非摂動くり込み群におけるカイラル対称性の実現について

越後　弥大

新潟大学大学院自然科学研究科博士後期課程
自然構造科学専攻

目次

1 Introduction

素粒子物理の標準模型は、現在の素粒子実験を非常によく説明する。場の量子論によって記述されるこの模型は、$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性に基づくゲージ理論で、弱結合である $SU(2)_L \times U(1)_Y$ は、摂動論で記述される。一方、$SU(3)_c$ は低エネルギーで強結合になる性質を持ち、摂動論では扱えず、非摂動的なアプローチが必要になる。

場の量子論の非摂動的な手法としては格子理論が知られている。格子理論とは、格子上の場の理論のことで、間隔 a の格子上で定義される。このとき運動量の上限が π/a になり紫外発散がなくなる。但し、空間の連続的な回転対称性を失ってしまうという問題点がある。

非摂動的な手法には、格子理論の他に、K. G. Wilson によって定式化された非摂動くり込み群がある。この手法は、統計系の臨界現象の解析で大きな成功をおさめ [1]、その後、場の量子論に応用された [13–20]。その考え方は以下のようになる。始めに、運動量の高エネルギー領域を Λ_0 で cutoff することによりミクロ理論 (UV 理論) を正則化する。次に、運動量が Λ_0 と $\Lambda(< \Lambda_0)$ の間にある場の自由度 (高エネルギーモード) を積分することにより、運動量が Λ 以下の低エネルギーモードのみで構成される有効理論 (IR 理論) が得られる。この時得られる有効作用は Wilson 作用と呼ばれる。この操作は、波長の短いゆらぎを平均化し、波長の長いモードの有効相互作用として取り込むことに相当する。これがくり込みである。このように、高エネルギーモードの積分を次々に行うことにより、有効作用に含まれる結合定数の変化を記述することができる。高エネルギーモードの積分は、汎関数積分により記述されるが、この積分は直接は行われず、汎関数積分と同等の汎関数微分方程式を解くことによって行われる。この微分方程式を非摂動くり込み群方程式と呼ぶ。微分方程式による定式化の方法はいくつかある。始めに、高エネルギーモードと低エネルギーモードの分け方として、sharp cutoff と smooth cutoff がある。さらに、Wilson 作用を使うか、その Legendre 変換されたものを使うかによって分けられる。sharp cutoff で Wilson 作用を用いたものは、Wegner-Houghton 方程式と呼ばれる [2]。smooth cutoff で Wilson 作用を使ったものは、Polchinski 方程式と呼ばれる [5]。また、smooth cutoff で Wilson 作用の Legendre 変換をした作用を用いたものは、Wetterich 方程式と呼ばれる [4]。くり込み群方程式は、一般には非線形で、解くためには何らかの近似が必要になる。しかし、近似は非摂動的に行うことができることから非摂動くり込み群と呼ばれる。

非摂動くり込み群では、理論を正則化する際に、もともと持っていた対称性を破ってしまうという問題がある。例えば、運動量を高エネルギー側で cutoff する場合、ゲージ対称性が破れてしまう。また、質量項の導入により正則化を行う場合、カイラル対称性が破れてしまう。このように、正則化によって対称性が破られる場合の対策として、変形された対称性を考えるという方法がある。これは格子理論の前例に基づいている。

格子理論では Nielsen-Ninomiya の定理 [6] により、局所的で正しい連続極限を持つ Dirac operator は γ_5 との反交換関係がゼロにはならない。これは、通常のカイラル対称性が実現できないことを示している。この問題に対して、P. Ginsparg と K. Wilson は、くり込み群においてカイラル対称性の破れを議論した。始めに、カイラル対称性を持つ連続理論を考え、ブロックスピン変換によって、格子理論と関係をつける。こうして得られる格子理論はブロックスピン変換によってカイラル対称性が破られてしまう。このとき格子理論が持つ対称性から、Dirac operator が満たす関係式、Ginsparg-Wilson (GW) relation を導いた。この関係式は、Dirac operator と γ_5 の反交換関係が、格子間隔に比例する量になることを示している。さらに、GW relation を満たす Dirac operator によって記述される格子理論は、通常のカイラル変換から、格子間隔に比例した量だけ変形された変換のもとでの不変性を持っている。この変形された対称性は、GW relation により、Nielsen-Ninomiya の定理に抵触しない。後に、M. Lüscher により、変形されたカイラル対称性を持つ理論が構成された。

非摂動くり込み群においても、格子理論の例と同様に、正則化によって対称性が破られる場合、変形された対称性に基づいて理論の定式化を行うことができる。理論の対称性は Ward-Takahashi (WT) identity、または Batalin-Vilkovisky 形式 [21] での量子論的マスター方程式によって記述される。ブロックスピン変換によって IR 理論を定義することにより、UV 理論と IR 理論の生成汎関数の間に関係をつけることができ、その結果、UV 理論で WT identity が成り立つ時、IR 理論では変形された変換のもとで WT identity が成り立つことが知られている。この方

法は、ゲージ対称性などに応用されている [22–27]。

本論文では、非摂動くり込み群において、格子理論での前例 [7] に基づいて、変形されたカイラル対称性を持つ理論の構成を考える。この変形された対称変換は IR 作用に依存する形をしている。このため、変形された対称性を持つ作用の構成が非常に困難になっている。通常は、与えられた変換のもとで作用を構成するが、この場合、変換と作用を同時に構成しなければならない。手順としては、始めに作用の形を未知数を含む形で仮定し、その作用のもとで変形された変換を求め、最後にその変換のもとで作用が不変になるように未知数を決める。よって、始めに仮定する作用が、相互作用を含むか含まないかによって変換が異なるので、それぞれを別々に扱わなければならない。一般に、高次の項を加えて考えたい場合も一から始めなければならない。さらに、相互作用を含む場合、場の変換が非線形になり作用の構成が一般には困難になる。また、WT identity はその形から、作用の仮定として場の 4 次の項を入れると、WT identity の中に 6 次の項が生成される。この項を相殺するために、あらかじめ 6 次の項を入れると、さらに高次の項が生成される。このように WT identity は場の 2 次以上を仮定した場合、閉じた形にはなっていない。本論文では、湯川相互作用を含めて考えるが、フェルミオンについては双一次を仮定する。この場合、WT identity はフェルミオンについて 2 次で閉じるので、変形された対称性を厳密に保つ作用を構成することができる。

本論文の構成は以下のようになる。第 2 章では、非摂動くり込み群で用いられる経路積分の基礎について説明する。そこでは、場の量子論が経路積分によって、どのように定式化されているかを見る。さらに、場の量子論で対称性がどのように記述されるかを述べ、最後に非摂動くり込み群の基礎について述べる。第 3 章では、本論文の主題である、変形されたカイラル対称性の実現について議論する。始めにブロックスピン変換により UV 理論と IR 理論の関係をつける。このとき、ブロックスピン変換に含まれるパラメーターであるブロックスピンカーネルを、UV 理論が持つカイラル対称性を破るように選ぶ。これによって IR 理論では変形されたカイラル対称性が実現されるが、その変形を求めるために WT identity の導出を行う。WT identity により、変形されたカイラル変換が得られたら、相互作用が無い場合と、ある場合に分けて IR 理論の構成を行う。第 4 章では、同様の方法の超対称性への応用を考える。

2 場の量子論とくり込み群

この章では、場の量子論の経路積分による定式化と、くり込み群の基本的事項についてまとめる。また、実スカラー場の理論を考える。

2.1 経路積分による場の量子論

2.1.1 生成汎関数と有効作用

生成汎関数は、経路積分によって以下のように与えられる。

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi \ \exp \left[iS[\phi] + i \int_x J(x)\phi(x) \right]. \tag{2.1}$$

ここで、S は作用を、J はソースを表す。また、

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}\phi \ \exp \left[iS[\phi] \right] \tag{2.2}$$

となる。これは、$Z[0] = 1$ とするための規格化定数である。このとき、汎関数微分

$$\frac{\partial J(y)}{\partial J(x)} = \delta(x-y) \tag{2.3}$$

を用いることによって、n 点グリーン関数

$$G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = N \int \mathcal{D}\phi \, \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp \left[iS[\phi] \right] \tag{2.4}$$

が、生成汎関数から以下のように計算される。

$$G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \left. \frac{\partial^n Z[J]}{\partial iJ(x_1) \cdots \partial iJ(x_n)} \right|_{J=0}. \tag{2.5}$$

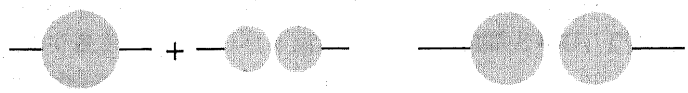

図 1　連結グリーン関数 $G_C^{(2)}$ を表す図。灰色の円は連結なファインマン図の和を表す。左図が第 1 項目、右図が第 2 項目を表し、引き算の結果、連結なもののみが残る。

この式の右辺は、$Z[J]$ をテイラー展開した時の n 次の係数を表す。よって、$Z[J]$ は以下のように書くことができる。

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{x_1,\cdots,x_n} G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) J(x_1)\cdots J(x_n)\,. \tag{2.6}$$

n 回微分し $J=0$ とすることによって、n 点グリーン関数を得ることができるので $Z[J]$ は、グリーン関数の生成汎関数と呼ばれる。また、n 点グリーン関数は n 個の場の積の期待値を表す。

$$\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\,. \tag{2.7}$$

次に、生成汎関数 $Z[J]$ に対して関数 $W[J]$ を導入する。

$$\exp\Big[iW[J]\Big] = Z[J] \tag{2.8}$$

ソース付の期待値を

$$\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_J = Z^{-1}[J]\int \mathcal{D}\phi\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\exp\left[iS[\phi] + i\int_x J(x)\phi(x)\right] \tag{2.9}$$

で定義するとき、関数 $W[J]$ をソースで 2 回微分すると、

$$\frac{i\partial^2 W[J]}{\partial iJ(x_1)\partial iJ(x_2)} = \langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_J - \langle\phi(x_1)\rangle_J\langle\phi(x_2)\rangle_J \equiv i\Delta^J(x_1,x_2) \tag{2.10}$$

となる。ここで、$J=0$ としたものを

$$G_C^{(2)}(x_1,x_2) \equiv \langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle - \langle\phi(x_1)\rangle\langle\phi(x_2)\rangle \tag{2.11}$$

と定義する。第 1 項目は、ファインマン図のうち、連結な図と非連結な図の和になっているが、第 2 項目はそのうちの非連結な図のみを表し、引き算をすることによって、連結な図のみが寄与している (図 1)。これは、相互作用を全て含めた propagator(exact propagator) を表している。以後、

$$i\Delta(x_1,x_2) \equiv G_C^{(2)}(x_1,x_2) \tag{2.12}$$

と表記する。n 回微分も同様になり、その結果 $G_C^{(n)}$ は連結な図のみを表している。よって、$W[J]$ は連結な n 点グリーン関数の生成汎関数になっている。

$$iW[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{x_1,\cdots,x_n} G_C^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) J(x_1)\cdots J(x_n)\,. \tag{2.13}$$

また、量子場 $\varphi(x)$ を以下のように定義する。

$$\varphi(x) \equiv \langle\phi(x)\rangle_J = \frac{i\partial W[J]}{\partial iJ(x)}\,. \tag{2.14}$$

関数 $W[J]$ の Legendre 変換により、関数 $\Gamma[\varphi]$ を導入する。

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int_x J(x)\varphi(x)\,. \tag{2.15}$$

これは、有効作用と呼ばれている。$\Gamma[\varphi]$ を φ で n 回微分し、$\varphi=0$ とおいたものは、1 粒子既約 (1 particle irreducible, 1PI) なファインマン図の和で表される。これを n 点バーテックス関数と呼び、$\Gamma^{(n)}$ と書く。つまり、$\Gamma[\varphi]$ はバーテックス関数の生成汎関数になっている。

$$\Gamma[\varphi]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{x_1,\cdots,x_n}\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\,, \tag{2.16}$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\left.\frac{\partial^n\Gamma}{\partial\varphi(x_1)\cdots\partial\varphi(x_n)}\right|_{\varphi=0} \tag{2.17}$$

この有効作用は、S 行列と関係を持つ量である。

2.1.2 有効作用について

有効作用は、前節で言及したように、1PI 図の生成汎関数になっている。これは、以下のように確かめることができる。始めに Γ の φ 微分を考える。1 回の微分は

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi(x)}=\int_y\frac{\partial W[J]}{\partial J(y)}\frac{\partial J(y)}{\partial\varphi(x)}-\int_y\frac{\partial J(y)}{\partial\varphi(x)}\varphi(y)-J(x)=-J(x)\,, \tag{2.18}$$

2 回微分は

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\varphi(x_1)\partial\varphi(x_2)}=-\frac{\partial J(x_2)}{\partial\varphi(x_1)}=\Big[\Delta^J(x_1,x_2)\Big]^{-1}, \tag{2.19}$$

3 回微分は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\varphi(x_1)\partial\varphi(x_2)\partial\varphi(x_3)}&=-\frac{\partial^2 J(x_1)}{\partial\varphi(x_2)\partial(x_3)}\\&=\int_{y_1,y_2,y_3}\frac{\partial J(y_1)}{\partial\varphi(x_1)}\frac{\partial J(y_2)}{\partial\varphi(x_2)}\frac{\partial J(y_3)}{\partial\varphi(x_3)}\frac{\partial^3 W[J]}{\partial J(y_1)\partial J(y_2)\partial J(y_3)}\,,\end{aligned} \tag{2.20}$$

4 回微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\varphi(x_1)\partial\varphi(x_2)\partial\varphi(x_3)\partial\varphi(x_4)}&=\int_{y_1,y_2,y_3,y_4}\frac{\partial J(y_1)}{\partial\varphi(x_1)}\frac{\partial J(y_2)}{\partial\varphi(x_2)}\frac{\partial J(y_3)}{\partial\varphi(x_3)}\frac{\partial J(y_4)}{\partial\varphi(x_4)}\frac{\partial^3 W[J]}{\partial J(y_1)\partial J(y_2)\partial J(y_3)\partial J(y_4)}\\&\quad+\int_{y_1,y_2,y_3}\Bigg[\frac{\partial J(y_1)}{\partial\varphi(x_4)\partial\varphi(x_1)}\frac{\partial J(y_2)}{\partial\varphi(x_2)}\frac{\partial J(y_3)}{\partial\varphi(x_3)}\frac{\partial^3 W[J]}{\partial J(y_1)\partial J(y_2)\partial J(y_3)}\\&\quad+\Big(\{x_1,y_1\}\leftrightarrow\{x_2,y_2\}\Big)+\Big(\{x_1,y_1\}\leftrightarrow\{x_3,y_3\}\Big)\Bigg]\end{aligned} \tag{2.21}$$

となる。ここで、作用が $S[\phi]=S[-\phi]$ となるとき、$J=0$ とすると、(2.14) より、$\varphi=0$ となる。このとき、これらの微分はバーテックス関数になり、

$$\Gamma^{(1)}(x_1)=0\,, \tag{2.22}$$

$$\Gamma^{(2)}(x_1,x_2)=i\Big[i\Delta(x_1,x_2)\Big]^{-1}, \tag{2.23}$$

$$\Gamma^{(3)}(x_1,x_2,x_3)=-i\int_{y_1,y_2,y_3}\Big[i\Delta(x_1,y_1)\Big]^{-1}\Big[i\Delta(x_2,y_2)\Big]^{-1}\Big[i\Delta(x_3,y_3)\Big]^{-1}G_C^{(3)}(y_1,y_2,y_3)\,, \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=-i\Bigg[&\int_{y_1,y_2,y_3,y_4}\Big[i\Delta(x_1,y_1)\Big]^{-1}\Big[i\Delta(x_2,y_2)\Big]^{-1}\Big[i\Delta(x_3,y_3)\Big]^{-1}\Big[i\Delta(x_4,y_4)\Big]^{-1}\\&\times G_C^{(4)}(y_1,y_2,y_3,y_4)\\&-\int_{y_1,y_2}\Big(iV^{(3)}(x_1,x_4,y_1)\Big[i\Delta(y_1,y_2)\Big]iV^{(3)}(y_2,x_2,x_3)+\{x_1\leftrightarrow x_2\}+\{x_1\leftrightarrow x_3\}\Big)\Bigg]\end{aligned} \tag{2.25}$$

となる。高次の項も同様に計算できる。2 次の項は、exact propagator の逆数を表していて、inverse propagator と

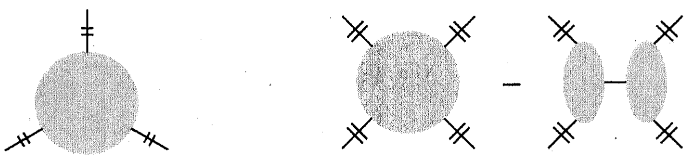

図 2　バーテックス関数のファインマン図を表す。灰色の円は連結な図を表し、2 重線は外線 propagator の取り除きを意味する。左図が 3 点、右図が 4 点バーテックス関数を表す。4 点バーテックス関数は、1 粒子可約の図を取り除くことによって 1PI になっている。

呼ばれる。3 次の項は、3 点連結グリーン関数の 3 点に、それぞれ inverse propagator が掛けられている。これは、外線 propagator を取り除くこと (amputated) を意味する。4 次の項は、3 次と同様、4 点連結グリーン関数から外線 propagator を取り除いているが、さらに、3 点バーテックス関数を 1 本の propagator でつないだものを取り除き、その結果 1PI になっている。

2.2　対称性について

理論の対称性は Ward-Takahashi(WT) identity によって記述される。始めに、生成汎関数

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[-S[\phi] + \int_p J(-p)\phi(p)\Big] \tag{2.26}$$

に対して場の無限小変換

$$\phi(p) \to \phi(p) + \delta\phi(p) \tag{2.27}$$

を考える。この変換の元で生成汎関数は不変なので

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}(\phi+\delta\phi) \exp\Big[-S[\phi+\delta\phi] + \int_p J(-p)\big(\phi(p)+\delta\phi(p)\big)\Big] \\ &= Z[J] + \int \mathcal{D}\phi \int_p \bigg(J(-p)\delta\phi(p) - \frac{\partial S}{\partial\phi(p)}\delta\phi(p) + \frac{\partial}{\partial\phi(p)}\delta\phi(p)\bigg) \exp\Big[-S[\phi] + \int_p J(-p)\phi(p)\Big] + \mathcal{O}(\delta\phi^2) \end{aligned} \tag{2.28}$$

となる。ここで、$\delta\phi$ の微分は積分測度からの寄与

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\phi+\delta\phi) &= \mathcal{D}\phi \mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial\phi}(\phi+\delta\phi) \\ &= \mathcal{D}\phi \exp\bigg[\mathrm{Tr}\log\Big(1+\frac{\partial}{\partial\phi}\delta\phi\Big)\bigg] \\ &= \mathcal{D}\phi\bigg(1 + \int_p \frac{\partial}{\partial\phi(p)}\delta\phi(p) + \mathcal{O}(\delta\phi^2)\bigg) \end{aligned} \tag{2.29}$$

を表す。このとき

$$\int_p \bigg\langle J(-p)\delta\phi(p) - \frac{\partial S}{\partial\phi(p)}\delta\phi(p) + \frac{\partial}{\partial\phi(p)}\delta\phi(p)\bigg\rangle_J = 0 \tag{2.30}$$

が成り立つ。この式を WT identity と呼ぶ。

次に有効作用が持つ対称性について考える。無限小変換

$$\delta\phi(p) = \epsilon R[p,\phi] \tag{2.31}$$

のもとでの作用と積分測度の不変を仮定する。

$$S[\phi+\epsilon R] = S[\phi]\,, \tag{2.32}$$

$$\mathcal{D}(\phi+\epsilon R) = \mathcal{D}\phi\,. \tag{2.33}$$

このとき、WT identity は

$$\int_p \langle R[p] \rangle_J J(-p) = 0 \tag{2.34}$$

となるが、(2.18) より

$$J(-p) = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi(p)} \tag{2.35}$$

となるので、

$$\int_p \langle R[p] \rangle_J \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi(p)} = 0 \tag{2.36}$$

となる。これは、有効作用が量子場の変換

$$\varphi(p) \to \varphi(p) + \epsilon \langle R[p] \rangle_J \tag{2.37}$$

のもとで不変であることを示している。この対称性は Slavnov-Taylor identity [9] と呼ばれる。線形変換の場合、$\langle R \rangle = R$ となり、作用と有効作用が同じ変換のもとで不変になる。

2.3 くり込みについて

通常、ラグランジアンに含まれる、質量や結合定数などのパラメーターは裸の量と呼ばれる。これは、相互作用の影響が含まれていない量だからである。実験で観測される量は、裸の量に相互作用の影響を含めた量になる。一般に、相互作用によるパラメーターへの補正量は発散する。しかし、裸の量が逆符号の発散を持ち、その結果、有限の量が観測されると考えることができる。この考えをくり込みという。

2.3.1 くり込み

ϕ^4 理論で考える。ラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 . \tag{2.38}$$

ここで、裸の量には添え字 0 を付けて表す。これら裸の量は発散量なので、有限な部分と発散部分に分ける。

$$\phi_0 = Z^{1/2}\phi , \tag{2.39}$$

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2 , \tag{2.40}$$

$$\lambda_0 = Z^{-2}(\lambda + \delta\lambda) = Z_\lambda \lambda . \tag{2.41}$$

δm^2、$\delta\lambda$ が発散量を表し、m^2、λ が有限な量を表す。また、Z は量子補正による規格化のずれを戻すためのもので、波動関数くり込みと呼ばれる。このときラグランジアンは

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{counter}} , \tag{2.42}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 , \tag{2.43}$$

$$\mathcal{L}_{\text{counter}} = \frac{1}{2}(Z-1)\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\Big((Z-1)m^2 + Z\delta m^2\Big)\phi^2 - \frac{\delta\lambda}{4!}\phi^4 \tag{2.44}$$

となる。$\mathcal{L}$ は、有限なパラメーター (くり込まれたパラメーター) のみを含み、くり込まれたラグランジアンと呼ばれる。$\mathcal{L}_{\text{counter}}$ に含まれる項は相殺項 (counter term) と呼ばれ、量子補正からくる発散を相殺し、その結果、有限な値が計算されることになる。

くり込みを行うときは、無限を有限にする操作である正則化が必要になる。正則化の方法は複数あるが、例えば、運動量積分において積分領域を Λ_0 で cutoff することで正則化をすることができる。量子補正に現れる発散は、正則

化により有限な値 Λ_0 になり、相殺項により取り除くことができる。このとき、有限な値をどのくらい残すかは任意であり、この任意の量を決めるための条件をくり込み条件と呼ぶ。

例えば、バーテックス関数を計算するとき、これらは運動量の関数になるが、発散を取り除くときに残す有限な値を、運動量 p^2 が適当な値 μ^2 のところで決める。この μ^2 をくり込み点と呼ぶ。一般に、くり込み点ごとに異なるくり込み処方が存在するが、その結果与えられる物理量が同じであれば、それらは有限くり込みでつながっている。ある点でくり込んだ量を別の点でくり込んだ量にする変換をくり込み変換と呼ぶとき、この変換は群になり、くり込み群と呼ばれる。くり込み点 μ^2 を無限小だけずらす変換は、微分方程式で表され、くり込み群方程式と呼ばれる。

有効作用 Γ について考える。裸の量によって記述されるラグランジアン $\mathcal{L}_0$ によって計算される有効作用は、裸の量に依存するので、

$$\Gamma[m_0^2, \lambda_0; \Lambda_0] \tag{2.45}$$

と書く。ここで、Λ_0 は運動量の cutoff スケールを表す。一方、くり込まれた量と相殺項によって記述されるラグランジアン $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{counter}}$ で計算される有効作用は、くり込まれた量に依存する。Λ_0 依存性は相殺項により取り除かれ、その代わりくり込み点 μ^2 に依存する。この有効作用を

$$\Gamma_{\text{ren}}[m^2, \lambda; \mu^2] \tag{2.46}$$

と書くとき、この 2 つの有効作用は、同じラグランジアン (2.42) によって計算された量なので、等しくなる。

$$\Gamma[\phi_0; m_0^2, \lambda_0; \Lambda_0] = \Gamma_{\text{ren}}[\phi; m^2, \lambda; \mu^2]\,. \tag{2.47}$$

つまり、有効作用はくり込み変換に依らないことが分かる。このときバーテックス関数は以下のように変換される。

$$\Gamma^{(n)}[p; m_0^2, \lambda_0; \Lambda_0] = Z^{-n/2}\Gamma_{\text{ren}}^{(n)}[p; m^2, \lambda; \mu^2]\,. \tag{2.48}$$

2.3.2 見かけ上の発散次数

バーテックス関数は一般に発散を含む。ループ積分をする際に、運動量の大きい部分での発散を紫外発散、小さい部分での発散を赤外発散と呼ぶが、紫外発散において運動量の何乗に比例するかはファインマン図から知ることができる。この発散の次数を見かけ上の発散次数と呼ぶ。

ボゾン場を b_i 個、フェルミオン場を f_i 個、微分を d_i 個含む相互作用項を考える。この項の結合定数を g_i とすると、g_i の質量次元 δ_i は

$$\delta_i = 4 - d_i - b_i - \frac{3}{2}f_i \tag{2.49}$$

と表される。この量は、理論のくり込み可能性の判定に使われる。次に、この相互作用を n_i 個含み、E_b 個のボゾン外線、E_f 個のフェルミオン外線、I_b 個のボゾン内線、I_f 個のフェルミオン内線を含むファインマン図に対して、運動量の次数を考えることによって、見かけ上の発散の次数 D_S を求める。ファインマン図に含まれるループの数を L とすると

$$D_S = 4L - 2I_b - I_f + \sum_i n_i d_i \tag{2.50}$$

となるが、場の数の保存則より

$$\sum_i n_i b_i = 2I_b + E_b\,, \quad \sum_i n_i f_i = 2I_f + E_f \tag{2.51}$$

が成り立つ。さらに、運動量積分の数から

$$L = I_b + I_f - \sum_i n_i + 1 \tag{2.52}$$

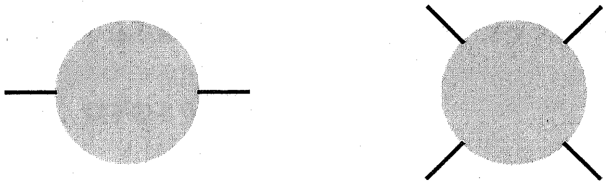

図 3　ϕ^4 理論での発散を含むファインマン図。外線が 6 本以上の図に発散はなく、ϕ の 4 次までの相殺項を用意することにより全ての発散を取り除くことができ、その結果有限な理論となる。

という関係が成り立つので、まとめることにより

$$D_S = 4 - E_b - \frac{3}{2}E_f - \sum_i n_i \delta_i \tag{2.53}$$

となる。

このことから、理論のタイプを以下の 3 つに分けることができる。1 つ目は、$\delta_i > 0$ の相互作用のみから成る理論で、超くり込み可能 (super renormalizable) な理論と呼ばれる。これは、摂動の高次にいくほど D_S が小さくなり、発散しなくなるからである。2 つ目は、$\delta_i \geqq 0$ の相互作用のみから成る理論で、くり込み可能 (renormalizable) な理論と呼ばれる。このとき D_S は

$$D_S = 4 - E_b - \frac{3}{2}E_f \tag{2.54}$$

となり、摂動の次数に関係なく発散を含む。しかし、外線の数が増えるごとに発散しなくなり、その結果、有限の種類のファインマン図のみ発散することになる。3 つめは、$\delta_i < 0$ の相互作用を含むときで、くり込み不可能な理論と呼ばれる。これは、摂動の高次にいくほど見かけ上の発散次数が大きくなるので、外線の多いファインマン図でも発散を含むことになる。その結果、無限種類の発散するファインマン図が現れることになり、相殺項も無限に必要になる。

ϕ^4 理論で考えた場合、結合定数 λ は無次元量で、質量次元が負になる結合定数がないので、この理論はくり込み可能な理論になる。このとき、見かけ上の発散次数は (2.54) になり、発散するファインマン図は、外線が 2 本と 4 本の図になる (図 3)。これ以上外線が多いファインマン図には発散はなく、ϕ の 4 次までの相殺項を用意すれば十分となる。外線が 2 本の場合、見かけ上の発散次数は 2 となり、2 次発散と対数発散を含む。外線が 4 本の場合、見かけ上の発散次数は 0 となり、対数発散のみを含む。よって、この 3 個の発散を取り除くことで有限になる。

2.3.3　くり込み条件について

発散量を取り除くときに、有限量をどのくらい残すかは任意であり、これを決める条件をくり込み条件と呼ぶ。また、この条件を課すときの運動量の値 μ^2 をくり込み点と呼ぶ。

一般に、くり込み点は物理的質量のところにとられる。ϕ^4 理論の場合、発散は外線が 2 本と 4 本の図、つまり 2 点バーテックス関数と 4 点バーテックス関数で起こる。そこには発散が 3 個あり、それに対応して、くり込み条件も 3 個必要になる。2 点バーテックス関数に対しては 2 次発散と対数発散があり、くり込み条件は

$$\Gamma^{(2)}_{\mathrm{ren}}[p^2 = m^2; m^2, \lambda] = 0, \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}_{\mathrm{ren}}[p^2; m^2, \lambda; \mu]\bigg|_{p^2=m^2} = 1 \tag{2.56}$$

となる。一つ目の条件は、2 点バーテックス関数は (2.23) より exact propagator の逆数になるので、物理的質量のところに exact propagator の極があるようにするための条件である。二つ目の条件は、物理的質量における規格化条件になる。4 点バーテックス関数には対数発散があり、くり込み条件は

$$\Gamma^{(4)}_{\mathrm{ren}}[p_1 \cdot p_2 = \cdots = p_3 \cdot p_4; m^2, \lambda] = -\lambda \tag{2.57}$$

となる。これは、外線運動量が、$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = m^2$ となるときの、4 粒子の対称点で条件を設定したことになる。これらの条件は、質量殻上のくり込み条件と呼ばれ、質量殻上のバーテックス関数の値を tree レベルの値と一致させる条件になる。

その他のくり込み条件としては、以下のようなものがある。

$$\Gamma_{\mathrm{ren}}^{(2)}[p^2 = m^2; m^2, \lambda; \mu^2] = 0\,, \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_{\mathrm{ren}}^{(2)}[p^2; m^2, \lambda; \mu^2]\bigg|_{p^2=-\mu^2} = 1\,, \tag{2.59}$$

$$\Gamma_{\mathrm{ren}}^{(4)}[p; m^2, \lambda; \mu^2]\bigg|_{p_i\cdot p_j=-\mu^2\delta_{ij}+\frac{1}{3}\mu^2(1-\delta_{ij})} = -\lambda\,. \tag{2.60}$$

一つ目の条件は、(2.55) と同様、m^2 を物理的質量にとるための条件である。残りの条件は、くり込み点 μ^2 で与えられている。これは、異なるくり込み点ごとに、異なる条件を与えることを表している。この条件により、バーテックス関数がくり込み点 μ^2 に依存することになる。

また、バーテックス関数を質量パラメーターの関数として有限にするくり込みもある。そのくり込み条件は以下のようになる。

$$\Gamma_{\mathrm{ren}}^{(2)}[p^2 = 0; m^2, \lambda; \mu^2]\Big|_{m^2=0} = 0\,, \tag{2.61}$$

$$\Gamma_{\mathrm{ren}}^{(2)}[p^2 = 0; m^2, \lambda; \mu^2]\Big|_{m^2=\mu^2} = -\mu^2\,, \tag{2.62}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_{\mathrm{ren}}^{(2)}[p^2; m^2, \lambda; \mu^2]\bigg|_{p^2=0, m^2=\mu^2} = 1\,, \tag{2.63}$$

$$\Gamma_{\mathrm{ren}}^{(4)}[p = 0; m^2, \lambda; \mu^2]\Big|_{m^2=\mu^2} = -\lambda\,. \tag{2.64}$$

条件が 1 つ多いのは、2 次発散する 2 点バーテックス関数に対して、質量パラメーター m^2 での微分 $\partial\Gamma^{(2)}/\partial m^2$ が対数発散するからである。4 個の条件に対応して、(2.38) の質量項を以下のように変更する。

$$-\frac{1}{2}\Big(m_0^2 + \delta m_0^2\Big)\phi_0^2\,, \quad m_0^2 = Z_m m^2\,, \quad \delta m_0^2 = Z^{-1}\delta m^2\,. \tag{2.65}$$

その結果、$\mathcal{L}_{\mathrm{counter}}$ に 4 つの発散量 Z、Z_m、Z_λ、δm^2 が含まれ、それぞれがくり込み条件を満たすように決められる。このとき、対数発散をくり込む Z、Z_m、Z_λ は、条件が $m^2 = \mu^2$ のところで与えられているため、質量パラメーターに依存せず、λ_0 と Λ/μ に依存することになる。そのため、このくり込み条件を質量に依らないくり込みと呼ぶ。また、条件 (2.61) より、δm_0^2 は m や μ に依存せず、

$$\delta m_0^2 = \Lambda^2 f(\lambda_0) \tag{2.66}$$

の形になる。

2.3.4 くり込み群方程式

くり込み点 μ に依存するくり込み条件である (2.58)、(2.59) 、(2.60) でくり込まれたバーテックス関数に対するくり込み群方程式を考える。(2.47) において両辺をくり込み点 μ で微分すると、左辺が μ に依存しないことから

$$\mu\frac{d}{d\mu}\Gamma_{\mathrm{ren}}[\phi; m^2, \lambda; \mu^2] = 0 \tag{2.67}$$

となる。ここで、微分は裸の量を固定して行われる。くり込まれた量の μ 依存性は

$$Z = Z\bigg(\lambda_0, \frac{m_0}{\Lambda}, \frac{\Lambda}{\mu}\bigg)\,, \tag{2.68}$$

$$Z_\lambda = Z_\lambda\bigg(\lambda_0, \frac{m_0}{\Lambda}, \frac{\Lambda}{\mu}\bigg)\,, \tag{2.69}$$

$$\delta m^2 = \Lambda^2 f\bigg(\lambda_0, \frac{m_0}{\Lambda}\bigg) \tag{2.70}$$

となる。これは、Z が無次元量であることから、質量次元を持つ量に対してはその比にしか依存しないことを表している。また、δm^2 が μ に依存しないのは、くり込み条件 (2.60) により、m が物理的質量として与えられているからである。このとき、くり込み群方程式は、

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\Gamma_{\mathrm{ren}}=0\,, \tag{2.71}$$

$$\beta=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda=-\lambda\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z_\lambda\,, \tag{2.72}$$

$$\gamma=-\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log\phi=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z \tag{2.73}$$

となる。β はベータ関数、γ は異常次元と呼ばれる量で、λ と m/μ の関数となる。これをくり込み群方程式と呼ぶ。バーテックス関数に対するくり込み群方程式は以下のようになる。

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}-n\gamma\right]\Gamma^{(n)}_{\mathrm{ren}}=0\,. \tag{2.74}$$

一方、質量に依らないくり込みに基づいたくり込み群方程式は以下のようになる。

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2}-\gamma\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\Gamma_{\mathrm{ren}}=0\,, \tag{2.75}$$

$$\beta=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda=-\lambda\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z_\lambda\,, \tag{2.76}$$

$$\gamma_m=-\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log m^2=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z_m\,, \tag{2.77}$$

$$\gamma=-\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log\phi=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z\,. \tag{2.78}$$

ここで、γ_m は質量異常次元と呼ばれる。また、β、γ_m、γ は λ のみに依存する関数となる。バーテックス関数に対する方程式は以下のようになる。

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}-\gamma_m m^2\frac{\partial}{\partial m^2}-n\gamma\right]\Gamma^{(n)}_{\mathrm{ren}}=0\,. \tag{2.79}$$

2.4 非摂動くり込み群

非摂動くり込み群とは、K. G. Wilson によって定式化された手法で、統計系の臨界現象の解析で大きな成功をおさめている。その後、場の量子論に応用され、素粒子物理に対するより深い理解が得られている。

その基本的な考え方は以下のようになる。始めに、運動量を Λ_0 で cutoff することによりミクロ理論 (UV 理論) を正則化する。次に、$\Lambda(<\Lambda_0)$ と Λ_0 の間の運動量を持つ場のモードを積分することにより、Λ 以下の有効理論 (IR 理論) が得られる。これは経路積分で以下のように表現される。

$$Z=\int\mathcal{D}\phi_{\mathrm{IR}}\mathcal{D}\phi_{\mathrm{UV}}\,e^{-S_{\mathrm{UV}}[\phi_{\mathrm{UV}}+\phi_{\mathrm{IR}}]}\equiv\int\mathcal{D}\phi_{\mathrm{IR}}\,e^{S_{\mathrm{IR}}[\phi_{\mathrm{IR}}]} \tag{2.80}$$

ここで、ϕ_{UV} は Λ 以上、ϕ_{IR} は Λ 以下の運動量を持つ場のモードを表す。この操作は、波長の短いゆらぎを平均化し、波長の長いモードの有効相互作用として取り込むことに相当する。その結果、理論のパラメーターである結合定数がスケールとともに変化していくことになる。このように、Λ_0 で与えられていたパラメーターを、Λ でのパラメーターに変換することをくり込み変換と呼ぶ。但し、積分は直接行われるわけではなく、同等の汎関数微分方程式を解くことによって行われる。この微分方程式をくり込み群方程式と呼ぶ。

この節では、始めに cutoff 関数の説明をし、その後 Wilson 作用を定義する。そして、非摂動くり込み群の基本方程式である Polchinski 方程式と Wetterich 方程式の導出を行う。

2.4.1 cutoff 関数について

高エネルギーモード (UV モード) と低エネルギーモード (IR モード) の分離は、cutoff 関数

$$K(p) = K\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) \tag{2.81}$$

によって行われる。cutoff の仕方としては、sharp cutoff と smooth cutoff の 2 種類あるが、ここでは smooth cutoff を考える。この関数は、$p^2 < \Lambda$ で 1 に漸近し、$p^2 = 0$ で 1 になる。また、$p^2 > \Lambda$ で 0 に漸近すると言う性質を持つ。これによって、運動量が Λ より大きいモードを cutoff できる。この性質をもつ関数の例として

$$K(p) = \exp\left[-\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)^n\right] \tag{2.82}$$

がある。ここで n は正の定数で、大きいほど sharp cutoff に近づいていく。但し、cutoff 関数の特定はしないで、以後は、滑らかで

$$K(p) \approx \begin{cases} 1 & (p^2 < \Lambda) \\ 0 & (p^2 > \Lambda) \end{cases} \tag{2.83}$$

となる関数として扱う。

2.4.2 Wilson 作用

始めに、運動量が Λ_0 で cutoff された理論を定義する。但し、$J = 0$ とする。

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[-S[\phi;\Lambda_0]\Big], \tag{2.84}$$

$$S[\phi;\Lambda_0] = \frac{1}{2}\int_p \phi(-p)\frac{D^2(p)}{K_0(p)}\phi(p) + S_I[\phi;\Lambda_0]. \tag{2.85}$$

ここで、$D^2(p) = p^2 + m^2$、$K_0(p) = K(p^2/\Lambda_0^2)$ とし、$S_I[\phi;\Lambda_0]$ は、スケール Λ_0 で定義された相互作用を表す。また、ϕ は、Λ_0 以下の運動量を持つ UV 場を表す。cutoff 関数を

$$K_0(p) = K(p) + (K_0(p) - K(p)) \tag{2.86}$$

とすることにより

$$S[\phi;\Lambda_0] = \frac{1}{2}\int_p \phi(-p)\frac{D^2(p)}{K(p) + (K_0(p) - K(p))}\phi(p) + S_I[\phi;\Lambda_0] \tag{2.87}$$

となるが、これは $\phi = \phi_h + \phi_l$ とするとき

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\frac{1}{2}\int_p \phi(-p)\frac{1}{A(p)+B(p)}\phi(p) - S_I[\phi;\Lambda_0]\right] \\ &= N\int \mathcal{D}\phi_h\mathcal{D}\phi_l \exp\left[-\frac{1}{2}\int_p \left\{\phi_l(-p)\frac{1}{A(p)}\phi_l(p) + \phi_h(-p)\frac{1}{B(p)}\phi_h(p)\right\} - S_I[\phi_h+\phi_l;\Lambda_0]\right] \end{aligned} \tag{2.88}$$

が成り立つので、

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_h\mathcal{D}\phi_l \exp\left[-\frac{1}{2}\int_p \left\{\phi_l(-p)\frac{D^2}{K(p)}\phi_l(p) + \phi_h(-p)\frac{D^2}{K_0(p)-K(p)}\phi_h(p)\right\} - S_I[\phi_h+\phi_l;\Lambda_0]\right] \tag{2.89}$$

と書き換えることができる。ここで、N は定数を表すが、Z ではこの定数を無視した。また、propagator を見ることにより、ϕ_h は運動量が $\Lambda^2 < p^2 < \Lambda_0^2$ の範囲に cutoff され、ϕ_l は運動量が Λ 以下に cutoff されていることが分かる。このとき、ϕ_h 積分を先に実行することにより、運動量が Λ で cutoff された Wilson 作用 $S[\phi_l;\Lambda]$ が定義される。

$$S[\phi_l;\Lambda] \equiv \frac{1}{2}\int_p \phi_l(-p)\frac{D^2}{K(p)}\phi_l(p) + S_I[\phi_l;\Lambda]. \tag{2.90}$$

ここで $S_I[\phi_l;\Lambda]$ は Wilson 作用の相互作用パートを表し、

$$\exp\Big[S_I[\phi_l;\Lambda]\Big]=\int\mathcal{D}\phi_h\exp\Big[-\frac{1}{2}\int_p\phi_h(-p)\frac{D^2}{K_0(p)-K(p)}\phi_h(p)-S_I[\phi_h+\phi_l;\Lambda_0]\Big] \tag{2.91}$$

となる。

このように、元々の場 ϕ を、運動量が $\Lambda^2<p^2<\Lambda_0^2$ に cutoff された高エネルギーモード ϕ_h と、運動量が $p^2<\Lambda^2$ に cutoff された低エネルギーモード ϕ_l に分け、高エネルギーモードの積分のみを行うことにより、低エネルギーモードのみから構成される作用を得ることができる。このとき、Λ_0 で定義された結合定数は、高エネルギーモードの影響を受け元の値から変化する。積分を次々に行うことにより、任意のスケールの有効結合定数を得ることができる。この変化を微分方程式で表したものがくり込み群方程式になる。

2.4.3 ブロックスピン変換による IR 作用

高エネルギーモードの積分方法は一意的ではない。ここでは、ブロックスピン変換による有効作用を考える。ブロックスピン変換は、もとは格子理論で使われているものだが、Wetterich により連続理論に応用された。

(2.84) で定義された生成汎関数に対して、以下の定数を掛ける。

$$1=\big(\mathrm{Det}\alpha\big)^{1/2}\int\mathcal{D}\Phi\ \exp\Big[-\Delta S[\Phi,\phi]\Big], \tag{2.92}$$

$$\Delta S[\Phi,\phi]=\frac{1}{2}\int_p\Big(\Phi(-p)-f(p)\phi(-p)\Big)\alpha(p)\Big(\Phi(p)-f(p)\phi(p)\Big). \tag{2.93}$$

ここで、Φ は Λ 以下の運動量を持つ IR 場を表し、$f(p)$ は Λ 以上を cutoff する関数、α はブロックスピンカーネルと呼ばれる関数で、通常は

$$\alpha(p)=\frac{R(p)}{f(p)(1-f(p))} \tag{2.94}$$

とする。R は運動量の適当な多項式を表す。但し、$\Lambda\to\Lambda_0$ のとき $f\to1$、$\alpha\to\infty$ とする。これは、$\Lambda\to\Lambda_0$ としたとき、得られる有効作用が元に戻るための条件となる。このとき Z は、定数を除いて

$$Z=\int\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\Phi\ \exp\Big[-\Delta S[\Phi,\phi]-S[\phi;\Lambda_0]\Big] \tag{2.95}$$

となる。ここで、高エネルギーモードである ϕ の積分を先に実行することにより Wilson 作用 $S[\Phi;\Lambda]$ が以下のように定義される。

$$\exp\Big[-S[\Phi;\Lambda]\Big]\equiv\int\mathcal{D}\phi\ \exp\Big[-\Delta S[\Phi,\phi]-S[\phi;\Lambda_0]\Big]. \tag{2.96}$$

Λ を Λ_0 に近づけると、α は ∞ に近づき、ΔS はデルタ関数的な振る舞いをする。このとき f は 1 に近づくので、UV 場と IR 場を $\Phi=\phi$ と対応付けることになり、Wilson 作用は元の作用 (2.85) に戻る。

次に、Wilson 作用の相互作用パートを求める。ϕ について平方完成すると

$$\begin{aligned}Z=\int\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\Phi\ \exp\Big[&-\frac{1}{2}\int_p\Big\{\phi-\Phi f\alpha\Big(\frac{D^2}{K_0}+f^2\alpha\Big)^{-1}\Big\}\Big(\frac{D^2}{K_0}+f^2\alpha\Big)\Big\{\phi-\Big(\frac{D^2}{K_0}+f^2\alpha\Big)^{-1}f\alpha\Phi\Big\}\\&-\frac{1}{2}\int_p\Phi(-p)\Big\{\alpha-f\alpha\Big(\frac{D^2}{K_0}+f^2\alpha\Big)^{-1}f\alpha\Big\}(p)\Phi(p)-S_I[\phi,\Lambda_0]\Big]\end{aligned} \tag{2.97}$$

となるが、ここで

$$\phi'=\phi-\Phi',\quad \Phi'=f\alpha\Big(\frac{D^2}{K_0}+f^2\alpha\Big)^{-1}\Phi \tag{2.98}$$

と定義すると、Z は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
Z = \int \mathcal{D}\phi' \mathcal{D}\Phi \, \exp\bigg[&- \frac{1}{2}\int_p \Phi(-p) \frac{\alpha(p)K_0^{-1}(p)D^2(p)}{K_0^{-1}(p)D^2 + f^2(p)\alpha(p)} \Phi(p) \\
&- \frac{1}{2}\int_p \phi'(-p)\left(\frac{D^2(p)}{K_0(p)} + f^2(p)\alpha(p)\right)\phi'(p) - S_I[\phi' + \Phi'; \Lambda_0]\bigg] .
\end{aligned}
\tag{2.99}
$$

ここで ϕ' 積分を行うことにより Wilson 作用の相互作用パートが以下のように得られる。

$$
\exp\Big[- S_I[\Phi';\Lambda]\Big] = \int \mathcal{D}\phi' \, \exp\bigg[- \frac{1}{2}\int_p \phi'(-p)\left(\frac{D^2(p)}{K_0(p)} + f^2(p)\alpha(p)\right)\phi'(p) - S_I[\phi' + \Phi; \Lambda_0]\bigg] . \tag{2.100}
$$

ブロックスピン変換によって得られた Wilson 作用は、f と α を

$$
f(p) = \frac{K(p)}{K_0(p)}, \quad \alpha(p) = \frac{K_0(p)}{K(p)(K_0(p) - K(p))} D^2(p) \tag{2.101}
$$

とするとき、

$$
\frac{\alpha(p)K_0^{-1}(p)D^2(p)}{K_0^{-1}(p)D^2 + f^2(p)\alpha(p)} = \frac{D^2(p)}{K(p)} \tag{2.102}
$$

$$
\frac{D^2(p)}{K_0(p)} + f^2(p)\alpha(p) = \frac{D^2(p)}{K_0(p) - K(p)} \tag{2.103}
$$

$$
f\alpha\left(\frac{D^2}{K_0} + f^2\alpha\right)^{-1} = 1 \tag{2.104}
$$

となることによって、(2.90) と一致する。

2.4.4 連結グリーン関数

Wilson 作用に対する生成汎関数は、(2.89) より、以下のように書くことができる。

$$
Z[J] = \int \mathcal{D}\phi_l \exp\left[- \frac{1}{2}\int_p \phi_l(-p) \frac{D^2}{K} \phi_l(p)\right] Z_\Lambda[\phi_l, J] . \tag{2.105}
$$

ここで、

$$
Z_\Lambda[\phi_l, J] = \int \mathcal{D}\phi_h \exp\left[- \frac{1}{2}\int_p \phi_h(-p) \frac{D^2}{K_0 - K}\phi_h(p) - S_I[\phi_h + \phi_l; \Lambda_0] + \int_p J(-p)\Big(\phi_l(p) + \phi_h(p)\Big)\right] \tag{2.106}
$$

となる。ここで、$\phi = \phi_h + \phi_l$ と変数変換すると

$$
\begin{aligned}
Z_\Lambda[\phi_l, J] = &\exp\left[- \int_p \frac{1}{2}\phi_l(-p) \frac{D^2}{K_0 - K}\phi_l(p)\right] \\
&\times \int \mathcal{D}\phi \exp\left[- \int_p \frac{1}{2}\phi(-p)\frac{D^2}{K_0 - K}\phi(p) - S_I[\phi;\Lambda_0] + \int_p \phi(-p)\Big(J(p) + \frac{D^2}{K_0 - K}\phi_l(p)\Big)\right]
\end{aligned}
\tag{2.107}
$$

となるので、ϕ 積分を実行すると

$$
\begin{aligned}
Z_\Lambda[\phi_l, J] = &\exp\left[\int_p \left(\frac{1}{2}J(-p)\frac{K_0 - K}{D^2}J(p) + J(-p)\phi_l(p)\right)\right] \\
&\times \exp\left[- \frac{1}{2}\int_p \left(J + \frac{D^2}{K_0 - K}\phi_l\right)\frac{K_0 - K}{D^2}\left(J + \frac{D^2}{K_0 - K}\phi_l\right)\right] \\
&\times \exp\left[- S_I\left[\frac{\partial}{\partial J};\Lambda_0\right]\right] \exp\left[\frac{1}{2}\int_p \left(J + \frac{D^2}{K_0 - K}\phi_l\right)\frac{K_0 - K}{D^2}\left(J + \frac{D^2}{K_0 - K}\phi_l\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

となる。よって、J 微分を実行し、スケール Λ での相互作用を以下のように導入する。

$$
Z_\Lambda[\phi_l; J] = \exp\left[\int_p \left(\frac{1}{2}J(-p)\frac{K_0 - K}{D^2}J(p) + J(-p)\phi_l(p)\right) - S_I\left[\frac{K_0 - K}{D^2}J + \phi_l; \Lambda\right]\right] . \tag{2.109}
$$

これは (2.106) より、$\phi_l = 0$ とすることで ϕ_h に対する通常の生成汎関数になる。そこで、以下の量を定義する。

$$\begin{aligned} W_\Lambda[\phi_l, J] &= \log Z_\Lambda[\phi_l, J] \\ &= \int_p \left(\frac{1}{2} J(-p) \frac{K_0 - K}{D^2} J(p) + J(-p)\phi_l(p) \right) - S_I \left[\frac{K_0 - K}{D^2} J + \phi_l; \Lambda \right]. \end{aligned} \tag{2.110}$$

これは、$\phi_l = 0$ とすることで、IR cutoff された連結グリーン関数の生成汎関数になる。

2.4.5 Polchinski 方程式

始めに、ブロックスピン変換によって得られた Wilson 作用に対する Polchinski 方程式を求める。このとき、f と α を (2.101) とすることにより、(2.90) に対する Polchinski 方程式になる。

Wilson 作用の定義式 (2.96) をスケール Λ で微分すると、$S[\phi; \Lambda_0]$ は Λ に依らないので

$$-\Lambda \frac{\partial S}{\partial \Lambda} \exp\Big[- S[\Phi; \Lambda] \Big] = \int \mathcal{D}\phi\, \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big(- \Delta S[\Phi, \phi] \Big) \exp\Big[- \Delta S[\Phi, \phi] - S[\phi; \Lambda_0] \Big] \tag{2.111}$$

となる。一方、場 Φ による微分は、

$$\frac{\partial}{\partial \Phi(p)} \exp\Big[- \Delta S[\Phi, \phi] \Big] = -\alpha(p) \Big(\Phi(-p) - f(p)\phi(-p) \Big) \exp\Big[- \Delta S[\Phi, \phi] \Big] \tag{2.112}$$

より

$$\phi(-p) \exp\Big[- \Delta S[\Phi, \phi] \Big] = f^{-1}(p) \left(\Phi(-p) + \alpha^{-1}(p) \frac{\partial}{\partial \Phi(p)} \right) \exp\Big[- \Delta S[\Phi, \phi] \Big] \tag{2.113}$$

となるので、(2.111) の右辺に、この式を代入すると

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial S}{\partial \Lambda} = e^S \int_p \Bigg[& \frac{1}{2} \Phi(-p) \Lambda \frac{\partial \alpha(p)}{\partial \Lambda} \Phi(p) - \Phi(-p) f^{-1} \Lambda \frac{\partial f \alpha}{\partial \Lambda} \left(\Phi(p) + \alpha^{-1}(p) \frac{\partial}{\partial \Phi(-p)} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\Phi(-p) + \alpha^{-1}(p) \frac{\partial}{\partial \Phi(p)} \right) f^{-1} \Lambda \frac{\partial f^2 \alpha}{\partial \Lambda} f^{-1} \left(\Phi(p) + \alpha^{-1}(p) \frac{\partial}{\partial \Phi(-p)} \right) \Bigg] e^{-S} \end{aligned} \tag{2.114}$$

が得られる。最後にこの式を整理することによって Polchinski 方程式が得られる。

$$\Lambda \frac{\partial S}{\partial \Lambda} = \int_p \left[- \left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \log f \right) \Phi(p) \frac{\partial S}{\partial \Phi(p)} - \frac{1}{2} f^2 \Lambda \frac{\partial \left(f^2 \alpha \right)^{-1}}{\partial \Lambda} \left\{ \frac{\partial S}{\partial \Phi(-p)} \frac{\partial S}{\partial \Phi(p)} - \frac{\partial}{\partial \Phi(-p)} \frac{\partial S}{\partial \Phi(p)} \right\} \right]. \tag{2.115}$$

また、f と α に対して (2.101) を代入すると

$$\Lambda \frac{\partial S}{\partial \Lambda} = \int_p \frac{1}{D^2} \Lambda \frac{\partial K}{\partial \Lambda} \left[- \frac{D^2}{K} \Phi(p) \frac{\partial S}{\partial \Phi(p)} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial S}{\partial \Phi(-p)} \frac{\partial S}{\partial \Phi(p)} - \frac{\partial}{\partial \Phi(-p)} \frac{\partial S}{\partial \Phi(p)} \right\} \right] \tag{2.116}$$

となる。

次に、Wilson 作用の相互作用パートに対する Polchinski 方程式を求める。定義式 (2.100) において、積分変数を ϕ に戻すと

$$\exp\Big[- S_I[\Phi'; \Lambda] \Big] = \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[- \Delta S_I[\Phi', \phi] - S_I[\phi; \Lambda_0] \Big], \tag{2.117}$$

$$\Delta S_I[\Phi, \phi] = \frac{1}{2} \int_p \Big(\phi(-p) - \Phi'(-p) \Big) \left(\frac{D^2(p)}{K_0(p)} + f^2(p)\alpha(p) \right) \Big(\phi(p) - \Phi'(p) \Big) \tag{2.118}$$

と書けるので、Λ 微分をすると、$S_I[\phi; \Lambda_0]$ は Λ に依らないので

$$-\Lambda \frac{\partial S_I}{\partial \Lambda} \exp\Big[- S_I[\Phi; \Lambda] \Big] = \int \mathcal{D}\phi\, \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big(- \Delta S_I[\Phi, \phi] \Big) \exp\Big[- \Delta S_I[\Phi, \phi] - S[\phi; \Lambda_0] \Big] \tag{2.119}$$

となる。一方、

$$\frac{\partial}{\partial \Phi'(p)} \exp\Big[- \Delta S_I[\Phi, \phi] \Big] = \left(\frac{D^2(p)}{K_0(p)} + f^2(p)\alpha(p) \right) \Big(\Phi'(-p) - \phi(-p) \Big) \exp\Big[- \Delta S_I[\Phi', \phi] \Big] \tag{2.120}$$

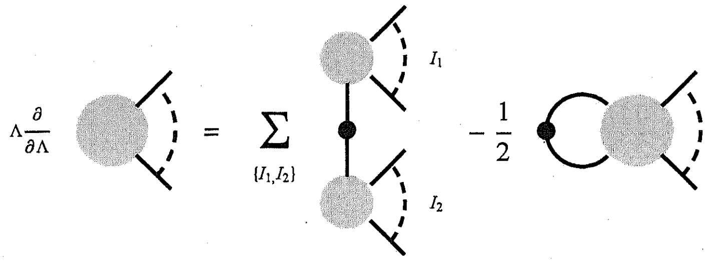

図 4　Polchinski 方程式を表す図 [11]。灰色の円が相互作用の頂点を表し、黒点が cutoff された propagator の微分を表す。点線は外線を表し、和は外線の数が両辺で等しくなるようにとっている。

より

$$\phi(-p)\exp\Big[-\Delta S_I[\Phi',\phi]\Big]=\left\{\Phi'(-p)+\left(\frac{D^2(p)}{K_0(p)}+f^2(p)\alpha(p)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\Phi'(p)}\right\}\exp\Big[-\Delta S_I[\Phi',\phi]\Big] \tag{2.121}$$

となるので、(2.119) に代入することによって、Wilson 作用の相互作用パートに対する Polchinski 方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\Lambda\frac{\partial S_I}{\partial\Lambda}=&\int_p\left[\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\left\{\left(\frac{D^2}{K_0}+f^2\alpha\right)^{-1}f\alpha\right\}(f\alpha)^{-1}\left(\frac{D^2}{K_0}+f^2\alpha\right)\right]\Phi(p)\frac{\partial S_I}{\partial\Phi(p)}\\&-\frac{1}{2}\int_p\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\left(\frac{D^2}{K_0}+f^2\alpha\right)^{-1}\left[\frac{\partial S_I}{\partial\Phi'(-p)}\frac{\partial S_I}{\partial\Phi'(p)}-\frac{\partial}{\partial\Phi'(-p)}\frac{\partial S_I}{\partial\Phi'(p)}\right].\end{aligned} \tag{2.122}$$

ここで、f と α に (2.101) を代入すると

$$\Lambda\frac{\partial S_I}{\partial\Lambda}=-\frac{1}{2}\int_p\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\left(\frac{D^2}{K_0-K}\right)^{-1}\left[\frac{\partial S_I}{\partial\Phi(-p)}\frac{\partial S_I}{\partial\Phi(p)}-\frac{\partial}{\partial\Phi(-p)}\frac{\partial S_I}{\partial\Phi(p)}\right] \tag{2.123}$$

となる。

ここで、S_I を

$$S_I=\int_{p_1,\cdots,p_n}S_I(p_1,\cdots,p_n;\Lambda)\Phi(p_1)\cdots\Phi(p_n), \tag{2.124}$$

$$S_I^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;\Lambda)=\left.\frac{\partial^n S_I}{\partial\Phi(p_1)\cdots\partial\Phi(p_n)}\right|_{\Phi=0} \tag{2.125}$$

と展開すると、相互作用に対する Polchinski 方程式は

$$\begin{aligned}&\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}S_I^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)\\&=-\int_p\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\left(\frac{D^2}{K_0-K}\right)^{-1}\left[\sum_{\{I_1,I_2\}}S_I^{(m)}(-p,I_1;\Lambda)S_I^{(l)}(p,I_2;\Lambda)-\frac{1}{2}S_I^{(n+2)}(-p,p,p_1,\cdots,p_n)\right]\end{aligned} \tag{2.126}$$

と表される。ここで、I_1 は p_1 から p_n の運動量を m 個、I_2 は残りの l 個を、重複なく持つとする。I_1 と I_2 に対する和は、$m+l=n$ となる m と l についての和を表す。これは、図 4 によって表される。

2.4.6 Wetterich 方程式

Λ_0 で cutoff された理論に対して、IR cutoff を加えた生成汎関数を考える。

$$Z[J]=\int\mathcal{D}\phi\,\exp\left[-S[\phi;\Lambda_0]-\Delta S_\Lambda[\phi]+\int_p J(-p)\phi(p)\right]. \tag{2.127}$$

ここで、IR cutoff を表す ΔS_Λ は

$$\Delta S_\Lambda[\phi]=\int_p\frac{1}{2}R_\Lambda(p)\phi(-p)\phi(p) \tag{2.128}$$

で与えられ、R_Λ は、$\Lambda \to 0$ で 0、$\Lambda \to \Lambda_0$ で ∞ になるように決められる。例としては以下のようになる。

$$R_\Lambda(p) \approx \frac{p^2}{\exp\left[\frac{p^2}{\Lambda^2}\right] - \exp\left[\frac{p^2}{\Lambda_0^2}\right]} . \tag{2.129}$$

このように定義された生成汎関数に対して以下の量を定義する。

$$W_\Lambda[J] = \log Z[J] = \log \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left[- S[\phi; \Lambda_0] - \Delta S_\Lambda[\phi] + \int_p J(-p)\phi(p) \right] . \tag{2.130}$$

さらに、有効作用は、IR cutoff に依存する量子場 φ を

$$\varphi(p) \equiv \langle \phi(p) \rangle = \frac{\partial W_\Lambda[J]}{\partial J(-p)} \tag{2.131}$$

で定義するとき、以下のようになる。

$$\Gamma_\Lambda[\varphi] = -W_\Lambda[J] + \int_p J(-p)\varphi(p) - \Delta S_\Lambda[\varphi] . \tag{2.132}$$

ここで用いた定義は、$\Lambda \to \Lambda_0$ で $\Gamma_\Lambda \to S$ となるように構成されている。実際、(2.132) より、

$$J(-p) = \frac{\partial \Gamma_\Lambda}{\partial \varphi(p)} + R_\Lambda(p)\varphi(-p) \tag{2.133}$$

となるので、$\chi = \phi - \varphi_\Lambda$ として

$$\exp\Big[- \Gamma_\Lambda[\varphi] \Big] = \exp\left[- S[\phi; \Lambda_0] + \int_p \frac{\partial \Gamma_\Lambda}{\partial \varphi(p)} \chi(p) - \frac{1}{2} \int_p \chi(-p) R_\Lambda(p) \chi(p) \right] \tag{2.134}$$

となる。$\Lambda \to \Lambda_0$ のとき $R_\Lambda \to \infty$ となるので、R_Λ を含む項はデルタ関数的な振る舞いをし、その結果 $\Gamma_\Lambda \to S$ となる。

Wetterich 方程式は (2.132) のスケール微分から得られる。始めに、ΔS_Λ を除いた有効作用を $\tilde{\Gamma}_\Lambda$ とする。

$$\Gamma_\Lambda[\varphi] = \tilde{\Gamma}_\Lambda[\varphi] - \Delta S_\Lambda[\varphi] . \tag{2.135}$$

このとき $\tilde{\Gamma}_\Lambda$ のスケール微分は

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{\Gamma}_\Lambda[\varphi] = -\Lambda \frac{\partial W_\Lambda}{\partial \Lambda}[J] - \int_p \Lambda \frac{\partial W_\Lambda}{\partial J(p)} \frac{\partial J(p)}{\partial \Lambda} + \int_p \Lambda \frac{\partial J(-p)}{\partial \Lambda} \varphi(p) \tag{2.136}$$

となるが、(2.131) より、最後の 2 項は消える。さらに、W_Λ の具体形より

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{\Gamma}_\Lambda[\varphi] = \frac{1}{2} \int_p \Lambda \frac{\partial R_\Lambda(p)}{\partial \Lambda} \langle \phi(-p)\phi(p) \rangle \tag{2.137}$$

となるが、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_\Lambda}{\partial J(-p) \partial J(p)} &= \langle \phi(-p)\phi(p) \rangle - \langle \phi(-p) \rangle \langle \phi(p) \rangle \\ &= \langle \phi(-p)\phi(p) \rangle - \varphi(-p)\varphi(p) \end{aligned} \tag{2.138}$$

より、

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{\Gamma}_\Lambda[\varphi] = \int_p \left[\frac{1}{2} \Lambda \frac{\partial R_\Lambda(p)}{\partial \Lambda} \frac{\partial^2 W_\Lambda}{\partial J(-p) \partial J(p)} + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Delta S_\Lambda[\phi] \right] \tag{2.139}$$

となる。ここで、恒等式

$$\int_k \frac{\partial^2 W_\Lambda}{\partial J(p) \partial J(k)} \frac{\partial^2 \tilde{\Gamma}_\Lambda}{\partial \varphi(k) \partial \varphi(q)} = \delta(p - q) \tag{2.140}$$

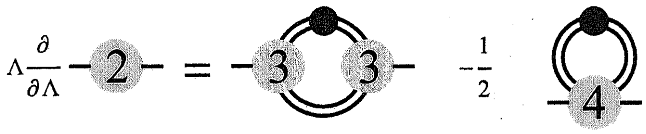

図 5　2 点バーテックス関数に対する Wetterich 方程式を表す図。数字入りの灰色の円がバーテックス関数を表し、黒点が R_Λ の微分を表している。2 重線は exact propagator を表す。

を使うことによって Wetterich 方程式が以下のように得られる。

$$\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\Gamma_\Lambda[\varphi] = \frac{1}{2}\int_p \Lambda\frac{\partial R_\Lambda(p)}{\partial\Lambda}\left[\frac{\partial^2\Gamma_\Lambda}{\partial\varphi(-p)\partial\varphi(p)} + R_\Lambda(p)\right]^{-1}. \tag{2.141}$$

n 点バーテックス関数を $\Gamma_\Lambda^{(n)}$ と書くとき、これらに対する方程式は (2.141) を微分することにより得られる。例えば、2 点バーテックス関数に対する方程式は、

$$\begin{aligned}\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\Gamma_\Lambda^{(2)} &= \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\varphi}\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\Gamma_\Lambda[\varphi] \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\Lambda\frac{\partial R_\Lambda}{\partial\Lambda}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\left[\Gamma_\Lambda^{(2)}+R_\Lambda\right]^{-1}\Gamma_\Lambda^{(3)}\left[\Gamma_\Lambda^{(2)}+R_\Lambda\right]^{-1}\right)\right\} \\ &= \mathrm{Tr}\left\{\Lambda\frac{\partial R_\Lambda}{\partial\Lambda}\left[\Gamma_\Lambda^{(2)}+R_\Lambda\right]^{-1}\Gamma_\Lambda^{(3)}\left[\Gamma_\Lambda^{(2)}+R_\Lambda\right]^{-1}\Gamma_\Lambda^{(3)}\left[\Gamma_\Lambda^{(2)}+R_\Lambda\right]^{-1}\right. \\ &\qquad \left.-\frac{1}{2}\Lambda\frac{\partial R_\Lambda}{\partial\Lambda}\left[\Gamma_\Lambda^{(2)}+R_\Lambda\right]^{-1}\Gamma_\Lambda^{(4)}\left[\Gamma_\Lambda^{(2)}+R_\Lambda\right]^{-1}\right\}\end{aligned} \tag{2.142}$$

に対して、$\varphi = 0$ としたものになる。これは、2 点バーテックス関数に対して、3 点と 4 点のバーテックス関数が寄与していることを表している (図.5)。一般に、n 点バーテックス関数には、(n+1) 点と (n+2) 点からの寄与がある。

3　非摂動くり込み群によるカイラル対称性

この章では本論文の主題である、非摂動くり込み群でのカイラル対称性の実現について議論する。正則化によって理論がもつ対称性を破ってしまうという問題に対して、変形された対称性による理論の定式化を考える。この方法は格子理論での前例に基づいている。格子理論では、格子正則化によってカイラル対称性は破れてしまう。この問題に対して P. Ginsparg と K. Wilson によって以下のようなアプローチがとられた [3]。始めにカイラル変換のもとで不変な連続理論の作用を考える。この作用に対して、カイラル対称性を破るようなブロックスピン変換を行うことによって格子理論の作用と関係をつける。このとき、格子理論の作用がフェルミオンの双一次であると仮定すると、Dirac operator を D としたときに、以下のような関係式がえられる。

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 = 2D\gamma_5\alpha^{-1}D \tag{3.1}$$

α は、ブロックスピンカーネルと呼ばれ、格子間隔 a の逆数に比例する。この関係式は GW relation と呼ばれ、格子理論でカイラル対称性を実現する際に重要になる。自由理論のフェルミオンに対するカイラル対称性は、Dirac operator と γ_5 の反可換によって与えられるが、格子理論では Nielsen-Ninomiya の定理により、局所的で正しい連続極限を持つ Dirac operator は γ_5 との反交換関係がゼロにはならない。しかし、GW relation を満たす Dirac operator は、γ_5 との反交換関係がゼロではなく、格子間隔に比例する量だけずれている。よって Nielsen-Ninomiya の定理には抵触しない。さらに、連続極限で通常のカイラル変換に戻ることを示している。この Dirac operator によって記述される自由理論は、変形されたカイラル変換のもとでの不変性を持っている。後に、この変換のもとで不変な格子理論が 1998 年に M. Lüscher により構成された [8]。

非摂動くり込み群でも同様に変形された対称性を扱うことができる。理論の対称性は Ward-Takahashi(WT) identity によって記述されるが、UV 理論が場のある変換のもとでの対称性を持っているとき、ブロックスピン変換

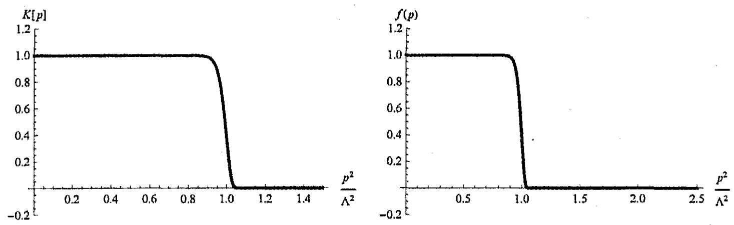

図 6　左は cutoff 関数 $K(p)$ を表す。右は $\Lambda/\Lambda_0 = 1/2$ としたときの $f(p)$ を表す。

で関係付けられた IR 理論では、変形された場の変換のもとでの対称性が実現されていることが知られている。この変形された対称性は、格子理論と同様、自由理論に適用すると GW relation を導く。本論分では、格子理論での前例 [7] に基づいて、非摂動くり込み群の立場で、湯川相互作用を含めて得られる、変形された対称性を持つ理論の構成を考える。但し、フェルミオンに対して双一次を仮定する。これは、変形された対称性を持つ作用として、場の高次項を含んだ作用を仮定すると、WT identity を解くのが非常に困難になるためである。

3.1　ブロックスピン変換

高エネルギーモードを積分する方法はいくつかあるが、ここでは Wetterich によって導入されたブロックスピン変換の連続理論版 [4] を使用する。始めに、必要とされる関数を導入し、そのあとにブロックスピン変換によって UV 理論の生成汎関数と IR 理論の生成汎関数の関係をつける。

以下のような cutoff 関数を導入する。

$$K\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) \approx \begin{cases} 1 & (p^2 < \Lambda^2) \\ 0 & (p^2 > \Lambda^2) \end{cases} \quad . \tag{3.2}$$

さらに、以下の関数を定義する。

$$K_0(p) \equiv K\left(\frac{p^2}{\Lambda_0^2}\right), \quad K(p) \equiv K\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right), \quad f(p) \equiv \frac{K(p)}{K_0(p)}. \tag{3.3}$$

$K_0(p)$ は Λ_0 以上、$K(p)$ は Λ 以上を cutoff する関数になり、$f(p)$ は $K(p)$ と同様に Λ 以下を cutoff する関数になる。場 ϕ^A のグラスマンパリティを ϵ で表し、

$$\epsilon(\phi^A) = \epsilon^A \tag{3.4}$$

として、ϕ^A が Grassmann odd の場合 $\epsilon^A = 1$、ϕ^A が Grassmann even の場合 $\epsilon^A = 0$ とする。

次に、ブロックスピン変換によって IR 作用を定義する。UV 理論の作用を $S_{\rm UV}[\phi;\Lambda_0]$ とすると、生成汎関数は

$$Z_{\rm UV}[J] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_{\rm UV}[\phi;\Lambda_0] + K_0^{-1} J\cdot\phi} \tag{3.5}$$

となる。ここで、場やソース J に依存しない定数

$$\int \mathcal{D}\Phi\, e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi - f\phi - J\cdot(K\alpha)^{-1}\right)\cdot\alpha\cdot\left(\Phi - f\phi - (-)^{\epsilon_J}(K\alpha)^{-1}\cdot J\right)} \tag{3.6}$$

を掛けることによって、

$$Z_{\rm UV}[J] = N_J \int \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\phi\, e^{-\frac{1}{2}(\Phi - f\phi)\cdot\alpha\cdot(\Phi - f\phi) - S_{\rm UV}[\phi;\Lambda_0] + K^{-1} J\cdot\Phi} \tag{3.7}$$

となる。ここで、N_J は以下のようになる。

$$\log N_J = -\frac{(-)^{\epsilon_A}}{2}\int_p J_A(-p) K^{-2}(p) \left[\alpha^{-1}(p)\right]^{AB} J_B(p)\,. \tag{3.8}$$

このとき先に UV 場 Φ の積分を実行することにより IR 作用を以下のように定義する。

$$
e^{-S_{\mathrm{IR}}[\Phi;\Lambda]} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\frac{1}{2}(\Phi - f\phi)\cdot\alpha\cdot(\Phi - f\phi) - S_{\mathrm{UV}}[\phi;\Lambda_0]} \,. \tag{3.9}
$$

このとき UV 場と IR 場の関係は $\Phi \approx f\phi$ となり、これは UV 場 ϕ の運動量が Λ 以下のモードを IR 場に対応させていることを表す。α はブロックスピンカーネルと呼ばれ、$\Lambda \to \Lambda_0$ で $\alpha \to \infty$ となるパラメーターを表す。これは、$\Lambda \to \Lambda_0$ とした時、$\Phi = \phi$ となることによって IR 作用が UV 作用に戻るための条件になっている。UV 理論の生成汎関数と IR 理論の生成汎関数の関係は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{UV}}[J] &= N_J \int \mathcal{D}\Phi \, e^{S_{\mathrm{IR}}[\Phi;\Lambda] + K^{-1}J\cdot\Phi} \\
&= N_J Z_{\mathrm{IR}}[J] \,.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

(3.9) において、α を含む項が UV 理論の持つ対称性を尊重しない場合、左辺の IR 作用は UV 理論の持つ対称性を持つことはできない。しかし、無くなってしまう訳ではなく変形された形で残ることが (3.10) を用いることによって示される。

3.2 IR 理論での WT identity

前節で UV 理論の生成汎関数と IR 理論の生成汎関数の関係が得られた。この関係式を使うことによって、IR 理論で成り立つ WT identity を求めることができる。この節では、UV 理論で WT identity が成立するときに、ブロックスピン変換で関係付けられた IR 理論の WT identity が、UV 場の変換とは異なる変換のもとでの不変性を導いていることを見る。

UV 理論の生成汎関数

$$
Z_{\mathrm{UV}}[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_{\mathrm{UV}}[\phi;\Lambda_0] + K_0^{-1}J\cdot\phi} \tag{3.11}
$$

に対して、無限小変換 $\phi'^A(x) = \phi^A(x) + \delta\phi^A(x)$ を行うと、この変換の元で生成汎関数は不変なので、

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{UV}}[J] &= \int \mathcal{D}\phi' \, e^{-S_{\mathrm{UV}}[\phi';\Lambda_0] + K_0^{-1}J\cdot\phi'} \\
&= Z_{\mathrm{UV}}[J] + \int \mathcal{D}\phi \left(K_0^{-1}J\cdot\delta\phi - \Sigma[\phi;\Lambda_0]\right) e^{-S_{\mathrm{UV}}[\phi;\Lambda_0] + K_0^{-1}J\cdot\phi} + \mathcal{O}(\delta\phi^2)
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

となり、これより以下の関係式が得られる。

$$
\int \mathcal{D}\phi \left(K_0^{-1}J\cdot\delta\phi - \Sigma[\phi;\Lambda_0]\right) e^{-S_{\mathrm{UV}}[\phi;\Lambda_0] + K_0^{-1}J\cdot\phi} = 0 \,. \tag{3.13}
$$

ここで、$\Sigma[\phi;\Lambda_0]$ は WT operator と呼ばれ、

$$
\Sigma[\phi;\Lambda_0] = \int_p \left(\frac{\partial^r S_{\mathrm{UV}}}{\partial\phi^A(p)} \delta\phi^A(p) - (-)^{\epsilon_A} \frac{\partial}{\partial\phi^A(p)} \delta\phi^A(p) \right) \tag{3.14}
$$

で与えられる。第 1 項は UV 場の変換 $\delta\phi$ のもとでの作用の変分 δS_{UV} を表す。第 2 項は積分測度の変換

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}\phi' &= \mathcal{D}\phi \, \mathrm{SDet} \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\phi + \delta\phi\right) \\
&= \mathcal{D}\phi \, \exp\left[\mathrm{STr}\log\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\phi + \delta\phi\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{D}\phi &= \mathcal{D}\phi' - \mathcal{D}\phi \\
&= \mathcal{D}\phi\left[(-)^{\epsilon_A} \int_p \frac{\partial}{\partial\phi^A(p)} \delta\phi^A(p) + \mathcal{O}(\delta\phi^2)\right]
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

からの寄与を表している。ここで、STr は運動量積分も含めている。UV 理論の変数変換の元での不変性は WT identity

$$\Sigma[\phi;\Lambda_0]=0 \tag{3.17}$$

によって与えられる。次に IR 理論の WT identity について考える。(3.13) より、

$$\langle\Sigma[\phi;\Lambda_0]\rangle_{\phi,K_0^{-1}J}=K_0^{-1}J\cdot\langle\delta\phi\rangle_{\phi,K_0^{-1}J} \tag{3.18}$$

となるが、一般に $\delta\phi$ は ϕ に依存するので、ϕ を J 微分に書き換えて ϕ 積分の外に出すと、

$$\langle\Sigma[\phi;\Lambda_0]\rangle_{\phi,K_0^{-1}J}=K_0^{-1}J\cdot\delta\phi\Big[\frac{\partial^l}{\partial J}\Big]Z_{\rm UV}[J]\,. \tag{3.19}$$

UV 理論の生成汎関数と IR 理論の生成汎関数は (3.10) によって $Z_{\rm UV}[J]=N_J Z_{\rm IR}[J]$ と関係がついているので、これを代入すると

$$\begin{aligned}\langle\Sigma[\phi;\Lambda_0]\rangle_{\phi,K_0^{-1}J}&=K_0^{-1}J\cdot\delta\phi\Big[\frac{\partial^l}{\partial J}\Big]N_J Z_{\rm IR}[J]\\&=N_J\Big\{N_J^{-1}K_0^{-1}J\cdot\Big(\delta\phi\Big[\frac{\partial^l}{\partial J}\Big]N_J\Big)+K_0^{-1}J\cdot\delta\phi\Big[\frac{\partial^l}{\partial J}\Big]\Big\}Z_{\rm IR}[J]\,.\end{aligned} \tag{3.20}$$

このとき、IR 理論の WT operator は最後の行によって表される。

$$\langle\Sigma[\Phi;\Lambda]\rangle_{\Phi,K^{-1}J}=\Big\{N_J^{-1}K_0^{-1}J\cdot\Big(\delta\phi\Big[\frac{\partial^l}{\partial J}\Big]N_J\Big)+K_0^{-1}J\cdot\delta\phi\Big[\frac{\partial^l}{\partial J}\Big]\Big\}Z_{\rm IR}[J]\,. \tag{3.21}$$

IR 理論での WT identity は、

$$\Sigma[\Phi;\Lambda]=0 \tag{3.22}$$

で与えられるが、これは UV 理論で WT identity が成り立っているときに成り立つ。この恒等式は UV 理論が対称性を持っているとき、ブロック変換で関係付けられた IR 作用がもつ対称性を記述している。

次に、グローバルな線形変換の仮定の元で WT identity を具体的に求める。変換は

$$\delta\phi^A(p)=R^A{}_B[\Lambda_0]\phi^B(p) \tag{3.23}$$

となるので、WT operator の第 1 項は

$$\int_p J_A(-p)R^A{}_B[\Lambda_0]\frac{\partial^l}{\partial J_B(-p)}\log N_J=(-)^{\epsilon_A+1}\int_p K^{-2}(p)J_A(-p)R^A{}_B[\Lambda_0]\big[\alpha^{-1}(p)\big]^{BC}J_C(p) \tag{3.24}$$

となるが、

$$K^{-2}(p)J_A(-p)J_C(p)Z_{\rm IR}[J]=\int\mathcal{D}\Phi\,e^{-S_{\rm IR}[\Phi;\Lambda]}\frac{\partial^l}{\partial\Phi^A(p)}\frac{\partial^l}{\partial\Phi^C(-p)}e^{K^{-1}J\cdot\Phi} \tag{3.25}$$

より、部分積分をすると

$$\begin{aligned}K^{-2}(p)J_A(-p)J_C(p)Z_{\rm IR}[J]&=\int\mathcal{D}\Phi\,e^{K^{-1}J\cdot\Phi}\frac{\partial^l}{\partial\Phi^A(p)}\frac{\partial^l}{\partial\Phi^C(-p)}e^{-S_{\rm IR}[\Phi;\Lambda]}\\&=\Big\langle\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\Phi^A(p)}\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\Phi^C(-p)}-\frac{\partial^l}{\partial\Phi^A(p)}\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\Phi^C(-p)}\Big\rangle_{\Phi,K^{-1}J}\end{aligned} \tag{3.26}$$

となる。第 2 項は、

$$\begin{aligned}J_A(-p)\frac{\partial^l}{\partial J_B(-p)}Z_{\rm IR}[J]&=\int\mathcal{D}\Phi\,K^{-1}J_A(-p)\Phi^B(p)e^{-S_{\rm IR}[\Phi;\Lambda]+K^{-1}J\cdot\Phi}\\&=(-)^{\epsilon_A}\int\mathcal{D}\Phi\left(\frac{\partial^l}{\partial\Phi^A(p)}e^{K^{-1}J\cdot\Phi}\right)\Phi^B(p)e^{-S_{\rm IR}[\Phi;\Lambda]}\end{aligned} \tag{3.27}$$

より、部分積分をすると

$$J_A(-p)\frac{\partial^l}{\partial J_B(-p)}Z_{\rm IR}[J]=(-)^{\epsilon_A+1}\left\langle\frac{\partial^l}{\partial\Phi^A(p)}\Phi^B(p)-\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\Phi^A(p)}\Phi^B(p)\right\rangle_{\Phi,K^{-1}J} \tag{3.28}$$

となる。よって、IR 理論の WT operator(3.21) は、

$$\begin{aligned}\langle\Sigma[\Phi;\Lambda]\rangle_{\Phi,K^{-1}J}=N_J\int_p\Bigg\langle&\frac{\partial^r S_{\rm IR}}{\partial\Phi^A(p)}R^A{}_B[\Lambda_0]\left(\Phi^B(p)-[\alpha^{-1}(p)]^{BC}\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\Phi^C(-p)}\right)\\&-(-)^{\epsilon_A}\frac{\partial^r}{\partial\Phi^A(p)}R^A{}_B[\Lambda_0]\left(\Phi^B(p)-[\alpha^{-1}(p)]^{BC}\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\Phi^C(-p)}\right)\Bigg\rangle_{\Phi,K^{-1}J}\end{aligned} \tag{3.29}$$

となり、IR 理論の WT identity は、

$$\Sigma[\Phi;\Lambda]=\int_p\left(\frac{\partial^r S_{\rm IR}}{\partial\Phi^A(p)}\delta\Phi^A(p)-(-)^{\epsilon_A}\frac{\partial^r}{\partial\Phi^A(p)}\delta\Phi^A(p)\right)=0\,, \tag{3.30}$$

$$\delta\Phi^A(p)=R^A{}_B[\Lambda_0]\left(\Phi^B(p)-[\alpha^{-1}(p)]^{BC}\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\Phi^C(-p)}\right), \tag{3.31}$$

となる。この式は、IR 理論が IR 場の変換 (3.31) のもとでの対称性を持っていることを示している。

このように、UV 理論がある対称性を持っていたとしても、ブロックスピン変換がその対称性を破ると、IR 理論は UV 理論が持つ対称性を保持することができず、変形された形で実現されていることが分かる。この変形された対称変換は、IR 作用に依存する形をしているので、対称性に基づいて IR 理論を構成する場合、変換と作用を同時に決めなければならない。つまり、IR 理論として自由理論を考える場合と、相互作用を含めて考える場合では、変換性がことなるので、別々に扱わなくてはならない。一般に、高次項を加えるたびに WT identity を一から解かなければならない。また、相互作用を含めることにより、変換が非線形になり、IR 作用の構成が困難になる。

3.3 カイラル対称性の変形

通常のカイラル対称性を持った UV 作用は以下のように与えられる。

$$S_{\rm UV}[\phi;\Lambda_0]=S_\psi[\psi,\bar\psi,\phi,\phi^\dagger]+S_\phi[\phi,\phi^\dagger] \tag{3.32}$$

ここで、

$$S_\psi[\psi,\bar\psi,\phi,\phi^\dagger]=\int_{p,q}\bar\psi(-p)\Big(K_0^{-1}(p)\not p\,\delta(p-q)+\theta(p-q)\Big)\psi(p)\,, \tag{3.33}$$

$$S_\phi[\phi,\phi^\dagger]=\int_p\phi^\dagger(-p)K_0^{-1}(p)p^2\phi(p)+S_I[\phi,\phi^\dagger]\,, \tag{3.34}$$

となる。$S_I[\phi,\phi^\dagger]$ は、ϕ のみから構成される相互作用を表し、θ は

$$\theta(p-q)=gP_+\phi(p-q)+gP_-\phi^\dagger(p-q)\,, \tag{3.35}$$

$$P_\pm=\frac{1\pm\gamma_5}{2} \tag{3.36}$$

となる。この作用はカイラル変換

$$\begin{aligned}\delta\psi(p)&=i\epsilon\gamma_5\psi(p)\,,\\\delta\bar\psi(-p)&=\bar\psi(-p)i\epsilon\gamma_5\,,\\\delta\phi(p)&=-2i\epsilon\phi(p)\,,\\\delta\phi^\dagger(-p)&=2i\epsilon\phi^\dagger(-p)\end{aligned} \tag{3.37}$$

の元で不変である。ここで、

$$D(p,q)=K_0^{-1}\not p\,\delta(p-q)+\theta(p-q) \tag{3.38}$$

とおくと、この D は以下の関係式を満たす。

$$\{\gamma_5, D(p,q)\} = -(i\epsilon)^{-1}\delta D(p,q)\,. \tag{3.39}$$

このとき、$\phi^A = \{\psi, \bar{\psi}, \phi, \phi^\dagger\}$ に対して、(3.23) で与えられる変換行列 ${R^A}_B$ は以下のようになる。

$$R = \begin{pmatrix} i\epsilon\gamma_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\epsilon\gamma_5^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i\epsilon \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

WT operator は (3.14) より、

$$\Sigma[\phi;\Lambda_0] = 2i\epsilon\mathrm{Tr}\gamma_5 = 0 \tag{3.41}$$

となり、UV 理論は WT identity を満たす。

次に IR 理論について考える。ブロックスピンカーネル α_{AB} を以下のようにとる。

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_D & 0 & 0 \\ \alpha_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_S \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

UV の作用と IR の作用は (3.9) により関係付いているので、α_D を含む項が通常のカイラル変換で不変であれば、つまり α_D が $\{\gamma_5, \alpha_D\} = 0$ を満たすなら、IR の作用も通常のカイラル対称性を持つことになる。しかし、ここでは正則化によって対称性が変形される場合を考えたいので、フェルミオン場に対する α_D を以下のようにカイラル不変ではない形にとる。

$$\alpha_D(p) = \frac{K_0(p)}{K(p)(K_0(p)-K(p))}M \tag{3.43}$$

ここで、M は質量次元 1 を持つ定数である。スカラー場に対する α は

$$\alpha_S(p) = \frac{K_0(p)}{K(p)(K_0(p)-K(p))}p^2 \tag{3.44}$$

とするが、これは対称性には影響しないので、IR の WT identity には影響しない。以下では α_D を α と書く。このとき WT identity は (3.30) より、

$$\begin{aligned} 0 = i\epsilon\int_p \Bigg[&\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi(p)}\left(\gamma_5\Psi(p) - \{\gamma_5, \alpha^{-1}(p)\}\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}(-p)}\right) + \bar{\Psi}(-p)\gamma_5\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}(-p)} \\ &- \frac{\partial^r}{\partial\Psi(p)} i\epsilon\{\gamma_5, \alpha^{-1}(p)\}\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}(-p)} + \frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi(p)}(-2i\epsilon)\left(\varphi(p) - \alpha_S^{-1}(p)\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^\dagger(-p)}\right) \\ &+ \frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^\dagger(-p)} 2i\epsilon\left(\varphi^\dagger(-p) - \alpha_S^{-1}(p)\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi(p)}\right)\Bigg] \\ = \int_p \Bigg[&\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi(p)} i\epsilon\gamma_5\left(\Psi(p) - 2\alpha^{-1}(p)\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}(-p)}\right) + \bar{\Psi}(-p) i\epsilon\gamma_5\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}(-p)} \\ &- \frac{\partial^r}{\partial\Psi(p)} 2i\epsilon\gamma_5\alpha^{-1}(p)\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}(-p)} + \frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi(p)}(-2i\epsilon)\varphi(p) + \frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^\dagger(-p)} 2i\epsilon\varphi^\dagger(-p)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.45}$$

となる。これより、IR での変形されたカイラル変換は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \delta\Psi(p) &= i\epsilon\gamma_5\left(\Psi(p) - 2\alpha^{-1}(p)\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}(-p)}\right), \\ \delta\bar{\Psi}(-p) &= \bar{\Psi}(-p) i\epsilon\gamma_5\,, \\ \delta\varphi(p) &= -2i\epsilon\varphi(p)\,, \\ \delta\varphi^\dagger(-p) &= 2i\epsilon\varphi^\dagger(-p)\,. \end{aligned} \tag{3.46}$$

対称変換の変形はフェルミオン場にのみ現れるが、これはフェルミオン場に対応する α でのみ対称性を破ったことによる。このとき、仮に α が $\not{p}$ に比例する項を含んでいても γ_5 との反交換関係により寄与しない。

3.4 WT identity の解としての IR 理論

IR での WT identity(3.45) を満たす作用 S_{IR} を具体的に求める。始めに、変換 (3.46) のもとで不変な作用を構成する。この変換は、スカラー場については UV 場と同じ変換性を持っているので、スカラー場に対する IR 作用は UV 作用と同じ形とする。フェルミオン場に対する作用は双一次を仮定し解を求める。

3.4.1 相互作用が無い場合

始めに、相互作用が無い場合について考える。作用を

$$S_{\mathrm{IR}}[\Phi;\Lambda]=S_{\Psi}[\Psi,\bar{\Psi}]+S_{\varphi}[\varphi,\varphi^{\dagger}] \tag{3.47}$$

とし、S_{φ} は UV のスカラー場の作用 S_{ϕ} と同じ形をしていると仮定する。フェルミオン場については、双一次を仮定しているので、

$$S_{\Psi}[\Psi,\bar{\Psi}]=\int_p \bar{\Psi}(-p)\mathcal{D}_0(p)\Psi(p) \tag{3.48}$$

となり、このときカイラル変換は、

$$\begin{aligned}
\delta\Psi(p)&=i\epsilon\gamma_5\big[1-2\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}_0(p)\big]\Psi(p)\equiv i\epsilon\hat{\gamma}_5(p)\Psi(p)\,,\\
\delta\bar{\Psi}(-p)&=\bar{\Psi}(-p)i\epsilon\gamma_5\,,\\
\delta\varphi(p)&=-2i\epsilon\varphi(p)\,,\\
\delta\varphi^{\dagger}(-p)&=2i\epsilon\varphi^{\dagger}(-p)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

となる。このとき WT identity は (3.45) より、

$$0=i\epsilon\int_p \bar{\Psi}(-p)\Big[\gamma_5\mathcal{D}_0(p)+\mathcal{D}_0(p)\gamma_5-2\mathcal{D}_0(p)\gamma_5\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}_0\Big]\Psi(p)-2i\epsilon\mathrm{Tr}\Big[\gamma_5\alpha^{-1}\mathcal{D}_0\Big] \tag{3.50}$$

となる。ここで、Tr はスピナーインデックスと運動量に対するトレースを表す。$\bar{\Psi}\Psi$ の係数をゼロと置いた式、

$$\gamma_5\mathcal{D}_0(p)+\mathcal{D}_0(p)\gamma_5=2\mathcal{D}_0(p)\gamma_5\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}_0 \tag{3.51}$$

は、GW relation と呼ばれる。$\mathcal{D}_0$ がこの GW relation を満たすと (3.50) の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Tr}\Big[\gamma_5\alpha^{-1}\mathcal{D}_0\Big]&=\mathrm{Tr}\Big[\mathcal{D}_0^{-1}\gamma_5\mathcal{D}_0\Big]+\mathrm{Tr}\gamma_5\\
&=0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

となり、WT identity が満たされる。さらに、(3.49) で導入した $\hat{\gamma}_5$ は、

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_5(p)^2&=\gamma_5\big(1-2\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}_0(p)\big)\gamma_5\big(1-2\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}_0(p)\big)\\
&=1-2\alpha^{-1}(p)\big(\gamma_5\mathcal{D}_0(p)+\mathcal{D}_0(p)\gamma_5-2\mathcal{D}_0(p)\gamma_5\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}_0(p)\big)\\
&=1
\end{aligned} \tag{3.53}$$

を満たす。GW relation を満たす $\mathcal{D}_0$ としては、例えば IR 作用の定義式を直接積分して得られる

$$\mathcal{D}_0(p)=\frac{K_0^{-1}(p)\not{p}}{K_0^{-1}(p)\not{p}+f^2(p)\alpha(p)}\alpha(p) \tag{3.54}$$

や、格子理論で Neuberger によって得られた解 [10] の連続理論版 [12] である

$$\mathcal{D}_0(p)=\frac{\alpha(p)}{2}\left[1+\frac{i\not{p}-\alpha(p)}{\sqrt{p^2+\alpha^2(p)}}\right] \tag{3.55}$$

などがあるが、以下では、$\mathcal{D}_0$ の具体的な形は特定しないで、GW relation (3.51) を満たすものとして扱う。

3.4.2 相互作用がある場合

次に、相互作用を含めた IR 作用を求める。IR 場 $\Phi = \{\varphi, \varphi^\dagger, \Psi, \bar{\Psi}\}$ に対する作用を以下のように仮定する。

$$S_{\mathrm{IR}}[\Phi;\Lambda] = S_\Psi[\Psi,\bar{\Psi},\varphi,\varphi^\dagger] + S_\varphi[\varphi,\varphi^\dagger]\,. \tag{3.56}$$

ここで、

$$S_\Psi[\Psi,\bar{\Psi},\varphi,\varphi^\dagger] = \int_{p,q} \bar{\Psi}(-p)\mathcal{D}(p,q)\Psi(q)\,, \tag{3.57}$$

$$S_\varphi[\varphi,\varphi^\dagger] = \int_p \varphi^\dagger(-p)K^{-1}p^2\varphi(p) + S_I[\varphi,\varphi^\dagger] + S_{\mathrm{counter}}[\varphi,\varphi^\dagger] \tag{3.58}$$

と仮定し、$\mathcal{D}$ は φ に依存する IR の Dirac operator を表し、S_I は φ のみに依存する相互作用を表す。相互作用 $S_I[\varphi,\varphi^\dagger]$ は、UV 作用の相互作用 $S_I[\phi,\phi^\dagger]$ と同じ形をしていると仮定する。S_{counter} は (3.45) 左辺第 3 項を相殺するために導入した項である。このとき変形されたカイラル変換は

$$\begin{aligned} \delta\Psi(p) &= i\epsilon\gamma_5\int_q \left[\delta(p-q) - 2\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}(p,q)\right]\Psi(q)\,,\\ \delta\bar{\Psi}(-p) &= \bar{\Psi}(-p)i\epsilon\gamma_5\,,\\ \delta\varphi(p) &= -2i\epsilon\varphi(p)\,,\\ \delta\varphi^\dagger(-p) &= 2i\epsilon\varphi^\dagger(-p) \end{aligned} \tag{3.59}$$

となる。この作用を (3.45) に代入すると、

$$\begin{aligned} 0 = i\epsilon\int_{p,q}\bar{\Psi}(-p)&\left[\gamma_5\mathcal{D}(p,q) + \mathcal{D}(p,q)\gamma_5 - 2\int_k \mathcal{D}(p,k)\gamma_5\alpha^{-1}(k)\mathcal{D}(k,q) + (i\epsilon)^{-1}\delta\mathcal{D}(p,q)\right]\Psi(q)\\ &- 2i\epsilon\mathrm{Tr}\left[\gamma_5\alpha^{-1}\mathcal{D}\right] + \delta S_{\mathrm{counter}}[\varphi,\varphi^\dagger] \end{aligned} \tag{3.60}$$

となる。ここで、δ はスカラー場によるカイラル変換を表す。$\bar{\Psi}\Psi$ の係数をゼロと置いた式

$$\gamma_5\mathcal{D}(p,q) + \mathcal{D}(p,q)\gamma_5 = 2\int_k \mathcal{D}(p,k)\gamma_5\alpha^{-1}(k)\mathcal{D}(k,q) - (i\epsilon)^{-1}\delta\mathcal{D}(p,q) \tag{3.61}$$

は、相互作用を含めた一般的な GW relation を表す。$\mathcal{D}$ がこの GW relation を満たすとき (3.60) の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Tr}\left[\gamma_5\alpha^{-1}\mathcal{D}\right] &= \mathrm{Tr}\left[\mathcal{D}^{-1}\gamma_5\mathcal{D}\right] + \mathrm{Tr}\gamma_5 + (i\epsilon)^{-1}\mathrm{Tr}\left[\mathcal{D}^{-1}\delta\mathcal{D}\right]\\ &= (i\epsilon)^{-1}\delta\mathrm{Tr}\log\mathcal{D} \end{aligned} \tag{3.62}$$

となり、例えば、

$$S_{\mathrm{counter}}[\varphi,\varphi^\dagger] = \mathrm{Tr}\log\mathcal{D} \tag{3.63}$$

とすることにより WT identity(3.60) が満たされる。但し、S_{counter} の選び方にはカイラル不変な項の任意性があるので、必ずしもこの形でなくてもよい。

次に、(3.61) を満たす Dirac operator $\mathcal{D}$ を求める。始めに $\mathcal{D}$ を自由部分と相互作用部分に分ける。

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + L[\mathcal{D}_0(p)]\Theta(p,q)R[\mathcal{D}_0(q)]\,. \tag{3.64}$$

ここで L と R は、GW relation (3.51) の解 $\mathcal{D}_0$ の関数であり、Θ は、

$$\vartheta(p-q) = gP_+\varphi(p-q) + gP_-\varphi^\dagger(p-q) \tag{3.65}$$

の関数である。このとき ϑ の変換性は

$$\delta\vartheta(p-q) = -2i\epsilon\gamma_5\vartheta(p-q) \tag{3.66}$$

となる。この Dirac operator を一般化された GW relation (3.61) に代入すると、

$$\begin{aligned}\delta\Theta(p,q) = -i\epsilon\Bigg[&L^{-1}(p)\Big(\{\gamma_5\,,\,L(p)\} - 2\mathcal{D}_0(p)\gamma_5\alpha^{-1}(p)L(p)\Big)\Theta(p,q)\\&+\Theta(p,q)\Big(\{\gamma_5\,,\,R(q)\} - 2R(q)\gamma_5\alpha^{-1}(q)\mathcal{D}_0(q)\Big)R^{-1}(q)\\&-\{\gamma_5\,,\,\Theta(p,q)\} - 2\int_k \Theta(p,k)R(k)\gamma_5\alpha^{-1}(k)L(k)\Theta(k,q)\Bigg]\end{aligned}\tag{3.67}$$

となる。L と R に対する選択を

$$L(p) = R(p) = 1 - \alpha^{-1}(p)\mathcal{D}_0(p) \equiv \eta(p)\tag{3.68}$$

とすると、GW relation (3.51) より (3.67) の左辺第 1 項は

$$\eta^{-1}(p)\Big(\{\gamma_5,\eta(p)\} - 2\mathcal{D}_0(p)\gamma_5\alpha^{-1}(p)\eta(p)\Big) = 2\gamma_5\tag{3.69}$$

となり、第 2 項も同様に計算できる。さらに最後の項は

$$2\eta(p)\gamma_5\alpha^{-1}(p)\eta(p) = \alpha^{-1}(p)\{\gamma_5,\eta(p)\}\tag{3.70}$$

となるので、その結果 (3.67) は、

$$\delta\Theta(p,q) = -i\epsilon\Big(\{\gamma_5,\Theta(p,q)\} - \int_k \Theta(p,k)\alpha^{-1}(k)\{\gamma_5,\eta(k)\}\Theta(k,q)\Big)\tag{3.71}$$

となる。次に (3.71) を満たす Θ を求める。解として以下の形を仮定する。

$$\Theta(p,q) = A(p)\int_k \vartheta(p-k)\frac{1}{1+B\vartheta}(k,q)C(q)\tag{3.72}$$

$$= A(p)\int_k \frac{1}{1+\vartheta B}(p,k)\vartheta(k-q)C(q)\,.\tag{3.73}$$

ここで、A、B、C はカイラル変換の元で不変な定数であり、$(1+B\vartheta)^{-1}$ は展開によって定義される。

$$\frac{1}{1+B\vartheta}(p,q) \equiv 1 - B(p)\vartheta(p,q) + \int_k B(p)\vartheta(p,k)B(k)\vartheta(k,q) + \cdots\,.\tag{3.74}$$

(3.72) で両辺のカイラル変換 δ をとると (3.66) より、

$$\begin{aligned}\delta\Theta(p,q) &= A(p)\int_k\left[\delta\vartheta(p-k)\frac{1}{1+B\vartheta}(k,q) - \vartheta(p-k)\frac{1}{1+B\vartheta}(p,k)B\delta\vartheta(k,l)\frac{1}{1+B\vartheta}(l,q)\right]C(q)\\&= -2i\epsilon\left[A(p)\gamma_5A^{-1}(p)\Theta(p,q) - \int_k\Theta(p,k)C^{-1}(k)B(k)\gamma_5A^{-1}(k)\Theta(k,q)\right].\end{aligned}\tag{3.75}$$

同様に、(3.73) に対して

$$\delta\Theta(p,q) = -2i\epsilon\left[\Theta(p,q)C^{-1}(q)\gamma_5C(q) - \int_k\Theta(p,k)C^{-1}(k)\gamma_5B(k)A^{-1}(k)\Theta(k,q)\right]\tag{3.76}$$

となる。ここで、((3.75)+(3.76))/2 を計算すると、

$$\begin{aligned}\delta\Theta(p,q) = -i\epsilon\Bigg[&A(p)\gamma_5A^{-1}(p)\Theta(p,q) + \Theta(p,q)C^{-1}(q)\gamma_5C(q)\\&-\int_k\Theta(p,k)C^{-1}(k)\{\gamma_5,B(k)\}A^{-1}(k)\Theta(k,q)\Bigg]\end{aligned}\tag{3.77}$$

となり、これが (3.71) と一致するためには、次の条件を満たせばよい。

$$\{\gamma_5,\Theta(p,q)\} = A(p)\gamma_5A^{-1}(p)\Theta(p,q) + \Theta(p,q)C^{-1}(q)\gamma_5C(q)\,,\tag{3.78}$$

$$C^{-1}(k)\{\gamma_5,B(k)\}A^{-1}(k) = \alpha^{-1}(k)\{\gamma_5,\eta(k)\}\,.\tag{3.79}$$

(3.79) より A は、

$$A(k) = \alpha(k)\big\{\gamma_5, \eta(k)\big\}^{-1} C^{-1}(k)\big\{\gamma_5, B(k)\big\} \tag{3.80}$$

となるが、公式 $\{\gamma_5, \eta\} = 2\eta\gamma_5\eta$ を使うと、

$$A(k) = \frac{\alpha(k)}{2}\eta^{-1}(k)\gamma_5\eta^{-1}(k)C^{-1}(k)\big\{\gamma_5, B(k)\big\} \tag{3.81}$$

となる。一方、もう一つの条件 (3.78) は、

$$-\big[\gamma_5, A(p)\big]A^{-1}(p)\Theta(p,q) + \Theta(p,q)C^{-1}(q)\big[\gamma_5, C(q)\big] = 0 \tag{3.82}$$

と整理できるので、γ_5 と A の交換関係を計算すると、

$$\begin{aligned}
\big[\gamma_5, A(p)\big] &= \frac{\alpha(p)}{2}\Big[\gamma_5, \eta^{-1}(p)\gamma_5\eta^{-1}(p)C^{-1}(p)\big\{\gamma_5, B(p)\big\}\Big] \\
&= \frac{\alpha(p)}{2}\Big(\big[\gamma_5, \eta^{-1}(p)\gamma_5\eta^{-1}(p)\big]C^{-1}(p)\big\{\gamma_5, B(p)\big\} + \eta^{-1}(p)\gamma_5\eta^{-1}(p)\big[\gamma_5, C^{-1}(p)\big]\big\{\gamma_5, B(p)\big\} \\
&\qquad + \eta^{-1}(p)\gamma_5\eta^{-1}(p)C^{-1}(p)\big[\gamma_5, \{\gamma_5, B(p)\}\big]\Big)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

となるが、第 1 項は公式 $\hat{\gamma}_5(p)\eta^{-1}(p) = \eta(p)\gamma_5$ を使うと、

$$\begin{aligned}
\big[\gamma_5, \eta^{-1}(p)\gamma_5\eta^{-1}(p)\big] &= \gamma_5\eta^{-1}(p)\gamma_5\eta^{-1}(p) - \eta^{-1}(p)\gamma_5\eta^{-1}(p)\gamma_5 \\
&= \big(1 - 2\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}_0(p)\big)\eta^{-1}(p)\eta^{-1}(p) - \eta^{-1}(p)\big(1 - \alpha^{-1}(p)\mathcal{D}_0(p)\big)\eta^{-1}(p) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.84}$$

となる。最後の行は η が $\mathcal{D}_0$ から構成されており、その結果 $\mathcal{D}_0$ と交換することから導かれる。さらに第 3 項は、

$$\begin{aligned}
\big[\gamma_5, \{\gamma_5, B(p)\}\big] &= \gamma_5(\gamma_5 B(p) + B(p)\gamma_5) - (\gamma_5 B(p) + B(p)\gamma_5)\gamma_5 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.85}$$

となる。よって (3.78) は、

$$-\frac{\alpha(p)}{2}\eta^{-1}(p)\gamma_5\eta^{-1}(p)\big[\gamma_5, C^{-1}(p)\big]\big\{\gamma_5, B(p)\big\}A^{-1}(p)\Theta(p,q) + \Theta(p,q)C^{-1}(q)\big[\gamma_5, C(q)\big] = 0 \tag{3.86}$$

となるが、これは C が γ_5 と交換すれば B に対する制限を加えずに満たされる。よって、(3.71) を満たす Θ は、

$$\big[\gamma_5, C(p)\big] = 0 \tag{3.87}$$

を満たす C と、任意の B を用いて、

$$\Theta(p,q) = \frac{\alpha(p)}{2}\eta^{-1}(p)\gamma_5\eta^{-1}(p)C^{-1}(p)\big\{\gamma_5, B(p)\big\}\int_k \vartheta(p-k)\frac{1}{1+B\vartheta}(k,q)C(q) \tag{3.88}$$

と表される。これにより、相互作用を含む一般化された GW relation を満たす Dirac operator は

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + \frac{\alpha(p)}{2}\gamma_5\eta^{-1}(p)C^{-1}(p)\big\{\gamma_5, B(p)\big\}\int_k \vartheta(p-k)\frac{1}{1+B\vartheta}(k,q)C(q)\eta(q) \tag{3.89}$$

となる。

最後に S_{counter} について考える。以前に (3.63) で与えたが、この作用はカイラル不変な項の任意性がある。そこで、具体的に得られた解で書き換えることを考える。始めに、Dirac operator $\mathcal{D}$ そのものに対するものを考える。それは以下のように与えられる。

$$S_{\text{counter}} = \mathrm{Tr}\log\Big[1 - \alpha^{-1}\mathcal{D}\Big] \tag{3.90}$$

これは、カイラル変換により

$$\delta S_{\mathrm{counter}} = \mathrm{Tr}\Big[-\frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}\alpha^{-1}\delta\mathcal{D}\Big] \tag{3.91}$$

となるが、GW relation (3.61) より、

$$\delta S_{\mathrm{counter}} = i\epsilon\mathrm{Tr}\Big[2\gamma_5\alpha^{-1}\mathcal{D} - \frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}\big[\gamma_5, \alpha^{-1}\mathcal{D}\big]\Big] \tag{3.92}$$

となる。ここで、第 2 項はトレースの巡回性から消え、その結果 (3.60) の右辺第 2 項を相殺する項となる。次に、Dirac operator を以下のように書き換える。

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + \gamma_5\eta^{-1}(p)\gamma_5\Theta'(p,q)\eta(q)\,. \tag{3.93}$$

ここで、Θ' は

$$\Theta'(p,q) = \frac{\alpha(p)}{2}C^{-1}(p)\{\gamma_5, B(p)\}\int_k \vartheta(p-k)\frac{1}{1+B\vartheta}(k,q)C(q) \tag{3.94}$$

であり、カイラル変換は

$$\delta\Theta'(p,q) = -i\epsilon\Big(\{\gamma_5, \Theta'(p,q)\} - 2\int_k \Theta'(p,k)\gamma_5\alpha^{-1}(k)\Theta'(k,q)\Big) \tag{3.95}$$

となる。このとき (3.60) の右辺第 2 項は、

$$-2i\epsilon\mathrm{Tr}\Big[\gamma_5\alpha^{-1}\mathcal{D}\Big] = -2i\epsilon\mathrm{Tr}\Big[\gamma_5\alpha^{-1}\Theta'\Big] \tag{3.96}$$

となり、これを相殺する作用は

$$S_{\mathrm{counter}} = \mathrm{Tr}\log\Big[1-\alpha^{-1}\Theta'\Big] \tag{3.97}$$

となる。実際、カイラル変換をすると

$$\delta S_{\mathrm{counter}} = \mathrm{Tr}\Big[-\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\alpha^{-1}\delta\Theta'\Big] \tag{3.98}$$

となるが、(3.95) より、

$$\delta S_{\mathrm{counter}} = i\epsilon\mathrm{Tr}\Big[2\gamma_5\alpha^{-1}\Theta' - \frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\big[\gamma_5, \alpha^{-1}\Theta'\big]\Big] \tag{3.99}$$

となり、第 2 項はトレースの巡回性から消える。よって、(3.97) は (3.96) を相殺する作用となる。さらに Θ' の具体的な形を使うことによって S_{counter} は、

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{counter}} &= \mathrm{Tr}\log\Big[1-\alpha^{-1}\Theta'\Big] \\
&= \mathrm{Tr}\log\Big(1 - C^{-1}\frac{\gamma_5}{2}\{\gamma_5\,,\,B\}\vartheta\frac{1}{1+B\vartheta}C\Big) \\
&= \mathrm{Tr}\log\Big(1 - B\vartheta\frac{1}{1+B\vartheta} + \frac{\gamma_5}{2}[\gamma_5\,,\,B]\vartheta\frac{1}{1+B\vartheta}\Big) \\
&= \mathrm{Tr}\log\Big[\Big(1+\frac{\gamma_5}{2}[\gamma_5, B]\vartheta\Big)\frac{1}{1+B\vartheta}\Big]
\end{aligned} \tag{3.100}$$

となるが、

$$\begin{aligned}
\delta\mathrm{Tr}\log\Big(1+\frac{\gamma_5}{2}\big[\gamma_5, B\big]\vartheta\Big) &= \mathrm{Tr}\Big[\frac{1}{1+\frac{\gamma_5}{2}\big[\gamma_5, B\big]\vartheta}\frac{\gamma_5}{2}\big[\gamma_5, B\big]\delta\vartheta\Big] \\
&= -i\epsilon\mathrm{Tr}\Big[\frac{1}{1+\frac{\gamma_5}{2}\big[\gamma_5, B\big]\vartheta}\frac{\gamma_5}{2}\big[\gamma_5, B\big](\gamma_5\vartheta + \vartheta\gamma_5)\Big] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.101}$$

より、カイラル変換で不変な項を落とすと、

$$S_{\mathrm{counter}} = -\mathrm{Tr}\log\left(B^{-1} + \vartheta\right) \tag{3.102}$$

と表すことができる。この相殺項は、次章で見るように、UV 理論を直接積分して得られる IR 作用に含まれる項と関係づいている。

3.5 積分から得られる IR 理論

仮定した UV 理論はフェルミオン場について双一次なので、IR 作用の定義式 (3.9) において直接積分を実行することができる。以下、積分によって得られる IR 作用を求める。スカラー場については積分をしないで UV 場と IR 場を同一視する。これは、摂動的に考えると、スカラー場が内線として現れるファンマン図を無視する近似をしたことに相当すると考えられる。

UV 理論のフェルミオンに対する作用は

$$S_\psi = \int_{p,q} \bar{\psi}(-p) D(p,q) \psi(q)\,, \tag{3.103}$$

$$D(p,q) = K_0^{-1}(p) \not{p}\, \delta(p-q) + \vartheta(p-q) \tag{3.104}$$

となるので、IR 作用の定義は

$$\begin{aligned}
e^{-S_\Psi[\Psi,\bar{\Psi}]} &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[-\int_{p,q} \Big(\bar{\Psi}(-p) - f(p)\bar{\psi}(-p)\Big)\alpha(p)\delta(p-q)\Big(\Psi(q) - f(q)\psi(q)\Big) \right. \\
&\qquad \left. - \int_{p,q} \bar{\psi}(-p) D(p,q)\psi(q) \right] \qquad (3.105) \\
&= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[-\int \Big(\bar{\psi} - \bar{\Psi} f\alpha (D + f^2\alpha)^{-1}\Big)(D + f^2\alpha)\Big(\psi - (D+f^2\alpha)^{-1} f\alpha\Psi\Big) \right. \\
&\qquad \left. - \int_{p,q} \bar{\Psi}(-p)\Big(\alpha(p)\delta(p-q) - f(p)\alpha(p)(D+f^2\alpha)^{-1}(p,q) f(q)\alpha(q)\Big)\Psi(q) \right] \qquad (3.106)
\end{aligned}$$

となり、フェルミオン積分を実行することにより以下のように IR 作用が得られる。

$$S_\Psi[\Psi,\bar{\Psi}] = \int_{p,q} \bar{\Psi}(-p)\mathcal{D}(p,q)\Psi(q) - \log\mathrm{Det}(D + f^2\alpha)\,, \tag{3.107}$$

$$\mathcal{D}(p,q) = \alpha(p)\delta(p-q) - f(p)\alpha(p)(D + f^2\alpha)^{-1}(p,q) f(q)\alpha(q)\,. \tag{3.108}$$

ここで、$(D + f\alpha)^{-1}$ は、

$$(D + f^2\alpha)(p,q) = \Big(K_0^{-1}\not{p} + f(p)^2\alpha(p)\Big)\delta(p-q) + \vartheta(p-q) \tag{3.109}$$

$$\equiv \Delta^{-1}(p)\delta(p-q) + \vartheta(p-q) \tag{3.110}$$

と定義することにより、

$$(D + f^2\alpha)^{-1}(p,q) = \left[\delta(p-q) - \Delta(p)\vartheta(p-q) + \int_{p_1} \Delta(p)\vartheta(p-p_1)\Delta(p_1)\vartheta(p_1-q) + \cdots\right]\Delta(q) \tag{3.111}$$

$$\equiv \Delta(p)\delta(p-q) - \Delta(p)\left[\vartheta\frac{1}{1+\Delta\vartheta}\right](p,q)\Delta(q)\,, \tag{3.112}$$

となる。よって、UV 作用を直接積分して得られる IR 作用の Dirac operator は、

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + f(p)\alpha(p)\Delta(p)\left[\vartheta\frac{1}{1+\Delta\vartheta}\right](p,q)\Delta(q) f(q)\alpha(q) \tag{3.113}$$

となる。自由場の Dirac operator $\mathcal{D}_0$ は

$$\mathcal{D}_0(p) = \alpha(p) - f(p)\alpha(p)\Delta(p) f(p)\alpha(p) \tag{3.114}$$

と表される。このとき

$$\begin{aligned}\Delta &= f^{-2}\alpha^{-1}(\alpha - \mathcal{D}_0)\alpha^{-1}(p) \\ &= f^{-2}\eta\alpha^{-1}\end{aligned} \tag{3.115}$$

と表される。

次に、$\log \mathrm{Det}$ の項を見てみると、

$$-\log \mathrm{Det}(D + f^2\alpha) = -\mathrm{Tr}\log\left(\Delta^{-1} + \vartheta\right) \tag{3.116}$$

となるが、これは (3.102) で任意定数 B を Δ に置き換えたものに対応する。

3.6 解の特徴について

前の章では、正則化によって変形された対称性を記述する WT identity を解くことによって IR での作用を求めたが、この作用は任意パラメーター B と、γ_5 と交換するという条件を課せられたパラメーター C によって表されていた。ここで、B や C を具体的に指定したときにどのような解が得られるかを調べる。さらに、積分して得られた Dirac operator も B と C の選択によって得られることを見る。

始めに

$$B(p) = \alpha^{-1}(p)\,, \quad C(p) = 1 \tag{3.117}$$

となる場合を考える。このとき Dirac operator は、

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + \gamma_5\eta^{-1}(p)\gamma_5\int_k \vartheta(p-k)\frac{1}{1+\alpha^{-1}\vartheta}(k,q)\eta(q) \tag{3.118}$$

となる。さらに、

$$B(p) = \alpha^{-1}(p)\,, \quad C(p) = \gamma_5\eta^{-1}(p)\gamma_5\eta^{-1}(p) \tag{3.119}$$

とすると、Dirac operator は、

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + \eta(p)\int_k \vartheta(p-k)\frac{1}{1+\alpha^{-1}\vartheta}(k,q)\gamma_5\eta^{-1}(q)\gamma_5 \tag{3.120}$$

となる。これらの解は [7] で与えられた格子上での解の連続理論版となる。

次に、

$$B(p) = f^{-2}(p)\alpha^{-1}(p)\eta(p)\,, \quad C(p) = f^{-1} \tag{3.121}$$

とるすと、

$$\begin{aligned}\{\gamma_5, B\} &= f^{-2}\alpha^{-1}\{\gamma_5, \eta\} \\ &= 2f^{-2}\alpha^{-1}\eta\gamma_5\eta\end{aligned} \tag{3.122}$$

となるので、Dirac operator は

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + f^{-1}(p)\eta(p)\int_k \vartheta(p-k)\frac{1}{1+f^{-2}\alpha^{-1}\eta\vartheta}(k,q)f^{-1}(q)\eta(q) \tag{3.123}$$

となるが、これは積分して得られる Dirac operator (3.113) と同じである。

最後に、IR 作用の定義式を積分する際に、α に $\not{p}$ に比例する項を加えた場合を考える。積分を実行する時に、α に対して条件を課す必要がないので、$\not{p}$ を加えて考えることができる。一方、WT identity (3.45) に含まれる α は γ_5 との反交換関係により $\not{p}$ に比例する項を含むことができない。よって、WT identity の解として構成した (3.89) に含まれる α は $\not{p}$ に比例する項を含まない。その結果、WT identity の解 (3.89) は、α に $\not{p}$ に比例する項を加えて積

分して得られた Dirac operator を再現できないように見える。しかし、これは $\not{p}$ に比例する項を含む α を α_p とするとき、$\eta_p(p) = 1 - \alpha_p^{-1}(p)\mathcal{D}_0(p)$ とし、

$$B(p) = f^{-2}(p)\eta_p(p)\alpha_p^{-1}(p)\,, \quad C(p) = f^{-1}(p)\eta_p(p)\eta^{-1}(p) \tag{3.124}$$

とすることにより再現できる。新たに導入した $\eta_p(p)$ は GW relation より

$$\gamma_5\eta_p(p) = \eta_p(p)\hat{\gamma}_5 \tag{3.125}$$

を満たすので $\hat{\gamma}_5(p)\eta^{-1}(p) = \eta^{-1}(p)\gamma_5$ と合わせることにより $[\gamma_5, C(p)] = 0$ を満たす。このとき WT identity の解として得られた (3.89) は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(p,q) &= \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q)\\ &\quad + \gamma_5\eta_p^{-1}(p)\frac{f^{-1}(p)}{2\alpha^{-1}}(p)\{\gamma_5, \eta_p(p)\alpha_p^{-1}(p)\}\left[\vartheta\frac{1}{1+f^{-2}\eta_p\alpha_p^{-1}(p)\vartheta}\right](p,q)f^{-1}(q)\eta_p(q)\end{aligned} \tag{3.126}$$

となるが、ここで

$$\begin{aligned}\{\gamma_5, \eta_p(p)\alpha_p^{-1}(p)\} &= \{\gamma_5, \eta_p(p)\}\alpha_p^{-1}(p) - \eta_p(p)[\gamma_5, \alpha_p^{-1}(p)]\\ &= 2\eta_p(p)\gamma_5\alpha^{-1}(p)\eta_p(p)\end{aligned} \tag{3.127}$$

より、

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + f^{-1}(p)\eta_p(p)\left[\vartheta\frac{1}{1+f^{-2}\eta_p\alpha_p^{-1}(p)\vartheta}\right](p,q)f^{-1}(q)\eta_p(q) \tag{3.128}$$

となる。これは、積分で得られた Dirac operator (3.113) に対して、$\alpha \to \alpha_p$、$\eta \to \eta_p$ として得られる Dirac operator と同じ形をしている。但し、$\alpha_p^{-1}(p)$ と $\mathcal{D}_0(p)$ はともに $\not{p}$ のみに依存し、γ_5 に依存しないので、$[\alpha_p^{-1}, \eta_p(p)] = 0$ とした。

このように、フェルミオンに対して双一次の仮定のもとで、WT identity の解として得られた Dirac operator は、以前から格子理論で知られていた解を再現するだけではなく、直接積分して得られる解をも含む (スカラー場は積分しない)、より一般的な解になっていることが分かる。

3.7 $\hat{\gamma}_5$ による表現への変数変換

WT identity によって与えられる IR 理論の変形されたカイラル変換は、湯川相互作用を考える場合、非線形な形をしていた。この節では、変形されたカイラル変換を、変数変換を行うことによって線形にすることを考える。

以下の変数変換により新しい変数 Ψ' を導入する。

$$\Psi(p) = \int_q L(p,q)\Psi'(q)\,. \tag{3.129}$$

このとき Ψ' のカイラル変換は

$$\begin{aligned}\delta\Psi'(p) &= \int_q \delta\Big[L^{-1}(p,q)\Psi(q)\Big]\\ &= \int_q \Big[(\delta L^{-1})L + i\epsilon L^{-1}\gamma_5(1-2\alpha^{-1}\mathcal{D})L\Big](p,q)\Psi'(q)\end{aligned} \tag{3.130}$$

となる。ここで、Dirac operator として (3.89) を使い、L を以下のように定義する。

$$\delta L(p,q) = i\epsilon\bigg(\hat{\gamma}_5(p)L(p,q) - L(p,q)\hat{\gamma}_5(q) - 2\int_k \alpha^{-1}(p)\eta^{-1}(p)\gamma_5\Theta'(p,k)\eta(k)L(k,q)\bigg)\,. \tag{3.131}$$

これによって、Ψ' のカイラル変換は

$$\delta\Psi'(p) = i\epsilon\hat{\gamma}_5(p)\Psi'(p) \tag{3.132}$$

となる。この (3.131) を満たす L は以下のように与えられる。

$$L(p,q) = \eta^{-1}(p)\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}(p,q)\eta(q)\,. \tag{3.133}$$

これは、両辺のカイラル変換をとることにより確かめることができる。始めに (3.95) より、

$$\alpha^{-1}(p)\delta\Theta'(p,q) = i\epsilon\big[\gamma_5, \Theta'(p,q)\big] - 2i\epsilon\int_k \Big[1-\alpha^{-1}\Theta'\Big](p,k)\gamma_5\alpha^{-1}(k)\Theta'(k,q) \tag{3.134}$$

となるので、(3.133) のカイラル変換は

$$\begin{aligned}\delta L(p,q) &= \eta^{-1}(p)\left[\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\alpha^{-1}\delta\Theta'\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\right](p,q)\eta(q)\\ &= i\epsilon\eta^{-1}(p)\left[\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\big[\gamma_5,\alpha^{-1}\Theta'\big]\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\right](p,q)\\ &\qquad - 2i\epsilon\int_{k,l}\gamma_5\alpha^{-1}(k)\Theta'(k,l)\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}(l,q)\eta(q)\end{aligned} \tag{3.135}$$

となるが、

$$\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\big[\gamma_5,\alpha^{-1}\Theta'\big]\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'} = \left[\gamma_5, \frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\right] \tag{3.136}$$

となるので、その結果

$$\delta L(p,q) = i\epsilon\eta^{-1}(p)\left[\gamma_5, \frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}(p,q)\right]\eta(p) - 2i\epsilon\int_{k,l}\gamma_5\alpha^{-1}(k)\Theta'(k,l)\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}(l,q)\eta(q) \tag{3.137}$$

となる。さらに公式 $\gamma_5\eta = \eta\hat{\gamma}_5$ と $\eta^{-1}\gamma_5 = \hat{\gamma}_5\eta^{-1}$ を使うと、

$$\delta L(p,q) = i\epsilon\bigg(\hat{\gamma}_5(p)L(p,q) - L(p,q)\hat{\gamma}_5(q) - 2\int_k \alpha^{-1}(p)\eta^{-1}(p)\gamma_5\Theta'(p,k)\eta(k)L(k,q)\bigg) \tag{3.138}$$

となり定義を満たす。よって、(3.133) は (3.131) の解になる。この変換により IR 作用は

$$S_\Psi = \int_{p,q}\bar{\Psi}(-p)\mathcal{D}'(p,q)\Psi(q) \tag{3.139}$$

となり、新しい Dirac operator $\mathcal{D}'$ は、

$$\mathcal{D}'(p,q) \equiv \int_k \mathcal{D}(p,k)L(k,q) \tag{3.140}$$

と定義される。具体的に求めると、

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'(p,q) &= \int_k\Big(\mathcal{D}_0(p)\delta(p-k) + \gamma_5\eta^{-1}(p)\gamma_5\Theta'(p,k)\eta(k)\Big)\eta^{-1}(k)\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}(k,q)\eta(q)\\ &= \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + \Big[\eta^{-1}\alpha^{-1}\mathcal{D}_0 + \gamma_5\eta^{-1}\gamma_5\Big](p)\int_k\Theta'(p,k)\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}(k,q)\eta(q)\end{aligned} \tag{3.141}$$

となるが、

$$\begin{aligned}\eta^{-1}\alpha^{-1}\mathcal{D}_0 + \gamma_5\eta^{-1}\gamma_5 &= \alpha^{-1}\mathcal{D}_0\eta^{-1} + \big(1-2\alpha^{-1}\mathcal{D}_0\big)\eta^{-1}\\ &= \big(1-\alpha^{-1}\mathcal{D}_0\big)\eta^{-1}\\ &= 1\end{aligned} \tag{3.142}$$

より、

$$\mathcal{D}'(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + \left[\Theta'\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\right](p,q)\eta(q) \tag{3.143}$$

となる。さらに Θ' の定義 (3.94) を使うと、

$$
\begin{aligned}
1-\alpha^{-1}(p)\Theta'(p,q) &= 1-\frac{1}{2}C^{-1}(p)\gamma_5\{\gamma_5,B(p)\}\int_k \vartheta(p-k)\frac{1}{1+B\vartheta}(k,q)C(q) \\
&= C^{-1}(p)\int_k\left[1+\frac{\gamma_5}{2}[\gamma_5,B]\vartheta\right](p,k)\frac{1}{1+B\vartheta}(k,q)C(q)
\end{aligned} \tag{3.144}
$$

より、

$$
\left[\Theta'\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\right](p,q) = \gamma_5\frac{\alpha(p)}{2}C^{-1}\{\gamma_5,B(p)\}\int_k \vartheta(p-k)\frac{1}{1+\frac{\gamma_5}{2}[\gamma_5,B]\vartheta}(k,q)C(q) \tag{3.145}
$$

となる。ここで、

$$
\Theta''(p,q) = \left[\Theta'\frac{1}{1-\alpha^{-1}\Theta'}\right](p,q)\eta(q) \tag{3.146}
$$

と定義すると、Θ'' は

$$
\delta\Theta''(p,q) = -i\epsilon\Big(\gamma_5\Theta''(p,q)+\Theta''(p,q)\hat{\gamma}_5(q)\Big) \tag{3.147}
$$

と、線形な変換性を持っている。

変数変換 (3.129) をすることにより、以下のようなヤコビアンが導かれる。

$$
\mathcal{D}\Psi = \mathcal{D}\Psi' e^J\,, \tag{3.148}
$$

$$
J = \mathrm{Tr}\log\left[1-\alpha^{-1}\Theta'\right]. \tag{3.149}
$$

このヤコビアンは、相殺項 (3.97) と相殺する。その結果得られる IR 作用は

$$
S_{\mathrm{IR}} = \int_{p,q}\bar{\Psi}(-p)\mathcal{D}'(p,q)\Psi'(q) + \int_p \varphi^\dagger(-p)K^{-1}(p)p^2\varphi(p) + S_I[\varphi,\varphi^\dagger] \tag{3.150}
$$

となる。カイラル変換は以下のようになる。

$$
\delta\Psi'(p) = i\epsilon\hat{\gamma}_5(p)\Psi'(p)\,, \tag{3.151}
$$

$$
\delta\hat{\Psi}(-p) = \bar{\Psi}(-p)i\epsilon\gamma_5\,, \tag{3.152}
$$

$$
\delta\varphi(p) = -2i\epsilon\varphi(p)\,, \tag{3.153}
$$

$$
\delta\varphi^\dagger(-p) = 2i\epsilon\varphi^\dagger(-p)\,. \tag{3.154}
$$

ここで得られた Θ'' は、$B=\alpha^{-1}$、$C=1$ のときに、

$$
\begin{aligned}
\Theta''(p,q) &= \vartheta(p-q)\eta(q) \\
&= P_+\varphi(p-q)\hat{P}_+(q) + P_-\varphi^\dagger(p-q)\hat{P}_-(q)
\end{aligned} \tag{3.155}
$$

となる。ここで、

$$
\hat{P}_\pm(p) = \frac{1\pm\hat{\gamma}_5(p)}{2} \tag{3.156}
$$

である。これは [7] で得られた相互作用の連続理論版になる。

3.8 γ_5 による表現への変数変換

前節の変数変換で、新しい変数 Ψ' が、通常のカイラル変換である

$$
\delta\Psi'(p) = i\epsilon\gamma_5\Psi'(p) \tag{3.157}
$$

となるように L を定義する。このとき L は

$$\delta L(p,q) = i\epsilon\Big(\big[\gamma_5\,,\,L(p,q)\big] - 2\int_k \gamma_5\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}(p,k)L(k,q)\Big) \tag{3.158}$$

という性質を満たす。この方程式の解は

$$L(p,q) = \frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}(p,q) \tag{3.159}$$

となるが、これは以下のようにして確かめることができる。始めに、カイラル変換をとると

$$\delta L(p,q) = \int_{k,l} \frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}(p,k)\alpha^{-1}(k)\delta\mathcal{D}(k,l)\frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}(l,q) \tag{3.160}$$

となるが、GW relation (3.61) から得られる関係式

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{D}(p,q) &= -i\epsilon\Big(\big\{\gamma_5,\mathcal{D}(p,q)\big\} - 2\int_k \mathcal{D}(p,k)\gamma_5\alpha^{-1}(k)\mathcal{D}(k,q)\Big)\\ &= -2i\epsilon\alpha(p)\int_k\Big(\delta(p-k)-\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}(p,k)\Big)\gamma_5\alpha^{-1}(k)\mathcal{D}(k,q) + i\epsilon\big[\gamma_5,\mathcal{D}(p,q)\big]\end{aligned} \tag{3.161}$$

を使うことによって、

$$\begin{aligned}\delta L(p,q) = i\epsilon\int_{k,l} &\frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}(p,k)\big[\gamma_5,\alpha^{-1}(k)\mathcal{D}(k,l)\big]\frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}(l,q)\\ &- 2i\epsilon\int_k \gamma_5\alpha^{-1}(p)\mathcal{D}(p,k)\frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}(k,q)\end{aligned} \tag{3.162}$$

となる。第 1 項目は

$$\int_{k,l}\frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}(p,k)\big[\gamma_5,\alpha^{-1}(k)\mathcal{D}(k,l)\big]\frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}(k,q) = \left[\gamma_5,\frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}(p,q)\right] \tag{3.163}$$

となるので、これは (3.158) に一致する。この L を使って変数変換をすることにより、変形されたカイラル変換が通常のカイラル変換に戻る。

このとき、新しい変数のもとでの Dirac operator は

$$D'(p,q) = \int_k D(p,k)\frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}}(k,q) \tag{3.164}$$

となるが、変数変換前の Dirac operator を形式的に

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + V(p-q) \tag{3.165}$$

と書くとき、

$$\mathcal{D}_0' = \mathcal{D}_0\frac{1}{1-\alpha^{-1}\mathcal{D}_0} \tag{3.166}$$

によって関係付けられた $\mathcal{D}_0'$ を使うことによって、

$$\mathcal{D}'(p,q) = \mathcal{D}_0'(p)\delta(p-q) + \eta^{-1}(p)\left[V\frac{1}{1-\alpha^{-1}\eta^{-1}V}\right](p,q)\eta^{-1}(q) \tag{3.167}$$

と表される。また、$\mathcal{D}_0'$ は $\{\gamma_5,\mathcal{D}_0'\}=0$ を満たす。(3.60) より、新しい Dirac operator の満たす関係式は

$$\delta\mathcal{D}'(p,q) = -i\epsilon\big\{\gamma_5,\mathcal{D}'(p,q)\big\} \tag{3.168}$$

となる。

この変数変換によるヤコビアンの寄与 J を考えると、(3.159) より、

$$J = \mathrm{Tr}\log\left[1-\alpha^{-1}\mathcal{D}\right] \tag{3.169}$$

となるが、これは (3.90) を相殺する。その結果、得られる IR 作用は、

$$S_{\mathrm{IR}} = \int_{p,q} \bar{\Psi}(-p)\mathcal{D}'(p,q)\Psi'(q) + \int_{p} \varphi^{\dagger}(-p)K^{-1}(p)p^2\varphi(p) + S_I[\varphi, \varphi^{\dagger}] \tag{3.170}$$

となり、カイラル変換は

$$\delta\Psi'(p) = i\epsilon\gamma_5(p)\Psi'(p)\,, \tag{3.171}$$

$$\delta\hat{\bar{\Psi}}(-p) = \bar{\Psi}(-p)i\epsilon\gamma_5\,, \tag{3.172}$$

$$\delta\varphi(p) = -2i\epsilon\varphi(p)\,, \tag{3.173}$$

$$\delta\varphi^{\dagger}(-p) = 2i\epsilon\varphi^{\dagger}(-p) \tag{3.174}$$

となる。これは、通常のカイラル変換と、その変換のもとで不変な作用になる。

このように、非線形なカイラル変換のもとで不変な Dirac operator に対して、変数変換によって、通常のカイラル対称性を持った Dirac operator を構成することができた。次は、逆に、通常のカイラル対称性を持った $\mathcal{D}'$ に対して、(3.168) を解き、それを使って変数変換前の Dirac operator を求めることを考える。(3.168) に対する一般解は、γ_5 と反交換する $\mathcal{D}'_0$ を使うことによって、$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'_0 + V'$ とするとき、

$$\begin{aligned} V'(p,q) = c_1(p)\vartheta(p-q)c'_1(q) + \int_k c_2(p)\vartheta(p-k)(ac)_1(k)\vartheta(k-q)c'_2(q) \\ \int_{k,l} c_3(p)\vartheta(p-k)(ac)_2(k)\vartheta(k-l)(ac)_3(l)\vartheta(l-q)c'_3 + \cdots \end{aligned} \tag{3.175}$$

と書くことができる。ここで、c_i と c'_i は γ_5 と交換する量で、$(ac)_1$ は γ_5 と反交換する量を表す。このとき V' は以下の関係を満たす。

$$\delta V'(p,q) = -i\epsilon\{\gamma_5, V(p,q)\}\,. \tag{3.176}$$

この V' を使い、非線形なカイラル変換のもとで不変な Dirac operator を求めると、

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + \eta(p)\left(V'\frac{1}{1+\alpha^{-1}\eta V'}\right)(p,q)\eta(q) \tag{3.177}$$

となるが、この解は (3.89) において、$\vartheta \to V'$ とした式なので、(3.89) には含まれていないように見える。

3.9 より一般的な解の構成について

前節において、ブロックスピン変換により変形された非線形なカイラル変換を、変数変換によって線形、さらには UV 理論と同じ、通常のカイラル変換への変換を考えた。これにより、より一般的な解の構成を考えることができる。

(3.177) を参考に、(3.72) の段階で、$\vartheta \to V$ とする。

$$\Theta(p,q) = A(p)\left(V\frac{1}{1+BV}\right)(p,q)C(q)\,. \tag{3.178}$$

ここで V は (3.175) と同じとする。このとき、Θ と γ_5 の反交換関係をとることにより

$$\{\gamma_5, \Theta\} = [\gamma_5, A]V\frac{1}{1+BV}C + A\left\{\gamma_5, V\frac{1}{1+BV}\right\}C + A\frac{1}{1+BV}[\gamma_5, C] \tag{3.179}$$

となるが、右辺の第 2 項目は

$$\begin{aligned} A\left\{\gamma_5, V\frac{1}{1+BV}\right\}C &= A\{\gamma_5, V\}\frac{1}{1+BV}C + AV\frac{1}{1+BV}[\gamma_5, BV]\frac{1}{1+BV}C \\ &= -(i\epsilon)^{-1}\delta\Theta + \Theta C^{-1}\{\gamma_5, B\}A^{-1}\Theta \end{aligned} \tag{3.180}$$

と変形できる。よって、

$$\delta\Theta(p,q) = -i\epsilon\Big[A(p)\gamma_5 A^{-1}(p)\Theta(p,q) + \Theta(p,q)C^{-1}(q)\gamma_5 C(q) - \int_k \Theta(p,k)C^{-1}(k)\{\gamma_5, B(k)\}A^{-1}(k)\Theta(k,q)\Big] \tag{3.181}$$

となり、(3.77) と同じ形になる。A、B、C に対する条件は以前と同じになり、その結果、(3.89) において $\vartheta \to V$ とした解が得られる。

$$\mathcal{D}(p,q) = \mathcal{D}_0(p)\delta(p-q) + \frac{\alpha(p)}{2}\gamma_5\eta^{-1}(p)C^{-1}(p)\{\gamma_5, B(p)\}\left(V\frac{1}{1+BV}\right)(p,q)C(q)\eta(q)\,. \tag{3.182}$$

こうして得られた解は、$B = \alpha^{-1}\eta$、$C = 1$ とすることにより (3.177) を含む解になっている。

4 超対称性への応用

前章では、変形されたカイラル変換のもとで理論を構成することを考えたが、この方法は他の対称性にも応用することができる。この章では超対称性に対する応用を考える。つまり、ブロックスピン変換で超対称性を破る時に得られる、変形された超対称性と、それを満たす作用を求める。また、以下では座標空間で考える。

4.1 超対称量子力学

始めに、超対称量子力学について考える。UV 場を $\phi = \{\chi, F, \psi, \bar{\psi}\}$ として、超対称な UV 作用を以下のように定義する。

$$S_{\mathrm{UV}}[\phi] = \int_x \left[-\frac{1}{2}\chi\partial^2\chi + \bar{\psi}\Big(\partial + \frac{\partial W}{\partial\chi}\Big)\psi - \frac{1}{2}F^2 - FW\right], \quad W = m\chi + \frac{1}{2}g\chi^2\,. \tag{4.1}$$

この作用は、以下のような超対称変換のもとで不変である。

$$\delta\chi = -\bar{\epsilon}\psi + \epsilon\bar{\psi}\,, \tag{4.2}$$
$$\delta F = -\bar{\epsilon}\partial\psi - \epsilon\partial\bar{\psi}\,, \tag{4.3}$$
$$\delta\psi = \epsilon(-\partial\chi - F)\,, \tag{4.4}$$
$$\delta\bar{\psi} = \bar{\epsilon}(\partial\chi - F)\,. \tag{4.5}$$

ここで、ϵ は Grassmann odd なパラメーターである。このとき、場の変換を

$$\delta\phi^A = (\epsilon M + \bar{\epsilon}\bar{M})^A{}_B\phi^B \tag{4.6}$$

と書くと、変換行列は

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial \\ -\partial & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

となる。ブロックスピンカーネル α を

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

とすることにより、IR 場 $\Phi=\{\varphi,\mathcal{F},\Psi,\bar{\Psi}\}$ に対する WT identity は以下のようになる。

$$\begin{aligned}0=\int_x\Bigg[&\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\varphi}\Bigg\{-\bar{\epsilon}\bigg(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\bar{\Psi}}\bigg)+\epsilon\bigg(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\rm IR}}{\partial\Psi}\bigg)\Bigg\}-\frac{\partial}{\partial\varphi}\bar{\epsilon}a_1\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\bar{\Psi}}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\epsilon a_1\frac{\partial^r S_{\rm IR}}{\partial\Psi}\\&+\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\mathcal{F}}\Bigg\{-\bar{\epsilon}\partial\bigg(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\bar{\Psi}}\bigg)-\epsilon\partial\bigg(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\rm IR}}{\partial\Psi}\bigg)\Bigg\}-\frac{\partial}{\partial\mathcal{F}}\bar{\epsilon}a_1\partial\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\bar{\Psi}}-\frac{\partial}{\partial\mathcal{F}}\epsilon a_1\partial\frac{\partial^r S_{\rm IR}}{\partial\Psi}\\&+\frac{\partial^r S_{\rm IR}}{\partial\Psi}\epsilon\Bigg\{-\partial\bigg(\varphi-a_2\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\varphi}\bigg)-\bigg(\mathcal{F}-a_0\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\mathcal{F}}\bigg)\Bigg\}+\frac{\partial^r}{\partial\Psi}\epsilon a_2\partial\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\varphi}+\frac{\partial^r}{\partial\Psi}\epsilon a_0\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\mathcal{F}}\\&+\bar{\epsilon}\Bigg\{\partial\bigg(\varphi-a_2\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\varphi}\bigg)-\bigg(\mathcal{F}-a_0\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\mathcal{F}}\bigg)\Bigg\}\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\bar{\Psi}}+\frac{\partial^l}{\partial\bar{\Psi}}\bar{\epsilon}a_2\partial\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\varphi}-\frac{\partial^l}{\partial\bar{\Psi}}\bar{\epsilon}a_0\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\mathcal{F}}\Bigg].\end{aligned}\tag{4.9}$$

これより、変形された超対称変換は以下のようになる。

$$\delta\varphi=-\bar{\epsilon}\bigg(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\bar{\Psi}}\bigg)+\epsilon\bigg(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\rm IR}}{\partial\Psi}\bigg),\tag{4.10}$$

$$\delta\mathcal{F}=-\bar{\epsilon}\partial\bigg(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\rm IR}}{\partial\bar{\Psi}}\bigg)-\epsilon\partial\bigg(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\rm IR}}{\partial\Psi}\bigg),\tag{4.11}$$

$$\delta\Psi=\epsilon\Bigg\{-\partial\bigg(\varphi-a_2\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\varphi}\bigg)-\bigg(\mathcal{F}-a_0\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\mathcal{F}}\bigg)\Bigg\},\tag{4.12}$$

$$\delta\bar{\Psi}=\bar{\epsilon}\Bigg\{\partial\bigg(\varphi-a_2\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\varphi}\bigg)-\bigg(\mathcal{F}-a_0\frac{\partial S_{\rm IR}}{\partial\mathcal{F}}\bigg)\Bigg\}.\tag{4.13}$$

残りの項は、変形された超対称変換からのヤコビアンの寄与になる。これらは、場の 2 階微分になっているが、全ての項に Dirac 場の微分が含まれているので、スカラー場 φ または補助場 $\mathcal{F}$ と Dirac 場の積が作用に含まれていなければ、ゼロになる。自由理論の場合はそのような項がないので無視することができるが、湯川相互作用がある場合は無視できなくなる。

4.1.1 相互作用が無い場合

変形された超対称性を持つ自由理論の作用は以下のように与えられる。

$$S_{\rm IR}[\Phi]=\int_x\bigg[-\frac{1}{2}\varphi D_0^2D^2\varphi+\bar{\Psi}(\partial+m)\beta_+\Psi-\frac{1}{2}\mathcal{F}D_2^2D^2\mathcal{F}-\frac{m}{1+a_0}\mathcal{F}D^2\varphi\bigg].\tag{4.14}$$

ここで導入した演算子は

$$D^2=\frac{1}{1+a_2\partial^2-\frac{a_0a_2}{1+a_0}m^2},\tag{4.15}$$

$$D_0^2=\frac{\partial^2+a_0(\partial^2-m^2)}{1+a_0}=\partial^2-\frac{a_0}{1+a_0}m^2,\tag{4.16}$$

$$D_2^2=\frac{1+a_2(\partial^2-m^2)}{1+a_0}=\frac{1}{1+a_0}+\frac{a_2}{1+a_0}(\partial^2-m^2),\tag{4.17}$$

$$\beta_+=\frac{1}{1+a_1(\partial+m)},\tag{4.18}$$

$$\beta_-=\frac{1}{1-a_1(\partial-m)}.\tag{4.19}$$

となる。この時、変形された超対称性は以下のようになる。

$$\delta\varphi=-\bar{\epsilon}\beta_+\Psi+\epsilon\beta_-\bar{\Psi},\tag{4.20}$$

$$\delta\mathcal{F}=-\bar{\epsilon}\partial\beta_+\Psi-\epsilon\partial\beta_-\bar{\Psi},\tag{4.21}$$

$$\delta\Psi=\epsilon\bigg[-\frac{\partial+a_0(\partial-m)}{1+a_0}D^2\varphi-\frac{1+a_2\partial(\partial-m)}{1+a_0}D^2\mathcal{F}\bigg],\tag{4.22}$$

$$\delta\bar{\Psi}=\bar{\epsilon}\bigg[\frac{\partial+a_0(\partial+m)}{1+a_0}D^2\varphi-\frac{1+a_2\partial(\partial+m)}{1+a_0}D^2\mathcal{F}\bigg].\tag{4.23}$$

4.1.2 相互作用がある場合

相互作用を含めると WT identity を解くとこが非常に困難になる。そこで、$a_1 = a_2 = 0$ とおく。つまり、補助場のみのブロックスピン変換を考える。この時、2 階微分の項は補助場と Dirac 場の微分だけになる。その結果、作用に湯川相互作用が含まれていても、2 階微分項を無視することができる。

変形された超対称性を持つ作用は以下のように与えられる。

$$S_{\mathrm{IR}}[\Phi] = \int_x \left[-\frac{1}{2}\varphi\partial^2\varphi + \bar{\Psi}\Big(\partial + \frac{\partial W}{\partial\varphi}\Big)\Psi - \frac{1}{2}\frac{1}{1+a_0}\mathcal{F}^2 - \frac{1}{1+a_0}\mathcal{F}W + \frac{1}{2}\frac{a_0}{1+a_0}W^2 \right]. \tag{4.24}$$

また、変形された超対称変換は以下のようになる。

$$\delta\varphi = -\bar{\epsilon}\Psi + \epsilon\bar{\Psi}\,, \tag{4.25}$$
$$\delta\mathcal{F} = -\bar{\epsilon}\partial\Psi - \epsilon\partial\bar{\Psi}\,, \tag{4.26}$$
$$\delta\Psi = \epsilon\Big(-\partial\varphi - \frac{1}{1+a_0}\mathcal{F} + \frac{a_0}{1+a_0}W \Big)\,, \tag{4.27}$$
$$\delta\bar{\Psi} = \bar{\epsilon}\Big(\partial\varphi - \frac{1}{1+a_0}\mathcal{F} + \frac{a_0}{1+a_0}W \Big)\,. \tag{4.28}$$

$\mathcal{F}$ に対する運動方程式より

$$\mathcal{F} = -W \tag{4.29}$$

となるが、これを作用に代入すると

$$S_{\mathrm{IR}}[\Phi] = \int_x \left[-\frac{1}{2}\varphi\partial^2\varphi + \bar{\Psi}\Big(\partial + \frac{\partial W}{\partial\varphi}\Big)\Psi - \frac{1}{2}W^2 \right] \tag{4.30}$$

となり、a_0 依存性がなくなるという特徴を持つ。

4.2 2 次元 Wess-Zumino 模型

2 次元 Wess-Zumino 模型の作用は以下のようになる。

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{UV}}[\phi] = \int_x \Big[&-\chi^*\partial^2\chi + \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi - F^*F - m(F\chi + F^*\chi^*) \\ &+ g\bar{\psi}(P_+\chi + P_-\chi^*) - \frac{1}{2}g(F\chi^2 + F^*\chi^{*2}) \Big]\,. \end{aligned} \tag{4.31}$$

この作用は、以下のような超対称変換のもとで不変である。

$$\delta\chi = -\bar{\epsilon}P_+\psi - \bar{\psi}P_+\epsilon\,, \tag{4.32}$$
$$\delta\chi^* = -\bar{\epsilon}P_-\psi - \bar{\psi}P_-\epsilon\,, \tag{4.33}$$
$$\delta F = -\bar{\epsilon}P_-\not{\partial}\psi + \bar{\psi}\overleftarrow{\not{\partial}}P_-\epsilon\,, \tag{4.34}$$
$$\delta F^* = -\bar{\epsilon}P_+\not{\partial}\psi + \bar{\psi}\overleftarrow{\not{\partial}}P_+\epsilon\,, \tag{4.35}$$
$$\delta\psi = -\Big((\not{\partial}\chi + F^*)P_- + (\not{\partial}\chi^* + F)P_+ \Big)\epsilon\,, \tag{4.36}$$
$$\delta\bar{\psi} = \bar{\epsilon}\Big(P_-(\not{\partial}\chi - F^*) + P_+(\not{\partial}\chi^* - F) \Big)\,. \tag{4.37}$$

作用は、$\epsilon = 0$ とした $\bar{\epsilon}$ のみの変換、またはその逆の元でも不変になっている。このとき UV 場 $\phi = \{\chi, \chi^*, F, F^*, \psi, \bar{\psi}\}$ に対する変換行列は

$$\delta\phi^A = \bar{\epsilon}M^A_{\ B}\phi^B + \phi^B\bar{M}_B^{\ A}\epsilon \tag{4.38}$$

とするとき、

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -P_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -P_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -P_-\partial\!\!\!/ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -P_+\partial\!\!\!/ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_-\partial\!\!\!/ & P_+\partial\!\!\!/ & -P_+ & -P_- & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{M}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -P_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -P_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -P_+ & -P_- & \overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_- & \overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_+ & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

となる。ブロックスピンカーネル α を

$$\alpha^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

とすると IR 場 $\Phi=\{\varphi,\varphi^*,\mathcal{F},\mathcal{F}^*,\Psi,\bar{\Psi}\}$ に対する WT identity は

$$\begin{aligned}
0=\int_x\Bigg[&\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}\left\{-\bar{\epsilon}P_+\left(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right)-\left(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)P_+\epsilon\right\}-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\bar{\epsilon}P_+a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}+a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}P_+\epsilon\right\}\\
&+\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^*}\left\{-\bar{\epsilon}P_-\left(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right)-\left(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)P_-\epsilon\right\}-\frac{\partial}{\partial\varphi^*}\left\{\bar{\epsilon}P_-a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}+a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}P_-\epsilon\right\}\\
&+\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\left\{-\bar{\epsilon}P_-\partial\!\!\!/\left(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right)+\left(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)\overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_-\epsilon\right\}-\frac{\partial}{\partial\mathcal{F}}\left\{\bar{\epsilon}P_-a_1\partial\!\!\!/\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}-a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_-\epsilon\right\}\\
&+\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}^*}\left\{-\bar{\epsilon}P_+\partial\!\!\!/\left(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right)+\left(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)\overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_+\epsilon\right\}-\frac{\partial}{\partial\mathcal{F}^*}\left\{\bar{\epsilon}P_+a_1\partial\!\!\!/\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}-a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_+\epsilon\right\}\\
&+\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\left\{-\left(\partial\!\!\!/\left(\varphi-a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^*}\right)+\left(\mathcal{F}^*-a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\right)P_--\left(\partial\!\!\!/\left(\varphi^*-a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}\right)+\left(\mathcal{F}-a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}^*}\right)\right)P_+\right\}\epsilon\\
&+\frac{\partial^r}{\partial\Psi}\left\{\left(a_2\partial\!\!\!/\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^*}-a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)P_-\epsilon+\left(\partial\!\!\!/a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}-a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}^*}\right)P_+\epsilon\right\}\\
&+\bar{\epsilon}\left\{P_-\left(\partial\!\!\!/\left(\varphi-a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^*}\right)-\left(\mathcal{F}^*-a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\right)+P_+\left(\partial\!\!\!/\left(\varphi^*-a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^*}\right)-\left(\mathcal{F}-a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}^*}\right)\right)\right\}\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\\
&+\bar{\epsilon}\left\{P_-\left(-a_2\partial\!\!\!/\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^*}+a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)+P_+\left(-a_2\partial\!\!\!/\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^*}+a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}^*}\right)\right\}\frac{\overleftarrow{\partial^l}}{\partial\bar{\Psi}}\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.41}$$

となる。これより、変形された超対称変換は以下のようになる。

$$\delta\varphi=-\bar{\epsilon}P_+\left(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right)-\left(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)P_+\epsilon, \tag{4.42}$$

$$\delta\varphi^*=-\bar{\epsilon}P_-\left(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right)-\left(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)P_-\epsilon, \tag{4.43}$$

$$\delta\mathcal{F}=-\bar{\epsilon}P_-\partial\!\!\!/\left(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right)+\left(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)\overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_-\epsilon, \tag{4.44}$$

$$\delta\mathcal{F}^*=-\bar{\epsilon}P_+\partial\!\!\!/\left(\Psi-a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right)+\left(\bar{\Psi}-a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)\overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_+\epsilon, \tag{4.45}$$

$$\delta\Psi=-\left(\partial\!\!\!/\left(\varphi-a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^*}\right)+\left(\mathcal{F}^*-a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\right)P_-\epsilon-\left(\partial\!\!\!/\left(\varphi^*-a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}\right)+\left(\mathcal{F}-a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}^*}\right)\right)P_+\epsilon, \tag{4.46}$$

$$\delta\bar{\Psi}=\bar{\epsilon}P_-\left(\partial\!\!\!/\left(\varphi-a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^*}\right)-\left(\mathcal{F}^*-a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\right)+\bar{\epsilon}P_+\left(\partial\!\!\!/\left(\varphi^*-a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi^*}\right)-\left(\mathcal{F}-a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}^*}\right)\right). \tag{4.47}$$

2 階微分はヤコビアンからの寄与を表す。

4.2.1 相互作用が無い場合

変形された超対称性を持つ自由理論の作用は以下のように与えられる。

$$S_{\mathrm{IR}}[\Phi] = \int_x \Big[-\varphi^* D_0^2 D^2 \varphi + \bar{\Psi} \not{D}_+ \Psi - \mathcal{F}^* D_2^2 D^2 \mathcal{F} - \frac{m}{1+a_0}\Big(\mathcal{F} D^2 \varphi + \mathcal{F}^* D^2 \varphi^*\Big)\Big] \tag{4.48}$$

ここで導入した演算子は

$$D_0^2 = \partial^2 - \frac{a_0}{1+a_0} m^2 \,, \tag{4.49}$$

$$D_2^2 = 1 - \frac{a_0}{1+a_0} + \frac{a_2}{1+a_0}(\partial^2 - m^2) \,, \tag{4.50}$$

$$D^2 = \frac{1}{1 + a_2 D_0^2} \tag{4.51}$$

$$\not{D}_+ = \frac{\not{\partial} + m}{1 + a_1(\not{\partial} + m)} \,, \tag{4.52}$$

$$\not{D}_- = \frac{\not{\partial} - m}{1 - a_1(\not{\partial} - m)} \tag{4.53}$$

となる。このとき、変形された超対称変換は以下のようになる。

$$\delta\varphi = -\bar{\epsilon} P_+ \Big(1 - a_1 \not{D}_+\Big)\Psi - \bar{\Psi}\Big(1 + \overleftarrow{\not{D}}_- a_1\Big) P_+ \epsilon \,, \tag{4.54}$$

$$\delta\varphi^* = -\bar{\epsilon} P_- \Big(1 - a_1 \not{D}_+\Big)\Psi - \bar{\Psi}\Big(1 + \overleftarrow{\not{D}}_- a_1\Big) P_- \epsilon \,, \tag{4.55}$$

$$\delta\mathcal{F} = -\epsilon P_- \Big(1 - a_1 \not{D}_+\Big)\not{\partial}\Psi + \bar{\Psi}\overleftarrow{\not{\partial}}\Big(1 + \overleftarrow{D}_- a_1\Big) P_- \epsilon \,, \tag{4.56}$$

$$\delta\mathcal{F}^* = -\epsilon P_+ \Big(1 - a_1 \not{D}_+\Big)\not{\partial}\Psi + \bar{\Psi}\overleftarrow{\not{\partial}}\Big(1 + \overleftarrow{D}_- a_1\Big) P_+ \epsilon \,, \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Psi = &\Big[-\Big(\not{\partial} - \frac{a_0}{1+a_0} m\Big) D^2 \varphi - \frac{1 + a_2 \not{\partial}(\not{\partial} - m)}{1+a_0} D^2 \mathcal{F}^* \Big] P_- \epsilon \\
&+ \Big[-\Big(\not{\partial} - \frac{a_0}{1+a_0} m\Big) D^2 \varphi^* - \frac{1 + a_2 \not{\partial}(\not{\partial} - m)}{1+a_0} D^2 \mathcal{F} \Big] P_+ \epsilon \,,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\Psi} = &\bar{\epsilon} P_- \Big[\Big(\not{\partial} + \frac{a_0}{1+a_0} m\Big) D^2 \varphi - \frac{1 + a_2 \not{\partial}(\not{\partial} + m)}{1+a_0} D^2 \mathcal{F}^* \Big] \\
&+ \bar{\epsilon} P_+ \Big[\Big(\not{\partial} + \frac{a_0}{1+a_0} m\Big) D^2 \varphi^* - \frac{1 + a_2 \not{\partial}(\not{\partial} + m)}{1+a_0} D^2 \mathcal{F} \Big] \,.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

4.2.2 相互作用がある場合

相互作用がある場合について、$a_1 = a_2 = 0$ とおいて考える。超対称量子力学のときと同様に 2 階微分の項は寄与しない。変形された超対称性を持つ IR 作用は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{IR}}[\Phi] = \int_x \Big[&-\varphi^* \partial^2 \varphi + \bar{\Psi}\not{\partial}\Psi - \frac{1}{1+a_0}\mathcal{F}^*\mathcal{F} - \frac{m}{1+a_0}\Big(\mathcal{F}\varphi + \mathcal{F}^*\varphi^*\Big) + \frac{a_0}{1+a_0} m^2 \varphi^* \varphi \\
&+ g\bar{\Psi}\Big(P_+\varphi + P_-\varphi^*\Big)\Psi - \frac{g}{2}\frac{1}{1+a_0}\Big(\mathcal{F}\varphi^2 + \mathcal{F}^*\varphi^{*2}\Big) + \frac{m}{2}\frac{a_0}{1+a_0}\Big(\varphi^*\varphi^2 + \varphi^{*2}\varphi\Big) + \frac{g}{4}\frac{a_0}{1+a_0}\varphi^{*2}\varphi^2 \Big] \,.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

また、変形された超対称変換は以下のようになる。

$$\delta\varphi = -\bar{\epsilon}P_+\Psi - \bar{\Psi}P_+\epsilon, \tag{4.61}$$

$$\delta\varphi^* = -\bar{\epsilon}P_-\Psi - \bar{\Psi}P_-\epsilon, \tag{4.62}$$

$$\delta\mathcal{F} = -\bar{\epsilon}P_-\partial\!\!\!/\Psi + \bar{\Psi}\overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_-\epsilon, \tag{4.63}$$

$$\delta\mathcal{F}^* = -\bar{\epsilon}P_+\partial\!\!\!/\Psi + \bar{\Psi}\overleftarrow{\partial\!\!\!/}P_+\epsilon, \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}\delta\Psi = &\left[-\partial\!\!\!/\varphi + \frac{a_0}{1+a_0}m\varphi + \frac{g}{2}\frac{a_0}{1+a_0}\varphi^2 + \frac{1}{1+a_0}\mathcal{F}^*\right]P_-\epsilon \\ &+ \left[-\partial\!\!\!/\varphi^* + \frac{a_0}{1+a_0}m\varphi^* + \frac{g}{2}\frac{a_0}{1+a_0}\varphi^{*2} + \frac{1}{1+a_0}\mathcal{F}\right]P_+\epsilon,\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\Psi} = &\,\bar{\epsilon}P_-\left[\partial\!\!\!/\varphi + \frac{a_0}{1+a_0}m\varphi + \frac{g}{2}\frac{a_0}{1+a_0}\varphi^2 - \frac{1}{1+a_0}\mathcal{F}^*\right] \\ &+ \bar{\epsilon}P_+\left[\partial\!\!\!/\varphi^* + \frac{a_0}{1+a_0}m\varphi^* + \frac{g}{2}\frac{a_0}{1+a_0}\varphi^{*2} - \frac{1}{1+a_0}\mathcal{F}\right].\end{aligned} \tag{4.66}$$

5 まとめと展望

本論文の主題である、非摂動くり込み群における対称性の実現に対して、格子理論での前例である文献 [7] に基づいて、変形された対称性のもとでの理論の構成を試みた。

始めに、ブロックスピン変換の連続理論版により UV 理論の生成汎関数と IR 理論の生成汎関数を関係付ける。このとき、ブロックスピン変換が UV 理論の持つ対称性を破ってしまうと、IR 理論では変形された対称性が実現されることが知られている。理論の対称性は一般に WT identity によって記述される。変形された対称性を記述する IR 理論の WT identity は、UV 理論の WT identity に対して、UV 理論と IR 理論の生成汎関数どうしの関係を用いることによって得られる。これによって得られた対称変換は、IR 作用に依存する形を持っている。対称性に基づいて理論を構成する場合、通常は与えられた変換のもとで不変な作用を構成するが、変形された対称性によって理論を構成する場合、作用と変換を同時に構成しなければならない。

本論文では、これらの一般論のカイラル対称性に対する応用を議論した。始めに、UV 理論として湯川相互作用を含むカイラル対称な理論を定義した。但し、フェルミオンについて双一次を仮定した。これは、後に WT identity の解とし得られる作用と、IR 理論の定義式を直接積分して得られる作用を比較するためである。次に、ブロックスピンカーネルを質量項に比例する形に選ぶことによってカイラル対称性を破る。この時に得られる変形された対称変換は IR 作用に依存するので、始めに IR 作用の形を仮定する必要がある。そこで、フェルミオンのに対して双一次の仮定のもとで、相互作用を含まない自由理論から始めた。Dirac operator を未知数とする相互作用を含まない作用を仮定し、その結果得られた変換のもとで作用が不変になるように Dirac operator を決めた。このとき Dirac operator に課せられる条件式は GW relation と呼ばれる。次に、湯川相互作用を含む形を仮定し、変形された変換を求め、作用を不変にするための Dirac operator に対する条件を求めた。この条件式に対する解を求めるために、Dirac operator を自由理論で得られた結果と湯川相互作用に分け、湯川相互作用に対する条件式を求め、それを解いた。そうして得られた結果は、フェルミオンのみを直接積分して得られる作用と、文献 [7] で得られた結果の連続理論版を含むより一般的な解になっていた。相互作用を含めた場合、変形された対称変換は非線形であるが、変数変換を施すことにより、最終的に線形な変換性にできることが分かった。最後に超対称性に対する応用を考えたが、カイラル対称性の時と同様に、変形された対称性のもとで理論を構成することができた。

本論文の結果で重要なことは、変形された対称性を厳密に保つ理論を構成したことである。但し、フェルミオンに対して双一次を仮定しているので、高次項を含めて理論を構成できるかは今後の課題となる。また、非摂動くり込み群で最も問題視されているゲージ対称性に対しても同様のアプローチが可能かを検証することは重要であり今後の課題となる。

謝辞

本論文の作成にあたり、お忙しい中議論して頂いた五十嵐尤二先生、伊藤克美先生には心より感謝いたします。また、日頃から議論して頂いた佐藤雅尚氏にも深く感謝致します。また、谷本盛光先生、中野博章先生には論文内容に対しご指導して頂き心より感謝致します。

付録 A　記法

本論文で用いる記法の説明をする。

空間については、4 次元ユークリッド空間を用いる。また、運動量空間での演算として、

$$J \cdot \phi = \sum_A \int_p J_A(-p)\phi^A(p)\,, \tag{A.1}$$

$$\phi \cdot \alpha \cdot \phi = \sum_{A,B} \int_p \phi^A(-p)\big[\alpha(p)\big]_{AB}\phi^B(p) \tag{A.2}$$

を定義する。積分は

$$\int_x = \int d^4x\,, \tag{A.3}$$

$$\int_p = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{A.4}$$

を表す。

場 ϕ での右微分と左微分を以下のように定義する。

$$\frac{\partial^l X}{\partial\phi} = \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\phi}X\,, \quad \frac{\partial^r X}{\partial\phi} = X\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\phi}\,. \tag{A.5}$$

付録 B　便利な公式

γ_5 と GW relation を満たす $\mathcal{D}_0$ の間に成り立つ関係式をまとめる。

$$\gamma_5\eta(p) = \eta(p)\hat{\gamma}_5(p)\,, \tag{B.1}$$

$$\eta^{-1}(p)\gamma_5 = \hat{\gamma}_5(p)\eta^{-1}\,, \tag{B.2}$$

$$\gamma_5 + \hat{\gamma}_5(p) = 2\gamma_5\eta(p)\,, \tag{B.3}$$

$$\{\gamma_5, \eta\} = 2\eta\gamma_5\eta\,. \tag{B.4}$$

α が $\not{p}$ に比例する項を含む場合、$\alpha \to \alpha_p$、$\eta \to \eta_p$ とし

$$\gamma_5\eta_p(p) = \eta_p(p)\hat{\gamma}_5(p)\,. \tag{B.5}$$

$$\eta_p^{-1}(p)\gamma_5 = \hat{\gamma}_5(p)\eta_p^{-1} \tag{B.6}$$

が成り立つ。これらの公式は GW relation によって示される。

次に、超対称性への応用で定義した演算子に対する公式をまとめる。始めに、超対称量子力学で使った公式は以下のようになる。

$$D^2 = 1 - a_2\partial^2 + \frac{a_0a_2}{1+a_0}m^2D^2 \tag{B.7}$$

$$= 1 - a_2D_0^2D^2 \tag{B.8}$$

$$= 1 - a_0D_2^2D^2 + \frac{a_0 - a_2\partial^2}{1+a_0}D^2 \tag{B.9}$$

$$\left[1 + a_2(\partial^2 - m^2)\right] D^2 = 1 - \frac{a_2}{1 + a_0} m^2 D^2 \tag{B.10}$$

$$\beta_+ = 1 - a_1(\partial + m)\beta_+ \tag{B.11}$$

$$\beta_- = 1 + a_1(\partial - m)\beta_- \tag{B.12}$$

2 次元 Wess-Zumino 模型で使った公式は以下のようになる。

$$\not{D}_+ = \left[1 - a_1 \not{D}_+\right](\not{\partial} + m), \tag{B.13}$$

$$\not{D}_- = \left[1 + \not{D}_- a_1\right](\not{\partial} - m) \tag{B.14}$$

これらの公式は、演算子の定義から直ちに従い、変形された超対称性の計算や、作用の不変性を示す時に役に立つ公式となる。

付録 C　Batalin-Vilkovisky 形式

C.1　マスター方程式

Batalin-Vilkovisky(BV) 形式 [21] とは、一般的なゲージ理論をローレンツ共変的に量子化する方法として考えられた形式である。例えば、運動方程式が成り立つときのみ代数が閉じている場合 (open gauge theory) や、全ての生成子が独立では無い場合 (reducible gauge theory) 等にも適用できる。また、非摂動くり込み群において対称性を議論する際にも用いられる。

始めに BRST 変換のもとで不変な作用 $S_0[\phi]$ を考える。理論に含まれる場を ϕ^A で表し、その無限小 BRST 変換を

$$\phi^A \to \phi^A + \delta\phi^A\theta \tag{C.1}$$

と表す。ここで、θ は Grassmann odd なパラメーターを表す。また、ラベル A には運動量も含めて表している。作用はこの変換のもとで不変であると仮定する。

$$\frac{\partial^r S_0}{\partial\phi^A}\delta\phi^A = 0\,. \tag{C.2}$$

BRST 変換は nilpotent なので、

$$\frac{\partial^r \delta\phi^B}{\partial\phi^A}\delta\phi^A = 0 \tag{C.3}$$

となる。次に、BRST 変換のソースとして反場 ϕ^*_A を導入する。この反場の統計性は、場の統計因子を $\epsilon(\phi^A) = \epsilon^A$ としたとき、

$$\epsilon(\phi^*_A) = \epsilon^A + 1 \pmod 2 \tag{C.4}$$

となる。反場を加えた作用を $S[\phi, \phi^*]$ と書く。

$$S[\phi, \phi^*] = S_0[\phi] + \phi^* \cdot \delta\phi\,. \tag{C.5}$$

このとき、作用 S は以下の関係式を満たす。

$$0 = \frac{\partial^r S}{\partial\phi^A}\frac{\partial^l S}{\partial\phi^*_A}\,. \tag{C.6}$$

実際、反場のゼロ次の項は作用の不変性から、反場の 1 次の項は BRST 変換が nilpotent であることから消える。この方程式は古典的マスター方程式 (Classical Master Equation, CME) と呼ばれる。反場の 1 次の項を加えただけでは新しいことはない。しかし、BV 形式では一般に反場の高次の項を加えて考える。そのとき CME は、反場のゼロ次が作用の不変性を与え、反場の高次項は低次項に対する consistency condition を与えることになる。

ここで、場と反場の任意関数 $X[\phi,\phi^*]$、$Y[\phi,\phi^*]$ に対して antibracket と呼ばれるものを定義する。

$$(X,Y) \equiv \frac{\partial^r X}{\partial\phi^A}\frac{\partial^l Y}{\partial\phi^*_A} - \frac{\partial^r X}{\partial\phi^*_A}\frac{\partial^l Y}{\partial\phi^A}\,. \tag{C.7}$$

このとき、場と反場の間に

$$(\phi^A,\phi^*_B) = \delta^A{}_B\,,\quad (\phi^A,\phi^B) = (\phi^*_A,\phi^*_B) = 0\,. \tag{C.8}$$

が成り立つ。また、 antibracket は以下の性質を持つ。

$$(Y,X) = -(-)^{(\epsilon_X+1)(\epsilon_Y+1)}(X,Y)\,, \tag{C.9}$$

$$((X,Y),Z) + (-)^{(\epsilon_X+1)(\epsilon_Y+\epsilon_Z)}((Y,Z),X) + (-)^{(\epsilon_Z+1)(\epsilon_X+\epsilon_Y)}((Z,X),Y) = 0\,, \tag{C.10}$$

$$(X,YZ) = (X,Y)Z + (-)^{\epsilon_Y\epsilon_Z}(X,Z)Y\,, \tag{C.11}$$

$$(XY,Z) = X(Y,Z) + (-)^{\epsilon_X\epsilon_Y}Y(X,Z)\,. \tag{C.12}$$

一つ目の式は、X と Y が共にボゾン的なとき交換し、それ以外のときに反交換することを示している。二つ目の式は、antibracket が Jacobi 恒等式を満たすことを示している。また、ボゾン的な関数を B、フェルミオン的な関数を F としたとき、

$$(B,B) = 2\frac{\partial^r B}{\partial\phi^A}\frac{\partial^l B}{\partial\phi^*_B}\,, \tag{C.13}$$

$$(F,F) = 0 \tag{C.14}$$

が成り立つ。このとき、CME は

$$(S,S) = 0 \tag{C.15}$$

と表すことができる。次に、一般化された BRST 変換を

$$\delta\phi^A = (\phi^A,S)\,, \tag{C.16}$$

$$\delta\phi^*_A = (\phi^*_A,S) \tag{C.17}$$

で定義する。この変換が nilpotent であることは、(C.9)、(C.10)、(C.15) から従う。また、作用が (C.5) のとき通常の BRST 変換になる。これにより、CME は一般化された BRST 変換のもとでの作用の不変性として解釈できる。

$$\delta S = (S,S) = 0\,. \tag{C.18}$$

次に、量子論的な対称性を見るために生成汎関数についてを考える。

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\, e^{-S[\phi,\phi^*]}\,. \tag{C.19}$$

ここで、ゲージ固定は場のみの関数であるゲージ固定フェルミオン Ψ を使い、反場に以下の条件を課すことによって行われる。

$$\phi^*_A = \frac{\partial\Psi}{\partial\phi^A}\,. \tag{C.20}$$

その結果、生成汎関数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} Z_\Psi &= \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\,\delta\!\left(\phi^*_A - \frac{\partial\Psi}{\partial\phi^A}\right)e^{-S[\phi,\phi^*]} \\ &= \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi,\phi^*]}\Big|_{\phi^*_A=\frac{\partial\Psi}{\partial\phi^A}}\,. \end{aligned} \tag{C.21}$$

この生成汎関数に対して、Ψ の無限小の変換 $\delta\Psi$ を考える。このとき生成汎関数は

$$\delta Z_\Psi = \int \mathcal{D}\phi \left[-\frac{\partial^r S}{\partial\phi^*_A}\frac{\partial}{\partial\phi^A}\delta\Psi \right] e^{-S[\phi,\phi^*]}\Bigg|_{\phi^*_A=\frac{\partial\Psi}{\partial\phi^A}} \tag{C.22}$$

となる。ここで、部分積分をすると、

$$\delta Z_\Psi = \int \mathcal{D}\phi\, \Sigma[\phi,\phi^*] e^{-S[\phi,\phi^*]}\Bigg|_{\phi^*_A=\frac{\partial\Psi}{\partial\phi^A}} \delta\Psi\,, \tag{C.23}$$

$$\Sigma[\phi,\phi^*] = \frac{1}{2}(S,S) - \Delta S \tag{C.24}$$

となる。ここで、Δ は

$$\Delta = (-)^{\epsilon_A+1}\frac{\partial^r}{\partial\phi^*_A}\frac{\partial^r}{\partial\phi^A} \tag{C.25}$$

となる。この微分演算子の統計因子は $\epsilon(\Delta)=1$ であり、nilpotent である。

$$\Delta^2 = 0\,. \tag{C.26}$$

ここで、Z_Ψ がゲージ固定条件に依らないことから、$\phi^*_A = \partial\Psi/\partial\phi^A$ において、

$$\Sigma[\phi,\phi^*] = \frac{1}{2}(S,S) - \Delta S = 0 \tag{C.27}$$

が成り立つ。これは、量子論的マスター方程式 (Quantum Master Equation, QME) と呼ばれる。

C.2 Wilson 作用に対するマスター方程式

スケール Λ_0 での作用を $S[\phi,\phi^*;\Lambda_0]$ とし、$J=0$ での生成汎関数を

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\delta(\phi^*_A)\exp\Big[-S[\phi,\phi^*;\Lambda_0]\Big] \tag{C.28}$$

としたとき、BV 形式での Wilson 作用 $S[\Phi,\Phi^*;\Lambda]$ は、この生成汎関数に定数

$$1 = N\int \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\Phi^*\prod_A \delta(\Phi^*_A - f^{-1}\phi^*_A)\exp\Big[-\Delta S[\Phi,\phi]\Big]\,, \tag{C.29}$$

$$\Delta S[\Phi,\phi] = -\frac{1}{2}(\Phi^A - f\phi^A)\alpha_{AB}(\Phi^B - f\phi^B) \tag{C.30}$$

を掛けることによって

$$\exp\Big[-S[\Phi,\Phi^*;\Lambda]\Big] = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*\prod_A \delta(\Phi^*_A - f^{-1}\phi^*_A)\exp\Big[-\Delta S[\Phi,\phi] - S[\phi,\phi^*;\Lambda_0]\Big] \tag{C.31}$$

で定義される。Wilson 作用を S_Λ と書くとき、この作用に対する QME は

$$\Sigma[\Phi,\Phi^*] = \frac{1}{2}(S_\Lambda,S_\Lambda) - \Delta S_\Lambda = 0 \tag{C.32}$$

となる。ここで、Φ は IR 場を表し、その変換は Wilson 作用を用いて

$$\delta\Phi = (\Phi, S_\Lambda)\,, \tag{C.33}$$

$$\delta\Phi^* = (\Phi^*, S_\Lambda) \tag{C.34}$$

で与えられる。また、UV 理論で $\Sigma[\phi,\phi^*]=0$ が成り立つとき、IR 理論でも $\Sigma[\Phi,\Phi^*]=0$ が成り立つことが知られている。

付録 D　Zinn-Justin 方程式

作用に対する対称変換が線形のとき、(2.36) より、有効作用も同じ変換のもとでの不変性を持つ。しかし、BRST 変換の場合、変換は非線形になり有効作用に対する対称変換と、通常の作用に対する対称変換は異なる。そこで、有効作用に対する恒等式 (2.36) を書き換えることを考える。

始めに、BRST 不変でゲージ固定したものを考える。場を ϕ^A とし、その変換を

$$\phi^A \to \phi^A + \theta\Delta^A \tag{D.1}$$

とする。ここで、BRST 変換のソースとして K を導入する。

$$Z[J,K] = \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[-S[\phi] + \Delta\cdot K + \phi\cdot J\Big]. \tag{D.2}$$

この生成汎関数に対して、連結グリーン関数の生成汎関数を定義する。

$$W[J,K] = \log Z[J,K]. \tag{D.3}$$

さらに、有効作用を

$$\Gamma[\varphi,K] = W[J_K,K] - \varphi\cdot J_K \tag{D.4}$$

で定義する。J_K は

$$\left.\frac{\partial^r W[J,K]}{\partial J_A(-p)}\right|_{J=J_K} = \varphi^A(p) \tag{D.5}$$

として定義する。このとき、Δ が nilpotent であることから、$-S+\Delta\cdot K$ は BRST 不変になるので、(2.36) のときと同様に

$$\int_p \langle\Delta^A[p]\rangle_{J_K,K}\frac{\partial^l\Gamma}{\partial\varphi^A(p)} = 0 \tag{D.6}$$

となる。ここで、有効作用を K で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^r\Gamma[\varphi,K]}{\partial K_A(-p)} &= \left.\frac{\partial^r W[J,K]}{\partial K_A(-p)}\right|_{J=J_K} + \int_k \left.\frac{\partial^r W[J,K]}{\partial J_B(-k)}\right|_{J=J_K}\frac{\partial^r J_{KB}(-k)}{\partial K_A(-p)} - \int_k \varphi^B(k)\frac{\partial^r J_{KB}(-k)}{\partial K_A(-p)}\\ &= \left.\frac{\partial^r W[J,K]}{\partial K_A(-p)}\right|_{J=J_K}\end{aligned} \tag{D.7}$$

となるが、

$$\left.\frac{\partial^r W[J,K]}{\partial K_A(-p)}\right|_{J=J_K} = \langle\Delta^A[p]\rangle_{J_K,K} \tag{D.8}$$

となるので、BRST 変換に対する (2.36) は

$$\int_p \frac{\partial^r\Gamma[\varphi,K]}{\partial K_A(-p)}\frac{\partial^l\Gamma}{\partial\varphi^A(p)} = 0 \tag{D.9}$$

となる。これは antibracket を使うことにより

$$(\Gamma,\Gamma) = 0 \tag{D.10}$$

と書くことができる。但し、反場による微分は K による微分に置き換える。この式は、Zinn-Justin 方程式と呼ばれる。BV 形式の CME と同じ形をしているが、CME が通常の作用に対する方程式であるのに対して、Zinn-Justin 方程式は有効作用に対する方程式なので量子効果を含み、QME と関係を持つ量となる。

付録 E　変形された超対称性を持つ作用の導出

超対称量子力学において、ブロックスピン変換によって変形された超対称性は、以下のように与えられる。

$$\delta\varphi = -\bar{\epsilon}\left(\Psi - a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right) + \epsilon\left(\bar{\Psi} - a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right), \tag{E.1}$$

$$\delta\mathcal{F} = -\bar{\epsilon}\partial\left(\Psi - a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right) - \epsilon\partial\left(\bar{\Psi} - a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right), \tag{E.2}$$

$$\delta\Psi = \epsilon\left\{-\partial\left(\varphi - a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}\right) - \left(\mathcal{F} - a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\right\}, \tag{E.3}$$

$$\delta\bar{\Psi} = \bar{\epsilon}\left\{\partial\left(\varphi - a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}\right) - \left(\mathcal{F} - a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\right\}. \tag{E.4}$$

この変換のもとで不変な作用の構成を考える。

始めに、自由理論の解を求める。仮定として UV 作用と同じ形の IR 作用を考える。

$$S^{(0)}_{\mathrm{IR}}[\Phi] = \int_x\left[-\frac{1}{2}\varphi\partial^2\varphi + \bar{\Psi}\left(\partial + m\right)\Psi - \frac{1}{2}\mathcal{F}^2 - m\mathcal{F}\varphi\right]. \tag{E.5}$$

この作用は、変形された超対称変換に対して不変ではなく、a に比例した項が残る。

$$\begin{aligned}\delta S^{(0)}_{\mathrm{IR}}[\Phi] = \int_x\Bigg[&-a_1\left(\bar{\epsilon}\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}} - \epsilon\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)(\partial^2\varphi + m\mathcal{F}) - a_1\left(\bar{\epsilon}\partial\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}} + \epsilon\partial\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)(\mathcal{F} + m\varphi)\\ &+\left(-a_2\bar{\epsilon}\partial\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} + a_0\bar{\epsilon}\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)(\partial + m)\Psi + \bar{\Psi}(\partial + m)\left(a_2\epsilon\partial\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} + a_0\epsilon\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{E.6}$$

このとき、右辺の項は、変形された超対称変換で書き直すことができる。

$$\begin{aligned}\delta S^{(0)}_{\mathrm{IR}}[\Phi] = \int_x\Bigg[&\delta\bar{\Psi}a_1(\partial + m)\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}} + a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}(\partial + m)\delta\Psi\\ &-\delta\varphi\left(a_2\partial^2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} + a_0 m\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right) - \delta\mathcal{F}\left(a_2 m\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} + a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{E.7}$$

よって、

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{IR}} \equiv \delta S^{(0)}_{\mathrm{IR}} - \int_x\Bigg[&\delta\bar{\Psi}a_1(\partial + m)\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}} + a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}(\partial + m)\delta\Psi\\ &-\delta\varphi\left(a_2\partial^2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} + a_0 m\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right) - \delta\mathcal{F}\left(a_2 m\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} + a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{E.8}$$

で定義した δS_{IR} は、変形された超対称変換のもとで不変になる。これより、

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{IR}}[\Phi] = \int_x\Bigg[&\delta\varphi\left\{-\partial^2\left(\varphi - a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}\right) - m\left(\mathcal{F} - a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\right\}\\ &+\delta\mathcal{F}\left\{-\left(\mathcal{F} - a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right) - m\left(\varphi - a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}\right)\right\}\\ &+\delta\bar{\Psi}(\partial + m)\left(\Psi - a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right) + \left(\bar{\Psi} - a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)(\partial + m)\delta\Psi\Bigg]\end{aligned} \tag{E.9}$$

となり、以下の連立微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} = -\partial^2\left(\varphi - a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}\right) - m\left(\mathcal{F} - a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right), \tag{E.10}$$

$$\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}} = -\left(\mathcal{F} - a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right) - m\left(\varphi - a_2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}\right), \tag{E.11}$$

$$\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi} = -(\partial - m)\left(\bar{\Psi} - a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right), \tag{E.12}$$

$$\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}} = (\partial + m)\left(\Psi - a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right). \tag{E.13}$$

これらの微分方程式を解くことにより、(4.14) が得られる。

相互作用がある場合、作用の仮定を

$$S_{\mathrm{IR}}^{(0)}[\Phi] = \int_x \left[-\frac{1}{2}\varphi\partial^2\varphi + \bar{\Psi}\left(\partial + \frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\Psi - \frac{1}{2}\mathcal{F}^2 - \mathcal{F}W\right], \quad W[\varphi] = m\varphi + \frac{1}{2}g\varphi^2 \tag{E.14}$$

とする。変形された超対称変換をとると

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{IR}}^{(0)}[\Phi] = \int_x \Bigg[&-a_1\left(\bar{\epsilon}\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}} - \epsilon\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)\left(\partial^2\varphi + \mathcal{F}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right) - a_1\left(\bar{\epsilon}\partial\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}} + \epsilon\partial\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right)(\mathcal{F} + W)\\ &+ \left(-a_2\bar{\epsilon}\partial\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} + a_0\bar{\epsilon}\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\left(\partial + \frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\Psi + \bar{\Psi}\left(\partial + \frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\left(a_2\epsilon\partial\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} + a_0\epsilon\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{E.15}$$

となるが、これを変形された超対称変換で書き換えると以下のようになる。

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{IR}}^{(0)}[\Phi] = \int_x \Bigg[&\delta\bar{\Psi}a_1\left(\partial + \frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}} + a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\left(\partial + \frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\delta\Psi\\ &- \delta\varphi\left(a_2\partial^2\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} + a_0\frac{\partial W}{\partial\varphi}\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right) - \delta\mathcal{F}\left(a_2\frac{\partial W}{\partial\varphi}\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} + a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right)\\ &+ (\bar{\epsilon}\Psi + \epsilon\bar{\Psi})a_2\left(\partial\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi}\Bigg].\end{aligned} \tag{E.16}$$

最後の項は、場の変換で書くことができず、この項があると自由理論のときのように解くことができなくなる。そこで、$a_2 = 0$ とおくと、変形された超対称変換のもとで不変な作用を

$$\delta S_{\mathrm{IR}} \equiv \delta S_{\mathrm{IR}}^{(0)} - \int_x \left[\delta\bar{\Psi}a_1\left(\partial + \frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}} + a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\left(\partial + \frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\delta\Psi - \delta\varphi a_0\frac{\partial W}{\partial\varphi}\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}} - \delta\mathcal{F}a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right] \tag{E.17}$$

と定義することができる。よって、自由理論のときと同様に S_{IR} が満たすべき微分方程式が以下のように求まる。

$$\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\varphi} = -\partial^2\varphi - \frac{\partial W}{\partial\varphi}\left(\mathcal{F} - a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right), \tag{E.18}$$

$$\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}} = -\left(\mathcal{F} - a_0\frac{\partial S_{\mathrm{IR}}}{\partial\mathcal{F}}\right) - W, \tag{E.19}$$

$$\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi} = -\left(\partial - \frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\left(\bar{\Psi} - a_1\frac{\partial^r S_{\mathrm{IR}}}{\partial\Psi}\right), \tag{E.20}$$

$$\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}} = \left(\partial + \frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\left(\Psi - a_1\frac{\partial^l S_{\mathrm{IR}}}{\partial\bar{\Psi}}\right). \tag{E.21}$$

簡単のため、$a_1 = 0$ とした解が (4.24) になるが、a_1 を残して解くこともできる。また、2 次元 Wess-Zumino 模型でも同様に解くことができる。

参考文献

[1] K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **C12** (1974) 75.

[2] F. J. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. **A8** (1973) 401.

[3] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, Phys. Rev. **D25** (1982) 2649.

[4] C. Wetterich, Nucl. Phys. **B352** (1991) 529; Z. Phys. **C60** (1993) 461; Phys. Lett. **B301** (1993) 90.

[5] J. Polchinski, Nucl. Phys. **B231** (1984) 269.

[6] H. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. **B185** (1981), 20; [E: **B195** (1982), 541]; **B193** (1981), 173.

[7] Y. Igarashi, H. So, and N. Ukita, Nucl. Phys. **B640** (2002) 95.

[8] M. Lüscher, Phys. Lett. **B428** (1998) 342.

[9] A. A. Slavnov, Theor. Math. Phys. **10** (1972), 152; J. C. Taylor, Nucl. Phys. B33 (1971), 436.

[10] H. Neuberger, Phys. Lett. **B417** (1998), 141.

[11] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994), 2411-2450.

[12] Y. Igarashi, K. Itoh and H. So, Phys. Lett. **B526** (2002), 164-172.

[13] D.F. Litim and J.M. Pawlowski, The Exact Renormalization Group, Eds. Krasnitz et al (World Scientific) (1999), 168.

[14] C. Bagnuls and C. Bervillier, Phys. Rep. **348**(2001), 91.

[15] J. Berges, N. Tetradis and C. Wetterich, Phys. Rep. **363**(2002), 223.

[16] J. Polonyi, Central Eur. J. Phys. **1** (2003), 1.

[17] J.M. Pawlowski, Aspects of the Functional Renormalisation Group, Annals Phys. **322** (2007), 2831-2915.

[18] H. Gies, Introduction to the Functional RG and Applications to Gauge Theories, hep-th/0611146.

[19] B. Delamotte, An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group, cond-mat/0702365.

[20] Y. Igarashi, K. Itoh and H. Sonoda, Prog. Theor. Phys. Suppl. **181** (2010), 1.

[21] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. **B102** (1981), 27.

[22] C. Becchi, On the construction of renormalized quantum field theory using renormalization group techniques, in *Elementary particles, Field theory and Statistical mechanics*, eds. Bonini M, Marchesini G, and Onofri E, Parma University 1993, hep-th/9607188.

[23] Y. Igarashi, K. Itoh, and H. So, Prog. Theor. Phys. **106** (2001), 149.

[24] H. Sonoda, J. Phys. **A40** (2007), 9675.

[25] Y. Igarashi, K. Itoh, and H. Sonoda, Prog. Theor. Phys. **118** (2007), 121.

[26] T. Higashi, E. Itou, and T. Kugo, Prog. Theor. Phys. **118** (2007), 1115-1125.

[27] Y. Igarashi, K. Itoh, and H. Sonoda, Prog. Theor. Phys. **120** (2008), 1017.