

ふりがな	あらや ようすけ
氏名	荒谷 洋輔
学位	博士(理学)
学位記番号	新大院博(理)第292号
学位授与の日付	平成20年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
博士論文名	Ekeland's variational principle in vector optimization (ベクトル最適化における Ekeland の変分原理)

論文審査委員	主査 教授	田 中 環
	副査 教授	磯 貝 英 一
	副査 教授	印 南 信 宏
	副査 教授	竹 内 照 雄
	副査 准教授	山 田 修 司

#### 博士論文の要旨

本論文は、ベクトル値関数に対する Ekeland (エークランド) の変分原理とそれに関連した定理に関する研究を行っている。古典的な実数値関数に対する Ekeland の変分原理とは、必ずしも最小値をとるとは限らない最適化問題において、関数の下半連続性と定義空間の完備性が、与えられた誤差量に対して、任意の近似初期解の関数値を改善する解が初期解の近くに存在することを保証した定理である。誤差量を零に収束する適当な数列にとることで、逐次的に近似解が得られるので、様々な最適化問題や変分問題に利用されている。また、凸解析学や非線形解析学などで取り扱われる不動点定理も最適化問題などの求解アルゴリズムによく利用されているが、特に、Caristi (カリストイ) の不動点定理は、上記の Ekeland の変分原理と同等の振る舞いをするものであることが知られている。そこで、本研究はベクトル値関数の場合の Ekeland の変分原理を調査・研究し、最近ドイツの Tammer 氏のグループが活発に研究発表している結果を利用して、より明快な証明方法でベクトル値関数に対する Ekeland の変分原理とそれと等価な Caristi の不動点定理および高橋の最小値定理のベクトル値関数版を構成した。その中で、ベクトル値関数に対する非線形スカラー化の手法を利用しているが、これは 1990 年に Gerth (Tammer) と Weider によって紹介され、凸でない集合に対する分離定理に応用されたものである。その非線形スカラー化の手法と似たような手法が様々な応用に対して用いられてきており、本研究もその 1 つの応用研究と位置付けてよい。

本論文の構成は、次のようになっている。第 2 章で、ベクトル最適化で使用される用語や概念を定義し、本論文で重要な働きをする、非線形スカラー化関数とそれを利用した凸でない集合における分離定理を紹介している。第 3 章ではベクトル最適化問題とその解の概念などの概略を丁寧に説明し、Gopfert-Tammer-Zalinescu が 2000 年に与えた、ベクトル値関数に対する Ekeland の変分原理についての定理を述べている。ここで、Aubin が実数値の場合に行った証明方法にヒントを得て、その証明を簡潔にする方法を提案している。また、ベクトル値関数のとりうるベクトル空間で与えられているベクトル半順序に対して、ある種の下への有界性を少し強くすることで、関数値に関しても初期値

のベクトルにノルムの意味で近くなるベクトルを構成することができている。さらに、近似有効解の概念をこれまでに研究されてきたものに立脚したものと別のタイプのもので 2 通りに結果を与えていること点でもオリジナリティが認められる。条件もコンパクト性を必要としないものになっていて定理を将来応用できる汎用性も持ち合わせている。次に、ベクトル値関数に対する Caristi 型の不動点定理や高橋の最小値定理の一般化にあたる、ベクトル値関数版をそれぞれ提案している。また、それらの等価性についても言及を行っている。第 4 章では、第 3 章で与えた結果を応用していくつかのベクトル均衡問題を提案し、それぞれの存在定理を示している。

#### 審査結果の要旨

本論文は、ベクトル値関数に対する Ekeland の変分原理とそれに関連した定理とその等価性及び応用に関する研究をまとめたものである。ベクトル値関数のある種の下への有界性とある種の下半連続性を巧みに利用することで、従来にはない評価式を含む必要条件が得られている。また、その証明方法、取り扱う近似有効解の概念を 2 通りに考えるなど、新規性に富んでいることが確認できた。もちろん、未解決の部分もまだ認められるが、このような取り組みは、数理科学的に独創性、新規性、有効性の高いものと認められ、今後のこの分野の発展に貢献が期待できる。また、申請論文の内容の一部はすでに 2 編の学術論文として掲載され、残り 1 編が掲載決定されている。このことから、本学位申請論文が当該分野において評価される研究であることを確認した。

よって、上記の内容に基づき本論文が博士（理学）の博士論文として十分であると認定した。