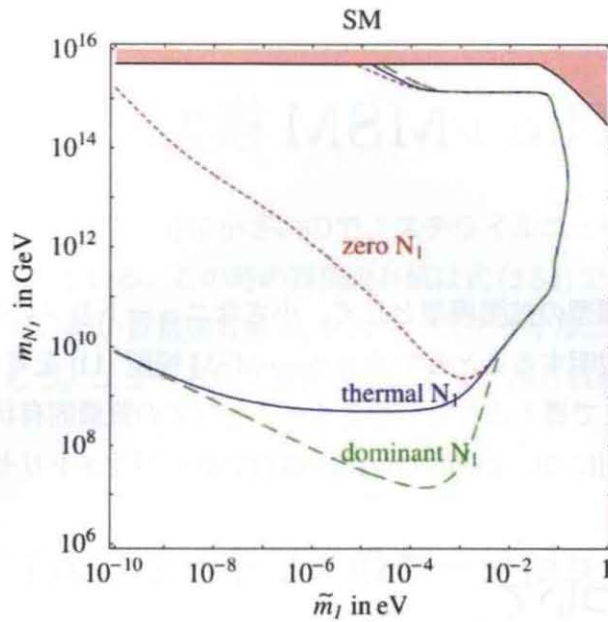


図 2.5: 最も軽い右巻きニュートリノの質量の下限值 [37]。赤の線は初期状態として右巻きニュートリノがない場合、青の線は初期状態として右巻きニュートリノが熱分布に従っている場合で、緑の線は右巻きニュートリノが全宇宙のエネルギーを占めている場合。

前項で述べた leptogenesis シナリオでの右巻きニュートリノは、必要とされる質量が非常に重かった。一方、電弱スケール ($\mathcal{O}(100)\text{GeV}$) 以下の質量をもった右巻きニュートリノを導入してもなお、宇宙バリオン数生成が実現できる機構が 1998 年に Akhmedov らによって提案された [10]。ここで提案されたモデルは、標準模型に電弱スケール以下の質量をもった 3 つの右巻きニュートリノを導入したものである。さらに特徴としては、右巻きニュートリノの湯川結合定数が非常に小さい。こうすることで、ディラック質量とマヨラナ質量の十分な階層性は保たれているので、シーソー機構は依然として働く。そして、この小さな湯川結合定数によって、右巻きニュートリノは熱平衡状態からずれている。バリオン数の生成機構の概要は、右巻きニュートリノの CP 対称性を破るフレーバー間振動を通じたものである。

この機構は、これまでに広く議論されてきた leptogenesis とは全く異なるものである。ここで導入された右巻きニュートリノは将来の実験によって直接検証が期待される。よって本論文ではこちらの機構を採用する。また、この機構については第 4 章で詳しく述べる。

第3章 The ν MSM 模型

本論文では標準模型の拡張模型として、小さなニュートリノの質量そして宇宙バリオン数非対称性を説明することのできる the ν MSM 模型 [11] を考える。まず模型の枠組みを説明し、ここで導入された右巻きニュートリノの質量固有状態について述べる。そしてそれらの役割について説明し、湯川結合定数のパラメトリゼーションを見せる。

3.1 模型について

標準模型の簡単な拡張方法の一つとして、3個の右巻きニュートリノ、 ν_{RI} ($I = 1, 2, 3$) を導入する方法がある。これらの右巻きニュートリノは標準模型のゲージ群のもとで一重項である。標準模型のラグランジアンに新たに付け加わる項は次の項である。

$$\delta\mathcal{L} = i\bar{\nu}_{RI}\not{\partial}\nu_{RI} - F_{\alpha I}\bar{\ell}_{\alpha}\Phi\nu_{RI} - \frac{(M_M)_{IJ}}{2}\bar{\nu}_{RI}^C\nu_{RJ} + \text{h.c.}, \quad (3.1)$$

ここで $F_{\alpha I}$ は 3×3 の湯川結合定数行列で、 M_M はマヨラナ質量行列である。この模型では、ニュートリノはディラック質量 ($M_D = F_{\alpha I}(\Phi)$) とマヨラナ質量 (M_M) をもっている。基底は、荷電レプトンの質量行列とマヨラナ質量行列が対角的な基底を採用する ($(M_M)_{IJ} = M_I\delta_{IJ}$)。さらにこの模型の重要な過程として、2つの質量の間に

$$|M_D| \ll M_M \lesssim \Lambda_{\text{EM}} = \mathcal{O}(100)\text{GeV}, \quad (3.2)$$

という階層性を課す。この階層性のために、シーソー機構は依然として働く。さらに、マヨラナ質量が電弱スケール Λ_{EW} 以下なので、将来の直接検証が期待される。今、式 (3.1) にある右巻きニュートリノをフレーバーの固有状態と呼ぶことにする。この模型を “*Neutrino Minimal Standard Model* (ν MSM)” [11] と呼ぶ。

式 (2.56) より、ニュートリノの質量の固有状態をフレーバーの固有状態を用いて記述するために、両辺の左から \hat{U}^\dagger をかけ、

$$\begin{pmatrix} \nu_i \\ N_i^c \end{pmatrix} = \hat{U}^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{L\alpha} \\ \nu_{RI}^c \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

つまり、

$$\nu_i = U_{\alpha i}^\dagger \nu_{L\alpha} - (U^\dagger \Theta)_{iI} \nu_{RI}^C, \quad (3.4)$$

$$N_I = \Theta_{\alpha I}^\dagger \nu_{L\alpha} + \nu_{RI}^C. \quad (3.5)$$

上式より、 $\Theta = M_D/M_M$ が十分に小さいので、ステライルニュートリノはほぼ右巻きニュートリノで書かれている。この時の質量固有値は式(2.54)で与えられる。アクティブニュートリノ ν_i は、軽い質量固有値 m_i をもち、ステライルニュートリノ N_I は重い質量固有値 M_I をもつ。ニュートリノ振動実験によって測られるニュートリノ質量は m_i である。

3.2 ステライルニュートリノのゲージ相互作用

前節で述べた通り、左巻きと右巻きニュートリノが混合しているところを示したが、これはステライルニュートリノ N_I が混合を通じてゲージ相互作用をもちうることを示している。この節では、ステライルニュートリノのゲージ相互作用の大きさを調べていく。そのために、左巻きニュートリノの荷電カレント (CC) 相互作用を考察する。CC 相互作用ラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} g \bar{e}_{L\alpha} \gamma^\mu W_\mu^- P_L \nu_{L\alpha} + \text{h.c.} \quad (3.6)$$

この相互作用をニュートリノ質量固有状態で記述すると、

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} g W_\mu^- [U_{\alpha i} \bar{e}_\alpha \gamma^\mu P_L \nu_i + \Theta_{\alpha I} \bar{e}_\alpha \gamma^\mu P_L N_I^C] + \text{h.c.}, \quad (3.7)$$

ここでアクティブニュートリノの混合行列、 U は、牧-中川-坂田 (MNS) 行列と呼ばれる [38]。この行列は次のようにパラメトライズすることができる。

$$U_{\alpha i} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta} & s_{13}c_{13} \\ s_{23}s_{12} - c_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha_1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha_2}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

ここで $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ 、 $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ で、 δ はディラック位相、 $\alpha_{1,2}$ はマヨラナ位相である。

一方、ニュートリノ中性カレント (NC) 相互作用は、

$$\mathcal{L}_{\text{NC}} = \frac{g_Z}{2} \bar{\nu}_{L\alpha} \gamma^\mu Z_\mu \nu_{L\alpha}. \quad (3.9)$$

CC相互作用の場合と同様にニュートリノ質量固有状態の相互作用は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{NC}} &= \frac{g_Z}{2} \left(U_{\alpha i}^\dagger \bar{\nu}_i + \Theta_{\alpha I}^\dagger \overline{N_I^C} \right) \gamma^\mu Z_\mu P_L \left(U_{\beta j} \nu_j + \Theta_{\beta J} N_J^C \right) \\
&= \frac{g_Z}{2} Z_\mu \left\{ (U^\dagger U)_{ij} \bar{\nu}_i \gamma^\mu P_L \nu_j + \Theta_{\alpha I}^\dagger U_{\beta j} \overline{N_I^C} \gamma^\mu P_L \nu_j \right. \\
&\quad \left. + U_{\alpha i}^\dagger \Theta_{\beta J} \bar{\nu}_i \gamma^\mu P_L N_J^C + (\Theta^\dagger \Theta)_{IJ} \overline{N_I^C} \gamma^\mu P_L N_J^C \right\} \\
&= \frac{g_Z}{2} Z_\mu \left\{ \bar{\nu}_i \gamma^\mu P_L \nu_j + (\Theta^\dagger U)_{Ij} \overline{N_I^C} \gamma^\mu P_L \nu_j \right. \\
&\quad \left. + (U^\dagger \Theta)_{iJ} \bar{\nu}_i \gamma^\mu P_L N_J^C + (\Theta^\dagger \Theta)_{IJ} \overline{N_I^C} \gamma^\mu P_L N_J^C \right\}, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

ここで、結合定数 g_Z は $g_Z = \sqrt{g^2 + g_Y^2}$ で定義される。繰り返すが、式 (3.7) と (3.10) から、ニュートリノの質量固有状態 N_I のゲージ相互作用は混合行列 $|\Theta|$ が 1 よりずっと小さいことにより (式 (2.48) を参照)、十分に抑制されている。この結果は、ニュートリノの質量固有状態 N_I が “ステライル” ニュートリノと呼ばれ、 ν_i が “アクティブ” ニュートリノと呼ばれる由縁である。

3.3 The ν MSM 模型におけるステライルニュートリノの役割

The ν MSM 模型には 3 つの右巻きニュートリノが導入され、質量固有状態のうち質量が重いものをステライルニュートリノと呼んでいる。これらのステライルニュートリノにはそれぞれ素粒子物理・宇宙物理的に非常に大きな役割がある。まず 3 つのうち一番軽いもの、 N_1 、は、宇宙暗黒物質の候補となっている [26-31]。ここでは深くは立ち入らないが、暗黒物質となるためには質量が 4–50keV で、湯川結合定数が $|F_{\alpha 1}| = 5 \times 10^{-15} - 4 \times 10^{-13}$ という制限がついている。湯川結合定数がここまで厳しく制限を受けているのは、 N_1 の崩壊によって放出される X 線の観測によるものである [44]。これらの制限のために、 N_1 はシーソー機構とバリオン数非対称性の生成への寄与は非常に小さく、無視することができる。よって簡単のために、今後 $F_{\alpha 1} = 0$ と置く [48]。

残りの 2 つ、 N_2 と N_3 がシーソー機構によるニュートリノ質量と、宇宙バリオン数非対称性の生成を説明する。宇宙バリオン数非対称性を説明するために、それらの質量 M_2 と M_3 は十分に縮退している必要がある。この N_2 と N_3 の性質について、次節で詳しく見ていくことにする。

3.4 The ν MSM 模型における湯川結合定数

ここでは、宇宙バリオン数非対称性の生成に関する右巻きニュートリノ N_2 と N_3 の相互作用について議論していく。今導入されている右巻きニュートリノは湯川相互作用ししない。そこで、 N_2 と N_3 の湯川結合定数がどのようなパラメータで書かれるかを説明する。

シーソー行列 M_ν に戻ると、

$$M_\nu = -M_D M_M^{-1} M_D = -\langle \Phi \rangle F M_M^{-1} F^T, \quad (3.11)$$

この行列は MNS 行列によって対角化でき、

$$U^\dagger M_\nu U^* \equiv D_\nu = \text{diag}(m_1, m_2, m_3), \quad (3.12)$$

一方、マヨラナ質量行列は対角的であったので、

$$D_N \equiv \text{diag}(M_1, M_2, M_3), \quad (3.13)$$

とそれぞれ定義する。3.3 節でも述べたとおり、the ν MSM における 3 つの右巻きニュートリノのうち最も軽いもの N_1 は、暗黒物質候補となっている。このステライルニュートリノの相互作用は、他のステライルニュートリノと比べても非常に抑制されていて、簡単のために $F_{\alpha 1} = 0$ と置いた。この湯川結合定数行列を採用すると、ニュートリノ質量行列に関する行列式がゼロとなるので、ニュートリノの質量固有値のうちの 1 つは必ずゼロとならなくてはならない。質量固有値の値の関係から、ゼロとなるのはアクティブニュートリノの質量で、質量階層性が順階層型の時は $m_1 = 0$ とし、 $m_3 = 0$ とする。さらに、 $F_{\alpha 1} = 0$ と置いたとき、ニュートリノ質量行列の M_1 に関する依存性がなくなるので、 D_N は 2×2 行列、

$$D_N = \text{diag}(M_2, M_3), \quad (3.14)$$

とすることができる。詳しくは付録に記載するが、これらの行列を用いて、2 つの右巻きニュートリノがシーソー機構によってニュートリノ質量を説明するとすると、湯川結合定数は一般性を失わずに次のように書かれる [45]。

$$F = \frac{i}{\langle \Phi \rangle} U D_\nu^{\frac{1}{2}} \Omega D_N^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

ここで U は式 (3.8) の MNS 行列だが、今右巻きニュートリノは 2 つなので、マヨラナ位相の自由度が 1 つしかなく、 $\alpha_1 = 0$ 、 $\alpha_2/2 = \eta$ と書くことにする。また、 Ω は任意

の複素数 ω を要素にもつ直交行列で $\Omega^T \Omega = \Omega \Omega^T = 1$ を満たす。アクティブニュートリノの質量が順階層型の場合、

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos \omega & -\sin \omega \\ \xi \sin \omega & \xi \cos \omega \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

と書くことができ、逆階層型の場合は次のようになる。

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \xi \sin \omega & \xi \cos \omega \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

ここで、 $\xi = \pm 1$ は符号パラメータである。参考文献 [46] より、符号パラメータと ω は、 $\omega \rightarrow -\omega$ とし、さらに $\xi N_3 \rightarrow N_3$ と再定義することで対応が付く。

以上より、湯川結合定数の中で、CP 対称性を破る位相は 3 つある。それらは MNS 行列の中のディラック位相 δ とマヨラナ位相 η そして式 (3.16) 中の ω の虚数部分 $\text{Im}\omega$ である。2.3.2 節でも述べたとおり、バリオン数非対称性を生成するには、十分な大きさの CP 対称性の破れが必要であった。The ν MSM 模型では、小林-益川行列の中の CP 位相 δ^q だけではなく、十分な CP 対称性の破れの源があるため、サハロフの 3 条件のうちの、[ii] の条件を十分に満たすことができる。

湯川結合定数を決めるパラメータは以下の通りである。ここではアクティブニュートリノの質量が順階層型の場合のみを挙げると、アクティブニュートリノの質量 m_2 、 m_3 、ステライルニュートリノの質量 M_2 、 M_3 、MNS 行列内の混合角 θ_{12} 、 θ_{23} 、 θ_{13} 、 ω の実数部分 $\text{Re}\omega$ 、そして上にも書きだした通り、3 つの CP 対称性を破る位相 δ 、 η そして $\text{Im}\omega$ である。

第4章 右巻きニュートリノの振動を通じたバリオン数生成機構

この章では、本博士論文で採用した、右巻きニュートリノの振動を通じたバリオン数生成機構について解説していく。この機構に基づいてバリオン数の生成を記述する際、密度行列を用いた定式化が用いられる。その理由は、leptogenesis シナリオで重要となる右巻きニュートリノの崩壊や生成といったコヒーレントではない効果だけでなく、右巻きニュートリノのフレーバー間振動というコヒーレントな効果もまた取り入れる必要があるためである。密度行列を用いた発展方程式は量子力学的振幅に対する発展方程式であり、密度行列の非対角成分がこのようなフレーバー間振動の効果を記述する。この章では、[48]で行われた解析を基に定式化を行っていく。これらの中で取り扱われた密度行列は、着目粒子の運動量を温度程度と近似して解析が行われている。

これから先本章では、密度行列に基づく定式化について一般的な議論をする。そして今回の模型 the ν MSM 模型における解析で用いる密度行列について解説をし、右巻きニュートリノの振動を通じたバリオン数生成機構について述べる。

4.1 密度行列

ここでは、密度行列について解説をしていく。本博士論文で採用するバリオン数生成機構には、ニュートリノ振動という量子力学的な干渉効果が非常に重要となる。この効果を取り入れることが、密度行列を取り扱う理由である。まず初めに例として、右巻きニュートリノに関する密度行列を定義していく。そのために、一般化された粒子数演算子を次のように導入する。

$$\frac{d}{d^3x d^3q} \hat{N}(I, \lambda_I; J, \lambda_J) = \frac{1}{V} \hat{a}_I^\dagger(\lambda_I, \vec{q}) \hat{a}_J(\lambda_J, \vec{q}), \quad (4.1)$$

ここで I, J はフレーバーの足で、 $\lambda_{(I,J)}$ はヘリシティの固有値である。また、 V は3次元空間の体積で、 \hat{a}^\dagger はヘリシティ λ をもった粒子の生成演算子で、 \hat{a} は消滅演算子である。右巻きニュートリノに対する密度行列 $\rho_N(t, q)$ を次式で定義する。

$$[\rho_N]_{IJ}(t, \vec{q}) = \text{Tr} \left[\hat{\rho}(t) \frac{d}{d^3x d^3q} \hat{N}(I, \lambda_I; J, \lambda_J) \right] = \frac{1}{V} \text{Tr} \left[\hat{\rho}(t) \hat{a}_J^\dagger(\lambda_J, \vec{q}) \hat{a}_I(\lambda_I, \vec{q}) \right]. \quad (4.2)$$

$\hat{\rho}(t)$ は系全体の密度行列演算子である。そしてトレースは着目している系の完全系についての足し上げを指す。まずはヘリシティーとして、 $\lambda_I = +1$ 、 $\lambda_J = +1$ の場合を考える。この場合、密度行列の対角成分、つまり $[\rho_N]_{II}$ は右巻きニュートリノ (ヘリシティー+1) の数密度に対応する。以後ヘリシティー+1の状態を N と書き、ヘリシティー-1の状態を \bar{N} と書く。右巻きニュートリノ N_I の粒子数密度は次式で与えられる。

$$n_{n_I} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\rho_N]_{II}, \quad (4.3)$$

一方、密度行列の非対角成分、つまり $[\rho_N]_{IJ}$ ($I \neq J$) はヘリシティー+1の右巻きニュートリノのフレーバー間混合の情報を含んでいる。この右巻きニュートリノのフレーバー間混合の際の CP 対称性の破れが、宇宙バリオン数生成には必要不可欠となる。今後、密度行列についても ρ_N と書くときはヘリシティーが+の状態を指し、 $\rho_{\bar{N}}$ と書くときはヘリシティーが-の状態を指す。

次に、右巻きニュートリノに対する密度行列の時間発展を考察する。ここでは簡単のため、まず相互作用のない自由粒子として振る舞う右巻きニュートリノに対する密度行列の時間発展を考察する。系の体積は時間に依らないので、時間発展は次のように求めることができる。

$$\frac{d}{dt} \rho_N(t) = \frac{1}{V} \text{Tr} \left[\left(\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} \right) \hat{a}_J^\dagger \hat{a}_I \right]. \quad (4.4)$$

ここで、密度行列演算子の時間発展は次のように与えられる。

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -i [\hat{H}, \hat{\rho}(t)], \quad (4.5)$$

ここで、 \hat{H} は系のハミルトニアン演算子である。式 (4.4) に代入すると、密度行列の時間発展は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \rho_N &= \frac{1}{V} \text{Tr} \left[[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \hat{a}_J^\dagger \hat{a}_I \right] \\ &= \frac{1}{V} \text{Tr} \left[\hat{\rho}(t) [\hat{a}_J^\dagger \hat{a}_I, \hat{H}] \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

今、右巻きニュートリノは自由粒子として振る舞うとしたので、 \hat{H} の中で注目すべき項は、

$$\hat{H} = \int d^3p \sum_{K,L} \sum_{\lambda_K, \lambda_L} \hat{a}_K^\dagger(\lambda_K, \vec{p}) H_{KL}(\lambda_K, \lambda_L, \vec{p}) \hat{a}_L(\lambda_L, \vec{p}), \quad (4.7)$$

ここで、 H_{IJ} は自由粒子として振る舞う右巻きニュートリノのエネルギー固有値であり、次式で与えられる。

$$H_{IJ} = \delta_{IJ} \delta_{\lambda_I \lambda_J} \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}. \quad (4.8)$$

これを用いて、式(4.6)中の交換関係の評価する。

$$[\hat{a}_J^\dagger(\lambda_J, \vec{q}) \hat{a}_I(\lambda_I, \vec{q}), \hat{H}] = \sum_{K, \lambda_K} \left[H_{IK}(\lambda_I, \lambda_J, \vec{q}) \hat{a}_J^\dagger(\lambda_J, \vec{q}) \hat{a}_K(\lambda_K, \vec{q}) - H_{KJ}(\lambda_K, \lambda_J, \vec{q}) \hat{a}_K^\dagger(\lambda_K, \vec{q}) \hat{a}_I(\lambda_I, \vec{q}) \right], \quad (4.9)$$

この場合、密度行列の時間発展は、

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \rho_N(t, \vec{q}) &= \sum_{K, \lambda_K} \frac{1}{V} \text{Tr} \left[\hat{\rho}(t) \left\{ H_{IK}(\lambda_I, \lambda_J, \vec{q}) \hat{a}_J^\dagger(\lambda_J, \vec{q}) \hat{a}_K(\lambda_K, \vec{q}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - H_{KJ}(\lambda_K, \lambda_J, \vec{q}) \hat{a}_K^\dagger(\lambda_K, \vec{q}) \hat{a}_I(\lambda_I, \vec{q}) \right\} \right] \\ &= \sum_{K, \lambda_K} \{ H_{IK}(\lambda_I, \lambda_J, \vec{q}) \rho_{K, \lambda_K; J, \lambda_J} - H_{KJ}(\lambda_K, \lambda_J, \vec{q}) \rho_{I, \lambda_I; K, \lambda_K} \} \\ &= [H, \rho_N]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

以上より、右巻きニュートリノの密度行列の自由粒子のハミルトニアンによる時間発展を求めることができた。また、右巻き反ニュートリノについても同様にして時間発展を求めることができる。式(4.10)に従う、右巻きニュートリノの密度行列の成分を書くと次のような行列となる。

$$\rho_N = \begin{pmatrix} \rho_{NN} & \rho_{N\bar{N}} \\ \rho_{\bar{N}N} & \rho_{\bar{N}\bar{N}} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

この密度行列の各要素は the ν MSM 模型の場合、それぞれが 3×3 の行列である。さらに言うと、今回のバリオン数生成機構に寄与をする右巻きニュートリノは2つなので、 ρ_N の各要素は 2×2 行列である。

The ν MSM 模型においてどのような密度行列が必要かを議論していく。これまでは右巻きニュートリノのみの系を考えていたが、the ν MSM 模型では左巻きレプトンも含めた系を考えなくてはいけない。この行列を書くと次のように与えられる。

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{LL} & \rho_{L\bar{L}} & \rho_{LN} & \rho_{L\bar{N}} \\ \rho_{\bar{L}L} & \rho_{\bar{L}\bar{L}} & \rho_{\bar{L}N} & \rho_{\bar{L}\bar{N}} \\ \rho_{NL} & \rho_{N\bar{L}} & \rho_{NN} & \rho_{N\bar{N}} \\ \rho_{\bar{N}L} & \rho_{\bar{N}\bar{L}} & \rho_{\bar{N}N} & \rho_{\bar{N}\bar{N}} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

この行列 ρ は 10×10 行列で、右巻きニュートリノの密度行列以外の構成している行列の大きさはそれぞれ次のようである。 ρ_{LL} と $\rho_{\bar{L}\bar{L}}$ は 3×3 の行列、 ρ_{LN} 、 $\rho_{L\bar{N}}$ 、 $\rho_{\bar{L}N}$ 、 $\rho_{\bar{L}\bar{N}}$ は 3×2 の行列、 ρ_{NL} 、 $\rho_{N\bar{L}}$ 、 $\rho_{\bar{N}L}$ 、 $\rho_{\bar{N}\bar{L}}$ は 2×3 の行列である。この行列 ρ の対角成分は粒子ないし反粒子の数密度に対応している。よって非対称性は粒子の密度行列の対角成分から反粒子の密度行列の対角成分を引いて求めることができる (例: $\rho_{LL} - \rho_{\bar{L}\bar{L}}$)。一方非対角成分は、前述の通りフレーバー混合に対応している。

4.2 密度行列による定式化

前節で、密度行列を導入した。ここではこの密度行列を用い、粒子の生成や消滅といった確率が保存しない過程を記述する相互作用を考慮した発展方程式を考察する。そこで、参考文献 [49] にあるように、1 粒子既約のグリーン関数を用いた摂動展開によるアプローチで発展方程式を構築していく。自由粒子の時間発展に加え、粒子の生成・消滅を考慮に入れると、発展方程式は次のように書かれる [49]。

$$i\frac{d}{dt}\rho = [H, \rho] - \frac{i}{2}\{\Gamma^d, \rho\} + \frac{i}{2}\{\Gamma^p, 1 - \rho\}, \quad (4.13)$$

ここで H は有効ハミルトニアンで $H = H^0 + H^{int}$ 、 $\Gamma^{d(p)}$ は粒子の消滅 (生成) 率である。今後本博士論文では、この方程式にボルツマン統計を採用する。つまり、第3項を $\{\Gamma^p, 1 - \rho\} \rightarrow 2\Gamma^p$ とする。この仮定により、発展方程式は次のように書き換えられる。

$$i\frac{d}{dt}\rho = [H, \rho] - \frac{i}{2}\{\Gamma^d, \rho\} + i\Gamma^p, \quad (4.14)$$

次に、熱平衡時の密度行列、 ρ^{eq} 、を導入する。熱平衡時は粒子の生成と消滅が同数起きるので、生成率を次のように書き換えることができる。

$$i\Gamma^p = \frac{i}{2}\{\Gamma^d, \rho^{eq}\}, \quad (4.15)$$

これにより発展方程式は次のように書き換えられる。

$$i\frac{d}{dt}\rho = [H, \rho] - \frac{i}{2}\{\Gamma^d, \rho - \rho^{eq}\}. \quad (4.16)$$

ここで、有効ハミルトニアンを求めていく。定義として、自由粒子のハミルトニアン H^0 は、有効ハミルトニアンにおいて右巻きニュートリノ湯川結合定数をゼロとしたときに残るところとする。よって H^0 は対角的で、 $H^0 = \text{diag}(H_{LL}^0, H_{\bar{L}\bar{L}}^0, H_{NN}^0, H_{\bar{N}\bar{N}}^0)$ と書ける。各成分は次のように計算される [50]。

$$[H_{LL}^0]_{\alpha\alpha} = [H_{\bar{L}\bar{L}}^0]_{\alpha\alpha} = k + \frac{T^2}{k} \left(\frac{3g_W^2 + g_Y^2}{32} + \frac{h_\alpha^2}{8} \right), \quad (4.17)$$

$$[H_{NN}^0]_{II} = [H_{\bar{N}\bar{N}}^0]_{II} = \sqrt{k^2 + M_I^2}, \quad (4.18)$$

ここで k は粒子の持つ運動量で、 g_W 、 g_Y はそれぞれ $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ の結合定数で、 h_α は荷電レプトンの湯川結合定数である。左巻きレプトンについての第2、3項は左巻きレプトンの自己エネルギーを計算することで得られる。相互作用ハミルトニアン H^{int} については後でまた議論する。

この自由粒子のハミルトニアンを用いて、相互作用描像に移る。この操作によって発展方程式の中の自由粒子のハミルトニアンに比例する項を落とすことができることを見ていく。そのために、次のようなユニタリ行列を定義する。

$$\tilde{U}(t) \equiv \exp \left[-i \int_0^t dt' H^0(t') \right], \quad (4.19)$$

ここで、先に述べたとおり H^0 は対角行列なので、 \tilde{U} もまた対角行列である。このユニタリ行列を用いて、相互作用描像における密度行列は $\tilde{\rho} = \tilde{U}^\dagger \rho \tilde{U}$ と書けるので、元の密度行列の時間発展は相互作用描像における密度行列を用いて次のように計算される。

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \rho(t) &= i \frac{d}{dt} (\tilde{U} \tilde{\rho} \tilde{U}^\dagger) \\ &= \tilde{U} \left(i \frac{d}{dt} \tilde{\rho} + [H^0, \tilde{\rho}] \right) \tilde{U}^\dagger, \end{aligned} \quad (4.20)$$

これを用いて相互作用描像における発展方程式は次のように書ける。

$$i \frac{d}{dt} \tilde{\rho} = [\tilde{H}^{int}, \tilde{\rho}] - \frac{i}{2} \left\{ \tilde{\Gamma}^d, \tilde{\rho} - \rho^{eq} \right\}, \quad (4.21)$$

ここで～付きはすべて相互作用描像におけるものである。さらにここで注意することは、密度行列の対角成分は相互作用描像においても変わらないことである。また、このユニタリ行列の中の時間積分を、温度の積分に変える。エントロピーの保存から、次の関係式を得る。

$$\frac{d}{dt} S = \frac{d}{dt} (g_{*S}(t) T^3(t) R^3(t)) = 0, \quad (4.22)$$

ここで、 $g_{*S}(t)$ は時刻 t における内部自由度で、 $R(t)$ はスケール因子である。今考えているような温度の領域では、内部自由度は定数なので、上式は次の関係式に変わる。

$$\frac{dT}{dt} = -T \frac{\dot{R}}{R} = -TH, \quad (4.23)$$

ここで H はハッブルパラメータである。さらに、今の温度領域では宇宙は輻射優勢の宇宙となっていて、ハッブルパラメータは次のように計算される。

$$H^2 = \frac{1}{3M_P^2} \rho_{tot} = \frac{\pi^2 g_{*S}}{90M_P^2} T^4, \quad (4.24)$$

ここで M_P は reduced Planck 質量と呼ばれる量で、 $M_P \equiv M_{pl}/\sqrt{8\pi} = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$ となる量である。これを式 (4.23) に代入して、時刻を温度で書き直すと、次のようになる。

$$dt = - \left(\frac{90}{\pi^2 g_{*S}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{M_P}{T^3} dT \equiv - \frac{M_0}{T^3} dT. \quad (4.25)$$

この関係式を用いて \tilde{U} を書き直すと、次のようになる。

$$\tilde{U} = \exp \left[-i \int_T^\infty dT' \frac{M_0 H^0(T')}{T'^3} \right]. \quad (4.26)$$

次に、密度行列 (4.12) は次のようなことを考えると簡単に書くことができる。これまでに述べてきたユニタリー行列は密度行列のすべての要素に対して作用する。例として、 ρ_{LN} 成分を相互作用描像に移したときにどうなるかを考察する。この要素は次のような変換で相互作用描像との関係を得ることができる。

$$\rho_{LN} = \tilde{U}_{LL} \tilde{\rho}_{LN} \tilde{U}_{NN}^\dagger = \tilde{U}_{LL} \tilde{U}_{NN}^\dagger \tilde{\rho}_{LN}. \quad (4.27)$$

この変換行列の部分を抜き出して書くと次のようになる。

$$\tilde{U}_{LL} \tilde{U}_{NN}^\dagger = \exp \left[-i \int_T^\infty dT_1 \frac{M_0}{T_1^3} (H_{LL}^0 - H_{NN}^0) \right], \quad (4.28)$$

ここで、ハミルトニアン⁰の部分は $H_{LL}^0 - H_{NN}^0 = T \left(\frac{3g_W^2 + g_Y}{32} + \frac{h_\alpha}{8} \right)$ と書ける。今、 H_{NN}^0 の中のマヨラナ質量の項は考えている温度領域では効かないので落とした。よって積分を実行すると次のように書き直すことができる。

$$\tilde{U}_{LL} \tilde{U}_{NN}^\dagger = \exp \left[-i \left(\frac{3g_W^2 + g_Y}{32} + \frac{h_\alpha}{8} \right) \frac{M_0}{T} \right]. \quad (4.29)$$

これは、温度が低くなってくると非常に激しい振動を生む。よって、系から逸脱しているため ρ_{LN} 成分はゼロと置くことができる。同じ理由で、密度行列 (4.12) の $\rho_{L\bar{N}}$ 、 $\rho_{\bar{L}N}$ 、 ρ_{NL} 、 $\rho_{N\bar{L}}$ 、 $\rho_{\bar{N}L}$ 、 $\rho_{\bar{N}\bar{L}}$ はすべてゼロと置けるので、密度行列を次のように書き換えることができる。

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{LL} & \rho_{L\bar{L}} & 0 & 0 \\ \rho_{\bar{L}L} & \rho_{\bar{L}\bar{L}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{NN} & \rho_{N\bar{N}} \\ 0 & 0 & \rho_{\bar{N}N} & \rho_{\bar{N}\bar{N}} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

それだけではなく、左巻きレプトンの密度行列の非対角成分、つまり ρ_{LL} 、 $\rho_{L\bar{L}}$ 、 $\rho_{\bar{L}L}$ と $\rho_{\bar{L}\bar{L}}$ の非対角成分もまたゼロと置ける。理由は以下の通りである。荷電レプトンの湯川相互作用は階層的であるため、各フレーバーの間に十分なエネルギー差がある。よって左巻きレプトンのフレーバー間混合もまた激しい振動となる。さらに、現在考えている高温領域ではレプトン数が保存しているために、 $\rho_{N\bar{N}}$ 、 $\rho_{\bar{N}N}$ もゼロに置くことができるため、最終的に密度行列は次の形となる。

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{LL}^{\text{diag}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{\bar{L}\bar{L}}^{\text{diag}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{NN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{\bar{N}\bar{N}} \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

この密度行列からわかることは、右巻きニュートリノと左巻きレプトンの発展方程式は分けて書くことができる。

付録 D. に導出の詳細は記載するが、有効ポテンシャル・消滅率を代入して発展方程式を書き直す。

$$i \frac{d\rho_{NN}}{dt} = [H_N, \rho_{NN}] - \frac{i}{2} \{\Gamma_N, \rho_{NN} - \rho_{NN}^{eq}\} + \frac{i \sin \phi}{8} T F^\dagger (\rho_{LL} - \rho_{LL}^{eq}) F, \quad (4.32)$$

$$i \frac{d\rho_{LL}^{diag}}{dt} = \text{diag} \left[[H_L, \rho_{LL}] - \frac{i}{2} \{\Gamma_L, \rho_{LL} - \rho_{LL}^{eq}\} + \frac{i \sin \phi}{4} T F (\rho_{NN} - \rho_{NN}^{eq}) F^\dagger \right] \quad (4.33)$$

ここで $\sin \phi \equiv \Gamma/2V$ と定義される量である。そしてそれぞれの第3項は、右巻きニュートリノと左巻きレプトンとを結びつける項である。また、これらの方程式を得るにあたって、次の注意が必要である。それは左巻きレプトンの密度行列についてである。今は SU(2) が破れる前の宇宙を考えているので、荷電レプトンとニュートリノの密度行列は同じとなる。そこで、 $\rho_{LL} = \rho_{ee} + \rho_{\nu\nu}$ と定義する。反粒子に関する発展方程式は湯川結合定数に対して荷電共役をとり、密度行列を $-$ 付きのものに変えればよい。

密度行列に対する発展方程式 (4.32) と (4.32) を得たが、参考文献 [10] で議論している発展方程式は、式 (4.32) の第1項と第2項からなる方程式である。一方参考文献 [48] で初めて、式 (4.32) と (4.32) の両方の方程式を取り入れて解析が行われた。

4.3 右巻きニュートリノの振動を通じたバリオン数生成

ここでは、右巻きニュートリノの振動を通じたバリオン数生成機構について考察する。まずは、この機構が初めて導入された Akhmedov らによる解析 [10] について議論をする。そしてこの解析を改良した参考文献 [48] について考察していく。

4.3.1 Akhmedov らによる解析

この節では、今回採用している右巻きニュートリノの振動を通じたバリオン数生成機構について解説していく。まず始めに、参考文献 [10] に従って湯川結合定数に関する摂動論を用い、ステライルニュートリノの非対称性について評価していく。この解析では、NOW 右巻きニュートリノの密度行列の従う発展方程式は、

$$i \frac{d\rho_{NN}}{dt} = [H_N, \rho_{NN}] - \frac{i}{2} \{\Gamma_N, \rho_{NN} - \rho_{NN}^{eq}\}, \quad (4.34)$$

$$i \frac{d\rho_{\bar{N}\bar{N}}}{dt} = [H_{\bar{N}}, \rho_{\bar{N}\bar{N}}] - \frac{i}{2} \{\Gamma_{\bar{N}}, \rho_{\bar{N}\bar{N}} - \rho_{\bar{N}\bar{N}}^{eq}\}, \quad (4.35)$$

この発展方程式の解は、発展行列と呼ばれる行列 $S(t, t_i)$ を用いて次のように書くことができる。

$$\rho_{NN}(t) = \rho_N^{eq} \left[1 - S_N(t, t_i) S_N^\dagger(t, t_i) \right], \quad (4.36)$$

熱平衡時の密度行列 ρ_N^{eq} は、次の方程式を解くことで得られる。

$$i \frac{d}{dt} \rho_N^{eq} = [H, \rho_N^{eq}]. \quad (4.37)$$

ここで H は $H = H_N - \frac{i}{2} \Gamma_N = H_N^0 + V_N - \frac{i}{2} \Gamma_N$ で定義されるハミルトニアンである。このハミルトニアンは、最後の項によってエルミート性が失われている。ここからは、この発展行列を求めることで、右巻きニュートリノの密度行列の時間発展を追う。時刻 $t = t_i$ における初期条件は次のように定める。

$$\rho_{NN}(t_i) = \rho_{\bar{N}\bar{N}}(t_i) = 0, \quad (4.38)$$

つまり、インフレーション直後の初期宇宙において、右巻きニュートリノ、右巻き反ニュートリノは宇宙に存在していないこととする。

今後簡単のために、次の量を定義する。

$$\Delta_N \equiv \text{diag}(\rho_{NN} - \rho_{\bar{N}\bar{N}}), \quad \Sigma_N \equiv \text{diag}(\rho_{NN} + \rho_{\bar{N}\bar{N}}), \quad (4.39)$$

この Δ_N が右巻きニュートリノの非対称性を与える。式(4.36)より、

$$\frac{\Delta_N}{\rho_N^{eq}} = - \left[S_N(t, t_i) S_N^\dagger(t, t_i) - S_{\bar{N}}(t, t_i) S_{\bar{N}}^\dagger(t, t_i) \right], \quad (4.40)$$

$S_{\bar{N}}$ は S_N の荷電共役によって得ることができる。また、発展行列は次の方程式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial t} S_N(t, t_i) = -i \hat{H}(t) S_N(t, t_i), \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_i} S_N(t, t_i) = +i S_N(t, t_i) \hat{H}(t_i), \quad (4.42)$$

さらに、発展行列を次のように分解する。

$$S_N(t, t_i) = \tilde{U}(t, t_i) S_N^I(t, t_i), \quad (4.43)$$

ここで、式(4.19)より、

$$\tilde{U}(t, t_i) = \exp \left[-i \int_{t_i}^t dt' H_N^0(t') \right], \quad (4.44)$$

は自由粒子の発展行列である。この行列を用いて、相互作用描像へと移ることができる。よって時間微分は、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} S_N(t, t_i) &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}(t, t_i) \right] S_N^I(t, t_i) + \tilde{U}(t, t_i) \left[\frac{\partial}{\partial t} S_N^I(t, t_i) \right] \\ &= -iH_N^0(t) \tilde{U}(t, t_i) + \tilde{U}(t, t_i) \left[\frac{\partial}{\partial t} S_N^I(t, t_i) \right].\end{aligned}\quad (4.45)$$

式(4.41)との比較によって、相互作用ハミルトニアン $H_N^{int} = V_N - \frac{i}{2}\Gamma_N$ との関係式、

$$S_N^0(t, t_i) \left[\frac{\partial}{\partial t} S_N^I(t, t_i) \right] = -iH_N^{int} S_N(t, t_i), \quad (4.46)$$

を得る。ここで、自由粒子のハミルトニアン H_N^0 はエルミート行列なので、 $[S_N^0(t, t_i)]^{-1} = S_N^{0\dagger}(t, t_i)$ を満たす。さらに、 $S_N^I(t, t_i)$ の時間発展は次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} S_N^I(t, t_i) = -iS_N^{0\dagger}(t, t_i) H_N^{int} S_N^0(t, t_i) S_N^I(t, t_i) \equiv -iH_N^{intI} S_N^I(t, t_i), \quad (4.47)$$

この、 H_N^{intI} は相互作用描像における相互作用ハミルトニアンである。式(4.47)を解くために積分を実行すると、

$$S_N^I(t, t_i) = S_N^I(t_i, t_i) + \int_{t_i}^t dt_1 \left(-iH_N^{intI}(t_1) \right) S_N^I(t_i, t_i). \quad (4.48)$$

相互作用ハミルトニアンは $\mathcal{O}(F^2)$ の量で、湯川結合定数が非常に小さいために次のように摂動展開が可能である。

$$S_N^I(t, t_i) = \sum_p S_{N,p}^I(t, t_i), \quad (4.49)$$

この解を相互作用ハミルトニアン H_N^{intI} で展開して、0次から3次まで書くと、

$$S_{N,0}^I(t, t_i) = S_N^I(t_i, t_i) = 1, \quad (4.50)$$

$$S_{N,1}^I(t, t_i) = (-i) \int_{t_i}^t dt_1 H_N^{intI}(t_1), \quad (4.51)$$

$$S_{N,2}^I(t, t_i) = (-i)^2 \int_{t_i}^t \int_{t_i}^{t_1} dt_1 dt_2 H_N^{intI}(t_1) H_N^{intI}(t_2), \quad (4.52)$$

$$S_{N,3}^I(t, t_i) = (-i)^3 \int_{t_i}^t \int_{t_i}^{t_1} \int_{t_i}^{t_2} dt_1 dt_2 dt_3 H_N^{intI}(t_1) H_N^{intI}(t_2) H_N^{intI}(t_3). \quad (4.53)$$

$$(4.54)$$

ここから、 H_N^{intI} を発展行列を用いて表していく。右巻きニュートリノの自由粒子のハミルトニアン式(4.18)より、十分に高温領域では運動量は典型的に温度程度である

と評価でき、運動量を任意の係数 c_k を用いて $k = c_k T$ と表記すると、次のように書き換えが可能である。

$$H_N^0(t) = \frac{1}{2c_k} \frac{\text{diag}[M_I^2]}{T}, \quad (4.55)$$

また、時間と温度の関係式 (4.25) を用いて、自由粒子の発展行列は次式で得られる。

$$\tilde{U}(t, t_i) = \exp \left[-i \int_{t_i}^t dt_1 H_N^0(t_1) \right] = \exp \left[-i \frac{c_t M_p \text{diag}[M_I^2]}{2c_k} \int_T^{T_i} dT_1 \frac{1}{T_1^4} \right]. \quad (4.56)$$

今、興味のある温度領域は、インフレーション直後の非常に高温領域から、元素合成の始まる MeV 程度の領域までなので、この積分は実行が可能で次式で計算される。

$$\tilde{U}(t, t_i) = \exp \left[-i \frac{c_t M_p \text{diag}[M_I^2]}{6c_k T^3} \right]. \quad (4.57)$$

これを用いて、相互作用描像における相互作用ハミルトニアンは、次式で得られる。

$$\begin{aligned} [H_N^{int I}(t)]_{IJ} &= \exp \left[+i \frac{c_t}{6c_k} \frac{M_p M_I^2}{T^3} \right] \exp \left[-i \frac{c_t}{6c_k} \frac{M_p M_J^2}{T^3} \right] [H_N^{int}]_{IJ} \\ &\equiv \exp \left[+i \frac{c_t}{6c_k} \frac{M_p}{T^3} \Delta M_{IJ}^2 \right] [H_N^{int}]_{IJ}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

有効ポテンシャルと消滅率から、 H_N^{int} は次式で得られる。

$$[H_N^{int}]_{IJ} = \frac{1 - i \sin \phi}{8} T [F^\dagger F]_{IJ}, \quad (4.59)$$

ここで $\sin \phi \equiv \Gamma_N / 2V_N$ と定義した。これから、簡単に表記するために、次の量を定義する。

$$[T_L]_{IJ} = \left(\frac{c_t}{6c_k} M_p \Delta M_{IJ}^2 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.60)$$

ただし、この量は単なる表記を簡単にするためだけのものではなく、物理的な意味を持つ。 T_L は、右巻きニュートリノ N_I が N_J へ世代間混合をし始める典型的な温度である。

右巻きニュートリノの相互作用ハミルトニアンを得ることができたので、ここからは摂動展開によって解を求めていく。式 (4.49) のように摂動展開したので、 $S_N(t, t_i) S_N^\dagger(t, t_i)$ について、 $H_N^{int I}$ の 0 次の項は、

$$\left[S_N^I(t, t_i) S_N^{I\dagger}(t, t_i) \right]_{II}^{0th} = [S_{N,0}^I]_{II} [S_{N,0}^{I\dagger}]_{II} = 1, \quad (4.61)$$

よって、非対称性は $H_N^{int I}$ の 0 次のオーダーでは生成されない。次に、 $H_N^{int I}$ の 1 次のオーダー、つまり $\mathcal{O}(F^2)$ では、

$$\left[S_N^I(t, t_i) S_N^{I\dagger}(t, t_i) \right]_{IJ}^{1st} = [S_{N,1}^I]_{IJ} + [S_{N,1}^{I\dagger}]_{IJ}, \quad (4.62)$$

という項が現れる。この2項のうち、 $S_{N,1}^{I\dagger}$ は $S_{N,1}^I$ の荷電共役によって得ることができるので、第1項のみを計算する。

$$\begin{aligned} [S_1^I]_{IJ} &= (-i)c_t M_p \frac{1-i\sin\phi}{8} [F^\dagger F]_{IJ} \int_0^\infty dT_1 \frac{1}{T_1^2} \exp\left[i\frac{[T_L]_{IJ}^3}{T_1^3}\right] \\ &= (-i)c_t M_p \frac{1-i\sin\phi}{8} [F^\dagger F]_{IJ} [I_1]_{IJ}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

この積分 I_1 は実数部分と虚数部分に分けることができ、次のように計算できる。

$$\int_0^\infty dT \operatorname{Re} [[I_1]_{IJ}] = \frac{\Gamma[\frac{1}{3}]}{2\sqrt{3}}, \quad \int_0^\infty dT \operatorname{Re} [[I_1^*]_{IJ}] = \frac{\Gamma[\frac{1}{3}]}{2\sqrt{3}}, \quad (4.64)$$

$$\int_0^\infty dT \operatorname{Im} [[I_1]_{IJ}] = \frac{\Gamma[\frac{1}{3}]}{6}, \quad \int_0^\infty dT \operatorname{Im} [[I_1^*]_{IJ}] = -\frac{\Gamma[\frac{1}{3}]}{6}, \quad (4.65)$$

よって非対称性は次のように評価できる。

$$[\Delta_N]_{II} \Big|_{1st} = \rho_N^{eq} \left[2c_t M_p \frac{\sin\phi}{8} \operatorname{Im} [I_1]_{II} [[F^\dagger F]_{II} - [F^T F^*]_{II}] \right], \quad (4.66)$$

しかし、湯川結合定数の2次の対角成分 $[F^\dagger F]_{II}$ は実なので、

$$[F^\dagger F]_{II} - [F^T F^*]_{II} = 0, \quad (4.67)$$

つまり、 H_N^{intI} の1次の寄与では、

$$[\Delta_N]_{II} \Big|_{1st} = 0. \quad (4.68)$$

よって、 $\mathcal{O}(F^2)$ では右巻きニュートリノの非対称性は生成されない。

次に、 H_N^{intI} の2次のオーダー、つまり $\mathcal{O}(F^4)$ の計算をしていく。 $\mathcal{O}(F^4)$ の寄与は、次の通りである。

$$[S_N^I(t, t_i) S_N^{I\dagger}(t, t_i)]_{II}^{2nd} = [S_{N,2}^I]_{II} + [S_{N,2}^{I\dagger}]_{II} + \sum_J [S_{N,1}^I]_{IJ} [S_{N,1}^{I\dagger}]_{JI}. \quad (4.69)$$

$S_{N,2}^I$ に関しては次のように計算できる。

$$\begin{aligned} [S_2^I]_{II} &= (c_t M_p)^2 \frac{\sin^2\phi - 1}{8^2} \left\{ ([F^\dagger F]_{II})^2 [I_2]_{III} + \sum_{J \neq I} [F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JI} \operatorname{Re} [[I_2]_{IJI}] \right\} \\ &\quad + (c_t M_p)^2 \frac{2i\sin\phi}{8^2} \left\{ ([F^\dagger F]_{II})^2 [I_2]_{III} + \sum_{J \neq I} [F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JI} \operatorname{Im} [[I_2]_{IJI}] \right\}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

ここで積分 I_2 は次式で得られる。

$$[I_2]_{IJI} = \int_0^\infty dT \left(\frac{1}{T^2} \exp\left[i\frac{[T_L]_{IJ}^3}{T^3}\right] \right)^2 = \frac{1}{2} [I_1]_{IJ}^2, \quad (4.71)$$

よって、 I_1 を用いて得ることができる。まとめると、

$$\begin{aligned}
& [S_{N,2}^I]_{II} + [S_{N,2}^{I\dagger}]_{II} \\
&= 2(c_t M_p)^2 \frac{\sin^2 \phi - 1}{8^2} \left\{ ([F^\dagger F]_{II})^2 [I_2]_{III} + \sum_{J \neq I} [F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JI} \operatorname{Re} [[I_2]_{IJI}] \right\} \\
&+ 2(c_t M_p)^2 \frac{2i \sin \phi}{8^2} \left\{ \sum_{J \neq I} [F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JI} \operatorname{Im} [[I_2]_{IJI}] \right\}, \quad (4.72)
\end{aligned}$$

さらに第3項は、

$$\sum_J [S_{N,1}^I]_{IJ} [S_{N,1}^{I\dagger}]_{JI} = (c_t M_p)^2 \left(\frac{1 + \sin^2 \phi}{8^2} \right) \sum_J |[F^\dagger F]_{IJ}|^2 |[I_1]_{IJ}|^2, \quad (4.73)$$

以上より、 $\mathcal{O}(F^4)$ での非対称性は次式で評価される。

$$\begin{aligned}
[\Delta_N]_{II} \Big|_{2nd} &= \rho_N^{eq} \left[2(c_t M_p)^2 \frac{\sin^2 \phi - 1}{8^2} \left\{ ([F^\dagger F]_{II})^2 - ([F^T F^*]_{II})^2 \right\} [I_2]_{III} \right. \\
&+ \sum_{J \neq I} \left[|[F^\dagger F]_{IJ}|^2 - |[F^T f^*]_{IJ}|^2 \right] \operatorname{Re} [[I_2]_{IJI}] \left. \right\} \\
&+ 2(c_t M_p)^2 \frac{2i \sin \phi}{8^2} \left\{ \sum_{J \neq I} \left[|[F^\dagger F]_{IJ}|^2 - |[F^T F^*]_{IJ}|^2 \right] \operatorname{Im} [[I_2]_{IJI}] \right\} \\
&+ (c_t M_p)^2 \left(\frac{1 + \sin^2 \phi}{8^2} \right) \sum_J \left[|[F^\dagger F]_{IJ}|^2 - |[F^T F^*]_{IJ}|^2 \right] |[I_1]_{IJ}|^2 \Big] \quad (4.74)
\end{aligned}$$

ここで、先ほどと同じ議論より、 $\sum_J |F^\dagger F|^2$ もまた実なので、

$$[\Delta_N]_{II} \Big|_{2nd} = 0. \quad (4.75)$$

となり、 $\mathcal{O}(F^4)$ でも全非対称性は生成できない。

さて、 H_N^{int} ついてもう1次上げ、 $\mathcal{O}(F^6)$ の寄与を計算していく。このオーダーの寄与は、

$$\begin{aligned}
[S_{N,3}^I(t, t_i) S_{N,3}^{I\dagger}(t, t_i)]_{II}^{3rd} &= [S_{N,3}^I]_{II} + [S_{N,3}^{I\dagger}]_{II} + \sum_J [S_{N,2}^I]_{IJ} [S_{N,1}^{I\dagger}]_{JI} \\
&+ \sum_J [S_{N,1}^I]_{IJ} [S_{N,2}^{I\dagger}]_{JI}. \quad (4.76)
\end{aligned}$$

を計算すればよい。 $S_{N,3}$ は、

$$[S_{N,3}^I]_{II} = (-i c_t M_p)^3 \left(\frac{1 - i \sin \phi}{8} \right)^3 \sum_{J,K} [F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JK} [F^\dagger F]_{KI} [I_3]_{IJKI} \quad (4.77)$$

となり、積分部分 I_3 は、

$$[I_3]_{IJKI} = \int_0^\infty dT \left(\frac{1}{T^2} \exp \left[i \frac{[T_L]_{IJ}^3}{T^3} \right] \right)^3 = \frac{1}{6} [I_1]_{II}^3, \quad (4.78)$$

となり、これもまた I_1 を用いて求めることができる。さらに、湯川結合定数に関して陽に書き下していくと、

$$\begin{aligned} \sum_{J,K} [F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JK} [F^\dagger F]_{KI} &= \sum_J [F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JI} [F^\dagger F]_{II} \\ &\quad + \sum_{J,K \neq I} [F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JK} [F^\dagger F]_{KI} \\ &= \sum_J |[F^\dagger F]_{IJ}|^2 [F^\dagger F]_{II} + \sum_J |[F^\dagger F]_{IJ}|^2 [F^\dagger F]_{JJ} \\ &\quad + \sum_{K \neq I, J} |[F^\dagger F]_{IK}|^2 [F^\dagger F]_{II} \\ &\quad + \sum_{J \neq I} \sum_{K \neq I, J} [F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JK} [F^\dagger F]_{KI}, \quad (4.79) \end{aligned}$$

これまでの議論を踏まえ、非対称性を考えたときにこの中で残る項は、最後の項だけである。よって、式(4.76)の最初の2項は次式のように計算できる。

$$\begin{aligned} [S_{N,3}^I]_{II} + [S_{N,3}^{I\dagger}]_{II} &= -4 \frac{(c_t M_p)^3}{8^3} \sum_{J \neq I} \sum_{K \neq I, J} \text{Im} [[F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JK} [F^\dagger F]_{KI}] \\ &\quad \times [(1 - 3 \sin^2 \phi) \text{Re} [[I_3]_{IJKI}] + (3 \sin \phi - \sin^3 \phi) \text{Im} [[I_3]_{IJKI}]]. \quad (4.80) \end{aligned}$$

残りの項はこれまでと同様に計算が可能で、結果のみを書くと、

$$\begin{aligned} &\sum_J [S_2^I]_{IJ} [S_1^{I\dagger}]_{JI} + \sum_J [S_1^I]_{IJ} [S_2^{I\dagger}]_{JI} \\ &= 4 \frac{(c_t M_p)^3}{8^3} \sum_{J \neq I} \sum_{K \neq I, J} \text{Im} [[F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JK} [F^\dagger F]_{KI}] \\ &\quad \times \{ (1 + \sin^2 \phi) \text{Re} [[I_2]_{IJK} [I_1]_{KI}^*] + (\sin^3 \phi + \sin \phi) \text{Im} [[I_2]_{IJK} [I_1]_{KI}^*] \}. \quad (4.81) \end{aligned}$$

以上の結果をまとめると、 $\mathcal{O}(F^6)$ での非対称性は、

$$\begin{aligned} [\Delta_N]_{II} \Big|_{3rd} &= \rho_N^{eq} \cdot 4 \frac{(c_t M_p)^3}{8^3} \sum_{J \neq I} \sum_{K \neq I, J} \text{Im} [[F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JK} [F^\dagger F]_{KI}] \\ &\quad \times \left[\{ (1 - 3 \sin^2 \phi) \text{Re} [[I_3]_{IJKI}] + (3 \sin \phi - \sin^3 \phi) \text{Im} [[I_3]_{IJKI}] \} \right. \\ &\quad \left. - \{ (1 + \sin^2 \phi) \text{Re} [[I_2]_{IJK} [I_1]_{KI}^*] + (\sin^3 \phi + \sin \phi) \text{Im} [[I_2]_{IJK} [I_1]_{KI}^*] \} \right], \quad (4.82) \end{aligned}$$

ここで、 $\sin \phi = 0$ つまり、消滅率がゼロの場合を仮定すると、

$$[\Delta_N]_{II}(\phi \rightarrow 0) \Big|_{\sin \phi \rightarrow 0} = \rho_N^{eq} \cdot 4 \frac{(c_t M_p)^3}{8^3} \sum_{J \neq I} \sum_{K \neq I, J} \text{Im} [[F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JK} [F^\dagger F]_{KI}] \\ \times [\text{Re} [[I_3]_{IJKI}] - \text{Re} [[I_2]_{IJK} [I_1]_{KI}^*]] . \quad (4.83)$$

この積分の差は等しいので、この項からは非対称性は生成されないので、この項は落とすことができ、結果として非対称性に寄与をする項は、

$$[\Delta_N]_{II} \Big|_{3rd} = \rho_N^{eq} \cdot 4 \frac{(c_t M_p)^3}{8^3} \sum_{J \neq I} \sum_{K \neq I, J} \text{Im} [[F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JK} [F^\dagger F]_{KI}] \\ \times \left[\{-3 \sin^2 \phi \text{Re} [[I_3]_{IJKI}] + (3 \sin \phi - \sin^3 \phi) \text{Im} [[I_3]_{IJKI}]\} \right. \\ \left. - \{\sin^2 \phi \text{Re} [[I_2]_{IJK} [I_1]_{KI}^*] + (\sin^3 \phi + \sin \phi) \text{Im} [[I_2]_{IJK} [I_1]_{KI}^*]\} \right] . \quad (4.84)$$

よって、 $\mathcal{O}(F^6)$ で初めて右巻きニュートリノの非対称性が生じる。この非対称性の大きさは、湯川結合定数と積分の結果によって決まる。積分の結果をまとめておくと、以下のように計算できる。

$$[I_3]_{3213} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{27} e^{i\frac{\pi}{6}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.85)$$

$$[I_3]_{3123} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{27} e^{-i\frac{\pi}{6}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.86)$$

$$[I_3]_{2132} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{27} e^{i\frac{\pi}{6}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.87)$$

$$[I_3]_{2312} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{27} e^{-i\frac{\pi}{6}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.88)$$

$$[I_3]_{1231} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{27} e^{i\frac{\pi}{6}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.89)$$

$$[I_3]_{1321} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{27} e^{-i\frac{\pi}{6}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.90)$$

$$[I_2]_{321} [I_1]_{13}^* = [I_2]_{321} [I_1]_{31} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{54} e^{i\frac{\pi}{2}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.91)$$

$$[I_2]_{312} [I_1]_{23}^* = [I_2]_{312} [I_1]_{32} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{27} e^{i\frac{\pi}{6}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.92)$$

$$[I_2]_{213} [I_1]_{32}^* = [I_2]_{213} [I_1]_{23} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{27} e^{i\frac{\pi}{6}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.93)$$

$$[I_2]_{231} [I_1]_{12}^* = [I_2]_{231} [I_1]_{21} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{27} e^{-i\frac{\pi}{6}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.94)$$

$$[I_2]_{132} [I_2]_{21}^* = [I_2]_{132} [I_2]_{12} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{27} e^{-i\frac{\pi}{6}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 , \quad (4.95)$$

$$[I_2]_{123} [I_1]_{31}^* = [I_2]_{123} [I_1]_{13} = \frac{1}{[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}} \frac{1}{54} e^{-i\frac{\pi}{2}} (\Gamma[\frac{1}{3}])^3 . \quad (4.96)$$

このすべての積分結果の係数の分子にある、 $[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13}$ は、

$$[T_L]_{32} [T_L]_{21} [T_L]_{13} = \frac{c_t}{6c_k} M_p (\Delta M_{32}^2 \Delta M_{21}^2 \Delta M_{13}^2)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.97)$$

となる。

また、湯川結合定数については、次のようにパラメトライズする。

$$F = \tilde{K}_L F_d \tilde{K}_R, \quad (4.98)$$

ここで、

$$F_d = \text{diag}(F_1, F_2, F_3), \quad \tilde{K}_L = K_L P_\alpha, \quad \tilde{K}_R = K_R P_\beta, \quad (4.99)$$

とする。マヨラナ位相に関する行列 $P_{\alpha,\beta}$ は、

$$P_\alpha = \text{diag}(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, 1), \quad P_\beta = \text{diag}(e^{i\beta_1}, e^{i\beta_2}, e^{i\beta_3}), \quad (4.100)$$

とでき、 $K_{L,R}$ は小林-益川行列的な回転行列である。

このパラメトリゼーションで、湯川結合定数の6次の虚数部分を求めていく。これを δ_{IJK} と定義すると、これは次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \delta_{IJK} &= \text{Im} \left[[F^\dagger F]_{IJ} [F^\dagger F]_{JK} [F^\dagger F]_{KI} \right] \\ &= \text{Im} \left[[K_R F_D^2 K_R^\dagger]_{IJ} [K_R F_D^2 K_R^\dagger]_{JK} [K_R F_D^2 K_R^\dagger]_{KI} \right]. \end{aligned} \quad (4.101)$$

ここで着目すべきは、 δ_{IJK} に寄与をするのは K_R の中のディラック位相 δ_R のみであるということ。また、 δ_{IJK} のうち、考えるべき項は δ_{321} のみであり、これの特徴としては、

$$\delta_{321} = \delta_{132} = \delta_{213} = (F_1^2 - F_2^2)(F_1^2 - F_3^2)(F_2^2 - F_3^2) J_R, \quad (4.102)$$

ここで、 J_R はヤルスコフ不変量 [47] と呼ばれ、次のように書かれる。

$$J_R = \cos \theta_{R12} \cos \theta_{R23} \cos^2 \theta_{R13} \sin \theta_{R12} \sin \theta_{R23} \sin \theta_{R13} \sin \delta_R. \quad (4.103)$$

つまり、導入された3つの右巻きニュートリノのが十分に混合していれば、 J_R が十分に大きくなるので、バリオン数非対称性の観測を説明することができる。

また、現在考えている右巻きニュートリノの質量は電弱スケールよりも軽いので、全レプトン数 L_{tot} は保存している。しかし、標準模型のレプトン数 L_L と右巻きニュートリノのレプトン数 L_N の総和がゼロなので、各レプトン数自体は保存量ではなく、ここで生じた L_N の逆符号で L_L もまた生成される。そして生じた L_L がスファレロン過程によって部分的にバリオン数に転換されることで現在の観測を説明することができる。

4.3.2 Asakaらによる解析

一方、the ν MSM 模型の場合、3つのステライルニュートリノのうち1つが宇宙暗黒物質の起源となっているために、他のステライルニュートリノとの混合がほとんどない。つまり、式 (4.103) 中の混合角 θ_{R12} と θ_{R13} は非常に小さい。よってこのままでは十分な非対称性を生成することができない。しかし、参考文献 [12] 以降では、左巻きレプトンに関する密度行列を含めた式 (4.31) の密度行列を考える。そしてそれらが従う発展方程式は、参考文献 [48] より、式 (4.32) と (4.33) である。これらの発展方程式の第3項にあるように、右巻きニュートリノと左巻きレプトンを結ぶ項が含まれている。積分の形でこれらの発展方程式の解を書くと次式で与えられる。

$$\rho_{NN} = -i \int_0^t dt' (\text{式 (4.32) の右辺}), \quad (4.104)$$

$$\rho_{LL} = \rho_{LL}^{eq} - i \int_0^t dt' (\text{式 (4.33) の右辺}). \quad (4.105)$$

また、左巻きレプトン、右巻きニュートリノの非対称性をそれぞれ ΔL_α ($\alpha = e, \mu, \tau$)、 ΔN_I ($I = 2, 3$) と表記する。

まず初めに非対称性に対して寄与をもたらすのは $\mathcal{O}(F^4)$ で、次のような寄与である。

$$\frac{d}{dt} \Delta L_\alpha = \frac{\sin \phi}{4} T \text{diag} (F \rho_{NN} F^\dagger - F^* \rho_{\bar{N}\bar{N}} F^T), \quad (4.106)$$

これは式 (4.33) の第3項から来たものである。しかし、第5章に詳しく記載するが、 $\mathcal{O}(F^4)$ の寄与はフレーバーについての足し上げを行うと消えてしまう。よって全非対称性に寄与をする最高次はこの寄与ではない。 $\mathcal{O}(F^4)$ の寄与を通じて、 $\mathcal{O}(F^6)$ の寄与として、

$$\frac{d}{dt} \Delta N_I = \frac{\sin \phi}{4} T (F^\dagger \Delta L_\alpha F), \quad (4.107)$$

より、

$$\Delta N_I \Big|_{T_W} = \frac{\sin \phi}{4} \frac{M_0}{T_W} \left(F^\dagger \Delta L_\alpha \Big|_{T_W} F \right), \quad (4.108)$$

が右巻きニュートリノのセクターに生じる。この寄与は M_0/T_W という因子によって非常に増長されている。

以上より、the ν MSM 模型においても右巻きニュートリノと左巻きレプトンを結ぶ項を考慮することによって、十分な非対称性を生成することができる。定量的な評価は次の章より行っていく。

第5章 宇宙バリオン数非対称性と ニュートリノパラメータの相関

これまでで右巻きニュートリノ・左巻きレプトンの密度行列に対する発展方程式を得ることができた。この章ではこれらの方程式を用いて生成されるバリオン数の解析を行っていく。第一に、現在考えられる過程において、粒子数非対称性がどのような効果によって生じるのかを示す。次に、バリオン数の生成量の解析解を示す。ここでは CP 対称性の破れに起因する特徴的なパラメータに着目し、それがどのようなパラメータによって書かれているかを見せる。最後に、模型の中の3つの CP 位相の中の1つ $\text{Im}\omega$ がゼロの場合つまり MNS 行列の中の CP 位相が CP 対称性の破れの源となっている場合に限定をし、その場合の解析解と数値解析を示し、そこで重要となる MNS 行列のパラメータについて議論をする。

5.1 生成されるバリオン数の解析解

発展方程式 (4.32)、(4.33) を解くことで生成されるバリオン数を求めることができるが、この連立方程式の厳密解を求めることは難しい。しかし、今考えている模型の湯川結合定数は非常に小さいために、湯川結合定数の摂動展開をすることによって解を近似的に求めることができる。非対称性は密度行列の粒子の対角要素から反粒子の対角要素を引くことで得られるので、そこで CP 非対称性があると非対称性が生成される。湯川の摂動で考えると、 $\mathcal{O}(F^0)$ では明らかに CP 対称なので非対称性は生成されない。次に $\mathcal{O}(F^2)$ でも、対角成分には CP 対称性の破れは現れない。しかし $\mathcal{O}(F^2)$ の非対角成分には十分な物理がある。それは右巻きニュートリノのフレーバー間振動である。右巻きニュートリノのフレーバー間振動は図 C のダイアグラムで表される過程で起こる。また、このフレーバー間振動が起き始める典型的な温度は、次のように与えられる。

$$T_L = \left(\frac{1}{6} M_0 \Delta M_{32}^2 \right)^{\frac{1}{3}} = 6.2 \text{ TeV} \left(\frac{M_N}{10 \text{ GeV}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\Delta M_{32}^2 / M_N^2}{10^{-8}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.1)$$

ここで $\Delta M_{32}^2 = M_3^2 - M_2^2$ とした。

前の章でも述べたとおり、初めて対角成分に CP 非対称性が現れるのは $\mathcal{O}(F^4)$ で、ここで初めて非対称性が生成される。この $\mathcal{O}(F^4)$ における CP 対称性の破れに起因するパラメータを A_{IJ}^α と置くと、このパラメータは次のように計算できる。

$$A_{IJ}^\alpha = \text{Im} \left[F_{\alpha I} (F^\dagger F)_{IJ} F_{J\alpha}^\dagger \right], \quad (5.2)$$

ここで I, J は 2 もしくは 3 を取るが、CP 対称性の破れは非対角成分に現れるので、今後 $I = 3, J = 2$ と固定してこのパラメータを表していく。

湯川結合定数の定義式 (3.15) に基づいて A_{32}^α を具体的に記述していく。まず、 $(F^\dagger F)_{32}$ は次のように書くことができる。

$$(F^\dagger F)_{32} = \frac{\sqrt{M_2 M_3}}{\langle \Phi \rangle^2} (\Omega^\dagger D_\nu \Omega)_{32}, \quad (5.3)$$

これを用いて、湯川結合定数の 4 次は以下の通りである。

$$\begin{aligned} F_{\alpha 3} (F^\dagger F)_{32} F_{2\alpha}^\dagger &= \frac{M_2 M_3}{\langle \Phi \rangle^4} (\Omega^\dagger D_\nu \Omega)_{32} \left(U D_\nu^{\frac{1}{2}} \Omega \right)_{\alpha 3} \left(U^* D_\nu^{\frac{1}{2}} \Omega^* \right)_{\alpha 2} \\ &\equiv \frac{M_2 M_3}{\langle \Phi \rangle^4} X, \end{aligned} \quad (5.4)$$

ただし、ここではニュートリノの質量が順階層型の場合を考え $D_\nu = \text{diag}(0, m_2, m_3)$ とした。 Ω の具体系を代入すると X は次のように書ける。

$$\begin{aligned} X &= m_2^2 |U_{\alpha 2}|^2 |\sin \omega|^2 |\cos \omega|^2 + m_3^2 |U_{\alpha 3}|^2 |\sin \omega|^2 |\cos \omega|^2 \\ &\quad + \xi \sqrt{m_2 m_3} m_3 U_{\alpha 3} U_{\alpha 2}^* |\cos \omega|^2 \sin \omega (\cos \omega)^* \\ &\quad - \xi \sqrt{m_2 m_3} m_3 U_{\alpha 2} U_{\alpha 3}^* |\sin \omega|^2 \sin \omega (\cos \omega)^* \\ &\quad - m_2 m_3 |U_{\alpha 2}|^2 \sin^2 \omega (\cos^2 \omega)^2 - m_2 m_3 |U_{\alpha 3}|^2 \cos^2 \omega (\sin^2 \omega)^2 \\ &\quad + \xi \sqrt{m_2 m_3} m_2 U_{\alpha 2} U_{\alpha 3}^* |\sin \omega|^2 \cos \omega (\sin \omega)^* \\ &\quad - \xi \sqrt{m_2 m_3} m_2 U_{\alpha 3} U_{\alpha 2}^* |\cos \omega|^2 \cos \omega (\sin \omega)^*, \end{aligned} \quad (5.5)$$

この中で第 1 項と 2 項は実なので、今はそれ以外の部分を考える。式 (5.5) の第 2 行目から、 A, B, C と置くと、それぞれの虚数部分は次のように求められる。

$$A = \frac{\xi m_3 \sqrt{m_2 m_3}}{4} \left\{ (X_\omega^2 - X_\omega^{-2}) \text{Re}(U_{\alpha 3} U_{\alpha 2}^*) \cos 2\text{Re}\omega \right. \\ \left. + (X_\omega^2 + X_\omega^{-2}) \text{Im}(U_{\alpha 3} U_{\alpha 2}^*) \sin 2\text{Re}\omega \right\}, \quad (5.6)$$

$$B = \frac{m_2 m_3}{4} (X_\omega^2 - X_\omega^{-2}) \sin 2\text{Re}\omega (|U_{\alpha 3}|^2 - |U_{\alpha 2}|^2), \quad (5.7)$$

$$C = \frac{\xi m_2 \sqrt{m_2 m_3}}{4} \left\{ (X_\omega^2 - X_\omega^{-2}) \text{Re}(U_{\alpha 3} U_{\alpha 2}^*) \cos 2\text{Re}\omega \right. \\ \left. - (X_\omega^2 + X_\omega^{-2}) \text{Im}(U_{\alpha 3} U_{\alpha 2}^*) \sin 2\text{Re}\omega \right\}, \quad (5.8)$$

ここで $X_\omega \equiv \exp[i\text{Im}\omega]$ とした。以上より、

$$\begin{aligned} \text{Im}X &= \text{Im}A + \text{Im}B + \text{Im}C \\ &= \frac{\xi m_3 \sqrt{m_2 m_3}}{4} \left\{ (m_2 + m_3)(X_\omega^2 - X_\omega^{-2}) \text{Re}(U_{\alpha 3} U_{\alpha 2}^*) \cos 2\text{Re}\omega \right. \\ &\quad \left. + (m_3 - m_2)(X_\omega^2 + X_\omega^{-2}) \text{Im}(U_{\alpha 3} U_{\alpha 2}^*) \sin 2\text{Re}\omega \right\} \\ &\quad + \frac{m_2 m_3}{4} (X_\omega^2 - X_\omega^{-2}) \sin 2\text{Re}\omega (|U_{\alpha 3}|^2 - |U_{\alpha 2}|^2). \end{aligned} \quad (5.9)$$

一方、ニュートリノの質量が逆階層型の場合も同様に計算ができ、結果のみを書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Im}X &= \frac{\xi m_2 \sqrt{m_1 m_2}}{4} \left\{ (m_1 + m_2)(X_\omega^2 - X_\omega^{-2}) \text{Re}(U_{\alpha 2} U_{\alpha 1}^*) \cos 2\text{Re}\omega \right. \\ &\quad \left. + (m_2 - m_1)(X_\omega^2 + X_\omega^{-2}) \text{Im}(U_{\alpha 2} U_{\alpha 1}^*) \sin 2\text{Re}\omega \right\} \\ &\quad + \frac{m_1 m_2}{4} (X_\omega^2 - X_\omega^{-2}) \sin 2\text{Re}\omega (|U_{\alpha 2}|^2 - |U_{\alpha 1}|^2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

順階層型のときと逆階層型のときの対応関係は質量と MNS 行列のインデックスを $2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$ とすればよい。この X を用いて CP 非対称性を表すパラメータ A_{32}^α を表すと、

$$A_{32}^\alpha = \frac{\sqrt{M_2 M_3}}{\langle \Phi \rangle^2} \text{Im}X. \quad (5.11)$$

この量を用いて $\mathcal{O}(F^4)$ における左巻きレプトンに生じる非対称性は次のように書ける。

$$\Delta L_\alpha = \frac{3^{\frac{2}{3}} \pi^3 (\sin \phi)^2}{18 \Gamma[\frac{5}{6}]} \frac{M_0^{\frac{4}{3}}}{(\Delta M_{32})^{\frac{2}{3}}} A_{32}^\alpha, \quad (5.12)$$

これを見てわかる通り、右巻きニュートリノ N_2 と N_3 の質量が縮退しているとその非対称性は増長する。

しかし、 $\mathcal{O}(F^4)$ の寄与はフレーバーについて足し上げると消えることが次の計算をすることでわかる。

$$\sum_\alpha A_{32}^\alpha = A_{32}^e + A_{32}^\mu + A_{32}^\tau = 0. \quad (5.13)$$

これを求めるとゼロとなるので、 $\mathcal{O}(F^4)$ では非対称性が生じないことがわかる。具体例を示すと、ニュートリノ質量が順階層型で、模型にある3つの CP 位相のうち $\text{Im}\omega = 0$ と置いたとき、CP 非対称性を表すパラメータ A_{32}^α は次のように書ける。

$$A_{32}^\alpha \Big|_{\text{Im}\omega=0} = \xi \sin 2\text{Re}\omega \frac{M_2 M_3 \sqrt{m_2 m_3} (m_3 - m_2)}{4 \langle \Phi \rangle^4} \times a^\alpha, \quad (5.14)$$

ここで a^α は次のように与えられる。

$$a^e = -\sin \theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin(\delta + \eta), \quad (5.15)$$

$$a^\mu = \sin \theta_{12} \sin^2 \theta_{23} \sin 2\theta_{13} \sin(\delta + \eta) - \cos \theta_{12} \sin 2\theta_{23} \cos \theta_{13} \sin \eta, \quad (5.16)$$

$$a^\tau = \sin \theta_{12} \cos^2 \theta_{23} \sin 2\theta_{13} \sin(\delta + \eta) + \cos \theta_{12} \sin 2\theta_{23} \cos \theta_{13} \sin \eta, \quad (5.17)$$

これらより確かに、 $\sum_\alpha a^\alpha = 0$ を得ることができる。

次に $\mathcal{O}(F^6)$ で生成される全レプトン数は、 $\Delta L_{\text{tot}} = -\Delta N_{\text{tot}}$ という対応関係があり、次のように与えられる。

$$\Delta L_{\text{tot}} = -\frac{(\sin \phi M_0)^3}{32T_L^3} \sum_{I=2,3} \sum_\alpha |F_{\alpha I}^2|^2 A_{32}^\alpha \kappa \left(\frac{T_L}{T} \right), \quad (5.18)$$

ここで $\kappa(x)$ は次のように定義される。

$$\kappa(x) \equiv \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \sin(x_2^3 - x_3^3). \quad (5.19)$$

5.2 $\text{Im}\omega = 0$ の場合

ここでは、模型の中の3つのCP位相のうちの一つ、 $\text{Im}\omega$ をゼロと置いた場合に話を移す。この場合、CP対称性の破れの起源はMNS行列の中にある2つの位相 δ と η である。これらのCP位相は、今後のニュートリノ振動実験などで測られる可能性があるために、この相関を示すことは非常に重要である。

式(5.18)で得られた全レプトン数非対称性は、バリオン数対エントロピー比 $Y_B = n_B/s$ と次のような関係がある。

$$Y_B = -c_s \Delta L_{\text{tot}}(T_W), \quad (5.20)$$

ここで $c_s = 7.0 \times 10^{-4}$ となる係数である。よって Y_B の解析解は、ニュートリノ質量の階層性に関係なく次のように書ける。

$$\begin{aligned} Y_B &= 1.8 \times 10^{-11} \kappa \left(\frac{T_L}{T_W} \right) \frac{M_0^{\frac{7}{3}} M_N^{\frac{5}{3}} m_{\text{atm}}^{\frac{5}{2}} m_{\text{sol}}^{\frac{1}{2}}}{T_W (\Delta M_{32}^2 / M_N^2)^{\frac{2}{3}} \langle \Phi \rangle^6} \delta_{\text{CP}} \\ &= 4.7 \times 10^{-10} \delta_{\text{CP}} \left(\frac{10 \text{ GeV}}{T_W} \right) \left(\frac{M_N}{5 \text{ GeV}} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{10^{-8}}{\Delta M_{32}^2 / M_N^2} \right)^{\frac{2}{3}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

ここで、 δ_{CP} は次のように書ける。

$$\delta_{\text{CP}} = \xi \sin 2\text{Re}\omega S_{m\nu} \delta_\nu, \quad (5.22)$$

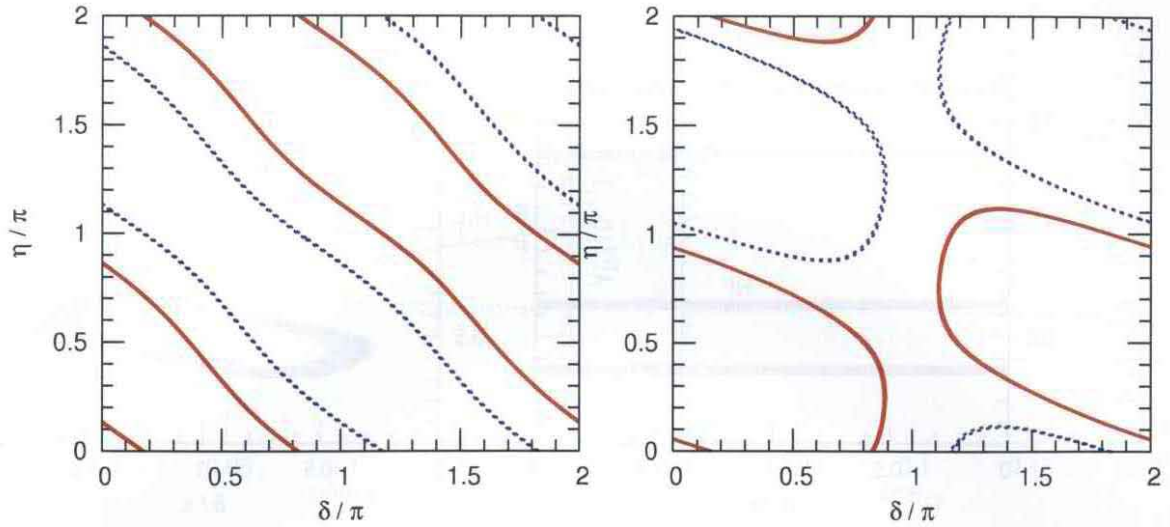


図 5.1: ニュートリノ質量が順階層型の場合の、CP 位相と生成されるバリオン数の相関。赤の実線が $\xi = +1$ の場合で、青の破線は $\xi = -1$ の場合。右巻きニュートリノの質量と縮退度は $M_N = 5\text{GeV}$ 、 $\Delta M_{32}^2/M_N = 10^{-8}$ とした。また、 $\text{Re}\omega = \pi/4$ 、 $\sin^2 \theta_{13} = 0.053$ とした。左が $\sin^2 \theta_{23} = 0.5$ の場合で、右が $\sin^2 \theta_{23} = 0.36$ の場合を示す。

これを見てもわかる通り、 δ_{CP} は ξ と $\text{Re}\omega$ というニュートリノ振動実験で決まることのないパラメータに比例しているので、ニュートリノ振動実験のみではバリオン数を予言することはできない。そして S_{m_ν} はニュートリノの質量階層性に起因する因子で、

$$S_{m_\nu} = \begin{cases} 1 - \frac{m_{\text{sol}}}{m_{\text{atm}}} \equiv 1 - r_m, & (\text{N.H.}) \\ \frac{r_m^{\frac{3}{2}}}{2} \left[1 - \frac{r_m^4}{32} + \mathcal{O}(r_m^6) \right], & (\text{I.H.}) \end{cases} \quad (5.23)$$

とされる。この因子により、 δ_ν を除いて一般に Y_B は、ニュートリノ質量が逆階層型の場合は順階層型の場合と比べ 4% に抑制されていることがわかった。

次に、 δ_ν に関して考察を行う。このパラメータは以下に示すように、ニュートリノ混合角と CP 位相に対して非常に興味深い依存性がある。まず、ニュートリノ質量が順階層型の場合、 δ_ν は r_m で展開でき、最低次は次のように書ける。

$$\delta_\nu = \frac{1}{2} \sin \theta_{12} \sin 2\theta_{13} [\cos^2 \theta_{13} (3 + \cos 4\theta_{23}) - 4 \sin^2 \theta_{13}] \sin(\delta + \eta) + \cos \theta_{12} \sin 4\theta_{23} \cos^3 \theta_{13} \sin \eta + \mathcal{O}(r_m). \quad (5.24)$$

よって、順階層型における δ_ν は、2 種類の CP 位相の依存性がある。それは、 $\sin(\delta + \eta)$ と $\sin \eta$ である。

また、 δ_ν は θ_{23} に対しても非常に特徴的な依存性がある。3 つの混合角のうち、大気ニュートリノの振動に関する混合角が最大の時、つまり $\theta_{23} = \pi/4$ のとき、式 (5.24) 中

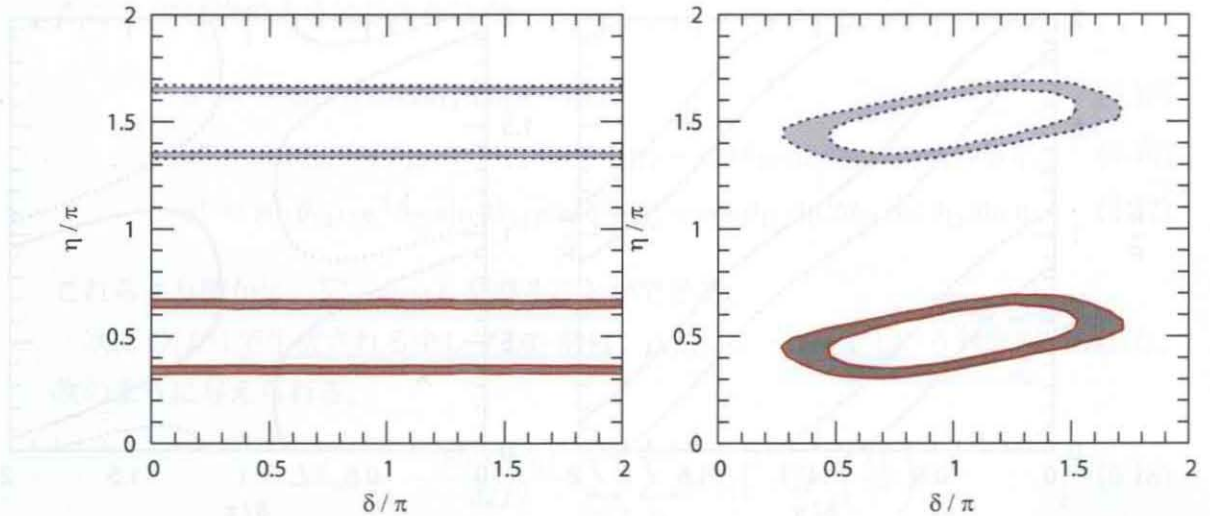


図 5.2: ニュートリノ質量が逆階層型の場合の、CP 位相と生成されるバリオン数の相関。赤の実線の内側が $\xi = +1$ の場合で、青の破線の内側は $\xi = -1$ の場合。右巻きニュートリノの質量と縮退度は $M_N = 15\text{GeV}$ 、 $\Delta M_{32}^2/M_N = 10^{-8}$ とした。また、 $\text{Re}\omega = \pi/4$ 、 $\sin^2 \theta_{13} = 0.053$ とした。左が $\sin^2 \theta_{23} = 0.5$ の場合で、右が $\sin^2 \theta_{23} = 0.36$ の場合を示す。

の $\sin \eta$ に比例する項は消えるため、バリオン数に対する最も有効な寄与は $\sin(\delta + \eta)$ に比例する。この依存性は図 5.1 の左に示される通り、数値計算でも確認することができた。

一方 $\theta_{13} = 0$ のとき、 δ_ν は次のように書ける。

$$\delta_\nu = \cos \theta_{12} \sin 4\theta_{23} (1 - r_m \cos^2 \theta_{12}) \sin \eta. \quad (5.25)$$

この場合、CP 位相に対する依存性はマヨラナ位相 η のみとなる。なぜならば、ディラック位相は $\sin \theta_{13}$ と対で現れるためである。さらに、 $\theta_{13} = 0$ で且つ $\theta_{23} = \pi/4$ とすると、 $\delta_\nu = 0$ となるため、十分なバリオン数を生成することができなくなる。

次に逆階層型の場合、 δ_ν は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \delta_\nu = & \frac{1}{4} \sin 2\theta_{12} \cos^2 \theta_{13} [-5 - 3 \cos 4\theta_{23} + \cos 2\theta_{13} (7 + \cos 4\theta_{23})] \sin \eta \\ & + \sin 4\theta_{23} \cos^2 \theta_{13} \sin \theta_{13} (\sin \delta \cos \eta - \cos 2\theta_{12} \cos \delta \sin \eta) + \mathcal{O}(r_m^2). \end{aligned} \quad (5.26)$$

これを見ても明らかなように、順階層型のとときと CP 位相に対する依存性は異なり、 $\sin \eta$ に比例する項と、 $\sin \delta$ と $\cos \eta$ の積 (もしくは $\cos \delta$ と $\sin \eta$ の積) に比例する項とがある。また、 $\theta_{23} = \pi/4$ とすると、ディラック位相に対する依存性はなくなり、マヨラナ位相にのみ依存する。この振る舞いは図 5.2 の左にもあるように数値解析によっても確かめられた。

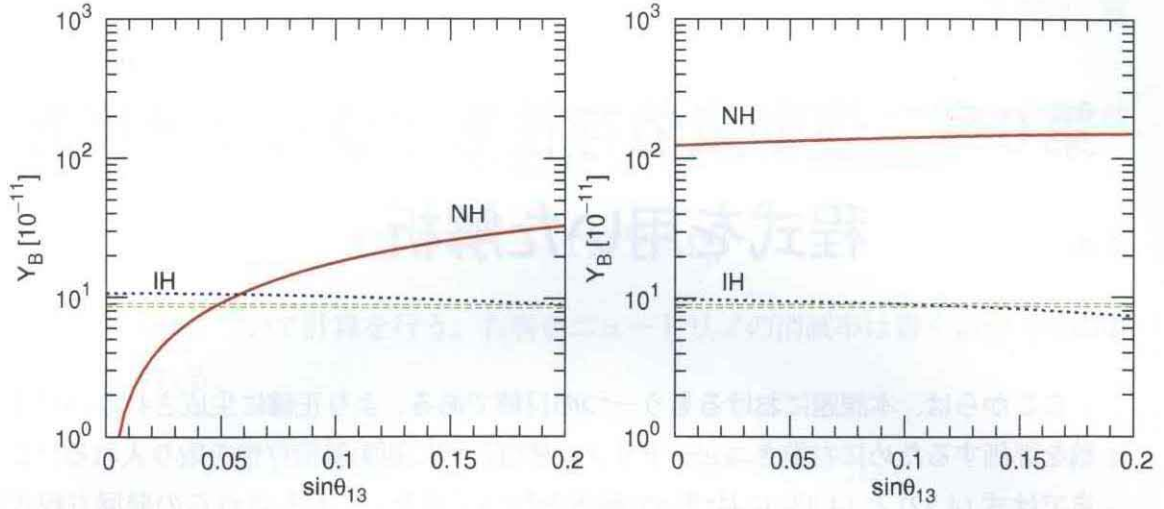


図 5.3: Y_B と $\sin \theta_{13}$ の相関を示した図。赤の実線が順階層型の場合で、青の破線は逆階層型の場合、そして緑の破線は現在の観測値を示す。右巻きニュートリノの質量と縮退度は $M_N = 15\text{GeV}$ 、 $\Delta M_{32}^2/M_N = 10^{-8}$ とした。また、 $\text{Re}w = \pi/4$ 、 $\delta = 7\pi/4$ 、 $\eta = \pi/3$ とした。左が $\sin^2 \theta_{23} = 0.5$ の場合で、右が $\sin^2 \theta_{23} = 0.36$ の場合を示す。

また、順階層型との最も大きな違いは $\theta_{13} = 0$ で且つ $\theta_{23} = \pi/4$ とした場合である。このとき δ_ν は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \delta_\nu &= \frac{1}{2} \left[1 + (1 + r_m^2)^{1/2} + 3[1 - (1 + r_m^2)^{1/2}] \cos 2\theta_{12} \right] \sin 2\theta_{12} \sin \eta \\ &= \sin 2\theta_{12} \sin \eta \left[1 + \frac{1}{4}(1 - 3 \cos 2\theta_{12})r_m^2 + \mathcal{O}(r_m^4) \right] \neq 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

この点は逆階層型の場合におけるバリオン数非対称性の生成の最も重要な特徴である。

これまでに述べてきたことをまとめると図 5.3 に示してある。右の図を見るとわかる通り、一般に Y_B は逆階層型の場合 $S_{m\nu}$ による抑制によって順階層型の場合と比べ小さい。よって一般にはバリオン数非対称性の生成には順階層型が優勢である。しかし左の図にもある様に、 $\theta_{23} = \pi/4$ の場合、 θ_{13} が小さくなっていくと順階層型は強く抑制されていくが、逆階層型の方は抑制されない。つまりこの場合、順階層型ではなく逆階層型がバリオン数非対称性の生成に優勢である。

第6章 運動量依存性を考慮した発展方程式を用いた解析

ここからは、本課題におけるもう一つの目標である、より正確に生成されるバリオン数を評価するために右巻きニュートリノの密度行列に運動量依存性を取り入れる。これまでは式(4.32)と(4.33)に基づいて解析を行ってきた。しかしこれらの発展方程式は密度行列の運動量を典型的に温度程度と仮定することで近似的に取り扱っていた。そして、数密度の非対称性を評価するときに密度行列が熱平衡の密度行列 $\rho^{eq}(k)$ に比例すると仮定していた。この近似的な取扱いにおける不明確点を取り除くために、発展方程式に厳密に運動量依存性を取り入れて書き下し、宇宙膨張を考慮に入れ解析を行う。

6.1 運動量依存性を考慮した右巻きニュートリノの発展方程式の導出

まず初めに、右巻きニュートリノの発展方程式から導出していく。運動量依存性を陽に取り入れた発展方程式は次式で与えられる。

$$i \frac{d}{dt} \rho_{NN}(k) = [H_N(k), \rho_{NN}(k)] - \frac{i}{2} \{ \Gamma_N^d(k), \rho_{NN}(k) \} + i \Gamma_N^p(k), \quad (6.1)$$

第1項の $H_N(k)$ は有効ハミルトニアンで、 $H_N(k) = H_N^0(k) + V_N(k)$ で与えられる。自由粒子のハミルトニアン H_N^0 は $[H_N^0(k_N)]_{IJ} = E_{N_I} \delta_{IJ}$ ($E_{N_I} = \sqrt{k_N^2 + M_I^2}$) と書かれ、運動量依存性を取り入れた有効ポテンシャル $V_N(k)$ は次のように与えられる。

$$[V_N(k_N)]_{IJ} = \frac{N_D T^2}{16 k_N} [F^\dagger F]_{IJ}, \quad (6.2)$$

ここで N_D は $SU(2)$ に自由度を表し、 $N_D = 2$ である。また有効ポテンシャルは左巻きレプトンに非対称性が生じたことからの寄与が無視されている¹。さらに有効ポテンシャルの評価の際に、これは今考慮している温度の領域 ($T > 100 \text{ GeV}$) であるので、右巻きニュートリノも含め質量の寄与を無視している。ただし自由粒子のハミルトニア

¹この効果がバリオン数生成に効かないことは数値計算によって確かめられている。

ンの中に質量の寄与を残したのは、ステライルニュートリノのフレーバー間混合に重要なためである。

これから運動量依存性を厳密に取り入れて右巻きニュートリノの消滅・生成率を計算していく。そのために、図 D.1 の各過程について分けて考える。

$$\Gamma_N^{d,p} = \Gamma_N^{d,p(A)} + \Gamma_N^{d,p(B)} + \Gamma_N^{d,p(C)}, \quad (6.3)$$

最初に消滅率について計算を行う。右巻きニュートリノの消滅率は書く過程で次のように計算される。

$$[\Gamma_N^{d(A)}(k_N)]_{IJ} = [\Gamma_N^{d(B)}(k_N)]_{IJ} = \gamma_N^d(k_N) [F^\dagger F]_{IJ}, \quad (6.4)$$

$$[\Gamma_N^{d(C)}(k_N)]_{IJ} = \gamma_N^d(k_N) [F^\dagger F]_{IJ} + [\delta\Gamma_N^d(k_N)]_{IJ}. \quad (6.5)$$

図 D.1 の (A)、(B) の過程は同じ寄与をし、(C) は左巻き反レプトンが熱平衡からずれたことによって生じる項があり、それを $\delta\Gamma_N^d(k)$ で記述した。具体系はのちに示す。また、次の量を導入する。

$$\gamma_N^d(k_N) = \frac{N_C N_D h_t^2 T^2}{64\pi^3 k_N}, \quad (6.6)$$

ここで $N_C = 3$ は SU(3) のカラー自由度で、 $h_t \sim 1$ はトップクォークの湯川結合定数である。よって、右巻きニュートリノの消滅率は運動量の逆数に比例していることがわかる。つまり右巻きニュートリノの運動量が小さいとき、消滅率は大きくなる。また、過程 (C) の消滅率の第 2 項は次のように計算される。

$$\begin{aligned} [\delta\Gamma_N^d(k_N)]_{IJ} &= \gamma_N^d(k_N) \int_0^\infty \frac{dk_L k_L}{N_D T^2} \left[F^\dagger (\rho_L^T(k_L) - N_D \rho^{\text{eq}}(k_L) \mathbf{1}) F \right]_{IJ} \\ &= \gamma_N^d(k_N) [F^\dagger (A^{-1} - \mathbf{1}) F]_{IJ}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

ここで $\mathbf{1}$ は単位行列で、 $A = \text{diag}(e^{\mu_{\nu e}}, e^{\mu_{\nu \mu}}, e^{\mu_{\nu \tau}})$ は左巻きレプトンの各フレーバーの化学ポテンシャルである。この化学ポテンシャルは通常の化学ポテンシャルを温度で割って次元なしの量で再定義したものである。もし左巻きレプトンが完全に熱平衡状態に入っている、つまり化学ポテンシャルがゼロの場合、この項は消える。また、この項は右巻きニュートリノと左巻き反レプトンを関係づける項となっている。

次に、右巻きニュートリノの生成率を計算すると次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [\Gamma_N^{p(A)}(k_N)]_{IJ} &= [\Gamma_N^{p(B)}(k_N)]_{IJ} = \gamma_N^d(k_N) \rho^{\text{eq}}(k_N) [F^\dagger F]_{IJ} + [\delta\Gamma_N^p(k_N)]_{IJ}, \\ [\Gamma_N^{p(C)}(k_N)]_{IJ} &= \gamma_N^d(k_N) \rho^{\text{eq}}(k_N) [F^\dagger F]_{IJ}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

生成率もまた過程 (A) と (B) は同じ寄与をする。第 2 項は左巻きレプトンが化学ポテンシャルをもったときに生じる項で次のように計算される。

$$\begin{aligned}
[\delta\Gamma_N^p(k_N)]_{IJ} &= \gamma_N^d(k_N) \rho^{\text{eq}}(k_N) \left\{ \int_0^{k_N} \frac{dk_L}{N_D k_N} \frac{1 - \rho^{\text{eq}}(k_L)}{\rho^{\text{eq}}(k_L)} \left[F^\dagger(\rho_L(k_L) - N_D \rho^{\text{eq}}(k_L) \mathbf{1}) F \right]_{IJ} \right. \\
&\quad \left. + \int_{k_N}^\infty \frac{dk_L}{N_D k_N} \frac{1 - \rho^{\text{eq}}(k_N)}{\rho^{\text{eq}}(k_N)} \left[F^\dagger(\rho_L(k_L) - N_D \rho^{\text{eq}}(k_L) \mathbf{1}) F \right]_{IJ} \right\} \\
&= \gamma_N^d(k_N) \rho^{\text{eq}}(k_N) [F^\dagger(A - \mathbf{1})F]_{IJ}. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

この項もまた左巻きレプトンが熱平衡に入っているとすると消える項である。そしてこの項は右巻きニュートリノと左巻きレプトンを結びつける項である。

左巻きレプトンの密度行列において、すべての化学ポテンシャルがゼロと仮定すると、各過程の寄与はすべて同じになり、次の関係式を満たす。

$$[\Gamma_N^{d\text{eq}}(k_N)]_{IJ} = 3 \gamma_N^d(k_N) [F^\dagger F]_{IJ}, \quad [\Gamma_N^{p\text{eq}}(k_N)] = \rho^{\text{eq}}(k_N) [\Gamma_N^{d\text{eq}}(k_N)]_{IJ}. \tag{6.10}$$

ここで $\Gamma_N^{d(p)\text{eq}}(k_N)$ はすべての過程からの寄与を足したものである。生成率と消滅率を比較すると、生成率には消滅率に熱平衡時の密度行列 ρ^{eq} がかけられている。

これらを用いて右巻きニュートリノの密度行列の発展方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_N(k_N)}{dt} &= -i [H_N^0(k_N) + V_N(k_N), \rho_N(k_N)] - \frac{1}{2} \{ \Gamma_N^{d\text{eq}}(k_N), \rho_N(k_N) - \rho^{\text{eq}}(k_N) \mathbf{1} \} \\
&\quad + 2 \delta\Gamma_N^p(k_N) - \frac{1}{2} \{ \delta\Gamma_N^d(k_N), \rho_N(k_N) \}. \tag{6.11}
\end{aligned}$$

式 (4.32) との対応関係を見ると、上式の第 2 項が式 (4.32) の第 2 項に対応し、第 3 項が式 (4.32) の第 3 項と対応している。また、第 4 項は式 (4.32) の中にはない新しい寄与である。この項は密度行列の 2 次の項となっている。右巻き反ニュートリノの密度行列についての発展方程式は CP 変換を行うことで得ることができる。つまり、 $F \leftrightarrow F^*$ と $\rho_{LL} \leftrightarrow \rho_{\bar{L}\bar{L}}$ (もしくは $A \leftrightarrow A^{-1}$) という変換を行えばよい。

6.2 運動量依存性を考慮した左巻きレプトンの発展方程式の導出

次に、左巻きレプトンの密度行列についての発展方程式を導出する。左巻きレプトンの密度行列についての発展方程式もまた次の式を出発点とする。

$$\frac{d\rho_L(k_L)}{dt} = -i [H_\nu(k_L), \rho_L(k_L)] - \frac{1}{2} \{ \Gamma_\nu^d(k_L), \rho_L(k_L) \} + N_D \Gamma_\nu^p(k_L). \tag{6.12}$$

ここで再度確認をすると、 $\Gamma_\nu^{d(p)}$ はアクティブニュートリノに関する消滅(生成)率で、左巻きレプトンの密度行列はSU(2)の2重項の寄与を足し上げた $\rho_{LL} = \rho_{\nu\nu} + \rho_{ee}$ である。式(4.31)でも示した通り、左巻きレプトンの密度行列は対角成分のみを考えればよいので、ハミルトニアンとの交換関係で書かれている第1項は消すことができる。さらに、左巻きレプトンは右巻きニュートリノと違いゲージ相互作用をもっているため、考えるべき発展方程式は化学ポテンシャルのみの発展方程式で、次式で与えられる。

$$\cosh \mu_{\nu\alpha} \frac{d\mu_{\nu\alpha}}{dt} = \frac{1}{4N_D} \int \frac{dk_L k_L^2}{T^3} \frac{d}{dt} [\rho_L(k_L) - \rho_{\bar{L}}(k_L)]_{\alpha\alpha}. \quad (6.13)$$

アクティブニュートリノの消滅・生成率を計算する。左巻きレプトンを熱平衡からずらす効果があるのは、右巻きニュートリノとの湯川相互作用に関係する寄与のみなので、図D.1と同じようなダイアグラムを書くことができ、それらを計算する。これらの寄与は右巻きニュートリノの場合と同様に(A)、(B)、(C)の各過程に分けて計算することができる。まず、消滅率を計算すると次のように計算できる。

$$\begin{aligned} [\Gamma_\nu^{d(A)}(k_L)]_{\alpha\beta} &= [\Gamma_\nu^{d(B)}(k_L)]_{\alpha\beta} = \gamma_\nu^d(k_L) [FF^\dagger]_{\alpha\beta}, \\ [\Gamma_\nu^{d(C)}(k_L)]_{\alpha\beta} &= \gamma_\nu^d(k_L) [FF^\dagger]_{\alpha\beta} + [\delta\Gamma_\nu^d(k_L)]_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

ここで $\gamma_\nu^d(k)$ は、

$$\gamma_\nu^d(k_L) = \frac{N_C h_t^2 T^2}{64\pi^3 k} = \frac{1}{N_D} \gamma_N^d(k_L), \quad (6.15)$$

と定義する。よってアクティブニュートリノの消滅率も運動量の逆数に比例する。さらに、アクティブニュートリノの消滅率もまた右巻きニュートリノのときと同じで(A)と(B)は同じ寄与をもたらす。過程(C)の消滅率の第2項は次のように計算できる。

$$[\delta\Gamma_\nu^d(k_L)]_{\alpha\beta} = \gamma_\nu^d(k_L) \int_0^\infty \frac{dk_N k_N}{T^2} [F(\rho_N^T(k_N) - \rho^{\text{eq}}(k_N)\mathbf{1})F^\dagger]_{\alpha\beta}. \quad (6.16)$$

これは右巻き反ニュートリノが熱平衡からずれたときに生ずる項で、右巻き反ニュートリノが完全に熱平衡に入っていると消える項である。

一方、生成率は次のように計算される。

$$\begin{aligned} [\Gamma_\nu^{p(A)}(k_L)]_{\alpha\beta} &= [\Gamma_\nu^{p(B)}(k_L)]_{\alpha\beta} = \gamma_\nu^d(k_L) \rho^{\text{eq}}(k_L) [FF^\dagger]_{\alpha\beta} + [\delta\Gamma_\nu^p(k_L)]_{\alpha\beta}, \\ [\Gamma_\nu^{p(C)}(k_L)]_{\alpha\beta} &= \gamma_\nu^d(k_L) \rho^{\text{eq}}(k_L) [FF^\dagger]_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

生成率も過程(A)と(B)は同じ寄与をする。第2項は右巻きニュートリノが熱平衡からずれたときに生じる項で次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [\delta\Gamma_\nu^p(k_L)]_{\alpha\beta} &= \gamma_\nu^d(k_L) \rho^{\text{eq}}(k_L) \left\{ \int_0^{k_L} \frac{dk_N}{k_L} \frac{1 - \rho^{\text{eq}}(k_N)}{\rho^{\text{eq}}(k_N)} [F(\rho_N(k_N) - \rho^{\text{eq}}(k_N)\mathbf{1})F^\dagger]_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \int_{k_L}^\infty \frac{dk_N}{k_L} \frac{1 - \rho^{\text{eq}}(k_L)}{\rho^{\text{eq}}(k_L)} [F(\rho_N(k_N) - \rho^{\text{eq}}(k_N)\mathbf{1})F^\dagger]_{\alpha\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

ここではアクティブニュートリノの消滅・生成率を計算したが、今はSU(2)が破れる前を考えているので、左巻き荷電レプトンの消滅・生成率はアクティブニュートリノと等しい。

これらを用いて、化学ポテンシャルの発展方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{\nu_\alpha}}{dt} = & -\gamma_\nu^d(T) [FF^\dagger]_{\alpha\alpha} \tanh \mu_{\nu_\alpha} \\ & + \frac{\gamma_\nu^d(T)}{4} \int_0^\infty \frac{dk_N k_N}{T^2} \left\{ \left(1 + \frac{2}{\cosh \mu_{\nu_\alpha}} \right) [F\rho_N(k_N)F^\dagger - F^*\rho_{\bar{N}}(k_N)F^T]_{\alpha\alpha} \right. \\ & \left. - \tanh \mu_{\nu_\alpha} [F\rho_N(k_N)F^\dagger + F^*\rho_{\bar{N}}(k_N)F^T]_{\alpha\alpha} \right\}. \quad (6.19) \end{aligned}$$

化学ポテンシャルは運動量に依存しない量なので、両辺共に運動量には依存していない。よって、右巻きニュートリノの密度行列の発展方程式(6.11)、それをCP変換した右巻き反ニュートリノの密度行列の発展方程式と、化学ポテンシャルの発展方程式(6.19)の3本の方程式によって ν MSMにおけるバリオン数生成量について評価することができる。

数値解析に入る前に少しまとめておく。まずこれまでの計算によって、右巻きニュートリノの密度行列の運動量依存性を完全に取り入れ、結果として得られた発展方程式は微積分方程式となっている。これらの発展方程式を解析することで、バリオン数非対称性に対してどの運動量が有効か、またバリオン数生成に決定的な温度がどれくらいかを見積もることができる。

そして、ある運動量における右巻きニュートリノとアクティブニュートリノの消滅・生成率を計算した。その際、散乱過程における右巻きニュートリノやアクティブニュートリノの熱平衡からのずれを正確に考慮した。そうすることで、右巻きニュートリノと左巻きレプトン(または右巻き反ニュートリノと左巻き反レプトン)を結びつける項が現れた。つまり、この項の起源を理解することができた。

それだけでなく、ここで求めた発展方程式は、右巻きニュートリノと左巻き反レプトン(または右巻き反ニュートリノと左巻きレプトン)を結びつける項もまた含まれている。この項はこれまでに議論されたことのない項であり、密度行列の2次の項である。

これらの熱平衡からのずれを考慮した際に現れた項は、全レプトン数の保存を保証するために必ず必要な項である。本課題で考えている右巻きニュートリノのマヨラナ質量は電弱スケールよりも十分軽いために、今のバリオン数生成機構に有効な温度領域で全レプトン数は保存量となる。つまり、

$$0 = \frac{d}{dt} \left\{ R^3 \left[\sum_{I=2,3} (n_{N_I} - n_{\bar{N}_I}) + \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} (n_{L_\alpha} - n_{\bar{L}_\alpha}) \right] \right\}, \quad (6.20)$$

という関係式を見たさなくてはいけない。ここで n_X は粒子 X の数密度である。この式を密度行列と化学ポテンシャルを用いて書き直すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d}{dt} \text{tr}[\rho_N(k) - \rho_{\bar{N}}(k) + \rho_L(k) - \rho_{\bar{L}}(k)] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d}{dt} \text{tr}[\rho_N(k) - \rho_{\bar{N}}(k)] + \frac{2N_D T^3}{\pi^2} \cosh \mu_{\nu_\alpha} \frac{d\mu_{\nu_\alpha}}{dt}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

この関係式は、以下の議論によって満たされることがわかる。散乱過程 (A) と (B) の右巻きニュートリノと右巻き反ニュートリノの生成 (もしくは消滅) に関する項は、左巻きレプトンと左巻き反レプトンの消滅 (もしくは生成) に関する項と運動量に関して積分をし、トレースを取るとキャンセルする。過程 (C) については、右巻きニュートリノと右巻き反ニュートリノの生成 (もしくは消滅) に関する項は、左巻きレプトンと左巻き反レプトンの生成 (もしくは消滅) に関する項とキャンセルする。こうして、もし系がレプトン数が対称な宇宙から始まったら、ステライルニュートリノの非対称性はたしかにアクティブレプトンの非対称性と逆符号で絶対値が等しい値となる。すなわち、全レプトン数の対称性が生成されるのではなく、ステライルとアクティブのセクターに非対称性が分けられるということになる。

6.3 発展方程式の数値解析

この節では、前の節までで得られた運動量依存性を取り入れた発展方程式の解を数値的に求めていく。密度行列と化学ポテンシャルのそれぞれの初期状態を $\rho_{NN}(k) = \rho_{\bar{N}\bar{N}}(k) = \mu_{\nu_\alpha} = 0$ とする。この初期条件は、インフレーションによって実現可能である。そしてこれらの方程式を解き、スファレロン過程が切れる温度 T_W までの発展を追う。参考文献 [13] から、 $T_W = 140\text{GeV}$ とする。

数値計算を行う上で代入する数値は次の通りである。アクティブニュートリノに関するパラメータは参考文献 [20] に基づき決める。順階層型の場合を考え、パラメータは中心値 $m_3 = 4.89 \times 10^{-2}\text{eV}$ 、 $m_2 = 8.71 \times 10^{-3}\text{eV}$ 、 $m_1 = 0$ 、 $\sin^2 \theta_{23} = 0.42$ 、 $\sin^2 \theta_{12} = 0.312$ 、 $\sin^2 \theta_{13} = 0.025$ とする。さらに、ステライルニュートリノに関するパラメータは、 $\xi = +1$ 、 $\omega = \pi/4$ 、 $\delta = 7\pi/4$ 、 $\eta = \pi/3$ とする。ステライルニュートリノの質量は $M_3 = M_N + \Delta M_N/2$ 、 $M_2 = M_N - \Delta M_N/2$ と定義して、 $M_N = 10\text{ GeV}$ 、 $\Delta M_N/M_N = 10^{-8}$ と決める。 $\omega = \pi/4$ としたことで、 N_2 と N_3 の発展はほとんど変わらないので、 N_2 に関する密度行列 $[\rho_{NN}]_{22}$ の発展のみを見せることにする。

ステライルニュートリノは図 D.1 の過程によって生成され、図 6.1 にもある通り、温度が低くなっていくと $[\rho_{NN}]_{22}$ は増加していく。式 (6.11) で、ステライルニュートリノ

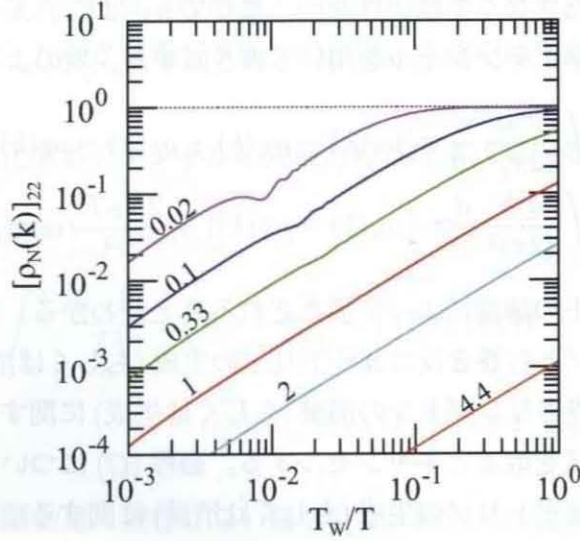


図 6.1: k/T を変えたときの $[\rho_{NN}]_{22}$ の発展。

が生成されるときに重要な項は右辺第3項の ρ^{eq} に比例する項である。生成率が運動量の逆数に比例していたことから、小さい運動量の右巻きニュートリノの生成がより効果的となる。それは図6.1からも見て取ることができる。そして小さい運動量における $[\rho_{NN}]_{22}$ の発展は、大きい運動量をもった場合と比べて強く相互作用をすることで熱化され、 $[\rho_N(k)]_{II} = [\rho_{\bar{N}}(k)]_{II} = \rho^{eq}(k)$ という一定値に落ち着き発展が終わる。この熱化される温度は運動量が小さい程高くなる。

N_I と \bar{N}_I の生成量は数密度とエントロピー密度の比によって次のように書かれる。

$$Y_{N_I} = \frac{1}{s} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\rho_N(k)]_{II}, \quad Y_{\bar{N}_I} = \frac{1}{s} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\rho_{\bar{N}}(k)]_{II}, \quad (6.22)$$

ここでエントロピー密度は $s = \frac{2\pi^2}{45} g_s T^3$ であり、内部自由度は $g_s = 106.75$ とする。もし系が完全に熱平衡に入っていたと仮定すると、それぞれの値は定数になり、

$$Y_{N_I}^{eq} = Y_{\bar{N}_I}^{eq} = \frac{45}{2g_s \pi^4} = 2.1 \times 10^{-3}, \quad (6.23)$$

となる。図6.2を見てもわかるとおり、 N_2 と N_3 の生成量 Y_{N_2} と Y_{N_3} は温度の逆数で発展し、熱平衡時の値へと近づいて発展する。

密度行列の非対角成分はフレーバー間振動の情報を含んでいる。図6.3に、 k/T を 0.1、1、10 とした場合の密度行列 ρ_N の非対角成分の発展を示す。 $[\rho_N(k)]_{23}$ の実数部分、虚数部分共に振動を開始する典型的な温度は次のように与えられる。

$$T_{osc}(k) = \left(\frac{M_0 \Delta M_N M_N}{3(k/T)} \right)^{1/3}, \quad (6.24)$$

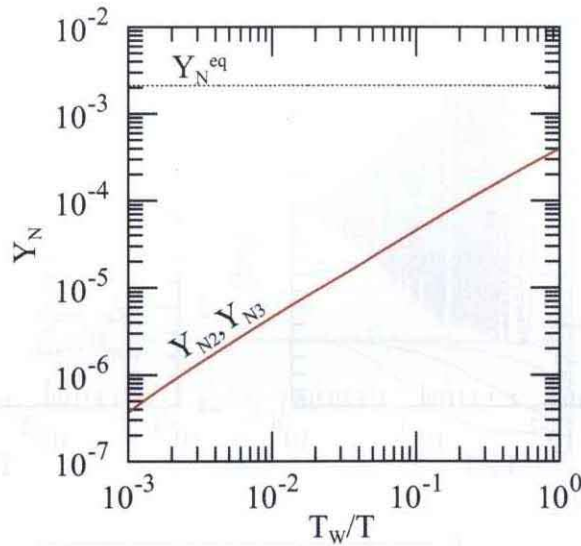


図 6.2: N_I の生成量 Y_{N_I} の発展。

よって運動量が小さい場合ほど高温からフレーバー間振動を開始する。注目すべきことは、運動量が大きくなるほど振幅が小さくなることである。また、熱平衡に入った時には ρ_N の非対角成分はなくなる。この振る舞いは図 6.3 の左の図を見ればわかる。

N_2 と N_3 の間の CP 対称性の破れを伴ったフレーバー間振動によって、ステライルニュートリノだけではなくアクティブレプトンにもまた非対称性が生成される。図 6.4 に非対称性 $[\Delta\rho_N(k)]_{II} = [\rho_N(k)]_{II} - [\rho_{\bar{N}}(k)]_{II}$ の発展を示す。たしかに、ある運動量 k における非対称性は温度 $T \simeq T_{\text{osc}}(k)$ から生成を始める。そして生成量の絶対値は運動量が小さい程大きくなる。紫色の線で書かれた $k/T = 0.02$ の場合を見ると、 $T_w/T \simeq 0.2$ 付近を境に減衰している。これはこの運動量をもった粒子が熱平衡に入るためである。生成される右巻きニュートリノの非対称性は次のように評価できる。

$$Y_{\Delta N_I} = \frac{1}{s} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\Delta\rho_N(k)]_{II}. \quad (6.25)$$

この量の発展は図 6.5 に示してある。右巻きニュートリノの非対称性は系が熱平衡に入るまで温度の逆数で発展していく。右巻きニュートリノの全非対称性はそれぞれの和 $Y_{\Delta N_{\text{tot}}} = Y_{\Delta N_2} + Y_{\Delta N_3}$ で求めることができる。

右巻きニュートリノに非対称性が生じるということは、全レプトン数の保存によりアクティブレプトンにも非対称性が生成されることを意味する。化学ポテンシャルを用いてアクティブレプトンに貯められる非対称性は次式で与えられる。

$$Y_{\Delta L_\alpha} = \frac{45N_D}{g_s\pi^4} \sinh \mu_\alpha. \quad (6.26)$$

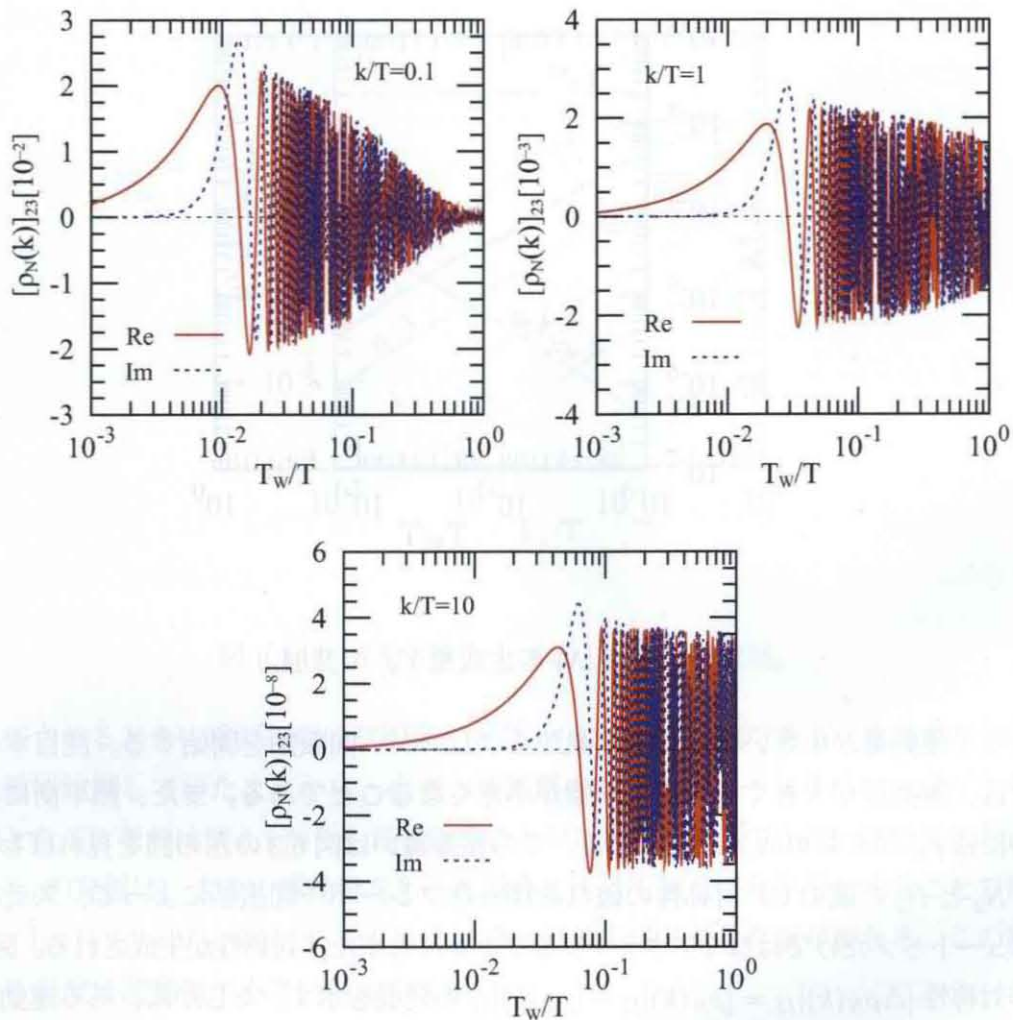


図 6.3: k/T を、0.1 (左図)、1 (中央図)、10 (右図) としたときの密度行列 ρ_N の非対角成分の発展。赤線は $\text{Re}[\rho_N]_{23}$ で、青線は $\text{Im}[\rho_N]_{23}$ を表す。

図 6.6 にアクティブレプトンの各フレーバーの非対称性の発展を示している。アクティブレプトンに生じる非対称性は右巻きニュートリノの非対称性よりも大きい。これはアクティブレプトンの非対称性は湯川結合定数の 4 次で生成されるが、右巻きニュートリノは湯川結合定数の 6 次で生成されるためである。さらに、アクティブレプトンの各フレーバーの非対称性は右巻きニュートリノの場合と違い、温度の逆数に比例して発展していない。

また $\text{Im}\omega = 0$ の場合、アクティブレプトンの非対称性は CP 非対称性を記述するパラメータ A_{32}^{α} に比例している。今回のパラメータだと、これらの比は、

$$A_{32}^e : A_{32}^{\mu} : A_{32}^{\tau} = -1.0 : -15 : 16, \quad (6.27)$$

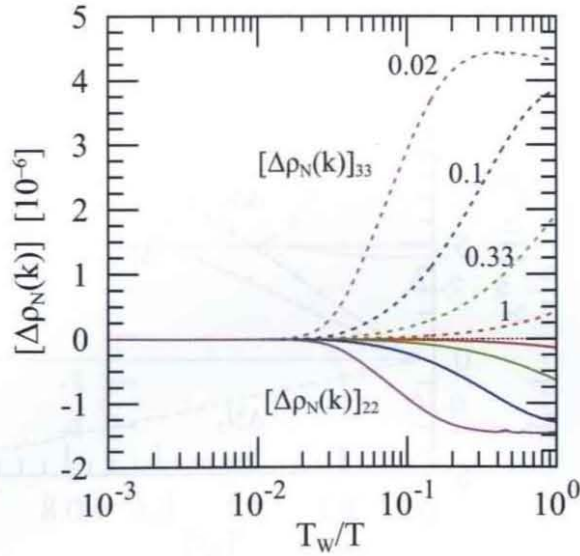


図 6.4: k/T を 0.02、0.1、0.33 そして 1 としたときの非対称性の発展。実線は $[\Delta\rho_N]_{22}$ を、点線は $[\Delta\rho_N]_{33}$ の発展を示す。

となる。この比は、今回の数値解においても確かめられた。

右巻きニュートリノの全非対称性 $Y_{\Delta N_{\text{tot}}}$ と、アクティブレプトンの全非対称性 $Y_{\Delta L_{\text{tot}}} = Y_{\Delta L_e} + Y_{\Delta L_\mu} + Y_{\Delta L_\tau}$ の発展は、図 6.7 に表している。この図より、たしかに全レプトン数の保存 $Y_{\Delta N_{\text{tot}}} + Y_{\Delta L_{\text{tot}}} = 0$ を満たしていることがわかる。さらにアクティブレプトンの全非対称性は各フレーバーの発展と違い、温度の逆数に比例して発展する。つまり、各セクターの全非対称性は湯川結合定数の 6 次の効果によって生じることがわかる。全非対称性の発展は温度が、

$$T_L \sim T_{\text{osc}}(k = T), \quad (6.28)$$

から発展していく。この温度は今のパラメータにおいては $T_L \sim 6.2 \times 10^3$ GeV である。

アクティブレプトンに貯められた非対称性は、部分的にバリオン数へ $\Delta B = -\frac{28}{79}\Delta L_{\text{tot}}$ の割合で転換される。生成されるバリオン数非対称性は化学ポテンシャルを用いて、

$$Y_B = -\frac{28}{79} Y_{\Delta L_{\text{tot}}}|_{T=T_W} = -1.53 \times 10^{-3} N_D \sum_{\alpha} \sinh \mu_{\nu_\alpha}|_{T=T_W}, \quad (6.29)$$

で与えられる。温度が T_W より下がると、バリオン数への転換過程が有効でなくなるため温度は T_W における寄与が最も大きいものとなる。右巻きニュートリノの質量を 10GeV と 100MeV の 2 種類に分けて生成されるバリオン数を評価すると、

$$Y_B = \begin{cases} 2.9 \times 10^{-10} & \text{for } M_N = 10\text{GeV} \\ 5.4 \times 10^{-14} & \text{for } M_N = 100\text{MeV} \end{cases}, \quad (6.30)$$

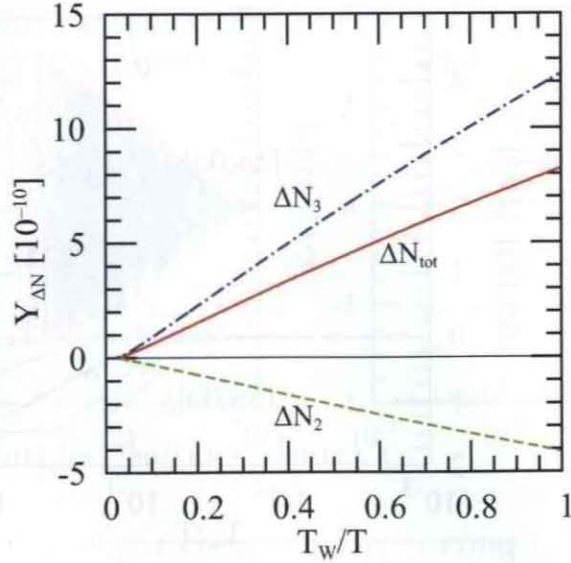


図 6.5: $Y_{\Delta N_2}$ 、 $Y_{\Delta N_3}$ そして $Y_{\Delta N_{tot}}$ の発展。

となる。これを見てもわかるように、右巻きニュートリノの質量が重い程、生成されるバリオン数は大きくなる。

$T = T_W$ のときの右巻きニュートリノの密度行列の対角成分の運動量分布を図 6.8 の左に示している。これを見てもわかるとおり、右巻きニュートリノの密度行列の対角成分の運動量分布は熱平衡時の運動量分布 $\rho^{eq}(k)$ とは大きく違う。理由はこれまでに議論してきたように、消滅率や生成率が $\gamma_N^d(k) \propto 1/k$ で特徴づけられているためである。よって、生成量は温度よりも小さい運動量の場合には増幅機構が働き、大きい場合は抑制機構が働く。特に、 $k/T \lesssim 0.1$ の場合は $T = T_W$ までに熱平衡に入るために $\rho^{eq}(k)$ の分布に一致する。また、ピークの位置を見るとわかる通り、最も有効な運動量は $k \simeq 2T$ の場合である。これは熱平均を取った運動量 $\langle k \rangle = 3T$ よりも小さい。

図 6.8 の右には、 $T = T_W$ における $[\Delta\rho_N(k)]_{22}$ 、 $[\Delta\rho_N(k)]_{33}$ と、その和 $[\Delta\rho_N(k)]_{tot}$ の運動量分布を示してある。注目すべきことは右巻きニュートリノの密度行列の対角成分のときと同じように、非対称性についても有効な運動量は $k \simeq 2T$ の場合である。つまり、単純に熱平均を取った運動量の場合よりも、バリオン数に対して有効な運動量を見出すことができた。以上により、 ν MSM の枠組みで運動量依存性を厳密に取り入れた発展方程式を用い、バリオン数非対称性を評価したことによって、密度行列の運動量依存性がより正確なバリオン数生成量の評価のためには必要不可欠であることがわかった。

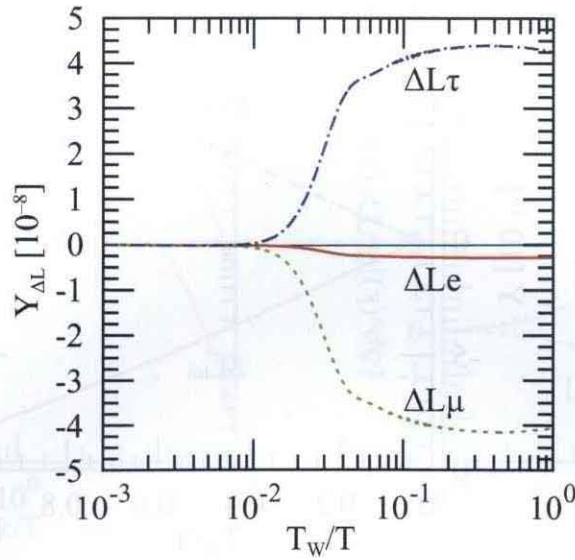


図 6.6: アクティブレプトンの各フレーバーの非対称性 $Y_{\Delta L_e}$ 、 $Y_{\Delta L_\mu}$ 、 $Y_{\Delta L_\tau}$ の発展。

6.4 運動量依存性の重要性

この節では、運動量依存性を取り入れた発展方程式による解析と、先行研究にて行われてきた解析の中でも特に [48] との比較することで、運動量依存性の重要性について議論していく。式 (6.11) と (6.19) から出発して、これまでの近似的な発展方程式を導出することで、先行研究における解析との対応関係を見る。

これまでの解析では 3 つの重要な仮定をしていた。まず第一に、運動量依存性は熱平衡のもので近似的に取り入れていた。すなわち、密度行列を次のように書く。

$$[\rho_N(k)]_{IJ} = [R_N]_{IJ} \rho^{\text{eq}}(k), \quad [\rho_{\bar{N}}(k)]_{IJ} = [R_{\bar{N}}]_{IJ} \rho^{\text{eq}}(k), \quad (6.31)$$

こうして、 R_N や $R_{\bar{N}}$ の発展を解析していた。第二に、右巻きニュートリノの消滅率については熱平均を取っていた。最後に、過程 (C) の生成率を (A) ないしは (B) のものと同一視していた。これら 3 つの仮定を置くことで、これまでの発展方程式を導出することができる。

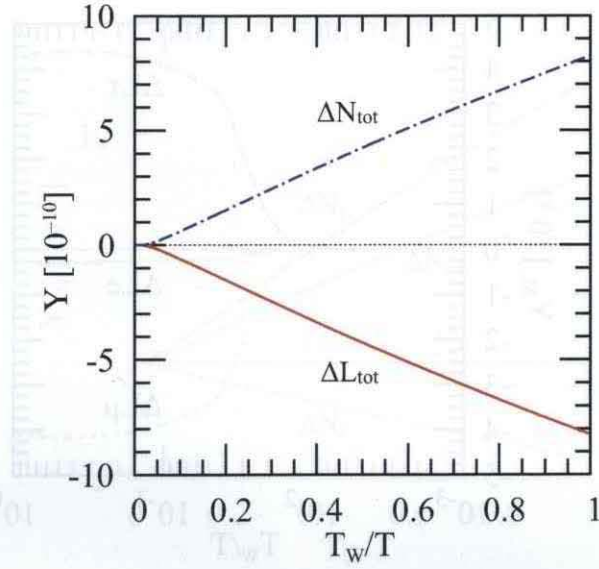


図 6.7: アクティブレプトンと右巻きニュートリノの全非対称性 $Y_{\Delta L_{\text{tot}}}$ と $Y_{\Delta N_{\text{tot}}}$ の発展。

まず一つ目の仮定を式 (6.11) と (6.19) に適応すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dR_N}{dt} = & -i[H_N(k), R_N] - \frac{3\gamma_N^d(k)}{2} \{F^\dagger F, R_N - 1\} + 2\gamma_N^d(k) F^\dagger (A - 1)F \\ & - \frac{\gamma_N^d(k)}{2} \{F^\dagger (A^{-1} - 1)F, R_N\}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{\nu_\alpha}}{dt} = & -\frac{3\gamma_\nu^d(T)}{2} [FF^\dagger]_{\alpha\alpha} \tanh \mu_\alpha + \frac{\gamma_\nu^d(T)}{2} [FR_N F^\dagger - F^* R_{\bar{N}} F^T]_{\alpha\alpha} \frac{1}{\cosh \mu_\alpha} \\ & + \frac{\gamma_\nu^d(T)}{4} \left\{ [F(R_N - 1)F^\dagger]_{\alpha\alpha} (1 - \tanh \mu_\alpha) \right. \\ & \left. - [F^*(R_{\bar{N}} - 1)F^T]_{\alpha\alpha} (1 + \tanh \mu_\alpha) \right\}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

$R_{\bar{N}}$ についての方程式は、式 (6.11) の下にある対応関係によって得ることができる。式 (6.19) に残っていた積分はここでは実行が可能であるために、連立微分方程式となっている。ここで右巻きニュートリノと左巻きレプトンを結ぶ項についてもう一度確認をすると、式 (6.32) 中の第 3 項は、過程 (A) と (B) の $\delta\Gamma_N^p$ から、第 4 項は過程 (C) の $\delta\Gamma_N^d$ から得られたものである。同様に、式 (6.33) の第 3 項は、過程 (A) と (B) の $\delta\Gamma_\nu^p$ から、第 4 項は過程 (C) の $\delta\Gamma_\nu^d$ から得られたものである。

しかしながら、式 (6.32) を注意して見ると、 R_N は運動量に依存しない量として導入したにもかかわらず、右辺には運動量に依存した量がすべての消滅率と生成率の $\gamma_N^d(k)$ と有効ポテンシャルの中に残っている。一方、化学ポテンシャルに発展方程式 (6.33) は、消滅率と生成率についても $\gamma_\nu^d(T)$ となっているので、たしかに両辺とも運動量に依存した量は残っていない。式 (6.32) 中の矛盾を取り除くために、数密度や非対称性に

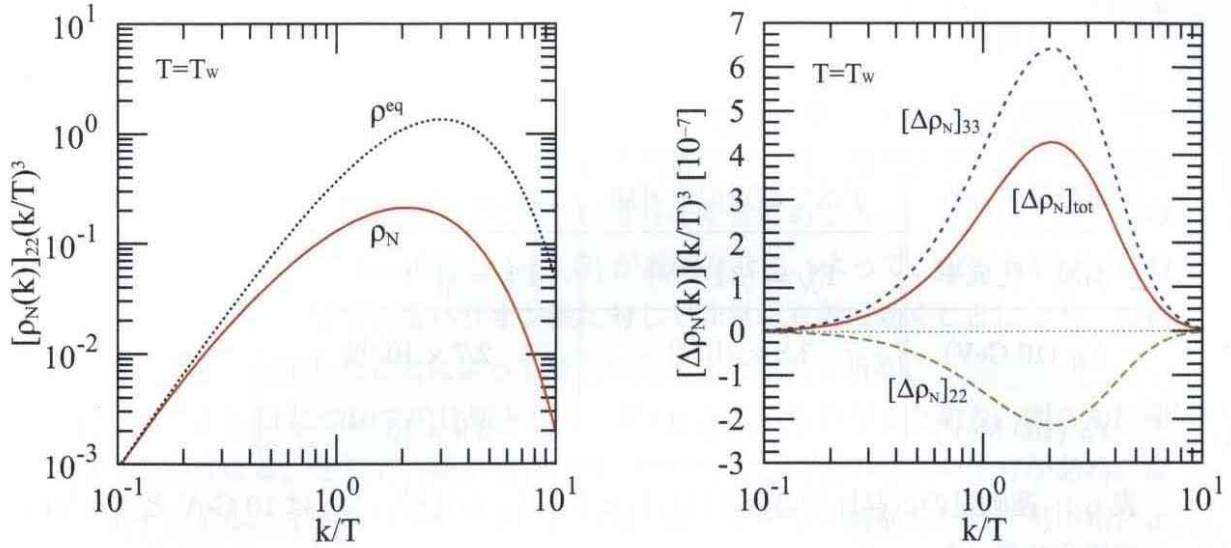


図 6.8: 左図は $[\rho_N(k)]_{22}$ (赤実線) と $\rho^{\text{eq}}(k)$ (黒点線) の運動量分布。右図は $[\Delta\rho_N(k)]_{22}$ (緑破線)、 $[\Delta\rho_N(k)]_{33}$ (青点線) と $[\Delta\rho_N(k)]_{\text{tot}}$ (赤実線) の運動量分布。それぞれ $T = T_w$ のときの分布で、 $(k/T)^3$ をかけてある。

対して最も有効な寄与をすると期待される運動量に近似をする。それは $k = k_* \sim T$ という置き換えである。ただし注意が必要なのは、全レプトン数の保存である。現在考えている系は、バリオン数生成に必要な高温領域で全レプトン数が保存している。よって、運動量の置き換えが全レプトン数の保存を破ってはいけい。しかし確かに、全レプトン数は以下の条件のもとで成立する。

$$0 = \text{tr} \left[\left. \frac{dR_N}{dt} \right|_{k=k_*} - \left. \frac{dR_{\bar{N}}}{dt} \right|_{k=k_*} + N_D \frac{dA}{dt} - N_D \frac{dA^{-1}}{dt} \right]. \quad (6.34)$$

この等式が厳密に成立するには、 $k_* = 2T$ となる必要がある。

この $k = 2T$ という運動量をもった反応率は、熱平均を取ったものと等しくなる。これを確認するために、 $\gamma_N^d(k)$ について熱平均を取った $\langle \gamma_N^d \rangle$ を次のように定義する。

$$\langle \gamma_N^d \rangle \equiv \frac{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rho^{\text{eq}}(k) \gamma_N^d(k)}{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rho^{\text{eq}}(k)} = \frac{N_C N_D h_t^2 T}{128\pi^3}. \quad (6.35)$$

よって、 $\langle \gamma_N^d \rangle = \gamma_N^d(k)|_{k=2T}$ となることが見て取れる。ただし、 $\gamma_N^d(T) = \langle \gamma_N^d \rangle$ となるのは、 $N_D = 2$ としたことによって偶然に現れた関係である。すなわち、2番目の仮定を適応するためには、 $\gamma_N^d(k) \rightarrow \langle \gamma_N^d \rangle$ という置き換えを行えばよい。つまり、 $\Gamma_N^{\text{deq}}(k)$ について熱平均を取ると、次式になる。

$$\langle \Gamma_N^{\text{deq}} \rangle = 3 \langle \gamma_N^d \rangle [F^\dagger F] = \frac{9h_t^2}{64\pi^3} T [F^\dagger F], \quad (6.36)$$

分類	I	II	III
発展方程式	参考文献 [48]	式 (6.33) と (6.37)	式 (6.11) と (6.19)
運動量依存性	すべての近似を考慮	2番目の近似まで考慮	厳密に含める
消滅・生成率	$\Gamma_N^d = \langle 3\Gamma^{d(A)} \rangle$	$\Gamma_N^d = \langle \Gamma^{d(A+B+C)} \rangle$	$\Gamma_N^d = \Gamma^{d,p(A+B+C)}(k)$
Y_B (10 GeV)	3.8×10^{-10}	2.7×10^{-10}	2.9×10^{-10}
Y_B (100 MeV)	5.8×10^{-14}	3.9×10^{-14}	5.4×10^{-14}

表 6.1: 運動量の依存性を場合分けしたときの Y_B の比較。 M_N は 10 GeV と 100 MeV の場合を書いた。

これは、先行研究で用いられていた右巻きニュートリノの消滅率に他ならない。

以上より、2つの仮定を適応すると、次の発展方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{dR_N}{dt} = & -i[\langle H_N \rangle, R_N] - \frac{3}{2} \langle \gamma_N^d \rangle \{F^\dagger F, R_N - 1\} + 2 \langle \gamma_N^d \rangle F^\dagger (A - 1) F \\ & - \frac{1}{2} \langle \gamma_N^d \rangle \{F^\dagger (A^{-1} - 1) F, R_N\}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

たしかにすべて熱平均を取ったために、右辺もまた運動量に依存しない量のみで書かれている。

参考文献 [48] の発展方程式との違いは2点ある。一つ目は、式 (6.37) の第3項の係数で、先行研究は2ではなく3であった。もう一つは、式 (6.37) の最後の項で、これはこれまでに考慮されていない項である。こうして、運動量依存性を取り入れた発展方程式より、先行研究での発展方程式を導くことができた。

両者の違いを明確にするために、バリオン数非対称性の生成量を比較する。ステライルニュートリノの質量に関しては、 $M_N = 10\text{GeV}$ と 100MeV の2種類計算する。その他のパラメータは6.3節にある通りである。

まず、IとIIの場合について比較をする。両者共に運動量依存性は近似的なものであるが、消滅率と生成率に対する取り扱いが違う。 N_2 の密度行列 $[\rho_N(k)]_{22}$ と右巻きニュートリノの全非対称性 $[\Delta\rho_N(k)]_{\text{tot}}$ の運動量分布は、図 6.9 に示してある。運動量依存性については式 (6.31) で定義したように取っているの、重要なのは規格化の仕方のみである。つまり分布の形自体はIとIIの間に違いはない。 $[\rho_N(k)]_{22}$ を見てもわかる通りIとIIは完全に一致している。それは、右巻きニュートリノの生成は式 (6.11) の第2項が重要で、どちらの場合もこの項に違いがないためである。一方、非対称性の生成には右巻きニュートリノと左巻きレプトンを結ぶ項、つまり第3項が重要とな

る。これはⅡの場合がⅠの2/3倍となっているため、最終的な生成量はⅡの方が小さくなっている。

このように減った原因としては次のように考えることができる。 $\mathcal{O}(F^4)$ のオーダーの非対称性、つまりアクティブレプトンの非対称性は2つの場合で差はない。なぜならば、すべての過程が非対称生成に等しい寄与をするためである。しかし、 $\mathcal{O}(F^6)$ のオーダーの非対称性には、過程(A)と(B)が重要となる。よって、発展方程式(6.11)の第2項の係数が生成されるバリオン数に対して非常に有効に効くことになる。これは、新しい項を見出したことによって新たに発見した効果である。

最後に、ⅡとⅢについての比較を行う。図6.9を見てもわかるとおり、明らかに運動量分布が異なる。そして、運動量依存性については2種類の解釈の仕方がある。まず、ステライルニュートリノの質量が軽い場合は、シーソー機構のために湯川結合定数が非常に抑制されている。よって、すべての運動量で熱平衡からのずれが実現されている。一方、反応率は運動量の逆数に比例しているので、運動量の小さい領域が非対称性の生成を増長させる。こうして、運動量依存性を考慮することによって、 Y_B は約40%増える。

ところが、ステライルニュートリノの質量が重い場合は、湯川結合定数が大きくなり、運動量の小さい領域が熱平衡に入ってしまう。よって密度行列が熱分布的、つまり $\rho_N \rightarrow \rho^{eq} \mathbf{1}$ となってしまう。そうしたことで、非対称性に対してかき消す効果が働き、結果として大きく非対称性は増えない。このことは表6.1にもまとめてあるが、 Y_B の増加量は10%程度に留まっている。

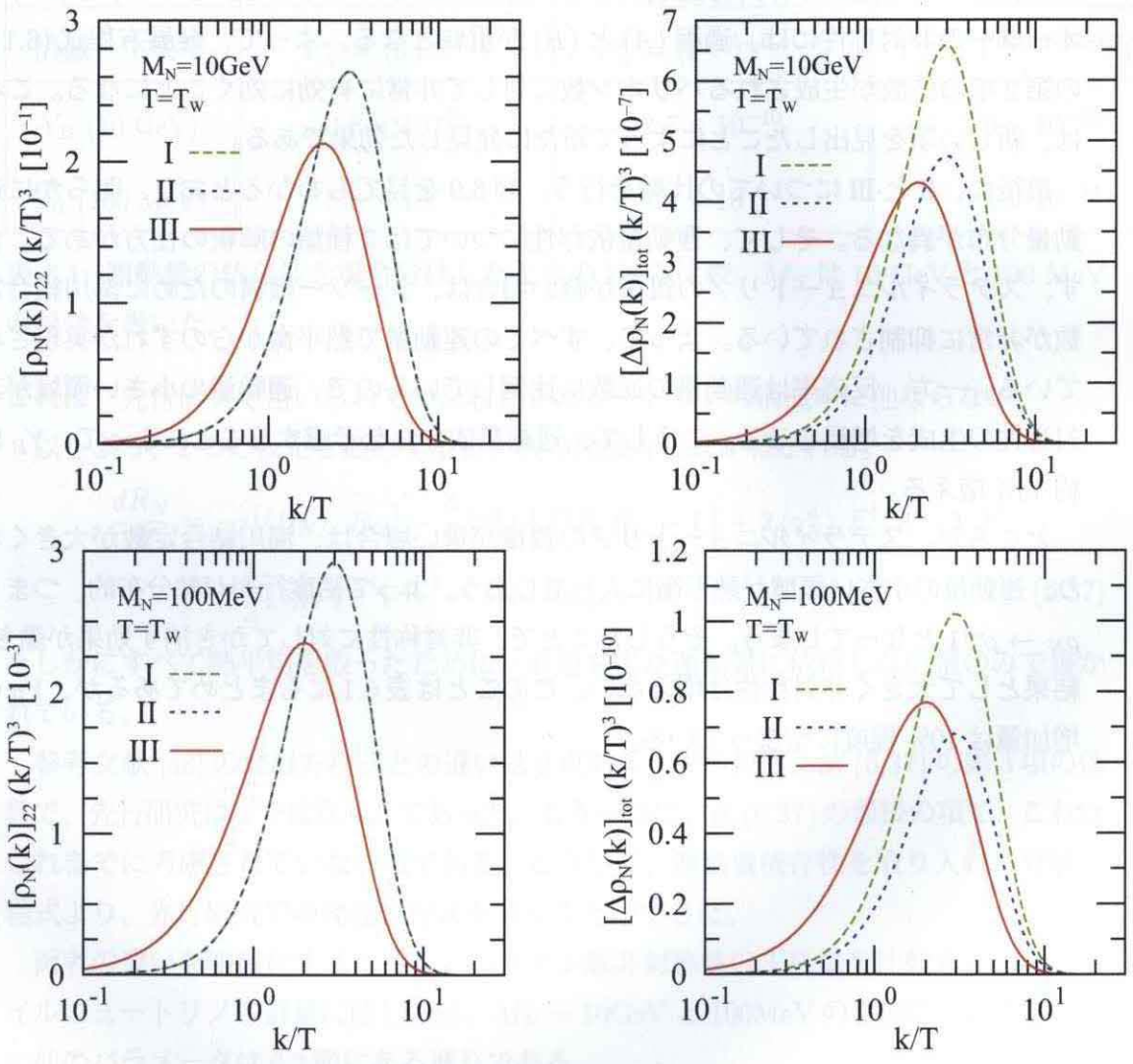


図 6.9: 左図は $[\rho_N(k)]_{22}$ 、右図は $[\Delta\rho_N(k)]_{\text{tot}}$ に $(k/T)^3$ をかけ算したものの運動量分布。表 6.1 のそれぞれの場合に分けて書かれていて、 $T = T_w$ のときの分布をそれぞれの質量に関して書いている。

第7章 結論

本博士論文では素粒子標準模型では説明することのできない、「ニュートリノ質量」と「宇宙バリオン数非対称性」という問題の解決を考察した。特に ν MSM という標準模型の拡張模型を考えて、上記2つの問題の解決を研究した。この模型は、標準模型に3つの右巻きニュートリノを加えた、繰り込み可能な最小拡張模型である。この模型でニュートリノはディラック質量とマヨラナ質量をもつことが可能だが、重要な仮定として、マヨラナ質量はディラック質量よりも十分に軽く、そのマヨラナ質量も電弱スケールよりも小さいとする。この仮定によって、マヨラナ質量とディラック質量の間の階層性より、シーソー機構が依然として働く。さらにこの質量領域の右巻きニュートリノは、将来の実験による直接検証の可能性が期待される。

本博士論文の目標は2つあった。それらのうち1つは、宇宙バリオン数非対称性の生成量とニュートリノパラメータとの相関を示すことである。ニュートリノパラメータは、アクティブニュートリノに関するものとステライルニュートリノに関するものがある。アクティブニュートリノに関するパラメータは、その質量とMNS行列の中のパラメータ、つまり混合角とCP位相である。一方ステライルニュートリノに関するパラメータは、その質量と行列 Ω の中の ξ と複素数 ω である。これらのパラメータの中でCP対称性を破るパラメータは3つあり、MNS行列の中のディラック位相 δ と η 、そして ω の虚数部分 $\text{Im}\omega$ である。アクティブニュートリノの質量階層性については、順階層型と逆階層型のどちらの場合についても示した。

特に、宇宙バリオン数非対称性がアクティブニュートリノのCP位相に由来している場合を示すため、 $\text{Im}\omega = 0$ として解析を行った。この場合、一般にアクティブニュートリノの質量が逆階層型の場合は、順階層型の場合と比較して4%に抑制されていることが分かった。つまり、宇宙バリオン数非対称性には順階層型の方が優勢である。また、生成されるバリオン数非対称性は、アクティブニュートリノの混合角 θ_{23} と θ_{13} に特徴的な依存性があることを示した。 $\theta_{23} = \pi/4$ のとき、CP位相に対する依存性は、順階層型の場合は $\sin(\delta + \eta)$ に比例し、逆階層型の場合は $\sin \eta$ に比例する。さらに、 θ_{23} が $\pi/4$ に近く、 θ_{13} が非常に小さくなると、順階層型の場合のバリオン数非対称性は抑制されるが、逆階層型の場合は抑制されずに残る。よって、アクティブニュートリノの混合角がこのような条件を満たす場合、逆階層型の方が宇宙バリオン数非対称性には

優勢であることがわかった。

もう1つの目標は、右巻きニュートリノの密度行列の運動量依存性を厳密に取り入れた発展方程式を書き下すことである。これによって各運動量の発展を追うことができ、運動量分布を求めることでバリオン数生成に有効な運動量を見積もることができる。つまり、これまでよりも正確に生成されるバリオン数を見積もることができる。

運動量依存性を取り入れた発展方程式を導出するうえで、次の2つの点に注意をした。第一は、与えられた運動量についての方程式を得るために、消滅率と生成率に運動量依存性を含めることである。第二は、散乱過程における始状態もしくは終状態の熱平衡からのずれの効果を正確に取り入れることである。特に二番目の点は、バリオン数生成機構のために必要不可欠なステライルとアクティブのセクターを結びつける項の起源となっているために、非常に重要な点である。

これまでの解析で用いられていた発展方程式との比較をすると、右巻きニュートリノと左巻きレプトンとを結びつける項は、生成率に対する補正 $\delta\Gamma_N^p$ と $\delta\Gamma_l^p$ に現れる。ただし、この項の係数はこれまでの解析のものと2/3倍異なる。さらに、消滅率に対する補正 $\delta\Gamma_N^d$ と $\delta\Gamma_l^d$ に、右巻きニュートリノと左巻き反レプトンを結びつける項が現れた。この項はこれまでに考慮されたことのない新しい項である。そしてこの項は、右巻きニュートリノの密度行列 $\rho_{N,\bar{N}}$ と、化学ポテンシャル μ_{ν_α} との積で書かれる項である。つまり、本課題で導出した発展方程式はもはや $\rho_{N,\bar{N}}$ そして μ_{ν_α} についての1次の方程式ではない。これらの項は、全レプトン数の保存を保証するために必要な項である。

得られた発展方程式を用い、数値解析も行った。右巻きニュートリノの生成率は運動量の逆数に比例しているため、生成される右巻きニュートリノは $k/T \lesssim 1$ となるようなときは増幅される。一方運動量が大きい場合は減衰される。結果として、右巻きニュートリノの密度行列の運動量分布は、熱平衡の運動量分布から大きく歪む。小さい運動量をもっていると、より高温で熱平衡に入るため非対称性を消す効果が働く。今回のパラメータの選び方による解析は、粒子数やその非対称性に有効な運動量は $k/T \simeq 2$ であることがわかった。

本課題における解析により、密度行列の運動量分布は熱平衡のものとは大きく異なることがわかった。また、運動量依存性を含めたことで、ニュートリノ湯川結合定数やステライルニュートリノといったパラメータに対する依存性が非自明な変更を受けたことを示した。故に、より正確なバリオン数生成量の評価を行うためには、密度行列の運動量依存性を考慮することは必要不可欠である。

謝辞

本博士論文の作成にあたって、修士課程の頃より全面的にご指導いただいた浅賀岳彦准教授には、心よりお礼を申し上げます。浅賀准教授のご指導無くしては、私は博士号の取得を成せなかったと思います。また、適宜適切なアドバイスをいただきました、谷本盛光教授、中野博章准教授、江尻信司准教授にもまた、感謝いたします。さらに、共同研究者である永島伸多郎君とは、ほとんど毎日のように楽しく議論をすることができました。ここにお礼を記させていただきます。そして幾多の議論を交わし、私に非常に楽しい5年間を与えてくれた研究室のみなさんにもまた、この場を借りて感謝の意を表したいと思います。

付録A スファレロン過程による保存量の分配

ここでは、バリオン数を破る過程であるスファレロン過程について説明し、この仮定が熱平衡に入っているときに、保存量 $B - L$ が各粒子数にどのように分配されるかを見る。

バリオン数 $B \equiv n_b - n_{\bar{b}}$ やレプトン数 $L \equiv n_l - n_{\bar{l}}$ は標準模型のラグランジアンレベルでは破れていない。しかし、量子効果によって破れている。バリオンカレント、レプトンカレントは次のように計算される [21]。

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = N_F \left(\frac{g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu} - \frac{g_Y^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^B \tilde{F}^{B\mu\nu} \right), \quad (\text{A.1})$$

ここで N_F はフェルミオンの世代数で、 g 、 g_Y はそれぞれ $SU(2)$ 、 $U(1)$ の結合定数である。また、 $F_{\mu\nu}^a$ 、 $F_{\mu\nu}^B$ はそれぞれ $SU(2)$ 、 $U(1)$ の場の強さで、 \sim 付きの場の強さは次のように定義される。

$$\tilde{F}_a^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} F_{\gamma\delta}^a, \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{F}_B^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} F_{\gamma\delta}^B. \quad (\text{A.3})$$

この破れは、Chern-Simon 数 (C.S. 数) $N_{C.S.}$ と呼ばれるトポロジーに起因する数で分割される $SU(2)$ の真空の間の遷移によって引き起こされる効果である。ゲージ場の配位の概念図を図 A.1 に示す。バリオン数やレプトン数はカレントの式 (A.2) と (A.3) によって次のように与えられる。

$$B = \int d^3x j_B^0, \quad L = \int d^3x j_L^0. \quad (\text{A.4})$$

真空を遷移し $N_{C.S.}$ が 1 変化すると、バリオン数やレプトン数は世代数分変化する。つまり、 $\Delta B = \Delta L = N_F \Delta N_{C.S.}$ となる。この効果は $B + L$ という量が $\Delta(B + L) = 2N_F \Delta N_{C.S.}$ となり非保存であるが、 $B - L$ は保存量となる。この非摂動効果による $B + L$ の破れは、't Hooft によって指摘された [22]。

これまでの議論より、真空間の遷移が起こることによって $B + L$ が破れることを示した。ゼロ温度の近似の元では、この遷移はトンネル効果によるもので、遷移確率を

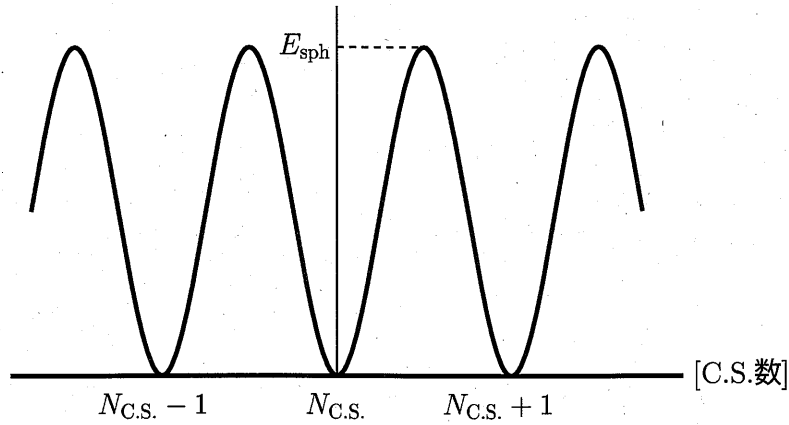


図 A.1: ゲージ場の配位の概念図。横軸は C.S. 数で分けられている。

計算すると次のようになる。

$$\Gamma \propto \exp \left[-\frac{16\pi^2}{g^2} \right] \simeq 10^{-173}, \quad (\text{A.5})$$

よってこの遷移はほとんど起こらない。

一方、 $T > 100\text{GeV}$ という高温領域において、この遷移は非常に活発に起こる [23-26]。単位体積当たりの遷移率は、次のように与えられる。

$$\Gamma = \kappa \cdot (\alpha_W T)^4, \quad (\text{A.6})$$

ここで κ は次元なしの係数で、 α_W は SU(2) の結合定数で $\alpha_W \equiv g^2/4\pi$ と定義される。格子シミュレーションによって、 $\kappa \sim 0.1 - 1$ と見積もられている [51, 52]。

次に、このスファレロン過程が熱平衡に入っているときに、保存量 $B - L$ が各粒子数にどのように分配されるかを見る。そのために、粒子数の非対称性を化学ポテンシャルを用いて記述していく。ある粒子 “ i ” の分配関数は、ボソン $f_{i,B}$ 、フェルミオン $f_{i,F}$ の場合それぞれ、次のように与えられる。

$$f_{i,B}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu_i}{T}\right) - 1}, \quad f_{i,F}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu_i}{T}\right) + 1}, \quad (\text{A.7})$$

ここで $E_i = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_i^2}$ で、 μ_i は粒子 “ i ” の化学ポテンシャル、 T は宇宙の温度である。数密度 n_i は、分配関数を用いて次の様に定義される。

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p f_i(\mathbf{p}), \quad (\text{A.8})$$

ここで g_i は粒子の内部自由度である。現在考えている温度は SU(2) 対称性が破れる前なので、すべての粒子の質量は無視することができる。よって $x \equiv (|\mathbf{p}| - \mu_i)/T$ と定

場	u_{Li}	d_{Li}	u_{Ri}	d_{Ri}	ν_{Li}	e_{Li}	e_{Ri}	ϕ^0	ϕ^-	W_μ^-	W_μ^0	B_μ^0	G_μ^A
化学ポテンシャル	μ_{uL}	μ_{dL}	μ_{uR}	μ_{dR}	μ_i	μ_{iL}	μ_{iR}	μ_0	μ_-	μ_W	0	0	0

表 A.1: 各場に対する化学ポテンシャルの割り振り。

義すると、それぞれの数密度は次のように計算できる。

$$n_{i;F} = \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \int dx \frac{x^2}{e^x + 1} + \frac{g_i}{12} \mu_i T^2, \quad n_{i;B} = \frac{g_i}{2\pi^2} T^3 \int dx \frac{x^2}{e^x - 1} + \frac{g_i}{6} \mu_i T^2. \quad (\text{A.9})$$

よって、反粒子の数密度との差は、

$$n_{i;F} - n_{i;\bar{F}} = \frac{g_i}{6} \mu_i T^2, \quad n_{i;B} - n_{i;\bar{B}} = \frac{g_i}{3} \mu_i T^2. \quad (\text{A.10})$$

以上より、粒子数の非対称性が化学ポテンシャルのみで記述することができた。

標準模型に導入されている場は、2.1節の表 2.1 にまとめた。ここからは、今考えている温度領域の元で、標準模型の場の相互作用はすべて化学平衡に入っていると仮定し、それぞれの化学ポテンシャルの間の関係式を導く。そしてそれらの関係式より、保存量 $B - L$ が各粒子数の非対称性にどのように分配されるかを示す。それぞれの場に対する化学ポテンシャルの割り振りは表 A.1 にまとめてある。ここで、 W_μ^0 、 B_μ^0 そしてグルーオンの化学ポテンシャルはゼロと置いた。化学平衡とは、 $i + j \leftrightarrow k + l$ という相互作用において、化学ポテンシャルの間に次の関係式が成り立つ。

$$\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l. \quad (\text{A.11})$$

もし、レプトンのフレーバー間混合の相互作用が宇宙膨張よりも十分に早いと仮定すると、レプトンの化学ポテンシャルについて次のように定義することができる。

$$\mu_{iL} \equiv \mu_L, \quad \mu_{iR} \equiv \mu_R, \quad \mu_i \equiv \frac{\mu}{3}, \quad (\text{A.12})$$

よって、独立な化学ポテンシャルは全部で $7 + 3N_F$ 個ある。

ここからは、標準模型の相互作用で独立なものを挙げていく。 W^- についての相互作用より、

$$W^- \leftrightarrow \phi^0 + \phi^-, \quad W^- \leftrightarrow \bar{u}_L + d_L, \quad W^- \leftrightarrow \bar{\nu}_L + e_L, \quad (\text{A.13})$$

次に、湯川相互作用より、

$$\phi^0 \leftrightarrow \bar{u}_L + u_R, \quad \phi^0 \leftrightarrow d_L + \bar{d}_R, \quad \phi^0 \leftrightarrow e_L + \bar{e}_R, \quad (\text{A.14})$$

$$\phi^- \leftrightarrow \bar{d}_L + u_R, \quad \phi^- \leftrightarrow u_L + \bar{d}_R, \quad \phi^- \leftrightarrow \nu_L + \bar{e}_R. \quad (\text{A.15})$$

次に、スファレロン過程が十分に早いとすると、次の関係式が得られる。

$$N_F(\mu_{uL} + 2\mu_{dL}) + \sum_i \mu_i = 0. \quad (\text{A.16})$$

また、電荷 Q_{em} の保存より、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} Q_{em} &= \frac{2}{3} \sum_i [n(u_{Li}) - n(\bar{u}_{Li})] - \frac{1}{3} \sum_i [n(d_{Li}) - n(\bar{d}_{Li})] + \frac{2}{3} \sum_i [n(u_{Ri}) - n(\bar{u}_{Ri})] \\ &\quad - \frac{1}{3} \sum_i [n(d_{Ri}) - n(\bar{d}_{Ri})] - \sum_i [n(e_{Li}) - n(\bar{e}_{Li})] - \sum_i [n(e_{Ri}) - n(\bar{e}_{Ri})] \\ &\quad - \sum_i [n(W_\mu^-) - n(W_\mu^+)] - \sum_i [n(\phi^-) - n(\phi^+)] \\ &= \frac{T^2}{6} \sum_i (2\mu_{uL} + 2\mu_{uR} - \mu_{dL} - \mu_{dR} - \mu_{iL} - \mu_{iR}) - \frac{T^2}{6} \left(4\mu_W + 2 \sum_i \mu_- \right) \\ &= \frac{T^2}{6} \{ N_F (2\mu_{uL} + 2\mu_{uR} - \mu_{dL} - \mu_{dR} - \mu_{iL} - \mu_{iR}) - 2(2\mu_W + N_\Phi \mu_-) \}, \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

ここで、 N_Φ はヒッグス場の数で、標準模型の場合 $N_\Phi = 1$ である。この電荷の保存則より得られる化学ポテンシャルの関係式は次式で与えられる。

$$N_F (2\mu_{uL} + 2\mu_{uR} - \mu_{dL} - \mu_{dR} - \mu_{iL} - \mu_{iR}) - 2(2\mu_W + N_\Phi \mu_-) = 0. \quad (\text{A.18})$$

次に、SU(2) の第3成分 Q_{L3} の保存より、

$$\begin{aligned} Q_{L3} &= \frac{1}{2} \sum_i [n(u_{Li}) + n(\nu_{Li}) + n(\phi^+) + n(W^+)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_i [n(d_{Li}) + n(e_{Li}) + n(\phi^0) + n(W^-)] \\ &= \frac{T^2}{3} \left\{ \frac{3N_F}{2} (\mu_{uL} - \mu_{dL}) + \frac{1}{2} (\mu - N_F \mu_{iL}) - 4\mu_W - N_\Phi (\mu_0 + \mu_-) \right\}, \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

よって、得られる関係式は、

$$\frac{3N_F}{2} (\mu_{uL} - \mu_{dL}) + \frac{1}{2} (\mu - N_F \mu_{iL}) - 4\mu_W - N_\Phi (\mu_0 + \mu_-) = 0. \quad (\text{A.20})$$

以上より、化学ポテンシャルについて9本の独立な方程式を得ることができた。未知数は10個ある。さらに、湯川相互作用に関する式と式(A.20)より、

$$\mu_W = 0. \quad (\text{A.21})$$

よって、未知数は9個で、独立な方程式は8本である。そこで、1つの化学ポテンシャル μ_{uL} を用いてその他の化学ポテンシャルを表すと次のようになる。

$$\mu_{uL}, \quad (\text{A.22})$$

$$\mu_{dL} = \mu_{uL}, \quad (\text{A.23})$$

$$\mu_{uR} = -\frac{2N_F - N_\Phi}{2N_F + N_\Phi} \mu_{uL}, \quad (\text{A.24})$$

$$\mu_{dR} = \frac{6N_F + N_\Phi}{2N_F + N_\Phi} \mu_{uL}, \quad (\text{A.25})$$

$$\mu_{iL} = -3\mu_{uL}, \quad (\text{A.26})$$

$$\mu_{iR} = -\frac{2N_F + 3N_\Phi}{2N_F + N_\Phi} \mu_{uL}, \quad (\text{A.27})$$

$$\mu_i = -3\mu_{uL}, \quad (\text{A.28})$$

$$\mu_0 = -\frac{4N_F}{2N_F + N_\Phi} \mu_{uL}, \quad (\text{A.29})$$

$$\mu_- = \frac{4N_F}{2N_F + N_\Phi} \mu_{uL}, \quad (\text{A.30})$$

$$\mu_W = 0. \quad (\text{A.31})$$

さて、化学ポテンシャルの関係式を得ることができたので、バリオン数やレプトン数を化学ポテンシャルを用いて表していく。まずバリオン数については、

$$\begin{aligned} B &= \sum_i \frac{1}{3} (n(u_{Li}) - n(\bar{u}_{Li})) + \sum_i \frac{1}{3} (n(d_{Li}) - n(\bar{d}_{Li})) \\ &\quad + \sum_i \frac{1}{3} (n(u_{Ri}) - n(\bar{u}_{Ri})) + \sum_i \frac{1}{3} (n(d_{Ri}) - n(\bar{d}_{Ri})) \\ &= \frac{T^2}{6} N_F 4 \mu_{uL}, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

一方、レプトン数については、

$$\begin{aligned} L &= \sum_i (n(e_{Li}) - n(\bar{e}_{Li})) + \sum_i (n(e_{Ri}) - n(\bar{e}_{Ri})) + \sum_i (n(\nu_i) - n(\bar{\nu}_i)) \\ &= \frac{T^2}{6} \left(-\frac{14N_F^2 + 9N_F N_\Phi}{2N_F + N_\Phi} \mu_{uL} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

これらを用いて、保存量 $B - L$ を表すと、次のようになる。

$$B - L = \frac{T^2}{3} \left(\frac{22N_F^2 + 13N_F N_\Phi}{2N_F + N_\Phi} \right) \mu_{uL}, \quad (\text{A.34})$$

逆に、化学ポテンシャル μ_{uL} を $B - L$ で表すと、

$$\mu_{uL} = \frac{3}{T^2} \left(\frac{2N_F + N_\Phi}{22N_F^2 + 13N_F N_\Phi} \right) (B - L). \quad (\text{A.35})$$

式(A.22)から(A.31)までを用いて、各数密度の非対称性を $B - L$ を用いて再度書き

直すと、

$$\Delta n(u_{Li}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2N_F + N_\Phi}{22N_F^2 + 13N_F N_\Phi} (B - L), \quad (\text{A.36})$$

$$\Delta n(d_{Li}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2N_F + N_\Phi}{22N_F^2 + 13N_F N_\Phi} (B - L), \quad (\text{A.37})$$

$$\Delta n(u_{Ri}) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2N_F - N_\Phi}{22N_F^2 + 13N_F N_\Phi} (B - L), \quad (\text{A.38})$$

$$\Delta n(d_{Ri}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{6N_F + N_\Phi}{22N_F^2 + 13N_F N_\Phi} (B - L), \quad (\text{A.39})$$

$$\Delta n(e_{Li}) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2N_F + N_\Phi}{22N_F^2 + 13N_F N_\Phi} (B - L), \quad (\text{A.40})$$

$$\Delta n(e_{Ri}) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2N_F + 3N_\Phi}{22N_F^2 + 13N_F N_\Phi} (B - L), \quad (\text{A.41})$$

$$\Delta n(\nu_{Li}) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2N_F + N_\Phi}{22N_F^2 + 13N_F N_\Phi} (B - L), \quad (\text{A.42})$$

$$\Delta n(\phi^0) = -\frac{4}{22N_F + 13N_\Phi} (B - L), \quad (\text{A.43})$$

$$\Delta n(\phi^-) = \frac{4}{22N_F + 13N_\Phi} (B - L), \quad (\text{A.44})$$

$$\Delta n(\phi^+) = 0. \quad (\text{A.45})$$

以上より、バリオン数、レプトン数を $B - L$ を用いて書き直すと、

$$B = \frac{8N_F + 4N_\Phi}{22N_F + 13N_\Phi} (B - L), \quad L = -\frac{14N_F + 9N_\Phi}{22N_F + 13N_\Phi} (B - L). \quad (\text{A.46})$$

これまでの議論より、もし初期条件として B や L がゼロでなかったとしても、 $B - L$ がゼロであったのであれば、すべての過程を通じバリオン数やレプトン数は消されてしまうことがわかる。一方で、 $B - L$ が生成されさえすれば、それぞれの粒子の非対称性に配分される。標準模型では、 $N_F = 3$ 、 $N_\Phi = 1$ より、

$$B = \frac{28}{79} (B - L) = 0.354 \times (B - L), \quad L = -\frac{51}{79} (B - L) = -0.646 (B - L) \quad (\text{A.47})$$

故に、スファレロン過程が有効な温度領域で $B - L$ が作られると、部分的にバリオン数へと転換される。スファレロン過程が切れた後は、バリオン数は保存量へと変わり、現在まで残ることになる。

付録B The ν MSM 模型における湯川結合定数の導出

ここでは、3.4節で導入したニュートリノ湯川結合定数の導出をする。一先ず、最も一般的な湯川結合定数について議論し、the ν MSM 模型ではパラメータがどのように減るかを見る。シーソー行列より、

$$M_\nu = -\langle\Phi\rangle^2 F M_M^{-1} F^T, \quad (\text{B.1})$$

MNS 行列を用いて対角化すると、アクティブニュートリノの質量行列 D_ν は、

$$D_\nu = U^\dagger M_\nu U^*, \quad (\text{B.2})$$

とすることで得られる。一方、マヨラナ質量行列を D_N と書き直し、

$$D_N^{-1} \equiv \text{diag} \left(\frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_2}, \frac{1}{M_3} \right), \quad (\text{B.3})$$

と表記することで、式 (B.1) と (B.2) より、

$$D_\nu = -\langle\Phi\rangle^2 U^\dagger F D_N^{-\frac{1}{2}} D_N^{-\frac{1}{2}} F^T U^*, \quad (\text{B.4})$$

この式を次のように変形する。

$$\mathbf{1} = -\langle\Phi\rangle^2 D_\nu^{-\frac{1}{2}} U^\dagger F D_N^{-\frac{1}{2}} D_N^{-\frac{1}{2}} F^T U^* D_\nu^{-\frac{1}{2}} \equiv \Omega \Omega^T, \quad (\text{B.5})$$

ここで、 Ω は 3×3 の直行行列で、3つの複素パラメータによって記述され、次のように定義される。

$$\Omega = -i \langle\Phi\rangle D_\nu^{-\frac{1}{2}} U^\dagger F D_N^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.6})$$

これを湯川結合定数について書くと、

$$F = \frac{i}{\langle\Phi\rangle} U D_\nu^{\frac{1}{2}} \Omega D_N^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.7})$$

よって一般に湯川結合定数は、ニュートリノの質量 $m_1, m_2, m_3, M_1, M_2, M_3$ 、MNS 行列の中のパラメータ $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta, \alpha_1, \alpha_2$ 、そして Ω の中の3つの複素数パラメータによって決定することができる。

ここで求めた湯川結合定数を決定するパラメータは、the ν MSM 模型においては減らすことができる。The ν MSM 模型で導入した3つのステライルニュートリノのうち、最も軽いものは宇宙暗黒物質候補だったので、その湯川結合定数が非常に小さい。ここでは厳密にゼロ、すなわち $F_{\alpha 1} = 0$ と置くと、対角化されたニュートリノ質量行列の質量固有値の一つは、必ずゼロとならなくては行けない。アクティブニュートリノとステライルニュートリノの質量固有値を比較すると、アクティブニュートリノの質量の方が軽いため、ゼロ固有値となるのはアクティブニュートリノの質量のうちの1つである。どの質量がゼロになるのかは、アクティブニュートリノの質量階層性によって変わる。第一に順階層型の場合は、 $0 = m_1 < m_2 < m_3$ となり、第二に逆階層型の場合は、 $0 = m_3 < m_1 < m_2$ となる。一先ず順階層型の場合を例にとって話を進める。

湯川結合定数のうち $F_{\alpha 1} = 0$ とすると、マヨラナ質量行列のうち M_1 の依存性がなくなるため、

$$M_M = \text{diag}(M_2, M_3), \quad (\text{B.8})$$

とすることができる。このときアクティブニュートリノの質量行列 $D_\nu = \text{diag}(0, m_2, m_3)$ から、式(B.5)と同様に書き換えたとき、行列 Ω は次のようにパラメトライズすることができる。

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{21} & \omega_{22} \\ \omega_{31} & \omega_{32} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

また、 $UD_\nu^{-1}\Omega$ の組み合わせを考えると、 α_1 の依存性もないことがわかるので、 $\alpha_2/\equiv \eta$ として再定義する。 Ω は直交行列であるので、直交性より要素を決定していく。

$$1 = \Omega\Omega^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 & \omega_{21}\omega_{31} + \omega_{22}\omega_{32} \\ 0 & \omega_{21}\omega_{31} + \omega_{22}\omega_{32} & \omega_{31}^2 + \omega_{32}^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

これより各成分を求めると、符号パラメータ ξ を用いて次式で与えられる。

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos \omega & -\sin \omega \\ \xi \sin \omega & \xi \cos \omega \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

以上より、順階層型の場合に湯川結合定数を決めるパラメータは、ニュートリノの質量 m_2, m_3, M_2, M_3 、MNS 行列の中のパラメータ $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta, \eta$ 、そして Ω の中の1つの複素数パラメータ ω と符号パラメータ ξ の、計12個のパラメータによって決定することができる。

付録C 有効ポテンシャルの評価

ここでは有効ポテンシャルと消滅率の評価を行っていく。有効ポテンシャルは、図Cのダイアグラムを計算することで得られる。電弱相転移前の宇宙を考えているので、フェルミオンやヒッグス場は質量をもつ前である。この場合、ゼロ温度の自己エネルギーは次のように与えられる。

$$\Sigma^0 = -ak, \quad (\text{C.1})$$

ここで k は粒子の運動量で、 a は k^2 の関数である。

有限温度ではフェルミオンはプラズマ中を伝播するので、自己エネルギーはこのプラズマの速度に依存する。ここで、慣例的にプラズマの慣性系をとる。つまり、プラズマの速度 u^μ について $u^\mu u_\mu = 1$ となることを仮定する。この場合フェルミオンの自己エネルギーは次のように書き直される。

$$\Sigma = -ak - b\psi, \quad (\text{C.2})$$

ここで a と b は次のように定義されるローレンツスカラーに依存する量である。

$$\omega \equiv k^\mu u_\mu, \quad (\text{C.3})$$

$$\kappa \equiv [(k^\mu u_\mu)^2 - k^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.4})$$

フェルミオンとボソンの伝播関数はそれぞれ次のように与えられる。

$$S(p) = \not{p} \left[\frac{1}{p^2 + i\epsilon} + i\Gamma_f(p) \right], \quad (\text{C.5})$$

$$D(p) = \left[\frac{1}{p^2 + i\epsilon} - i\Gamma_b(p) \right]. \quad (\text{C.6})$$

ここで、各伝播関数の第2項は有限温度の効果の部分であり、次のように定義される。

$$\Gamma_{b,f} \equiv 2\pi\delta(p^2)n_{b,f}(p), \quad (\text{C.7})$$

$$n_{b,f}(p) \equiv (e^{|\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\mu}|/T} \pm 1). \quad (\text{C.8})$$

こうして自己エネルギーは次のように書かれる。

$$\Sigma(k) = i \sum_{\alpha} F_{\alpha J}^* C' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D(p) S_{\alpha}(p+k) F_{\alpha I}, \quad (\text{C.9})$$

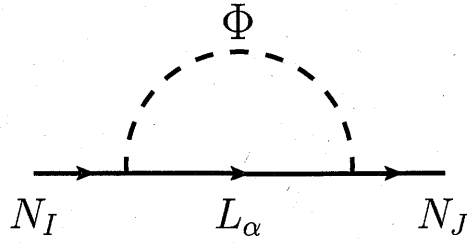


図 C.1: 右巻きニュートリノの自己エネルギーのダイアグラム。

ここで C' は対応する表現の 2 次のカシミア不変量である。今、フェルミオンは質量をもっていないので、フェルミオンの伝播関数 $S(p)$ はフレーバーに関してユニバーサルなので、湯川結合定数は次のように書き直せる。

$$\Sigma(k) = i \sum_{\alpha} [F_{\alpha J}^* F_{\alpha I}] C' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D(p) S_{\alpha}(p+k), \quad (\text{C.10})$$

ここからは、簡単のために $\sum_{\alpha} [F_{\alpha J}^* F_{\alpha I}] = |F|^2$ と表記する。自己エネルギー Σ は温度に依存しない部分と、温度に依存する部分に分けることができ、ここからは温度に依存する部分のみを考えていき、この部分を Σ' と表記する。 Σ' は複素数の関数だが、 $\omega^2 > k^2$ の領域で、 Σ' の虚数部分 $\text{Im}\Sigma'$ は、運動量積分が 2 体の位相空間によって抑制されていて、高温領域では $\text{Im}\Sigma'$ は ω もしくは κ のオーダーなので、今後は無視する。

式 (C.2) の a と b を求めていくが、それは次の連立方程式を解くことによって求めることができる。

$$k^2 a + u k b = -\frac{1}{4} \text{tr} (\not{k} \text{Re}\Sigma'), \quad (\text{C.11})$$

$$k u a + u^2 b = -\frac{1}{4} \text{tr} (\not{u} \text{Re}\Sigma'). \quad (\text{C.12})$$

まず、この連立方程式の右辺を求めていくことから始める。

最初に、式 (C.11) の右辺から求めていく。 $\frac{1}{4} \text{tr} (\not{k} \text{Re}\Sigma')$ はフェルミオンに関する部分とボソンに関する部分に分解することができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{tr} (\not{k} \text{Re}\Sigma') &= \frac{1}{4} |F|^2 C' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \{ \not{k} [(\not{p} + \not{k}) \Gamma_b(p) + \not{p} \Gamma_f(p)] \} \frac{1}{(p+k)^2} \\ &= |F|^2 C' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [(pk + k^2) \Gamma_b(p) + pk \Gamma_f(p)] \frac{1}{(p+k)^2} \\ &\equiv [F(\Gamma_b) + F(\Gamma_f)]. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

この式中のフェルミオンに関する部分は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
F(\Gamma_f) &= |F|^2 C' \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{pk}{p^2 + 2pk + k^2} 2\pi \delta(p^2) n_f(p) \\
&= 2\pi |F|^2 C' \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{pk}{2pk + k^2} \frac{1}{2|\mathbf{p}|} \{ \delta(p^0 + |\mathbf{p}|) + \delta(p^0 - |\mathbf{p}|) \} n_f(p) \\
&= \frac{(2\pi)^2}{4} |F|^2 C' \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp^0 d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}| d\cos\theta \frac{p^0 k^0 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos\theta}{p^0 k^0 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos\theta + k^2/2} \\
&\quad \times \{ \delta(p^0 + |\mathbf{p}|) + \delta(p^0 - |\mathbf{p}|) \} n_f(p). \tag{C.14}
\end{aligned}$$

p^0 積分を実行することで2つに分けたデルタ関数の部分はそれぞれに計算が可能で、 $\delta(p^0 - |\mathbf{p}|)$ については次のように求められる。

$$\begin{aligned}
&\frac{(2\pi)^2}{4} |F|^2 C' \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp^0 d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}| d\cos\theta \frac{p^0 k^0 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos\theta}{p^0 k^0 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos\theta + k^2/2} \delta(p^0 - |\mathbf{p}|) n_f(p) \\
&= \frac{(2\pi)^2}{4} |F|^2 C' \frac{1}{(2\pi)^4} \int d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}| \left(2 + \frac{k^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|} \ln \left| \frac{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}| - 2|\mathbf{p}|k^0 - k^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}| - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|k^0 + k^2} \right| \right) n_f(p) \tag{C.15}
\end{aligned}$$

ここで次の量を定義する。

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} (\omega \pm \kappa), \tag{C.16}$$

これを用いると、式(C.15)は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
&\frac{(2\pi)^2}{4} |F|^2 C' \frac{1}{(2\pi)^4} \int d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}| \left(2 + \frac{k^2}{2|\mathbf{p}|\kappa} \ln \left| \frac{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}| - 2|\mathbf{p}|k^0 - k^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}| - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|k^0 + k^2} \right| \right) n_f(p) \\
&= \frac{(2\pi)^2}{4} |F|^2 C' \frac{1}{(2\pi)^4} \int d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}| \left(2 + \frac{k^2}{2|\mathbf{p}|\kappa} \ln \left| \frac{\omega_- (|\mathbf{p}| + \omega_+)}{\omega_+ (|\mathbf{p}| + \omega_-)} \right| \right) n_f(p), \tag{C.17}
\end{aligned}$$

さらに、 $\delta(p^0 + |\mathbf{p}|)$ に関する項も同様な計算によって次のように求められる。

$$\begin{aligned}
&\frac{(2\pi)^2}{4} |F|^2 C' \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp^0 d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}| d\cos\theta \frac{p^0 k^0 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos\theta}{p^0 k^0 - |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos\theta + k^2/2} \delta(p^0 + |\mathbf{p}|) n_f(p) \\
&= \frac{(2\pi)^2}{4} |F|^2 C' \frac{1}{(2\pi)^4} \int d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}| \left(2 + \frac{k^2}{2|\mathbf{p}|\kappa} \ln \left| \frac{\omega_+ (|\mathbf{p}| - \omega_-)}{\omega_- (|\mathbf{p}| - \omega_+)} \right| \right) n_f(p). \tag{C.18}
\end{aligned}$$

式(C.17)と(C.18)の結果をまとめると、

$$F(\Gamma_f) = |F|^2 C' \frac{1}{16\pi^2} \int d|\mathbf{p}| \left(4|\mathbf{p}| + \frac{k^2}{2\kappa} \ln \left| \frac{(|\mathbf{p}| + \omega_+) (|\mathbf{p}| - \omega_-)}{(|\mathbf{p}| + \omega_-) (|\mathbf{p}| - \omega_+)} \right| \right) n_f(p). \tag{C.19}$$

次は、ボソンに関する部分も同様に計算ができる。フェルミオンに関する部分との違いは分布関数のみで、結果は次のようになる。

$$F(\Gamma_b) = |F|^2 C' \frac{1}{16\pi^2} \int d|\mathbf{p}| \left(4|\mathbf{p}| - \frac{k^2}{2\kappa} \ln \left| \frac{(|\mathbf{p}| + \omega_+) (|\mathbf{p}| - \omega_-)}{(|\mathbf{p}| + \omega_-) (|\mathbf{p}| - \omega_+)} \right| \right) n_b(p). \tag{C.20}$$

式 (C.19) と (C.20) より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{tr} (\not{k} \text{Re} \Sigma') &= |F|^2 C' \frac{1}{16\pi^2} \int d|\mathbf{p}| \left[\left(4|\mathbf{p}| + \frac{k^2}{2\kappa} \ln \left| \frac{(|\mathbf{p}| + \omega_+)(|\mathbf{p}| - \omega_-)}{(|\mathbf{p}| + \omega_-)(|\mathbf{p}| - \omega_+)} \right| \right) n_f \right. \\ &\quad \left. + \left(4|\mathbf{p}| - \frac{k^2}{2\kappa} \ln \left| \frac{(|\mathbf{p}| + \omega_+)(|\mathbf{p}| - \omega_-)}{(|\mathbf{p}| + \omega_-)(|\mathbf{p}| - \omega_+)} \right| \right) n_b \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

次に、式 (C.12) の右辺を求める。この計算は先ほどの場合と大きな違いはなく、結果のみを書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{tr} (\not{k} \text{Re} \Sigma') &= \frac{|F|^2 C'}{16\pi^2 \kappa} \int d|\mathbf{p}| \left\{ \left(2|\mathbf{p}| \ln \left| \frac{\omega_-}{\omega_+} \right| - |\mathbf{p}| \ln \left| \frac{(|\mathbf{p}| + \omega_+)(|\mathbf{p}| - \omega_+)}{(|\mathbf{p}| + \omega_-)(|\mathbf{p}| - \omega_-)} \right| \right) n_f(p) \right. \\ &\quad \left. + \left(2|\mathbf{p}| \ln \left| \frac{\omega_-}{\omega_+} \right| - |\mathbf{p}| \ln \left| \frac{(|\mathbf{p}| + \omega_+)(|\mathbf{p}| - \omega_+)}{(|\mathbf{p}| + \omega_-)(|\mathbf{p}| - \omega_-)} \right| - \omega \ln \left| \frac{(|\mathbf{p}| + \omega_+)(|\mathbf{p}| - \omega_-)}{(|\mathbf{p}| + \omega_-)(|\mathbf{p}| - \omega_+)} \right| \right) n_b(p) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

ここで、運動量が非常に大きい極限を考える ($|\mathbf{p}| \gg \omega_{\pm}$)。この極限で対数関数は次のように漸近する。

$$\ln \left| \frac{(|\mathbf{p}| + \omega_+)(|\mathbf{p}| - \omega_-)}{(|\mathbf{p}| + \omega_-)(|\mathbf{p}| - \omega_+)} \right| \rightarrow \frac{\kappa}{|\mathbf{p}|}, \quad (\text{C.23})$$

$$\ln \left| \frac{(|\mathbf{p}| + \omega_+)(|\mathbf{p}| - \omega_+)}{(|\mathbf{p}| + \omega_-)(|\mathbf{p}| - \omega_-)} \right| \rightarrow -\frac{\omega\kappa}{|\mathbf{p}|^2}. \quad (\text{C.24})$$

これらの漸近系を運動量積分すると、 $\ln T$ に比例する項が出てくる。よって他の項に比べると小さいので無視することが可能である。また、分布関数の運動量積分は次のようになる。

$$\int d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}| n_f = \frac{\pi^2 T^2}{12}, \quad (\text{C.25})$$

$$\int d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}| n_b = \frac{\pi^2 T^2}{6}. \quad (\text{C.26})$$

以上の結果を用いて、連立方程式は、

$$k^2 a + u k b = -\frac{1}{16} |F|^2 C' T^2, \quad (\text{C.27})$$

$$k u a + u^2 b = -\frac{1}{32\kappa} |F|^2 C' T^2 \ln \left(\frac{\omega_+}{\omega_-} \right). \quad (\text{C.28})$$

これらの連立方程式より、 a と b 求めると次のようになる。

$$a = \frac{1}{16\kappa^2} |F|^2 C' T^2 \left(1 - \frac{\omega}{2\kappa} \ln \left(\frac{\omega + \kappa}{\omega - \kappa} \right) \right), \quad (\text{C.29})$$

$$b = \frac{1}{16\kappa^2} |F|^2 C' T^2 \left(-\frac{\omega}{\kappa} + \left(\frac{\omega^2}{\kappa^2} - 1 \right) \times \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega + \kappa}{\omega - \kappa} \right) \right). \quad (\text{C.30})$$

これまでで求めたローレンツ不変な関数 a と b を用いて、完全な伝播関数は、

$$S(k) = [(1+a)k + b\psi]^{-1} = \frac{[(1+a)k + b\psi]}{D}, \quad (\text{C.31})$$

と書ける。ここで、

$$D(\kappa, \omega) = [\omega(1+a) + b]^2 - [\kappa(1+a)]^2. \quad (\text{C.32})$$

この D のゼロ点、つまり伝播関数の極を求めることで、分散関係を得る。 a と b を代入し、分散関係を求めると次式で与えられる。

$$\omega - \kappa = \frac{M^2}{\kappa} \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega}{\kappa} \right) \ln \left| \frac{\omega + \kappa}{\omega - \kappa} \right| \right], \quad (\text{C.33})$$

ここで、

$$M^2 \equiv \frac{C'}{16} |F|^2 T^2. \quad (\text{C.34})$$

これは熱的質量と呼ばれる量で、熱浴中を伝播した右巻きニュートリノが熱浴との相互作用によってあたかも質量を獲得したかのようにになっている。この分散関係より、有効ポテンシャルは次のように得られる。

$$V = \frac{C' |F|^2 T^2}{16 |\vec{k}|}, \quad (\text{C.35})$$

この有効ポテンシャルは右巻きニュートリノについても左巻きレプトンについても同様に計算ができるが、カシミア不変量のみが違う。それぞれに分けて書くと、次のようである。

$$V_N = \frac{1}{8} \frac{T^2}{|\vec{k}|} F^\dagger F, \quad (\text{C.36})$$

$$V_\nu = \frac{1}{16} \frac{T^2}{|\vec{k}|} F F^\dagger. \quad (\text{C.37})$$

ここで得られた有効ポテンシャルは、左巻きレプトンの化学ポテンシャルを無視したものである。化学ポテンシャルを入れたものは、同様に計算ができるので、途中式は省略し結果のみを書くと次のようになる。

$$V_N = \frac{1}{8} \frac{T^2}{|\vec{k}|} F^\dagger F \left(1 - \frac{4 \log 2}{\pi^2} \mu_\alpha \right), \quad (\text{C.38})$$

$$V_\nu = \frac{1}{16} \frac{T^2}{|\vec{k}|} F F^\dagger \left(1 - \frac{4 \log 2}{\pi^2} \mu_\alpha \right). \quad (\text{C.39})$$

ただし、各有効ポテンシャルの第2項、つまり化学ポテンシャルに比例する項は第1項に比べ十分に小さいため、無視することが可能である。よって、本文中では化学ポテンシャルを無視した有効ポテンシャルを用いて評価している。

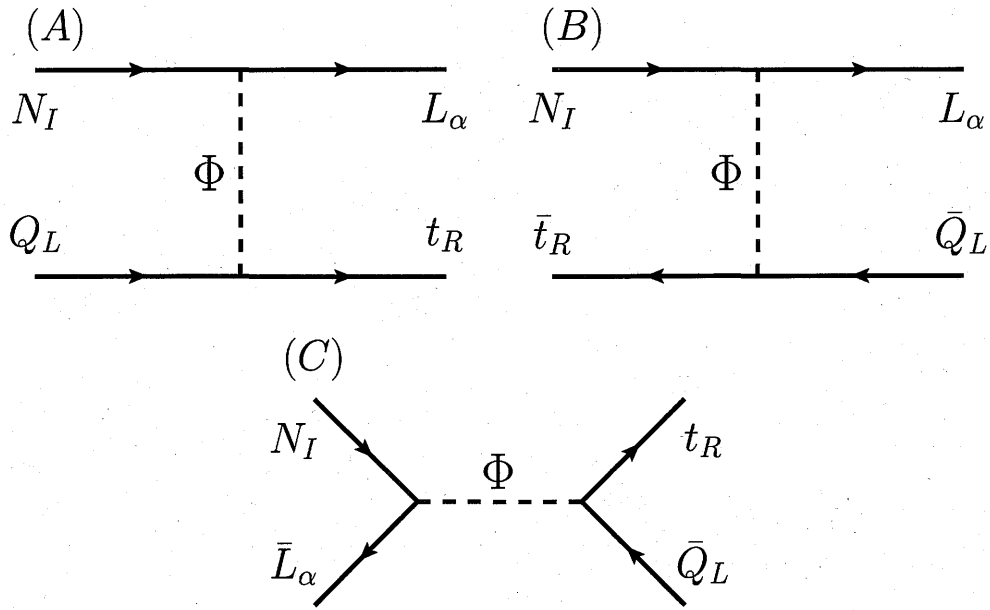


図 D.1: 散乱過程のダイアグラム。

付録D 右巻きニュートリノの消滅率 と生成率の評価

ここでは、右巻きニュートリノ $N_I (I = 1, 2, 3)$ の消滅率そして生成率について評価していく。消滅率は図 D.1 に描かれるような 3 つの寄与を計算すればよい。まず、これらの散乱振幅を求めていくが、ここではヘリシティの固有状態を用いた波動関数によって計算していく。粒子の波動関数 $u(p, \lambda)$ は次のように書ける。

$$u(p, +) = \sqrt{E + |p|} \begin{pmatrix} \frac{M}{E + |p|} \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \chi_+, \quad (\text{D.1})$$

$$u(p, -) = \sqrt{E + |p|} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{M}{E + |p|} \end{pmatrix} \otimes \chi_-, \quad (\text{D.2})$$

$$\bar{u}(p, +) = \sqrt{E + |p|} (\chi_+)^{\dagger} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \frac{M}{E + |p|} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

$$\bar{u}(p, -) = \sqrt{E + |p|} (\chi_-)^{\dagger} \otimes \begin{pmatrix} \frac{M}{E + |p|} & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

一方反粒子の波動関数 $v(p, \lambda)$ は次のように書ける。

$$v(p, +) = \sqrt{E + |p|} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{M}{E+|p|} \end{pmatrix} \otimes \chi_-, \quad (\text{D.5})$$

$$v(p, -) = \sqrt{E + |p|} \begin{pmatrix} -\frac{M}{E+|p|} \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \chi_+, \quad (\text{D.6})$$

$$\bar{v}(p, +) = \sqrt{E + |p|} (\chi_+)^{\dagger} \otimes \begin{pmatrix} -\frac{M}{E+|p|} & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

$$\bar{v}(p, -) = \sqrt{E + |p|} (\chi_-)^{\dagger} \otimes \begin{pmatrix} 1 & -\frac{M}{E+|p|} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.8})$$

ここで、 M は粒子の質量、 E はエネルギー、 $|p|$ は運動量の絶対値である。さらに、 χ はヘリシティの固有状態で次のように書かれる。

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.9})$$

今、右巻きニュートリノの運動の方向を z 軸方向と仮定する。こうすることで、右巻きニュートリノのヘリシティの固有状態は次のようになる。

$$\chi_+^N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_-^N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.10})$$

これらのヘリシティの固有状態を用いて、双一次を計算したものをまとめておくと、

$$(\chi_+)^{\dagger} \chi_+^N = \cos \frac{\theta}{2}, \quad (\text{D.11})$$

$$(\chi_+)^{\dagger} \chi_-^N = \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \quad (\text{D.12})$$

$$(\chi_-)^{\dagger} \chi_+^N = -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}, \quad (\text{D.13})$$

$$(\chi_-)^{\dagger} \chi_-^N = \cos \frac{\theta}{2}, \quad (\text{D.14})$$

$$(\chi_+^i)^{\dagger} \chi_+^j = \cos \frac{\theta^i}{2} \cos \frac{\theta^j}{2} + \sin \frac{\theta^i}{2} \sin \frac{\theta^j}{2} e^{-i(\phi^i - \phi^j)}, \quad (\text{D.15})$$

$$(\chi_+^i)^{\dagger} \chi_+^j = \sin \frac{\theta^i}{2} \cos \frac{\theta^j}{2} e^{-i\phi^i} - \cos \frac{\theta^i}{2} \sin \frac{\theta^j}{2} e^{-i\phi^j}, \quad (\text{D.16})$$

$$(\chi_+^i)^{\dagger} \chi_+^j = \cos \frac{\theta^i}{2} \cos \frac{\theta^j}{2} e^{-i\phi^i} - \sin \frac{\theta^i}{2} \sin \frac{\theta^j}{2} e^{-i\phi^j}, \quad (\text{D.17})$$

$$(\chi_+^i)^{\dagger} \chi_+^j = \cos \frac{\theta^i}{2} \cos \frac{\theta^j}{2} + \sin \frac{\theta^i}{2} \sin \frac{\theta^j}{2} e^{i(\phi^i - \phi^j)}. \quad (\text{D.18})$$

となる。このヘリシティの固有状態を用いた波動関数によって、各過程の遷移振幅を計算していく。

まず最初に、過程 (C) についての行列要素を計算していく。

$$\mathcal{M}_{\lambda_N \lambda_L; \lambda_t \lambda_Q} = -\frac{F_{\alpha I} h_t}{q^2} (\bar{\nu}(p_2, \lambda_L) P_R u(p_1, \lambda_N)) (\bar{u}(k_2, \lambda_t) P_R u(k_1, \lambda_Q)), \quad (\text{D.19})$$

ここで、 $F_{\alpha I}$ はニュートリノ湯川結合定数行列、 h_t はトップクォークとの湯川結合定数、 q は中間状態の運動量 P_R は射影演算子である。この中で、ヘリシティの固有状態の双一次を考えて、残る項は次式である。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{++; ++} &= -\frac{F_{\alpha I} h_t}{q^2} F(E) \sin \frac{\theta^L}{2} e^{i\phi^L} \\ &\quad \times \left(\sin \frac{\theta^t}{2} \cos \frac{\theta^Q}{2} e^{-i\phi^t} - \sin \frac{\theta^Q}{2} \cos \frac{\theta^t}{2} e^{-i\phi^Q} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

ここで $F(E)$ はエネルギーの関数で次のように定義する。

$$F(E) = \sqrt{(E_1^I + |p_1|)(E_2^I + |p_2|)(E_1^F + |k_1|)(E_2^F + |k_2|)}. \quad (\text{D.21})$$

他の過程については、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda_N \lambda_Q; \lambda_L \lambda_t} = \mathcal{M}_{+-; -+} &= -\frac{F_{\alpha I} h_t}{q^2} F(E) \sin \frac{\theta^L}{2} e^{i\phi^L} \\ &\quad \times \left(\sin \frac{\theta^t}{2} \cos \frac{\theta^Q}{2} e^{-i\phi^t} - \sin \frac{\theta^Q}{2} \cos \frac{\theta^t}{2} e^{-i\phi^Q} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda_N \lambda_t; \lambda_L \lambda_Q} = \mathcal{M}_{+-; -+} &= -\frac{F_{\alpha I} h_t}{q^2} F(E) \sin \frac{\theta^L}{2} e^{i\phi^L} \\ &\quad \times \left(\sin \frac{\theta^t}{2} \cos \frac{\theta^Q}{2} e^{-i\phi^t} - \sin \frac{\theta^Q}{2} \cos \frac{\theta^t}{2} e^{-i\phi^Q} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

よって、各過程の行列要素はすべて等しい。この結果から、行列要素の2乗は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{|F_{\alpha I}|^2 h_t^2}{2q^4} F(E)^2 \\ &\quad \times \sin^2 \frac{\theta^L}{2} (1 - \cos \theta^t \cos \theta^Q - \sin \theta^t \sin \theta^Q \cos [\phi^Q - \phi^t]), \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

また、現在興味のある系では粒子は質量を獲得する前なので、 $|\mathcal{M}|^2$ は次のようになる。

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow |F_{\alpha I}|^2 h_t^2. \quad (\text{D.25})$$

この散乱振幅の2乗を使って、これから消滅率や生成率を求めていく。

消滅率はボルツマン方程式を用いて求めることが可能となる。ここではまず一般的に、 $N + a \rightarrow i + j$ という過程を考える。右巻きニュートリノの分布関数 f_N に対するボルツマン方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_N}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R} \frac{|p|}{E_N} \frac{\partial f_N}{\partial E_N} &= -\frac{1}{2E_N} \int d\Pi_a d\Pi_i d\Pi_j (2\pi)^2 \delta^{(4)}(p + p' - k - k') \frac{S}{s_N s_a s_i s_j} \sum |\mathcal{M}|^2 \\ &\quad \times [f_N f_a (1 - f_i)(1 - f_j) - f_i f_j (1 - f_N)(1 - f_a)], \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

ここで s_X は対応する粒子のスピン自由度で、 S は対称因子である。また、 $\sum |\mathcal{M}|^2$ は始状態と終状態の内部自由度についての平均を取った遷移振幅の2乗、 f_X は対応する粒子の分布関数で、内部自由度 g_X を用いて $d\Pi_X \equiv g_X \frac{d^3 p_X}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_X}$ で定義される。今、マクスウェル-ボルツマン統計を採用すると、 $1 \pm f_X \rightarrow 1$ と近似できるので、ボルツマン方程式は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} - \frac{\dot{R} |\mathbf{p}|}{R E_N} \frac{\partial f_N}{\partial E_N} = -\frac{1}{2E_N} \int d\Pi_a d\Pi_i d\Pi_j (2\pi)^2 \delta^{(4)}(p + p' - k - k') \times \frac{S}{s_X s_a s_i s_j} \sum |\mathcal{M}|^2 [f_N f_a - f_i f_j]. \quad (\text{D.27})$$

この右辺の第1項が消滅率に対応する。今、右巻きニュートリノは熱的プラズマ中を伝播しているが、計算を簡単にするために熱的プラズマの系の軸 u_μ を、 $u_\mu = (\sqrt{1+a^2}, 0, 0, a)$ とする。このとき分布関数は次のように書ける。

$$f(E) = \exp \left[- \left(E\sqrt{1+a^2} - Ea \cos \theta \right) / T \right]. \quad (\text{D.28})$$

この計算では、右巻きニュートリノのヘリシティは固定して計算するので、 $s_N = 1$ である。さらにこのとき、他の粒子のスピン自由度もまた1である。残る内部自由度は $SU(2)$ と $SU(3)$ の自由度で $g_L g_t g_Q = 6$ であり、対称因子は $S = 1$ である。よって、先に計算した行列要素の2乗を代入して消滅率は次のように書ける。

$$\Gamma_N^{d(C)} = \frac{1}{2E_N} \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3 2E_a} f(E_a) \times \Phi_2 \times 6 |F_{\alpha I}|^2 h_t^2, \quad (\text{D.29})$$

ここで Φ_2 は2体の位相空間積分で、

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \int \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_x + p_a - p_i - p_j) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_i}{2E_i} \theta(p_N^0 + p_a^0 - p_i^0) \delta((p_N + p_a - p_i)^2), \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

である。今、各粒子の4元運動量を次のように割り振る。

$$(p_N)_\mu = E_N(1, 0, 0, 1), \quad (\text{D.31})$$

$$(p_a)_\mu = E_a(1, \sin \theta^a, 0, \cos \theta^a), \quad (\text{D.32})$$

$$(p_i)_\mu = E_i(1, \sin \theta^i \cos \phi^i, \sin \theta^i \sin \phi^i, \cos \theta^i), \quad (\text{D.33})$$

よって、デルタ関数の中は次のように計算できる。

$$(p_N + p_a - p_i)^2 = -2A \left(E_i - \frac{B}{A} \right), \quad (\text{D.34})$$

ここで $A = E_N(1 - \cos \theta^i) + E_a(1 - \sin \theta^a \sin \theta^i \cos \phi^i - \cos \theta^a \cos \phi^i)$ そして $B = E_N E_a(1 - \cos \theta^a)$ である。よってこの位相空間積分は、

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_i}{E_i} \theta(p_N^0 + p_a^0 - p_i^0) \delta\left(-2A\left(E_i - \frac{B}{A}\right)\right) \\ &= \frac{B}{4(2\pi)^2} \int d\cos\theta^i d\phi^i \frac{1}{A^2},\end{aligned}\quad (\text{D.35})$$

となり、 A^2 は、

$$\begin{aligned}A^2 &= \{-E_a \sin \theta^a \sin \theta^i \cos \phi^i + E_N(1 - \cos \theta^i) + E_a - \cos \theta^a \cos \theta^i\}^2 \\ &\equiv (C \cos \phi^i + D)^2,\end{aligned}\quad (\text{D.36})$$

と計算できる。ここで $C = -E_a \sin \theta^a \sin \theta^i$ と $D = E_N(1 - \cos \theta^i) + E_a - \cos \theta^a \cos \theta^i$ とした。よって Φ_2 は、

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \frac{B}{4(2\pi)^2} \int d\cos\theta^i d\phi^i \frac{1}{(C \cos \phi^i + D)^2} \\ &= \frac{E_N E_a(1 - \cos \theta^a)}{4(2\pi)^2} \frac{1}{E_N E_a(1 - \cos \theta^a)} \\ &= \frac{1}{8\pi},\end{aligned}\quad (\text{D.37})$$

となる。この位相空間積分より、右巻きニュートリノの過程 (C) についての消滅率は次式で得られる。

$$\begin{aligned}\Gamma_N^{d(C)} &= \frac{6|F_{\alpha I}|^2 h_t^2}{8\pi \times 2E_N} \int \frac{d^3 p_a}{(2\pi)^3 2E_a} f(E_a) \\ &= \frac{6|F_{\alpha I}|^2 h_t^2}{8\pi \times 2E_N} \times \frac{T^2}{4\pi^2} \\ &= \frac{3|F_{\alpha I}|^2 h_t^2}{32\pi^3 E_N} T^2.\end{aligned}\quad (\text{D.38})$$

すべての過程の行列要素は等しかったので、右巻きニュートリノの消滅率は、

$$\Gamma_N^d = \frac{9|F_{\alpha I}|^2 h_t^2}{32\pi^3 E_N} T^2,\quad (\text{D.39})$$

と計算できる。参考文献 [13] までに用いられていた消滅率は、熱平均を取った消滅率を採用していた。熱平均とは次のようにして得られる。

$$\langle \Gamma_N^d \rangle = \frac{\int d\Pi_a f_a^{eq}(k) \Gamma_N^d}{\int d\Pi_a f_a^{eq}},\quad (\text{D.40})$$

これを計算すると、

$$\langle \Gamma_N^d \rangle = \frac{9h_t^2}{64\pi^2} T F^\dagger F.\quad (\text{D.41})$$

また、左巻きレプトンについても同様の計算が可能であり、こちらも結果のみを書く
と以下の通りである。

$$\langle \Gamma_\nu^d \rangle = \frac{9h_t^2}{128\pi^2} T F^\dagger F. \quad (\text{D.42})$$

ここで計算した消滅率は、すべての粒子が力学的平衡状態にあると仮定して計算した
ものである。しかしながら、ここで得られた消滅率は熱平均を取ったために粒子の運
動量依存性がない。よって次は、粒子の各運動量における消滅率を計算していく。

これまでは、全粒子がマクスウェル-ボルツマン統計に従っていると仮定して計算し
ていたが、実際は熱平衡からのずれも考慮しなくてはならない。ここからは、この熱
平衡からのずれによる消滅率や生成率の変化を示す。これにより、右巻きニュートリ
ノと左巻きレプトン、さらには右巻きニュートリノと左巻き反レプトンとを結びつけ
る項が自然と現れるところを確認する。

まず最初に、過程 (A) について計算していく。ボルツマン方程式より消滅率は、

$$\begin{aligned} \Gamma_N^d &= \frac{1}{2E_N} \int \frac{d^3 p_Q}{(2\pi)^3 2E_Q} \int \frac{d^3 p_L}{(2\pi)^3 2E_L} \int \frac{d^3 p_t}{(2\pi)^3 2E_t} \\ &\quad \times f_Q(E_Q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_N + p_Q - p_L - p_t) \sum |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{8(2\pi)^5} \int d^3 p_Q d^3 p_L d^3 p_t \frac{1}{E_Q E_L E_t} f_Q(E_Q) \delta^{(4)}(p_N + p_Q - p_L - p_t) \\ &= \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{8(2\pi)^5} \Phi_3, \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

となる。ここで Φ_3 は 3 体の位相空間積分であり、運動量は次のように割り振る。

$$\vec{p}_1 = E_1(0, 0, 1), \quad (\text{D.44})$$

$$\vec{p}_2 = E_2(\sin \theta_2, 0, \cos \theta_2), \quad (\text{D.45})$$

$$\vec{p}_3 = E_3(\sin \theta_3 \cos \phi_3, \sin \theta_3 \sin \phi_3, \cos \theta_3). \quad (\text{D.46})$$

この座標系を \mathfrak{F} と表記することにする。ここからは、この 3 体の位相空間積分を評価
していく。一般的に、この位相空間積分を次のように書くことができる。

$$\Phi_3 = \int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \frac{1}{E_2 E_3 E_4} f(E_2) \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (\text{D.47})$$

この積分の中で、 $d^3 p_4$ をデルタ関数を用いて実行すると、

$$\Phi_3 = \int d^3 p_2 d^3 p_3 \frac{1}{E_2 E_3 E_4} f(E_2) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4). \quad (\text{D.48})$$

次に、 $d^3 p_2$ 積分を実行することを考える。この積分を実行するために、次のように
定義される軸 \vec{R} を準備する [53]。

$$\vec{R} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3, \quad (\text{D.49})$$

この R の絶対値は、

$$R^2 = |\vec{R}|^2 = |\vec{p}_1 - \vec{p}_3|^2 = E_1^2 + E_3^2 - 2E_1E_3 \cos \theta_3, \quad (\text{D.50})$$

で、座標系 $\tilde{\mathcal{F}}$ において、このベクトルの要素は、

$$\vec{R} = (-E_3 \sin \theta_3 \cos \phi_3, -E_3 \sin \theta_3 \sin \phi_3, E_1 - E_3 \cos \theta_3), \quad (\text{D.51})$$

とできるが、これを用いて計算していくのは非常に困難なので、新しい軸 $\tilde{\mathcal{F}}$ を定義する。この軸において R は、

$$\vec{R} = R(0, 0, 1), \quad (\text{D.52})$$

となるように定義する。またここで $R = |\vec{R}|$ である。この新しい座標系には空間回転を用いて移ることができる。ただし、ここでの変換は空間回転なので積分は何も変わらない。座標系 $\tilde{\mathcal{F}}$ において、運動量 \tilde{p}_2 は、

$$\tilde{p}_2 = E_2(\sin \tilde{\theta}_2, 0, \cos \tilde{\theta}_2), \quad (\text{D.53})$$

と割り振る。運動量保存則より、

$$E_4^2 = |\tilde{p}_4|^2 = |\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 - \tilde{p}_3|^2 = |\vec{R} + \tilde{p}_2|^2 = R^2 + E_2^2 + 2RE_2 \cos \tilde{\theta}_2, \quad (\text{D.54})$$

と計算できる。一方、エネルギー保存則より、

$$E_4^2 = (E_1 + E_2 - E_3)^2 = (E_1 - E_3)^2 + 2E_2(E_1 - E_3) + E_2^2, \quad (\text{D.55})$$

となるので、この2式より $\cos \tilde{\theta}_2$ は、

$$\cos \tilde{\theta}_2 = \frac{1}{2RE_2} [(E_1 - E_3)^2 + 2E_2(E_1 - E_3) - R^2] \equiv \cos \tilde{\theta}_2^*. \quad (\text{D.56})$$

と定義できる。よって、 d^3p_2 積分は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \int d^3p_2 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) &= \int dE_2 E_2^2 d \cos \tilde{\theta}_2 d\tilde{\phi}_2 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \\ &= (2\pi) \int dE_2 E_2^2 d \cos \tilde{\theta}_2 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4). \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

$\cos \tilde{\theta}$ に関する積分を実行するために、デルタ関数に着目する。式 (D.54) に代入することで、

$$f_\delta = E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = E_1 + E_2 - E_3 - (R^2 + E_2^2 + 2RE_2 \cos \tilde{\theta}_2)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{D.58})$$

という関数に書き換えることができ、

$$\left. \frac{df_\delta}{d \cos \tilde{\theta}_2} \right|_{\cos \tilde{\theta}_2 = \cos \tilde{\theta}_2^*} = -\frac{RE_2}{(E_1 + E_2 - E_3)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{RE_2}{E_4}, \quad (\text{D.59})$$

を用いて、デルタ関数は次のように書き換えることができる。

$$\delta(f_\delta) = \frac{E_4}{RE_2} \delta(\cos \tilde{\theta}_2 - \cos \tilde{\theta}_2^*). \quad (\text{D.60})$$

以上より積分は、

$$\begin{aligned} \int d^3 p_2 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) &= (2\pi) \int dE_2 E_2^2 d \cos \tilde{\theta}_2 \frac{E_4}{RE_2} \delta(\cos \tilde{\theta}_2 - \cos \tilde{\theta}_2^*) \\ &= (2\pi) \int dE_2 \frac{E_2 E_4}{R}, \end{aligned} \quad (\text{D.61})$$

となり、位相空間積分は、

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= (2\pi) \int d^3 p_3 dE_2 \frac{E_2 E_4}{R} \frac{1}{E_2 E_3 E_4} = (2\pi) \int d^3 p_3 dE_2 \frac{1}{RE_3} \\ &= (2\pi) \int dE_3 E_3^2 d \cos \theta_3 d\phi_3 dE_2 \frac{1}{RE_3} = (2\pi)^2 \int dE_2 dE_3 d \cos \theta_3 \frac{E_3}{R}, \end{aligned} \quad (\text{D.62})$$

となる。今、積分変数 $\cos \theta_3$ を R を用いたものを書き換える。式 (D.50) より、

$$\cos \theta_3 = \frac{E_1^2 + E_3^2 - R^2}{2E_1 E_3}, \quad (\text{D.63})$$

できるので、

$$\Phi_3 = (2\pi)^2 \int dE_2 dE_3 dR \frac{R}{E_1 E_3} \frac{E_3}{R} = (2\pi)^2 \int dE_2 dE_3 dR \frac{1}{E_1}. \quad (\text{D.64})$$

以上より消滅率は、

$$\Gamma_N^d = \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{128\pi^3 E_N^2} \int dE_2 dE_3 dR f(E_2). \quad (\text{D.65})$$

と書き直すことができる。

次に、各積分を実行することに話を移す。エネルギー保存則より、 $E_4 = E_1 + E_2 - E_3 \geq 0$ なので、

$$E_2 \geq E_3 - E_1. \quad (\text{D.66})$$

また、 $|\cos \theta_3| \leq 1$ から、 R について制限が次のようにつく。

$$|E_1 - E_3| \leq R \leq E_1 + E_3. \quad (\text{D.67})$$

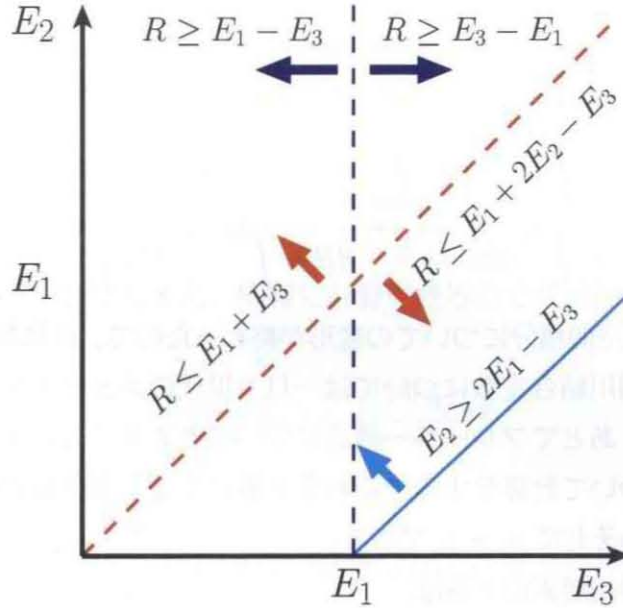


図 D.2: R の積分範囲

同様に、 $|\cos \theta_2| \leq 1$ から、

$$E_3 - E_1 \leq R \leq E_1 + 2E_2 - E_3. \quad (\text{D.68})$$

よって、式 (D.67) と (D.68) より、 R の積分範囲は次の範囲で与えられる。

$$|E_1 - E_3| \leq R \leq \text{Min}[E_1 + E_3, E_1 + 2E_2 - E_3]. \quad (\text{D.69})$$

図 D.2 にこの積分範囲を示してある。図からもわかるように、 E_2 積分を先に実行する場合は、この積分区間は以下の 4 つに分解することができる。

$$\begin{aligned} \int dE_3 dE_2 dR = & \int_{E_N}^{\infty} dE_3 \int_{E_3}^{\infty} dE_2 \int_{E_3 - E_1}^{E_1 + E_3} dR + \int_{E_1}^{\infty} dE_3 \int_{E_3 - E_1}^{E_3} dE_2 \int_{E_3 - E_1}^{E_1 + 2E_2 - E_3} dR \\ & + \int_0^{E_1} dE_3 \int_0^{E_3} dE_2 \int_{E_1 - E_3}^{E_1 + 2E_2 - E_3} dR + \int_0^{E_1} dE_3 \int_{E_3}^{\infty} dE_2 \int_{E_1 - E_3}^{E_1 + E_3} dR, \quad (\text{D.70}) \end{aligned}$$

一方、 E_3 積分を先に実行する場合は、6 つの部分に分解され、

$$\begin{aligned}
\int dE_3 dE_2 dR = & \int_0^{E_1} dE_2 \left\{ \int_0^{E_2} dE_3 \int_{E_1-E_3}^{E_1+E_3} dR + \int_{E_2}^{E_1} dE_3 \int_{E_1-E_3}^{E_1+2E_2-E_3} dR \right. \\
& + \left. \int_{E_1}^{E_1+E_2} dE_3 \int_{E_3-E_1}^{E_1+2E_2-E_3} dR \right\} + \int_{E_1}^{\infty} dE_2 \left\{ \int_0^{E_1} dE_3 \int_{E_1-E_3}^{E_1+E_3} dR \right. \\
& + \left. \int_{E_1}^{E_2} dE_3 \int_{E_3-E_1}^{E_1+E_3} dR + \int_{E_2}^{E_1+E_2} dE_3 \int_{E_3-E_1}^{E_1+2E_2-E_3} dR \right\}. \quad (D.71)
\end{aligned}$$

以上より、位相空間積分についての変形が終わったので、計算を実際に行う。計算をする上で、湯川結合定数については一旦1世代のニュートリノを考慮していると仮定して計算し、あとでフレーバー構造について考えることにする。まず最初に、過程(A)の寄与について計算をする。これまで用いてきた運動量との関係は、 $p_1 = p_N$ 、 $p_2 = p_Q$ 、 $p_3 = p_L$ そして $p_4 = p_t$ である。

自由度込みの行列要素の2乗は、

$$\sum |\mathcal{M}|^2 = 6|F|^2 h_t^2, \quad (D.72)$$

であったので、式(D.65)より、

$$\Gamma_N^{d(A)} = \frac{3|F|^2 h_t^2}{64\pi^3 E_N^2} \int dE_Q dE_L dR f_Q(E_Q) \equiv \frac{3|F|^2 h_t^2}{64\pi^3 E_N^2} \mathcal{I}_N^{d(A)}. \quad (D.73)$$

$\mathcal{I}_N^{d(A)}$ の積分の中で、クォークは活発な相互作用によって熱平衡に入っているため、分布関数 f_Q はマクスウェル-ボルツマン統計に従うため、 $f_Q^{eq} = e^{-E_Q/T}$ とする。この積分は4つに分解でき、

$$\mathcal{I}_N^{d(A)} = \mathcal{I}_{N1}^{d(A)} + \mathcal{I}_{N2}^{d(A)} + \mathcal{I}_{N3}^{d(A)} + \mathcal{I}_{N4}^{d(A)}. \quad (D.74)$$

と書くと、各部分は次のように計算できる。

$$\mathcal{I}_{N1}^{d(A)} = \int_{E_N}^{\infty} dE_L \int_{E_L}^{\infty} dE_2 \int_{E_L-E_N}^{E_N+E_L} dR f_Q^{eq}(E_Q) = 2E_N T^2 e^{-\frac{E_N}{T}}, \quad (D.75)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{N2}^{d(A)} &= \int_{E_N}^{\infty} dE_L \int_{E_L-E_N}^{E_L} dE_Q \int_{E_L-E_N}^{E_N+2E_Q-E_L} dR f_Q^{eq}(E_Q) \\
&= 2T^2 \left(T - (E_N + T) e^{-\frac{E_N}{T}} \right), \quad (D.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{N3}^{d(A)} &= \int_0^{E_N} dE_L \int_0^{E_L} dE_Q \int_{E_N-E_L}^{E_N+2E_Q-E_L} dR f_Q^{eq}(E_Q) \\
&= 2T^2 \left(E_N - 2T + (E_N + 2T) e^{-\frac{E_N}{T}} \right), \quad (D.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{N4}^{d(A)} &= \int_0^{E_N} dE_L \int_{E_L}^{\infty} dE_Q \int_{E_N-E_L}^{E_N+E_L} dR f_Q^{eq}(E_Q) \\
&= 2T^2 \left(T - (E_N + T) e^{-\frac{E_N}{T}} \right). \quad (D.78)
\end{aligned}$$

よって、

$$\mathcal{I}_N^{d(A)} = 2E_N T^2. \quad (\text{D.79})$$

つまり消滅率は、

$$\Gamma_N^{d(A)}(E_N) = \frac{3|F|^2 h_t^2}{32\pi^3 E_N} T^2. \quad (\text{D.80})$$

さらに、過程 (B) についてもまた、同様に計算できるので、過程 (A) と (B) についての寄与をまとめると、

$$\Gamma_N^{d(A+B)}(E_N) = \frac{3|F|^2 h_t^2}{16\pi^3 E_N} T^2. \quad (\text{D.81})$$

次に、過程 (A) もしくは (B) の生成率を計算する。

$$\mathcal{I}_N^{p(A)} = \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{128\pi^3 E_N^2} \int dE_t dE_L dR f_t(E_t) f_L(E_L) \equiv \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{128\pi^3 E_N^2} \mathcal{I}_N^{p(A)}. \quad (\text{D.82})$$

行列要素の 2 乗はすべて等しかったので、 $\sum |\mathcal{M}|^2 = 6|F|^2 h_t^2$ 。ここで注意が必要なのは、トップクォークは熱平衡に入っているが、左巻きレプトンは熱平衡からのずれを考慮に入れなくてはいけないため、左巻きレプトンの分布関数はそのまま残して計算する。積分 $\mathcal{I}_N^{p(A)}$ は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_N^{p(A)} &= \int dE_t dE_L dR f_L(E_L) f_t^{eq}(E_t) \\ &= \int dE_t dE_L dR f_L(E_L) f_t^{eq}(E_N + E_Q - E_L). \end{aligned} \quad (\text{D.83})$$

この積分もまた 4 つに分解でき、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{N1}^{p(A)} &= \int_{E_N}^{\infty} dE_L \int_{E_L}^{\infty} dE_2 \int_{E_L - E_N}^{E_N + E_L} dR f_L(E_t) f_t^{eq}(E_N + E_Q - E_L) \\ &= 2 \int_{E_N}^{\infty} dE_L f_L(E_L) T (T - e^{-\frac{E_N}{T}} (E_N + T)), \end{aligned} \quad (\text{D.84})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{N2}^{p(A)} &= \int_{E_N}^{\infty} dE_L \int_{E_L - E_N}^{E_L} dE_Q \int_{E_L - E_N}^{E_N + 2E_Q - E_L} dR f_L(E_t) f_t^{eq}(E_N + E_Q - E_L) \\ &= 2 \int_{E_N}^{\infty} dE_L f_L(E_L) E_N T e^{-\frac{E_N}{T}}, \end{aligned} \quad (\text{D.85})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{N3}^{p(A)} &= \int_0^{E_N} dE_L \int_0^{E_L} dE_Q \int_{E_N - E_L}^{E_N + 2E_Q - E_L} dR f_L(E_t) f_t^{eq}(E_N + E_Q - E_L) \\ &= -2 \int_0^{E_N} dE_L f_L(E_L) T (E_L + T - e^{\frac{E_L}{T}} T) e^{-\frac{E_N}{T}}, \end{aligned} \quad (\text{D.86})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{N4}^{p(A)} &= \int_0^{E_N} dE_L \int_{E_L}^{\infty} dE_Q \int_{E_N - E_L}^{E_N + E_L} dR f_L(E_t) f_t^{eq}(E_N + E_Q - E_L) \\ &= 2 \int_0^{E_N} dE_L f_L(E_L) E_L T e^{-\frac{E_N}{T}}. \end{aligned} \quad (\text{D.87})$$

故に、積分の結果は、

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_N^{p(A)} &= 2T^2 e^{-\frac{E_N}{T}} \int_0^{E_N} dE_L f_L(E_L) \left(e^{\frac{E_L}{T}} - 1 \right) \\ &\quad + 2T^2 \left(1 - e^{-\frac{E_N}{T}} \right) \int_{E_N}^{\infty} dE_L f_L(E_L), \end{aligned} \quad (\text{D.88})$$

となる。ここで仮定として、左巻きレプトンが熱平衡に入っていたとすると、積分は陽に実行でき、

$$\mathcal{I}_N^{p(A)} = 2E_N T^2 e^{-\frac{E_N}{T}}. \quad (\text{D.89})$$

これを用いると、先ほど求めた過程 (A) もしくは (B) の消滅率と次のような関係がつく。

$$\Gamma_N^{p(A)} = \frac{3|F|^2 h_t^2}{32\pi^3 E_N} T^2 e^{-\frac{E_N}{T}} = \Gamma_N^{d(A)} e^{-\frac{E_N}{T}}, \quad (\text{D.90})$$

よって、過程 (A) の生成率は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Gamma_N^{p(A)} &= \frac{3|F|^2 h_t^2}{32\pi^3 E_N^2} T^2 \left(e^{-\frac{E_N}{T}} \int_0^{E_N} dE_L f_L(E_L) \left(e^{\frac{E_L}{T}} - 1 \right) + \left(1 - e^{-\frac{E_N}{T}} \right) \int_{E_N}^{\infty} dE_L f_L(E_L) \right) \\ &= \Gamma_N^{d(A)} \frac{1}{E_N} \left(e^{-\frac{E_N}{T}} \int_0^{E_N} dE_L f_L(E_L) \left(e^{\frac{E_L}{T}} - 1 \right) + \left(1 - e^{-\frac{E_N}{T}} \right) \int_{E_N}^{\infty} dE_L f_L(E_L) \right) \\ &= \Gamma_N^{d(A)} e^{-\frac{E_N}{T}} + \Gamma_N^{d(t_1)} \left(\frac{1}{E_N} e^{-\frac{E_N}{T}} \int_0^{E_N} dE_L (f_L(E_L) - e^{-\frac{E_L}{T}}) \left(e^{\frac{E_L}{T}} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_N} \left(1 - e^{-\frac{E_N}{T}} \right) \int_{E_N}^{\infty} dE_L (f_L(E_L) - e^{-\frac{E_L}{T}}) \right). \end{aligned} \quad (\text{D.91})$$

たしかに、左巻きレプトンが熱平衡に入っているとき、つまり左巻きレプトンの分布関数がマクスウェル-ボルツマン統計に従うとき、第2項と第3項は消え、第1項のみが残る。

最後に、過程 (C) の寄与を求めていく。この過程における運動量の関係は、 $p_1 = p_N$ 、 $p_2 = p_{\bar{L}}$ 、 $p_3 = p_t$ として $p_4 = p_{\bar{Q}}$ である。計算の詳細はこれまでと同じで、消滅率は次式で与えられる。

$$\Gamma_N^{d(C)} = \frac{3|F|^2 h_t^2}{64\pi^3 E_N^2} \int dE_Q dE_L dR f_L(E_L) \equiv \frac{3|F|^2 h_t^2}{64\pi^3 E_N^2} \mathcal{I}_N^{d(C)}. \quad (\text{D.92})$$

ここで、左巻き反レプトンもまた熱平衡からのずれを考慮しなくてはならないので、この分布関数はそのまま残しておかなくてはならないが、左巻き反レプトンが熱平衡に入っていると仮定すると、過程 (C) の消滅率は次のように計算できる。

$$\Gamma_N^{d(C)} = \frac{3|F|^2 h_t^2}{32\pi^3 E_N} T^2 = \Gamma_N^{d(A)}, \quad (\text{D.93})$$

これを用いて、過程 (C) の消滅率を次のように書き換える。

$$\Gamma_N^{d(C)} = \Gamma_N^{d(A)} + \Gamma_N^{d(A)} \frac{1}{T^2} \int_0^\infty dE_L E_L (f_L(E_L) - f_L^{eq}(E_L)). \quad (\text{D.94})$$

一方、生成率については、

$$\begin{aligned} \Gamma_N^{p(s)} &= \frac{3|F|^2 h_t^2}{64\pi^3 E_N^2} \int dE_Q dE_L dR f_t(E_t) f_{\bar{Q}}(E_{\bar{Q}}) \\ &= \frac{3|F|^2 h_t^2}{64\pi^3 E_N^2} \int dE_Q dE_L dR f_t(E_t) f_{\bar{Q}}(E_N + E_L - E_t), \end{aligned} \quad (\text{D.95})$$

を計算することによって求められるが、この計算は各分布関数が熱分布になっているので簡単に実行が可能で、

$$\Gamma_N^{p(s)} = \frac{3|F|^2 h_t^2}{32\pi^3 E_N} T^2 e^{-\frac{E_N}{T}} = \Gamma_N^{d(t_1)} e^{-\frac{E_N}{T}}, \quad (\text{D.96})$$

となる。

以上の計算によって、右巻きニュートリノの各過程における消滅率と生成率を求めることができた。そこで、左巻きレプトンの熱平衡からのずれを考慮することで、式 (D.91) や (D.94) といった項が自然と現れた。これらの項は、右巻きニュートリノと左巻きレプトンもしくは右巻きニュートリノと左巻き反レプトンを結びつける項となる。

関連図書

- [1] E. Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **192** 18 (2011).
- [2] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23** 347 (1981).
- [3] A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- [4] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
- [5] D. H. Lyth and A. Riotto, *Phys. Rept.* **314**, 1 (1999).
- [6] A.D. Sakharov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pis'ma* **5**, 32 (1967) ; *JETP Lett.* **91B**, 24 (1967).
- [7] A. Riotto and M. Trodden, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **49** 35 (1999).
- [8] M. Fukugita, T. Yanagida, *Phys. Lett. B***174** 45 (1986).
- [9] P. Minkowski, *Phys. Lett. B* **67** 421 (1977); T. Yanagida, in *Proc. of the Workshop on the Unified Theory and the Baryon Number in the Universe*, Tsukuba, Japan, Feb. 13-14, 1979, p. 95, eds. O. Sawada and S. Sugamoto, (KEK Report KEK-79-18, 1979, Tsukuba); *Progr. Theor. Phys.* **64** 1103 (1980) ; M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in *Supergravity*, eds. P. van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedman (North Holland, Amsterdam 1980); P. Ramond, in *Talk given at the Sanibel Symposium*, Palm Coast, Fla., Feb. 25-Mar. 2, 1979, preprint CALT-68-709 (retroprinted as hep-ph/9809459); S. L. Glashow, in *Proc. of the Cargèse Summer Institute on Quarks and Leptons*, Cargèse, July 9-29, 1979, eds. M. Lévy *et. al.*, (Plenum, 1980, New York), p707.
- [10] E. K. Akhmedov, V. A. Rubakov and A. Y. Smirnov, *Phys. Rev. Lett.* **81** 1359 (1998).
- [11] T. Asaka, S. Blanchet and M. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **631** 151 (2005).

- [12] T. Asaka and M. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **620** 17 (2005) ; M. Shaposhnikov, *JHEP* **0808** 008 (2008).
- [13] L. Canetti and M. Shaposhnikov, *JCAP* **1009** 001 (2010).
- [14] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** 579 (1961) ; S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** 1264 (1967). ; A. Salam, *Proceeding Of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden, Stockholm* 367 (1968).
- [15] Y. Fukuda et. al, *Phys. Rev. Lett.* **81** 1562 (1998) ; *Phys. Lett. B* **436** 33 (1998).
- [16] V. Gribov, B. Pontecorvo, *Phys. Lett.* **B28** 623 (1969).
- [17] K. Nakamura *et al.* [Particle Data Group], *J. Phys.* **G 37**, 075021 (2010).
- [18] K. Abe *et al.* [T2K Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **107** 041801 (2011).
- [19] Y. Abe *et al.* [DOUBLE-CHOOZ Collaboration], arXiv:1112.6353 [hep-ex].
- [20] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo and A. M. Rotunno, *Phys. Rev. D* **84** 053007 (2011).
- [21] J. S. Bell, R. Jackiw, 1969, *Nuovo Cimento* **51**, 47 (1969) ; S. Adler, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969).
- [22] G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976) ; *Phys. Rev. D***14**, 3432 (1976).
- [23] S. Dimopoulos and L. Susskind, *Phys. Rev. D* **18**, 4500 (1978).
- [24] N. S. Manton, *Phys. Rev. D* **28**, 2019 (1983).
- [25] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, *Phys. Rev. D* **30**, 2212 (1984).
- [26] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **155** (1985) 36.
- [27] P. B. Arnold and L. D. McLerran, *Phys. Rev. D* **36**, 581 (1987).
- [28] S. Y. Khlebnikov and M. E. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B* **308**, 885 (1988).
- [29] M. Kobayashi, T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** 652 (1972).
- [30] M. Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], *Phys. Rev. D* **69** 103501 (2004).

- [31] M. Dine et. al, *Phys. Rev. D* **46** 550 (1992).
- [32] K. Rummukainen et. al, *Nucl. Phys.* **B532** 283 (1998).
- [33] Z. Fodor, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **83**, 121 (2000) [arXiv:hep-lat/9909162].
- [34] M. Flanz, E. A. Paschos and U. Sarkar, *Phys. Lett.* **B 345** 248 (1995) [*Erratum-ibid.* **B 382** 447 (1996)] ; L. Covi, E. Roulet and F. Vissani, *Phys. Lett.* **B 384** 169 (1996) ; A. Pilaftsis, *Phys. Rev.* **D 56** 5431 (1997) ; W. Buchmuller and M. Plumacher, *Phys. Lett.* **B 431** 354 (1998).
- [35] W. Buchmuller and M. Plumacher, *Phys. Rept.* **320**, 329 (1999)
- [36] A. S. Joshipura, E. A. Paschos and W. Rodejohann, *Nucl. Phys. B* **611**, 227 (2001) [arXiv:hep-ph/0104228].
- [37] G. F. Giudice, A. Notari, M. Raidal, A. Riotto and A. Strumia, *Nucl. Phys. B* **685**, 89 (2004) [arXiv:hep-ph/0310123].
- [38] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28** 870 (1962).
- [39] S. Dodelson and L. M. Widrow, *Phys. Rev. Lett.* **72** 17 (1994).
- [40] X. D. Shi and G. M. Fuller, *Phys. Rev. Lett.* **82** 2832 (1999).
- [41] A. D. Dolgov and S. H. Hansen, *Astropart. Phys.* **16** 339 (2002) ; K. Abazajian, G. M. Fuller and M. Patel, *Phys. Rev. D* **64** 023501 (2001) ; K. N. Abazajian and G. M. Fuller, *Phys. Rev. D* **66** 023526 (2002) ; K. Abazajian, G. M. Fuller and W. H. Tucker, *Astrophys. J.* **562** 593 (2001) ; G. Gelmini, S. Palomares-Ruiz and S. Pascoli, *Phys. Rev. Lett.* **93** 081302 (2004) ; K. Abazajian, *Phys. Rev. D* **73** 063506 (2006) ; T. Asaka, M. Laine and M. Shaposhnikov, *JHEP* **0701** 091 (2007).
- [42] C. T. Kishimoto, G. M. Fuller and C. J. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 141301 (2006).
- [43] M. Laine and M. Shaposhnikov, *JCAP* **0806** 031 (2008).
- [44] A. Boyarsky, O. Ruchayskiy and M. Shaposhnikov, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59** 191 (2009).
- [45] J. A. Casas and A. Ibarra, *Nucl. Phys.* **B 618**, 171 (2001).

- [46] T. Asaka, S. Eijima and H. Ishida, *JHEP* **1104**, 011 (2011).
- [47] C. Jarlskog, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1039 (1985), see also C. Jarlskog, in “ CP Violation ”, edited by C. Jarlskog, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol 3, (World Scientific, Singapore, 1989).
- [48] T. Asaka and H. Ishida, *Phys. Lett.* **B 692**, 105 (2010).
- [49] G. Sigl and G. Raffelt, *Nucl. Phys. B* **406**, 423 (1993).
- [50] H. A. Weldon, *Phys. Rev. D* **36**, 2789 (1982).
- [51] J. Ambjorn, T. Askgaard, H. Porter and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* **B 244**, 479 (1990).
- [52] J. Ambjorn, T. Askgaard, H. Porter and M. E. Shaposhnikov, *Nucl. Phys.* **B 353**, 346 (1991).
- [53] M. Kawasaki, K. Kohri and N. Sugiyama, *Phys. Rev. D* **62**, 023506 (2000).