ふりがな	わたなべ しんご
氏名	渡辺 真吾
学位	博 士（ 理学 ）
学位記番号	新大院博（理）第291号
学位授与の日付	平成 ２０年 3月 ２４日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
博士論文名	The genera of Galois closure curves for plane quartic curves （平面４次曲線に対するガロワ閉包曲線の種数）
論文審査委員	主査 教授 吉原久夫 副査 教授 竹内照雄 副査 教授 印南信宏 副査 教授 羽鳥 理 副査 准教授 高田敏恵 副査 准教授 小島秀雄

博士論文の要旨

本論文は３章から構成されており，第１章は平面曲線の幾何学，第２章は平面曲線のガロワ点，第３章は平面４次曲線に対するガロワ点の種数である。始めの２つの章で既成の結果を述べ最後の章で著者の研究成果を述べている。第１章ではまず平面曲線の特異点などの局所理論を述べ，交点数を定義している。ここでは具体的な例をあげ交点数の計算も与えている。次に一般的に代数多様体の定義，正則射や有理写像などを述べ，支配的全射のとき関数体の拡大があることなどに言及している。次に曲線の特異点解消の証明を２次変換とともに述べている。あとは非特異曲線上の因子と線形系の定義と基本的性質を述べ，最後の節でリーマン・ロッホの定理とその応用を述べている。第２章は平面曲線のガロワ点に関する記述である。まず定義とそこから発生するいくつかの問題に言及して５次フェルマー曲線で具体的計算をしている。これらは三浦，吉原によって得られた成果を学んだ結果を著者の言葉でまとめたものである。最後の章では，Introduction で著者以前の成果，特に４次非特異曲線に対して，その上の点Ｐからの射影のとき，ガロワ閉包曲線の種数 g(P) の可能性は 3, 6,7,8,9,10 であり，3, 8, 9, 10 の例は存在することが分かっているが，6 と 7 は未解決であると述べている。次の節で著者によって得られた結果を２つの定理と系および命題としてまとめている。主な結果は g(P)=6, 7 となる曲線が存在し，更にそのようなすべての曲線の定義方程式を書き下している。g(P)=7 のときには３つのタイプがあり，たとえばそのうちの１つは

f(x, y) = (x^2 +axy+3by^2)(cx^2+exy+b^2y^2/3 +dx+by+1) + y

のように，パラメータとして，a,b,c,d,e を含む。g (P)=6 の場合のタイプは１つしかなく，しかもパラメータも１つ少ない。つまり g(P) が少ないほど存在する曲線は少なくなると予想される。ここはいわゆるモジュライの問題と関係がある。その他の成果として g(P)=6 の場合は P は変曲点でないことや１つの曲線が上記 g(P) の６個の値総てをとることはない，ことなど述べてある。最後の節において得られた定理その他の証明を与えている。手法は上記２つの章で述べたいくつかの結果や変曲点公式を用いて，相当膨大な計算を行って結論に到達している。

審査結果の要旨

第１章と２章は３章の準備であり，既成の結果をまとめたものである。そこにはオリジナルな成果はないが，ポイントを押さえよくまとめられており，具体例の計算など理解の確実さや深さをうかがわせるものがある。３章において著者のオリジナルな成果が述べられている。**Miura and Yoshihara, Field theory for function field of plane quartic curves, Journal of Algebra 226** (2000), 283--294 に未解決問題として提示されている問題の１つ：

「非特異４次平面曲線上の点 P に対して **g(P)=6 or 7** となる，曲線 **C** および **P** は存在するか？」

という問に完全に解決を与えたものである。これはおよそ６年間未解決問題として残されたままになっていた興味深い問題である。この節の内容を順に見てみると。まず **Introduction** において最近進展しつつあるガロワ点の概念を上手にまとめている。これは代数学としての体の理論と幾何学としての平面曲線の理論の相互交流する理論である。その辺の事情をうまく表現している。２節で未解決問題への解答が述べられており，求められていたもの以上に，すべての定義方程式まで書き下している。よってそこに現れるパラメータの個数から，どのくらい多くの曲線が存在するかがわかる。ただし，そのパラメータ数が最小であるかどうかまでは言及していない。もっともこちらは極めて難しい問題で，その解決は今後の問題である。得られた定理の副産物の１つとして，４次曲線Ｃを固定したとき，**g(P)** はたかだか５個の値しか取りえない，ことも得られている。これは小さな成果ではあるが知りたいことの１つではある。最後の節にまとめて証明が述べられている。ポイントは座標系をうまく取る，変曲点公式やリーマン・フルヴィッツの公式を用い，うまく種数を数えることである。大きな道具を使って大定理を導くという方法ではないが，地道に気の遠くなるほどの大量の計算を行い，（実際しばしばパソコンで大量の計算を行った様である）いわば著者の職人気質的なカンで方程式を見出している。一般的には層係数コホモロジー理論などの道具の登場する場ではあるが，このような古典的方向も存在意義はあるものと確信する。またこの成果は未解決な問に解決を与えたものでそれ自身興味深いが，それだけでなく次数が５以上の場合の研究の足がかりを与えるものでありすぐれた論文である。

よって，本論文は博士（理学）として十分であると認定した。