

Light Propagation and Gravitational Lensing
on the Weyl-like Spacetime
in Scalar-Tensor Theories of Gravity

—スカラー・テンソル重力理論における光の伝播と重力レンズ効果—

Name Shin-ei Tsuneishi

Doctoral Program of Fundamental Science and Energy Technology
Graduate School of Science and Technology
Niigata University

氏名 常石 真映

新潟大学院 自然科学研究科 博士後期課程
エネルギー基礎科学専攻
宇宙物理学研究室

概要

スカラー・テンソル重力理論は、Brans と Dicke による先導的な研究以来、一般相対性理論の自然な拡張として今日でも、たとえば超弦理論の低エネルギー領域における有効理論として注目されている。一般相対性理論では、重力場は、時空の幾何学的性質として解釈され、計量テンソルで記述される。その意味で一般相対性理論は、テンソル重力理論である。それに対してスカラー・テンソル重力理論は、重力定数をスカラー場と考える理論であり、この意味で、重力はテンソル場だけではなくスカラー場によっても媒介されることになる。ところで、現在にいたるまで、太陽系のような弱い重力場での実験や観測は、一般相対性理論に基づく結果と一致しているが、しかし、そもそもこのような重力場では、スカラー・テンソル重力理論と一般相対性理論との違いは、非常に小さい。そこで本論文では、強い重力場でのスカラー・テンソル重力理論の特有な性質を理解するという目的のため、この理論における静的で軸対称性をもつ特解を用いて、この時空での光の伝搬の性質や重力レンズ効果を調べた。この静的軸対称真空解は、漸近的平坦性という性質を持ち、スカラー場が定数になるときは、一般相対性理論における Weyl 解の 1 つである Voorhees の偏長解に一致する。なお、本論文は、光的測地線が、共形変換に対して不変であるという性質に着目して、結果が、スカラー・テンソル重力理論のモデルの詳細によらないように、共形変換の手法を用いている。まず、解に含まれる 3 つのパラメータの物理的意味を明らかにするために、空間的無限遠付近における解の漸近形を導出する。その結果、これらのパラメータが、それぞれ、スカラー場の大きさ、時空の非球対称性、そして共形変換によって対応づけられる Einstein 系における質量を表すことが示される。また、解に含まれる極が、近づく方向によっては特異点ではなくなるという、特異点の方向依存性について、簡潔な議論をする。

次に、解に含まれるパラメータの値の相違が時空構造にどのように反映されるかを理解するため、赤道面における光的測地線の方程式と Sachs の光学的スカラー方程式について調べる。ここで、光的測地線の方程式は、いわゆる光の軌道を表す式であり、光学的スカラー方程式は、光の像の振る舞いを表す式である。光的測地線に関して、いくつかの特別なパラメータのとき、衝突係数に関する関数として光の屈折角を解析的に求めることができる。この解析解から光の屈折角が、負になりえるという興味深い結果が得られる。また、衝突係数が減少するにしたがって、屈折角が増加から減少に移り変わるというシュワルツシルト時空にはない極値の存在が確認できる。さらに、その他さまざまなパラメータについても、数値的に光の屈折角を求める。そして、シュワルツシルト時空にはない特徴について、すなわち極値の個数、および負の屈折角が実現されるかどうかでパラメータ領域を分類する。その結果、極値が 2 個存在するという特異なパラメータ領域の存在が見いだされ、その領域がスカラー・テンソル重力理論特有の領域であることがわかる。また、注目すべきは、一般相対性理論における Weyl 解でも、光の屈折角が負になるパラメータ領域の存在が確認できたことである。ところで、負の屈折角の存在は、光の軌道が、“反射”することを示唆している、そこで、光的測地線の方程式を数値的に計算し、実際に光の軌道が“反射”している様子がわかる具体例を示す。そして、光の軌道が“反射”しているときの条件について考察し、“反射”が実現できるかどうかでパラメータ領域を分類する。

さて、光の像の振る舞いは、光学的スカラー方程式を解くことでわかるが、それは Riemann 曲率テンソルの要素である Ricci 項と Weyl 項の性質に依存する。

ここで、Ricci 項と Weyl 項は、それぞれ像の収縮と歪みに寄与する量である。ところが、Ricci 項より主に Weyl 項が効いており、さらに Weyl 項がシュワルツシルト時空と比較して、重大な定性的違いを示すことがわかる。また、Weyl 項の定性的性質を特徴づける特別な衝突係数が存在することが解析的にわかる。そこで、Weyl 項の定性的な違いをもとに、パラメータ領域を分類したところ、4つの異なった領域が存在することが示される。また、この Weyl 項による分類と屈折角の振る舞いによる分類、および光の反射が起こるパラメータ領域を比較したところ、高い類似性があることが示される。最後に、それぞれの領域で、数値的に光学的スカラー方程式を解き、光の像の振る舞いを調べる。このとき、薄いレンズ的描像が成り立つことが示される。また、光学的スカラー方程式に対する簡単な解析的モデルを考察し、このモデルがよい近似であることを示す。光の像に対する像の変形度を求め、衝突係数の関数としてその振る舞いを調べた結果、上記の特別な衝突係数の近傍において、像の変形度が非常に大きくなる現象が現れた。そこで、光の像の振る舞いの違いからパラメータ領域を分類したところ、光の像の分類と Weyl 項による分類とに密接な関係があるという結果を得た。これは、光の伝播と重力レンズ効果の性質に対して、上述した Weyl 項による分類が、非常に重要な物理的意味を持つことを示唆している。

Contents

§1 Introduction	1
1.1 記号一覧	3
§2 スカラー・テンソル重力理論における場の方程式	4
§3 スカラー・テンソル・ワイル解の幾何学的性質	5
3.1 スカラー・テンソル・ワイル解	5
3.2 スカラー・テンソル・ワイル解の空間的無限遠方での振る舞い	6
3.3 特異点の接近方向依存性	9
§4 光的測地線と光学的スカラーの解析	10
4.1 光的測地線の解析	10
4.2 光学的スカラー量の解析	14
§5 光的測地線と光学的スカラー量の数値計算結果	21
5.1 計算準備	21
5.2 光的測地線と屈折角	23
5.3 光的測地線束と像の変形度	28
§6 まとめ	39
Appendix A	
—スカラー・テンソル重力理論における場の方程式の導出—	41
Appendix B	
—Einstein 系でのラグランジアン の導出—	42
Appendix C	
—スカラー・テンソル・ワイル解の導出—	43
C.1 スカラー・テンソル重力理論における Ernst 方程式	43
C.2 スカラー・テンソル・ワイル解	44
C.2.1 偏長解	45
C.2.2 偏平解	45
Appendix D	
—光の屈折角の解析解—	46
D.1 屈折角の解析解	46
D.1.1 $\delta = 0, \Delta^2 = 2N$ ($N = 1, 2, 3, \dots$) のとき	46
D.1.2 $\delta = 1/2, \Delta^2 = 2N$ ($N = 1, 2, 3, \dots$) のとき	48
Appendix E	
—光の屈折角の近似解—	50
E.1 弱い重力場領域における屈折角	50
E.2 強い重力場領域における屈折角 ($\delta > 1/2$)	51

Appendix F

—光学的スカラー方程式の厳密解—	52
F.1 静的球対称時空	52
F.2 静的軸対称時空	53

Appendix G

—光学的スカラー方程式の解析的モデル—	53
G.1 解析的モデル： u_+ の場合	53
G.2 解析的モデル： u_- の場合	55

List of Figures

1	スカラー・テンソル・ワイル解の系列	6
2	領域 (δ, Δ) において非球対称性の尺度 $Q \equiv (\Delta^2 - 1)/\delta^2$ とスカラー場の大きさ $S \equiv \Delta^2/\delta^2 - 1$ が一定の線	8
3	屈折角 $\alpha(x_0)$ の解析解	14
4	最接近点における Weyl 項 $F(x_0)$ によって、パラメータ領域 (δ, Δ) を分類	19
5	座標 x ($x_0 < x$) の関数としての、Weyl 項、 $F(x)$ の振る舞い	20
6	Weyl 項 $F(x)$ の定性的性質による、パラメータ領域 (δ, Δ) の分類	20
7	衝突係数が (a) $h/2m = 3.0$ および (b) $h/2m = 2.17$ のときの光線の軌道	24
8	パラメータ領域 (δ, Δ) において、光線の軌道が反射する領域	25
9	衝突係数 h に対する、屈折角 α の振る舞い	26
10	衝突係数 (a) $h/2m = 3.0$ および (b) $h/2m = 2.17$ における、 Δ に対する屈折角 α の振る舞い	26
11	パラメータ領域 (δ, Δ) を、屈折角 $\alpha(h)$ の極値の個数によって、分類した図	27
12	屈折角が、負になり得るかどうかで、パラメータ領域 (δ, Δ) を二つの領域に分類した図	27
13	$C_+(\lambda)$ 、 $C_-(\lambda)$ の振る舞い：[n _A] の場合	28
14	光学的スカラー量 $C_+(\lambda)$ と $C_-(\lambda)$ の振る舞い：[n _B] の場合	30
15	光学的スカラー量 $C_+(\lambda)$ と $C_-(\lambda)$ の振る舞い：[i] の場合	30
16	光学的スカラー量 $C_+(\lambda)$ と $C_-(\lambda)$ の振る舞い：[ii] の場合	31
17	Weyl 項 $F(\lambda)$ 、Ricci 項 $\mathcal{R}(\lambda)$ の振る舞い：[n _A] の場合	31
18	Weyl 項 $F(\lambda)$ 、Ricci 項 $\mathcal{R}(\lambda)$ の振る舞い：[n _B] の場合	32
19	Weyl 項 $F(\lambda)$ 、Ricci 項 $\mathcal{R}(\lambda)$ の振る舞い：[i] の場合	32
20	Weyl 項 $F(\lambda)$ 、Ricci 項 $\mathcal{R}(\lambda)$ の振る舞い：[ii] の場合	33
21	光学的スカラー C_- が振動する例	34
22	像の変形度 $C(h)$ の振る舞い： $h_F < h_E$ の場合	37
23	像の変形度 $C(h)$ の振る舞い： $h_F > h_E$ の例	37
24	臨界係数 N_+ の条件 (a) ~ (d) をもとに、パラメータ領域 (δ, Δ) を4つに分類	38

§1 Introduction

重力が関わる物理現象を考察する際、我々が手にしている有力な理論として、一般相対性理論がある。しかし、素粒子理論の分野において重力とその他の相互作用との統一を重要な課題としている現在、重力の古典理論としての一般相対性理論になんらかの変更が加えられる可能性がある。このような視点から一般相対性理論の拡張理論として Brans-Dicke 理論 [1]、あるいはそれをより一般化した理論である、スカラー・テンソル重力理論 [2]-[4] が提案され、多くの理論物理学者によって研究されている。

一般相対性理論においては、重力場は、時空の幾何学的性質として解釈され、計量テンソルで記述される。その意味で一般相対性理論は、テンソル重力理論である。それに対して、スカラー・テンソル重力理論では重力定数 \hat{G} をスカラー場と考える理論であり、重力はテンソル場だけではなく、スカラー場によっても媒介される [5]-[7]。スカラー・テンソル重力理論は、理論に含まれるスカラー場 ϕ の関数 $\omega(\phi)$ の関数形により、さまざまなスカラー・テンソル重力理論が存在する [8]。特に、 ω が定数のときは、Brans-Dicke 理論と呼ばれる。このような重力理論は低エネルギー領域での超弦理論の有効理論として興味を持たれている [9]。また、近年、超弦理論の発展を背景にして、我々の宇宙が高次元時空に埋め込まれた膜 (ブレン) であるというブレン・ワールド理論 [10] が提唱され、その研究も盛んに行われているが、スカラー・テンソル重力理論は、ブレン・ワールド理論の 4 次元有効重力理論としての側面もある [11]。たとえば、2 枚のブレンがある Randall-Sundrum 模型 I [10] においてブレン上の曲率半径が 5 次元宇宙の曲率半径に比べて、十分に大きいとすると 2 枚のブレン上の重力が、それぞれ $\omega(\phi) = \pm 3/2 \cdot \phi / (1 \mp \phi)$ であるスカラー・テンソル型重力理論となることが示されている [11]。

歴史的に、Brans-Dicke 理論、あるいは、スカラー・テンソル重力理論が、生み出された背景には、重力定数 \hat{G} が時間変化するという Dirac の提案と Mach 原理がある [4]。Dirac の議論は、彼の巨大数仮説がもとになっている。最もよく知られた例の 1 つは、2 個の電子に働く重力とクーロン力の比 \mathcal{N} であり、それは次のような値である。

$$\mathcal{N} = 4\pi \frac{\hat{G} m_e^2}{e^2} \approx 2 \times 10^{-43}. \quad (1.1)$$

ここで、 m_e と e は、それぞれ電子の質量と素電荷を表す。Dirac は、「基本定数から作られる比は、すべて 1 程度の数で表されるべき。」と考えた。この観点からみると、 \mathcal{N} は本当の定数の比ではない。そこで、Dirac は、 \hat{G} は定数ではなく $\hat{G}(t) \sim t^{-1}$ のように宇宙の時間の逆数で減少しているものと想定した。このとき、現在の宇宙の年齢を $t_0 \approx 1.3 \times 10^{10}$ 年 とすると $\hat{G}(t)/\hat{G}(t_0) = t_0/t$ と表される。ここで、基本的な時間として、 $t_e = \hbar/m_e c^2 \approx 1 \times 10^{-21}$ 秒 で与えられる t_e を単位として採用すると、 $\hat{G}(t_e)/\hat{G}(t_0) = t_0/t_e \approx 3 \times 10^{38}$ となり、これを (1.1) 式に代入すると

$$\mathcal{N}(t_e) \approx 0.7 \times 10^{-4}, \quad (1.2)$$

が得られる。これは、(1.1) 式と比べれば、1 程度と考えられる。こうすることで、現在、 \mathcal{N} がとても小さい値なのは、我々の宇宙が誕生してから時間が過ぎたためという説明ができる。ところで、観測から 以下のように $\dot{\hat{G}}/\hat{G}$ の上限がわ

かっている。

$$\frac{\dot{\hat{G}}}{\hat{G}} = (0.2 \pm 0.4) \times 10^{-11}/\text{年} \quad (\text{Viking 計画}). \quad (1.3)$$

ここで、記号「 $\dot{}$ 」は、 d/dt を表す。さて、 $\dot{\hat{G}}/\hat{G}$ の上限を次のように近似してみる。

$$\frac{\dot{\hat{G}}(t_e)}{\hat{G}(t_o)} = -10^{-11}/\text{年} \sim -0.1 \times t_0^{-1}. \quad (1.4)$$

これは、 $\hat{G}(t) \sim t^{-0.1}$ を意味している。この場合は、(1.1)式の代わりに $N(t_e) \approx 2 \times 10^{-39}$ が得られる。これでは、1から程遠くなってしまふ。したがって、現在の観測から、Diracが当時展開した議論は、成立していないと考えられている[4]。しかしながら、重力定数が、真の定数ではなく「変数」であるという可能性を初めて指摘した意義は大きい。

一方、BransとDickeは、Machの主張、いわゆる「物体の慣性と重力的な性質は、宇宙にある他の物質の存在と、何らかの意味で結びついている」というMach原理を支持していた。たとえば、現在見えている、宇宙の質量を M 、半径を R としたとき、ほぼ次の関係式が成り立つ。

$$\frac{\hat{G}M}{Rc^2} \sim 1. \quad (1.5)$$

この関係が、宇宙が進化してもつねに成り立っているとすれば、

$$\hat{G} \sim \frac{Rc^2}{M}, \quad (1.6)$$

のように、 \hat{G} の値が宇宙の質量の分布や半径の大きさで決まると考えることもできる。そこから、重力定数は、実は定数ではなく時空の各点で違う値をとる、つまりスカラー場なのではないかという発想が導かれる[4]。

現在にいたるまで、太陽系のような弱い重力場での実験や観測は、一般相対性理論に基づく結果と一致しているが、しかし、そもそもこのような重力場では、スカラー・テンソル重力理論と一般相対性理論との違いは、非常に小さい[12]。一方、強い重力場領域では、一般相対性理論と比較して異なる側面を見せることが、わかっている[13][16]。たとえば、数値的な研究から、スカラー・テンソル重力理論では、非摂動効果によって中性子星のような孤立系の最大質量が増加するということが示されている[13][16]。したがって、スカラー・テンソル重力理論が、一般相対性理論とどのような性質の違いがあるかを明確に理解・把握することは、真の重力理論を知る礎として重要なことである。

通常天体は、回転しており非球対称である。したがって、星が球対称から変形し4重極モーメントを持ったときや回転しているときの重力レンズ効果の研究がなされている[14]。そこで、一般相対性理論とスカラー・テンソル重力理論の重要な違いを議論する際に、球対称外部解だけでなく軸対称外部解も重要な役割を果たすであろう。軸対称外部解の中でも、一般相対性理論でのTomimatsuとSatoの解[15]の系列に一致する解は、とても興味あるに違いない。ところが、スカラー・テンソル重力理論において、TomimatsuとSatoの解に対応する解の明白な形を、得ることは非常に難しく、一般相対性理論のKerr解に、対応するような解の場合にさえ導出するのは困難である。Kerr的な解のかわりに、静

的で軸対称性を持つ特解は、存在する [17]。この静的軸対称真空解は、漸近的平坦性という性質を持ち、スカラー場が定数になるときは、一般相対性理論における Weyl 解の 1 つである Voorhees の偏長解に一致する [17]。

本論文では、強い重力場でのスカラー・テンソル重力理論の特有な性質を理解するという目的のため、スカラー・テンソル・ワイル解と呼ばれる、この理論における静的で軸対称性をもつ特解に着目し、この時空での光の伝搬の性質や重力レンズ効果を調べる。なお、光的測地線が、共形変換に対して不変であるという性質に着目して、結果が、スカラー・テンソル重力理論のモデルの詳細によらないように、共形変換の手法を用いて解析する。

本論文の構成は、次のようになっている。第 2 節では、スカラー・テンソル重力理論について説明し、その場の方程式についてのまとめを行う。第 3 節では、静的で軸対称性をもつスカラー・テンソル・ワイル解について説明し、解に含まれる 3 つのモデルパラメータの物理的意味を明白にする。また、解に含まれる極の接近方向依存性についての簡潔な議論を行う。第 4 節では、光的測地線と光学的スカラーの方程式を解析的に調べ、その定性的特徴について考察する。第 5 節では、前節までに得られた結果を用いて、光的測地線と光学的スカラーの局所的な振る舞いを数値的に調べる。第 6 節で、本論文のまとめを述べる。

1.1 記号一覧

- 添字 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ は $0, 1, 2, 3$ を表す。
- 計量テンソル: $g = g_{ab} dx^a \otimes dx^b$
- クリストッフエル記号: $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{af} (\partial_c g_{fb} + \partial_b g_{fc} - \partial_f g_{bc})$
- 共変微分: ∇_a 用例 $\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \Gamma^b_{ac} V^c$
- Riemann 曲率テンソル: $R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{mc} \Gamma^m_{bd} - \Gamma^a_{md} \Gamma^m_{bc}$
- Ricci テンソル: $R_{ab} = R^c_{acb}$
- Ricci スカラー: $R = g^{ab} R_{ab}$
- Einstein テンソル: $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$
- 偏微分 ∂_a と共変微分 ∇_a はそれぞれコンマ「,」とセミコロン「;」であらわされることもある。
- 本論文では Brans-Dicke 系 (\hat{g}, ϕ) と Einstein 系 (g, φ) を記号 $\hat{}$ で区別している。計量 \hat{g} に対する上記の幾何学量には全て記号 $\hat{}$ が付いている。
- 本論文では、特に断らない限りは $c = G = 1$ の単位系を使うことにする。

§2 スカラー・テンソル重力理論における場の方程式

スカラー・テンソル重力理論では、重力相互作用はテンソル場 $\hat{g}_{\mu\nu}$ と、スカラー場 $\hat{\phi}$ によって媒介される [1], [5]-[17]。本論文では、スカラー・テンソル重力理論の作用として次のものを採用する。以後、記号 $[\hat{\quad}]$ がついた量は、 $\hat{g}_{\mu\nu}$ に関する量を表す。

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left[\hat{\phi} \hat{R} - \frac{\omega(\hat{\phi})}{\hat{\phi}} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\phi}_{,\mu} \hat{\phi}_{,\nu} \right] \sqrt{-\hat{g}} d^4x + S_{\text{matter}}[\hat{\Psi}_m, \hat{g}_{\mu\nu}], \quad \hat{\phi}_{,\mu} \equiv \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^\mu}. \quad (2.1)$$

ここで、 $\omega(\hat{\phi})$ は、スカラー・テンソル重力理論を特徴づける $\hat{\phi}$ の無次元関数で、Brans-Dicke 理論では定数となる [1]。また、 $S_{\text{matter}}[\hat{\Psi}_m, \hat{g}_{\mu\nu}]$ は、物質場 $\hat{\Psi}_m$ に関する作用である。

さて、Appendix A, B で示すように、スカラー・テンソル重力理論における場の方程式は、次の共形変換 $(\hat{g}, \hat{\phi}) \rightarrow (g, \varphi)$ 、

$$g_{\mu\nu} = A^{-2}(\varphi) \hat{g}_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$A^2(\varphi) = \frac{1}{\hat{\phi}}, \quad \frac{1}{3 + 2\omega(\hat{\phi})} = \left(\frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \equiv \alpha^2(\varphi), \quad (2.3)$$

によって、

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + 2 \left(\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} \right), \quad (2.4)$$

$$\nabla^\mu \varphi_{,\mu} = -4\pi \alpha(\varphi) T, \quad (2.5)$$

となる。また、物質場 $T^{\mu\nu}$ に対する保存則は Bianchi 恒等式から

$$\nabla_\nu G^\nu{}_\mu = 0 \implies \nabla_\nu T^\nu{}_\mu = \alpha(\varphi) T \nabla_\mu \varphi, \quad (2.6)$$

となる。なお、(2.4) 式は、

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + 2\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu}, \quad (2.7)$$

と同値である。

本論文では、 \hat{g} を計量にもつ多様体を Brans-Dicke 系、 g を計量にもつ多様体を Einstein 系と呼ぶことにする。場の方程式 (2.5) と (2.6) 式から、 $\alpha(\varphi)$ は物質場とスカラー場 φ の結合強度を表していることがわかる。一般相対性理論の場合は、 $\alpha(\varphi) = 0$ である。また、Brans-Dicke 理論では $\alpha(\varphi) = (\text{定数})$ である [1], [6]。より一般的なスカラー・テンソル重力理論の場合は、結合強度 $\alpha(\varphi)$ は φ に依存しており、 $A(\varphi)$ あるいは $\alpha(\varphi)$ の関数系を具体的に与えることがスカラー・テンソル重力理論を決めることに対応する。

天体等の孤立系とみなせる重力源の外部解に対しては、 $T_{\mu\nu} = 0$ として場の方程式 (2.5) と (2.7) は、次のように $\alpha(\varphi)$ の具体形によらない方程式になる。

$$R_{\mu\nu} = 2\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu}, \quad (2.8)$$

$$\nabla^\mu \varphi_{,\mu} = 0. \quad (2.9)$$

この方程式を満足する真空解は、スカラー・テンソル重力理論のモデルの詳細にかかわらず、解となり得る。

§3 スカラー・テンソル・ワイル解の幾何学的性質

この節では、スカラー・テンソル・ワイル解の幾何学的性質について調べる。解の導出は、Appendix C で示した [17]。

3.1 スカラー・テンソル・ワイル解

スカラー・テンソル・ワイル解は、Einstein 系における、静的軸対称真空解の1つであり次のような計量を持つ [17]。

$$ds^2 = - \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\delta dt^2 + \sigma^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-\delta} \times \left[\left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right)^{\Delta^2} (x^2-y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2} \right) + (x^2-1)(1-y^2)d\phi^2 \right], \quad (3.1)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right). \quad (3.2)$$

ここで δ , φ_0 および d は積分定数であり、 σ は、長さの次元を持つ任意の正の定数である。パラメータ Δ は、

$$\Delta^2 \equiv \delta^2 + d^2, \quad \Delta \geq 0, \quad (3.3)$$

で定義される定数である。

スカラー・テンソル・ワイル解の特徴は、計量に含まれる2つのパラメータ δ と Δ が、特別な値をとるとき、すでに知られている解に帰着することである [17]。まず、 $d=0$ ($\Delta=\delta$) のとき、解は、一般相対性理論のワイル系列の1つである Voorhees の偏長解 [20] に一致する。さらに $\delta=1$ のときは、

$$x = \frac{r}{\sigma} - 1, \quad y = \cos \theta, \quad m = \sigma, \quad (3.4)$$

とすると、次のように解はシュワルツシルト解になる。

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.5)$$

次に $\Delta=1$ のとき、Just 座標 (χ, θ) を次のように導入する。

$$x = \frac{\chi}{\sigma} - 1, \quad y = \cos \theta, \quad m = \delta\sigma. \quad (3.6)$$

3.2 スカラー・テンソル・ワイル解の空間的無限遠方での振る舞い

このときスカラー・テンソル・ワイル解 (3.1) は、スカラー・テンソル重力理論における球対称外部解に一致する。

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{\delta\chi}\right)^\delta dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{\delta\chi}\right)^{-\delta} d\chi^2 + \chi^2 \left(1 - \frac{2m}{\delta\chi}\right)^{1-\delta} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.7)$$

つまり、パラメータ Δ は、時空の軸対称性 ($\Delta \neq 1$) と球対称性 ($\Delta = 1$) を区別する重要な役割を持っている。なお、シュワルツシルト座標 r と Just 座標 χ との関係は、次のようになる。

$$r = \chi \left(1 - \frac{2m}{\delta\chi}\right)^{\frac{1-\delta}{2}}. \quad (3.8)$$

さらに、 $\delta = 1$ のとき、スカラー場は定数となり球対称外部解 (3.7) は、シュワルツシルト解 (3.5) に一致する。

最後に、 $\Delta = \delta = 0$ のときは、Minkowski 時空になる。解の関係を図 1 にまとめた。

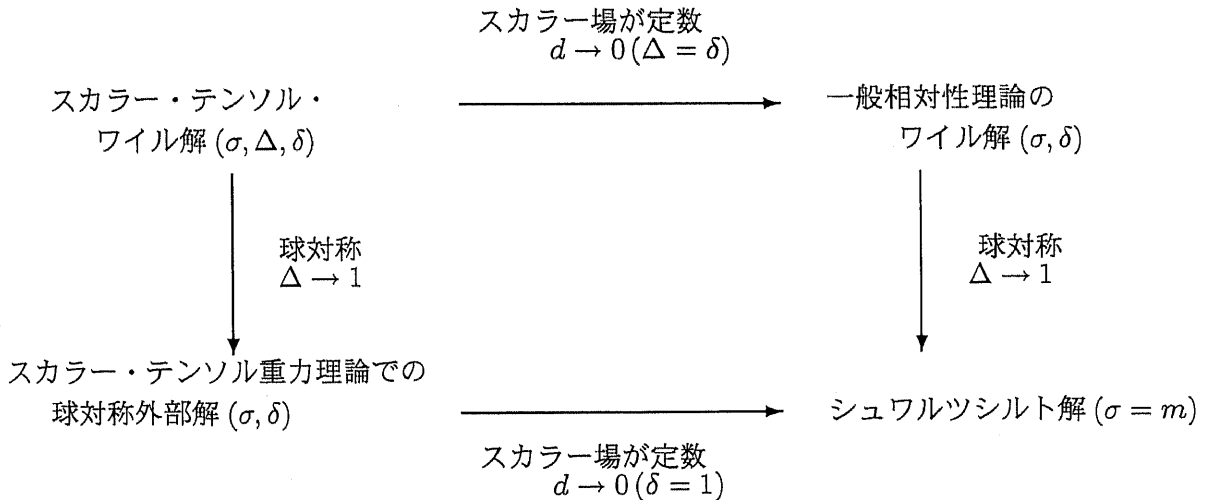


図 1: スカラー・テンソル・ワイル解の系列。一般相対性理論における静的軸対称解 (ワイル解) とスカラー・テンソル重力理論における球対称外部解を含む。それらは図中のパラメータの取り方でシュワルツシルト解になる。なお、Minkowski 時空は、 $\Delta = \delta = 0$ である。

3.2 スカラー・テンソル・ワイル解の空間的無限遠方での振る舞い

ここでは、解に含まれる 3 つのパラメータ Δ 、 δ および σ の物理的意味を明白にするために、空間的無限遠付近における、スカラー・テンソル・ワイル解の漸近形を調べる。

最初に、漸近的にシュワルツシルト座標となる座標 (r, θ) を次のように定義

3.2 スカラー・テンソル・ワイル解の空間的無限遠方での振る舞い

する。

$$x = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left[u^2 + v^2 + \frac{1-\Delta^2}{\Delta^2} + \sqrt{\left(u^2 + v^2 + \frac{1-\Delta^2}{\Delta^2} \right)^2 - \frac{4u^2v^2}{\Delta^2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

$$y = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left[u^2 + v^2 + \frac{1-\Delta^2}{\Delta^2} - \sqrt{\left(u^2 + v^2 + \frac{1-\Delta^2}{\Delta^2} \right)^2 - \frac{4u^2v^2}{\Delta^2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.10)$$

$$u = \frac{\delta}{m\Delta} \chi - 1, \quad v = \cos \theta, \quad m = \delta \sigma, \quad (3.11)$$

$$\frac{m}{\chi} = \frac{m}{r} + \left(1 - \frac{\Delta}{\delta} \right) \left\{ \frac{m^2}{r^2} + \left(3 - \frac{\Delta}{\delta} \right) \frac{m^3}{2r^3} \right\}. \quad (3.12)$$

上記の式 (3.9) ~ (3.11) は、 $\Delta = 1$ のとき (3.6) 式に一致する。また、上記の式 (3.9) ~ (3.12) は、以下の要件のもとで得られる。

- (a) 方程式 (3.9) と (3.10) は、Voorhees の偏重解の場合と同じ形 [20] であり、 $\Delta = \delta$ に対して $\chi = r$ としたとき、スカラー・テンソル・ワイル解の漸近形は、Voorhees の偏重解の漸近形と一致する。このとき、 g_{tt} の漸近形は、次のようになる。

$$g_{tt} = -1 + \frac{2m}{r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\delta^2 - 1}{\delta^2} \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \frac{m^3}{r^3} + \mathcal{O} \left(\frac{m^4}{r^4} \right). \quad (3.13)$$

- (b) パラメータが $\Delta = 1$ の場合、スカラー・テンソル・ワイル解の漸近形は球対称外部解の漸近形と一致する。このとき、 g_{tt} の漸近形および、シュワルツシルト座標 r と Just 座標 χ の関係は、それぞれ次のようになる。

$$g_{tt} = -1 + \frac{2m}{r} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{m^3}{r^3} + \mathcal{O} \left(\frac{m^4}{r^4} \right), \quad (3.14)$$

$$\frac{m}{\chi} = \frac{m}{r} + \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \left\{ \frac{m^2}{r^2} + \left(3 - \frac{1}{\delta} \right) \frac{m^3}{2r^3} + \mathcal{O} \left(\frac{m^4}{r^4} \right) \right\}. \quad (3.15)$$

- (c) パラメータ Δ と δ が、どんな値でも g_{tt} と $g_{\theta\theta}$ の漸近形が、それぞれ次のようになる。

$$g_{\theta\theta} = r^2 \left\{ 1 + 0 \cdot \left(\frac{m}{r} \right) + 0 \cdot \left(\frac{m^2}{r^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m^3}{r^3} \right) \right\}, \quad (3.16)$$

$$g_{tt} = -1 + \frac{2m}{r} + 0 \cdot \left(\frac{m^2}{r^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m^3}{r^3} \right). \quad (3.17)$$

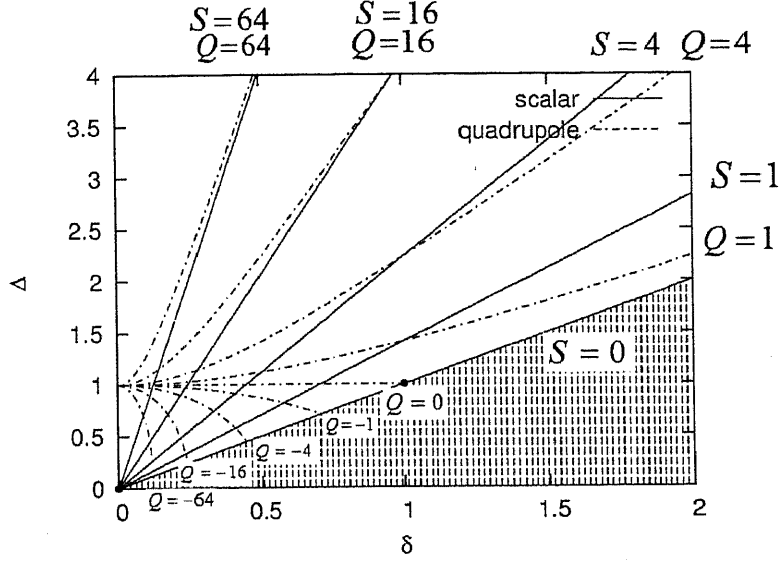


図 2: 領域 (δ, Δ) において非球対称性の尺度 $Q \equiv (\Delta^2 - 1)/\delta^2$ とスカラー場の大きさ $S \equiv \Delta^2/\delta^2 - 1$ が一定になる線。点線は、 Q の値が一定の場合を表している。実線は、 S の値が一定の場合を表している。なお、 $\delta \gg 1$ の領域では、パラメータ領域の各点で $Q \sim S + 1$ の関係となる。特に、 $Q = 1$ の場合は、 $\delta \gg 1$ で漸近的に $S = 0$ の実線 ($\Delta = \delta$) に近づく。

式 (3.9)~(3.12) により、空間的無限遠方におけるスカラー・テンソル・ワイル解の漸近形は、次のようになる。

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2m}{r} + \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta^2}{\delta^2} - 1 \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta^2 - 1}{\delta^2} \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right\} \frac{m^3}{r^3} \right] dt^2 + \left[1 - \frac{2m}{r} + \left(\frac{\Delta^2}{\delta^2} - 1 \right) \frac{m^2}{r^2} \right]^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.18)$$

$$\frac{\delta}{d} (\varphi - \varphi_0) = - \frac{m}{r} - \frac{m^2}{r^2} - \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta}{\delta} \right)^2 - \left(\frac{\Delta^2 - 1}{3\delta^2} \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right\} \frac{m^3}{r^3}. \quad (3.19)$$

この結果から、 $(d/\delta)^2 = \Delta^2/\delta^2 - 1$ であることに注意すると、解の漸近形に含まれているパラメータ Δ 、 δ および σ は、 $\Delta^2/\delta^2 - 1$ 、 $(\Delta^2 - 1)/\delta^2$ および $m (= \delta\sigma)$ という形で現れ、それぞれスカラー場の大きさ、時空の非球対称性、ならびに質量を意味していると解釈できる。重要なことは、 g_{tt} に含まれる非球対称性は、ニュートン重力ポテンシャルの 4 重極モーメントと解釈できることである。図 2 に、パラメータ領域 (δ, Δ) において非球対称性の尺度 $Q \equiv (\Delta^2 - 1)/\delta^2$ とスカラー場の大きさ $S \equiv \Delta^2/\delta^2 - 1$ が一定になる線を示した。

3.3 特異点の接近方向依存性

3.3 特異点の接近方向依存性

スカラー・テンソル・ワイル解は、 $x = 1$ で特異点を持ち、一般には、Voorheesの偏重解と同様な定性的特徴を持つ裸の特異点である。その空間的なトポロジーは、一般には S^2 であるが、 $\Delta = 1$ 、 $\delta \neq 1$ のとき $x = 1$ は、スカラー・テンソル重力理論の球対称外部解において $\chi = \delta/2m$ に対応し、光の特異点である。この特異点は文字通り「点」であり、したがってそのトポロジーは S^2 ではない。さらに $\Delta = \delta = 1$ のとき、 $x = 1$ は事象の地平面 $r = 2m$ に対応し、そのトポロジーは再び S^2 になる。このとき、真の特異点 $r = 0$ は、事象の地平面によって隠される。さて、 $\Delta^2 \neq 1$ のとき、特異面 $x = 1$ において、2つの極、つまり $y = 1$ と $y = -1$ は、以下で示されるように接近方向によっては、特異点にならない場合がある。

スカラー・テンソル・ワイル解において、曲率不変量 $R^{\mu\nu\sigma\rho}R_{\mu\nu\sigma\rho}$ は、次のようになる。

$$R^{\mu\nu\sigma\rho}R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{4}{\sigma^4} (x-1)^{2(\delta-\Delta^2-1)} (x+1)^{-2(\delta+\Delta^2+1)} (x^2-y^2)^{2\Delta^2-3} \times \\ [-4\Delta^4\delta^2(1-y^2) + 4\Delta^4\delta x(1-y^2) - 3\Delta^4(x^2-y^2) \\ + 8\Delta^2\delta^3x(1-y^2) - 2\Delta^2\delta^2(-4+3y^2-6y^2x^2+7x^2) \\ - 4\Delta^2\delta x(1+y^2-2x^2) - 7\delta^4(x^2-y^2) \\ - 8\delta^3x(1+y^2-2x^2) - 4\delta^2(1-y^2-3x^2+3x^4)]. \quad (3.20)$$

ここでは、簡単な例として、 (x, y) -面上において $y = x - (x-1)^\alpha$ によって与えられた経路を用いて考察する。ここで、指数 α は定数であるが、経路に沿って不等式 $x > 1$ と $y < 1$ が成立するために条件 $0 < \alpha < 1$ が加わる。次に、曲率不変量 (3.20) を見ると、これは、以下のような発散項と経路に沿って正則な (x, y) の多項式との積であることがわかる。

$$(x-1)^{2(\delta-\Delta^2-1)} (x-y)^{2\Delta^2-3} = (x-1)^K, \quad (3.21) \\ K \equiv (2\Delta^2-3)\alpha - 2(\Delta^2-\delta+1).$$

これから、 $K < 0$ のとき、曲率不変量 (3.20) は、経路に沿って発散することがわかる。一方、 $K \geq 0$ のとき、曲率不変量 (3.20) は、経路に沿って時空の特異点に遭遇しないことがわかる。ここで注意すべきことは、 Δ の定義: $\Delta \equiv \sqrt{\delta^2 + d^2} \geq |\delta|$ により、不等式 $\Delta^2 - \delta + 1 > 0$ がつねに成立することである。したがって、指数 K の符号は、次のように係数 $2\Delta^2 - 3$ の符号に依存する。

(a) $2\Delta^2 - 3 \leq 0$ の場合

任意の正の定数 α に対して、経路に沿って指数 K は、つねに負である。よって、極 $(x, y) = (1, 1)$ は、つねに時空の特異点になる。

(b) $2\Delta^2 - 3 > 0$ の場合

定数 α が、 $\alpha \geq \alpha_0 \equiv 1 - (2\delta - 5) / (2\Delta^2 - 3) > 0$ を満足するとき、 $K \geq 0$ が成立し、経路に沿って極 $(x, y) = (1, 1)$ は、時空の特異点にならない。

ここで、指数 K が正になるために必要なパラメータ Δ と δ の条件をまとめる。まず、上記の場合分けから条件 $\Delta^2 > 3/2$ が必要である。次に、不等式 $\delta < 5/2$ が成立するとき、上記 (b) で定義されたパラメータ α_0 は、つねに 1 より大きくなり、 α についての条件 $0 < \alpha < 1$ が成立しない。したがって、指数 K が正になるためには、2つの条件 $\Delta^2 > 3/2$ と $\delta \geq 5/2$ が同時に成立しなければならない。これは、 $\Delta \geq \delta$ であることを考慮すると、 $\Delta \geq \delta \geq 5/2$ を意味する。さて、別の見方をすれば、 α_0 は、 Δ と δ の関数と考えられる。上記の条件 $\Delta^2 > 3/2$ と $\delta \geq 5/2$ のもとで、 α_0 は、 Δ と δ の単調関数であり、 $\Delta = \delta = (5 + \sqrt{19})/2$ において最小値 $\alpha_0 = (1 + \sqrt{19})/6$ を持つ。その結果、 $0 < \alpha < (1 + \sqrt{19})/6$ の場合、 $\alpha < \alpha_0$ となり、指数 K は、任意の Δ と δ に対して、つねに負になる。

§4 光的測地線と光学的スカラーの解析

この節では、解析的手法によって、スカラー・テンソル・ワイル解における回転のない光的測地線ならびに光学的スカラーの性質を調べる。今後、パラメータ δ を非負として、 $m \equiv \delta\sigma \geq 0$ が成立しているとする。したがって、スカラー・テンソル重力理論におけるパラメータの範囲は、 $0 \leq \delta \leq \Delta$ であり、一般相対性理論の場合は、 $0 \leq \delta = \Delta$ となる。

4.1 光的測地線の解析

光的ベクトル \hat{i}^μ に対し、 $\hat{g}_{\mu\nu}\hat{i}^\mu\hat{i}^\nu = A^2(\varphi)g_{\mu\nu}\hat{i}^\mu\hat{i}^\nu = 0$ なので、共形変換に対して光的という性質は不変である。そこで、 \hat{g} での幾何学量として光的測地線 $\hat{k}^\mu = dx^\mu/dv$ を考えよう。ここで v は、アフィンパラメータである。このとき g での光的測地線 k^μ は、次のように与えられる。

$$d\lambda = A^{-2}dv, \quad k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = A^2\hat{k}^\mu \quad \implies \quad \hat{k}^\alpha \hat{\nabla}_\alpha \hat{k}^\mu = \frac{1}{A^4} k^\alpha \nabla_\alpha k^\mu = 0. \quad (4.1)$$

スカラー・テンソル・ワイル解については、一般の光的測地線の解析は困難である。ところが、初期条件として $y = 0$ 、 $dy/d\lambda = 0$ を選べば光的測地線は、赤道面 $y = 0$ からはずれることがない。また、赤道面では、球対称時空で用いた解析的手法が使えるという利点もある。そこで、赤道面 $y = 0$ 上での特別な光的測地線に着目し考察する。このとき光的測地線の方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{W}^2 &= 1 - \frac{h^2}{\sigma^2(x^2 - 1)} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2\delta} \equiv 1 - V(x), \\ \dot{t} &= \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^\delta, \quad \dot{\phi} = \frac{h}{\sigma^2(x^2 - 1)} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\delta, \end{aligned} \quad (4.2)$$

に帰着される。ここで、記号「 $\dot{\cdot}$ 」はアフィンパラメータ λ での微分を表し、定数 h は、衝突係数である。また、 W は x の関数で

$$\frac{dx}{dW} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^{\frac{\Delta^2 - 1}{2}}, \quad (4.3)$$

によって定義される [17]。

4.1 光的測地線の解析

興味ある特別な軌道の1つは、円軌道 x_c であり、それは、 $\dot{W} = 0$ と $dV/dx = 0$ から決まるが、一般相対性理論の場合と異なり、領域 $x > 1$ での円軌道 x_c は、 $\delta > 1/2$ の条件を満足するときのみ存在することが知られている [17]。

$$x = x_c \equiv 2\delta > 1 \longrightarrow \delta > \frac{1}{2}. \quad (4.4)$$

また、 $\delta = 1/2$ は、臨界値であり、 $\delta < 1/2$ の場合は、後で示されるように、多くの幾何学量が $\delta > 1/2$ の場合と比べて、非常に異なった特性を示す。

漸近的な領域 $r \gg m$ (第3.2節：参照) では、測地線方程式は、次のように近似される。

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 1 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) + \left(1 - \frac{h^2}{r^2}\right) \left(\frac{\Delta^2}{\delta^2} - 1\right) \frac{m^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m^3}{r^3}\right). \quad (4.5)$$

以下にあるシュワルツシルト時空の厳密な結果と比較すると、補正項が (4.5) 式の第3項目に現れているのがわかる。

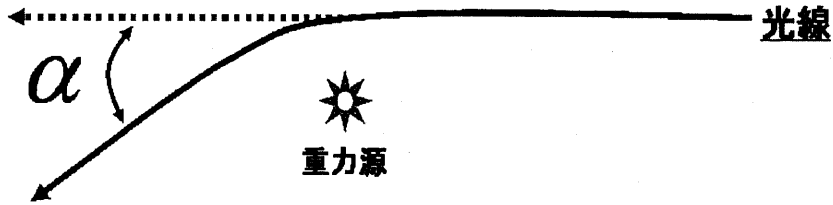
$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 1 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (4.6)$$

光的測地線の方程式 (4.2) により、光線の屈折角 α は、次のように与えられる。

$$\alpha(x_o) = 2 \int_{x_o}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{\frac{1-\Delta^2}{2}}}{\sqrt{x^2-1} \sqrt{\frac{x^2-1}{x_o^2-1} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2\delta} \left(\frac{x_o+1}{x_o-1}\right)^{-2\delta} - 1}} dx - \pi. \quad (4.7)$$

ここで、パラメータ x_o は、重力源に最も近づいたときの x の値であり、衝突係数 h と次のような関係にある。

$$h = \sigma \sqrt{x_o^2 - 1} \left(\frac{x_o + 1}{x_o - 1}\right)^\delta. \quad (4.8)$$



屈折角は、散乱軌道に対してのみ定義される量なので、 $\delta < 1/2$ の場合に許される x_o の範囲は、 $x_o > 2\delta$ であり、 $\delta < 1/2$ の場合には、 x_o の範囲は、 $x_o > 1$ となる。したがって、散乱軌道となる衝突係数の範囲は、次のようになる。

$$h > h_* = \begin{cases} 2m \sqrt{1 - \frac{1}{4\delta^2} \left(\frac{2\delta+1}{2\delta-1}\right)^\delta} & (\delta > 1/2) \\ 4m & (\delta = 1/2) \\ 0 & (\delta < 1/2), \end{cases} \quad m = \delta\sigma \geq 0, \quad (4.9)$$

4.1 光的測地線の解析

たとえば、 $\delta = 0.53, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0$ のとき、 $h_*/2m$ は、それぞれ 2.161, 2.543, 2.598, 2.667, 2.690 という値になる。座標 x は、散乱軌道に沿って、“近日点” $x = x_o$ まで減少し、その後増加する。

シュワルツシルト時空の場合は、屈折角 $\alpha(x_o)$ を解析的に求めることはできない。ところが、スカラー・テンソル・ワイル解の場合、以下の特別なパラメータ δ, Δ に対し、屈折角 $\alpha(x_o)$ を解析的に求めることができる (Appendix D)。

(a) $\delta = 0, \Delta^2 = 2N$ ($N = 1, 2, 3, \dots$) のとき

$$\begin{aligned} \alpha(x_o) &= \pi \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{x_o^2} \sum_{p=0}^{N-1} \frac{(-1)^p (2p-1)!! (N-1)!}{2^p (N-p-1)! (p!)^2 x_o^{2p}}} - 1 \right\} \\ &= \pi \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{x_o^2} \left(1 - \frac{N-1}{2x_o^2} + \frac{3(N-1)(N-2)}{16x_o^4} - \dots \right)} - 1 \right\} \\ &\sim \begin{cases} -\pi & (x_o \sim 1) \\ -\frac{\pi \Delta^2}{4x_o^2} & (x_o \gg 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.10)$$

これは、 $m = 0$ の場合に対応している。図 3a に、 $\delta = 0, N = 1, 2, 3, 4$ の場合の屈折角を示した。図 3a より、どのような N に対しても、屈折角は負であり、 x_o の単調増加関数であることがわかる。また、屈折角は、 N の単調減少関数である。

(b) $\delta = 1/2, \Delta^2 = 4L + 2$ ($L = 0, 1, 2, \dots$) のとき

(i) $L = 0$ の場合

$$\begin{aligned} \alpha(x_o) &= \pi \left\{ \frac{x_o + 1}{\sqrt{x_o(x_o + 2)}} \left[\frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{x_o + 1} + 1 \right] - 1 \right\} \\ &\sim \begin{cases} \pi \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} - 1 \right) > 0 & (x_o \sim 1) \\ \frac{2}{x_o} - \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{x_o^2} & (x_o \gg 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.1 光的測地線の解析

(ii) $L \geq 1$ の場合

$$\begin{aligned}
 \alpha(x_o) &= 2\sqrt{x_o(x_o+2)} \left[\frac{x_o+1}{x_o(x_o+2)} \right]^{4L+1} I_L(x_o) - \pi, \\
 I_L(x_o) &= \sum_{n=0}^L \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2L)!}{(2L-2n)!(2n-k)!k!} \eta(x_o)^{2(L-n)} \xi(x_o)^k A_\ell(x_o) \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2L)!}{(2L-2n-1)!(2n-k+1)!k!} \eta(x_o)^{2(L-n)-1} \xi(x_o)^k B_\ell(x_o), \\
 A_p(x_o) &= \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \frac{1}{x_o+1} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{x_o(x_o+2)}}{x_o+1} \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(2p-2r-2)!!}{(2p-2r-1)!!} \frac{1}{(x_o+1)^{2p-2r-1}} \right\}, \\
 B_p(x_o) &= \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \frac{\sqrt{x_o(x_o+2)}}{x_o+1} \sum_{r=0}^p \frac{(2p-2r-1)!!}{(2p-2r)!!} \frac{1}{(x_o+1)^{2p-2r}}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

ここで、 $\eta(x_o)$ と $\xi(x_o)$ は、 $\eta(x_o) = 2/(x_o+1)$ 、 $\xi(x_o) = 1 - 2x_o - x_o^2$ であり、また、 $\ell = L + n - k$ である。

(c) $\delta = 1/2$ 、 $\Delta^2 = 4L + 4$ ($L = 0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\begin{aligned}
 \alpha(x_o) &= -2\sqrt{x_o(x_o+2)} \left[\frac{x_o+1}{x_o(x_o+2)} \right]^{4L+3} J_L(x_o) - \pi, \\
 J_L(x_o) &= \sum_{n=0}^L \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2L+1)!}{(2L-2n)!(2n-k+1)!k!} \eta(x_o)^{2(L-n)} \xi(x_o)^k A_{\ell+1}(x_o) \\
 &\quad + \sum_{n=0}^L \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2L+1)!}{(2L-2n+1)!(2n-k)!k!} \eta(x_o)^{2(L-n)+1} \xi(x_o)^k B_\ell(x_o).
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

ここで、 $\ell = L + n - k$ である。また、関数 $\eta(x_o)$ 、 $\xi(x_o)$ 、 $A_p(x_o)$ および $B_p(x_o)$ は、(b) の場合と同じ関数である。

上記 (b) と (c) は、 $\delta = 1/2$ かつ $\Delta^2 = 2N$ ($N = 1, 2, 3, \dots$) の 1 組にまとめられる。図 3b に、 $\delta = 1/2$ 、 $N = 1, 2, 3, 4$ の場合の屈折角を示した。図 3b から、屈折角のグラフには、 $\zeta = 1.1 \sim 1.4$ において極値の存在がみられる。これは、衝突係数の減少関数であるシュワルツシルト時空の場合の屈折角とは、対照的である。注目すべきことは、 N が 1 以外のとき、小さな衝突係数に対して、屈折角が負になっていることである。負の屈折角の存在は、光線の " 反射 " を示しており、この特異な振る舞いに対する条件については、第 5 節で考察する。

4.2 光学的スカラー量の解析

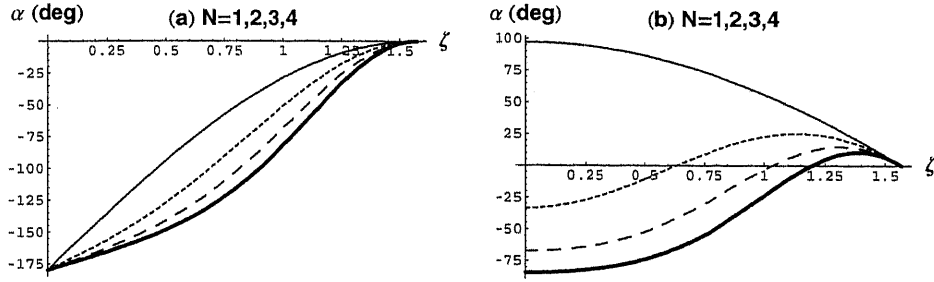


図 3: いくつかの特別なパラメータ (δ, Δ) に対する、屈折角の解析解。横軸は $\zeta(x_0)$ である。ここで $\zeta(x_0)$ は、 $\cos \zeta = 1/x_0$ で定義され、その範囲は、 $0 \leq \zeta \leq \pi/2$ である。縦軸は、屈折角 $\alpha(x_0)$ であり、単位は [度] である。図 (a) は $\delta = 0, \Delta^2 = 2N$ の場合、図 (b) は、 $\delta = 1/2, \Delta^2 = 2N$ の場合であり、細い実線は $N = 1$ 、短い点線は $N = 2$ 、長い点線は $N = 3$ 、太い実線は $N = 4$ の場合を、それぞれ表している。

4.2 光学的スカラー量の解析

時空の局所的な幾何学的性質は、計量テンソルの 2 階微分を含む Riemann 曲率テンソルで表される。Riemann 曲率テンソルは、ニュートン重力における潮汐力に対応するので、光的測地束に対する光学的スカラー量の解析は、時空の局所的な構造を理解するのに有用である。まず、次の性質を持つ光的テトラド $\{\hat{\mathbf{E}}_{(1)}, \hat{\mathbf{E}}_{(2)}, \hat{\mathbf{E}}_{(3)}, \hat{\mathbf{E}}_{(4)}\} = \{\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{t}}, \hat{\bar{\mathbf{t}}}\}$ を導入する。

$$\hat{k}^\mu \hat{\nabla}_\mu \hat{E}_{(a)}^\nu = 0, \quad \hat{g}_{\mu\nu} \hat{E}_{(a)}^\mu \hat{E}_{(b)}^\nu = -\delta_a^1 \delta_b^2 - \delta_a^2 \delta_b^1 + \delta_a^3 \delta_b^4 + \delta_a^4 \delta_b^3. \quad (4.14)$$

このとき、光学的スカラー $\hat{\theta}$ と $\hat{\sigma}$ は次のように定義される。

$$\hat{\theta} = \hat{\nabla}_\mu \hat{k}_\nu \hat{t}^\mu \hat{\bar{t}}^\nu, \quad \hat{\sigma} = \hat{\nabla}_\mu \hat{k}_\nu \hat{t}^\mu \hat{t}^\nu. \quad (4.15)$$

ここで $\hat{\theta}$ は、光的測地線束の面積膨張率 (Expansion)、複素数 $\hat{\sigma}$ は歪み率 (Shear) と、それぞれ呼ばれている。

光的ベクトル \hat{k}^μ と \hat{t}^μ の共形変換を $k^\mu = A^2 \hat{k}^\mu$ と $t^\mu = A \hat{t}^\mu$ として、Einstein 系での光学的スカラー θ と σ を

$$\theta = A^2 \hat{\theta} - k^\mu \nabla_\mu \ln A, \quad \sigma = A^2 \hat{\sigma}, \quad (4.16)$$

で定義すると θ と σ に対する光学的スカラー方程式は、

$$\frac{d\theta}{d\lambda} + \theta^2 + |\sigma|^2 = -\frac{1}{2} R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \equiv -\mathcal{R}, \quad (4.17)$$

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} + 2\theta\sigma = -R_{\mu\alpha\nu\beta} k^\mu k^\nu \bar{t}^\alpha \bar{t}^\beta = -C_{\mu\alpha\nu\beta} k^\mu k^\nu \bar{t}^\alpha \bar{t}^\beta \equiv F, \quad (4.18)$$

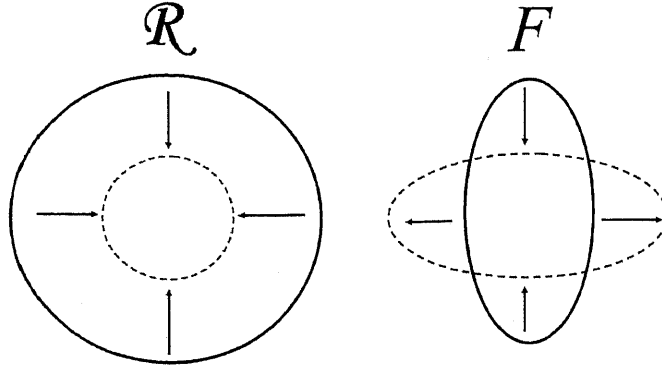
となり、Brans-Dicke 系での $\hat{\theta}$ と $\hat{\sigma}$ に対する光学的スカラー方程式と同じ形になる。ここで $C_{\mu\alpha\nu\beta}$ は、Weyl 曲率である。今後、光学的スカラー方程式の右辺に現れる \mathcal{R} を Ricci 項、 F を Weyl 項と呼ぶ。

Einstein 系での場の方程式 (2.7) を用いると Ricci 項は

$$\mathcal{R} = 4\pi T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu + \varphi_\mu \varphi_\nu k^\mu k^\nu, \quad (4.19)$$

4.2 光学的スカラー量の解析

となる。したがって、Ricci 項 \mathcal{R} は物質場およびスカラー場の局所的な分布に支配されている量である。それに対して Weyl 項 F は Weyl 曲率によって与えられ、ニュートン重力における潮汐力に対応する。



Dyer は、一般的な静的球対称時空での光学的スカラー方程式の一般解を求めている。詳細は Appendix F で述べるが、Weyl 項 F と歪み率 σ は、一般性を欠くことなく実数であるとみなせる。スカラー・テンソル・ワイル解は、軸対称時空であるが、赤道面 $y = 0$ 上の光的測地線に関しては、Dyer の手法を適用できる。そこで、次の式で定義される、新しい光学的スカラー量 C_+ と C_- を導入する。

$$\frac{d}{d\lambda} \ln C_+ = \theta + \sigma, \quad \frac{d}{d\lambda} \ln C_- = \theta - \sigma. \quad (4.20)$$

このとき、光学的スカラー量 C_+ と C_- に対する方程式が、次のように書き換えられる。

$$\frac{d^2 C_+}{d\lambda^2} = (-\mathcal{R} + F)C_+, \quad \frac{d^2 C_-}{d\lambda^2} = (-\mathcal{R} - F)C_-. \quad (4.21)$$

式(4.21)は、測地線偏差の方程式に相当し、Einstein 系における無限小の像の主軸の大きさは、 C_+ と C_- によって表される。また、Einstein 系における C_{\pm} に対する共形変換を、

$$C_{\pm} = \frac{\hat{C}_{\pm}}{A} \quad (4.22)$$

と定義する。

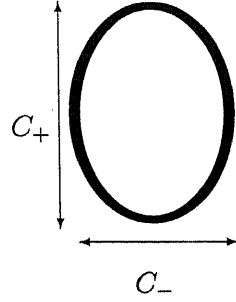
このとき、Brans-Dicke 系における \hat{C}_+ と \hat{C}_- に対する方程式は(4.21)式と同じ形になる。なお、Einstein 系における Ricci 項 \mathcal{R} および Weyl 項 F に対する共形変換は、

$$\mathcal{R} = A^4 \hat{\mathcal{R}} - (k^\mu \nabla_\mu \ln A)^2 + k^\nu k^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu \ln A \quad (4.23)$$

$$F = A^4 \hat{F} \quad (4.24)$$

となる。

4.2 光学的スカラー量の解析



スカラー・テンソル・ワイル解の赤道面 $y = 0$ 上での、Ricci 項 $\mathcal{R}(x)$ 、および Weyl 項 $F(x)$ は、それぞれ次のようになる (Appendix F、Ref.[17])。

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(x) &= \frac{\Delta^2 - \delta^2}{\sigma^2} \frac{1}{x^2(x^2 - 1)} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^{\Delta^2} \left[1 - \frac{(h/\sigma)^2}{x^2 - 1} \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^{2\delta} \right] \\ &= \frac{\Delta^2 - \delta^2}{(x^2 - 1)^2} (k^1)^2, \quad k^1 = \frac{dx}{d\lambda},\end{aligned}\quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{x^3(x^2 - 1)} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^{\Delta^2} \times \tilde{F}(x), \\ \tilde{F}(x) &= \delta(\Delta^2 - 1) \\ &\quad + \frac{(h/\sigma)^2}{x^2 - 1} \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^{2\delta} \{ \delta(\Delta^2 - 1) - (\Delta^2 + 2\delta^2)x + 3\delta x^2 \}.\end{aligned}\quad (4.26)$$

ここで、 h は、すでに述べたように衝突係数である。一般相対性理論 $\Delta = \delta$ の場合は、 $\mathcal{R}(x) = 0$ となる。漸近的な領域 $x \gg 1$ では、 $\mathcal{R}(x)$ と $F(x)$ が m/r の冪で、それぞれ次のように表される。

$$\mathcal{R}(x) \sim \frac{m^2 (\Delta^2 - \delta^2)}{\delta^2 r^4} \left[1 + \frac{4m}{r} - \frac{h^2}{r^2} \left(1 + \frac{m}{r} \right) \right], \quad (4.27)$$

$$F(x) \sim \frac{3mh^2}{r^5} \left(1 - \frac{\Delta^2 - \delta^2}{3\delta^2} \frac{m}{r} + \frac{4\Delta^2 + \delta^2 - 5m^2}{6\delta^2} \frac{m^2}{r^2} \right) + \frac{\Delta^2 - 1}{\delta^2} \frac{m^3}{r^5}.\quad (4.28)$$

ここで、 r は、(3.9)~(3.12) 式で定義された座標である。

すぐに気が付くことは、Ricci 項の値が、 $\mathcal{R}(x) \geq 0$ の範囲となっていることである。また、最接近点 $x = x_0$ では、 $k^1 = 0$ となるので、必ず $\mathcal{R}(x_0) = 0$ となる。Weyl 項については、必ずしも正の値になるとは限らず、光の軌道に沿って負の値になり得る。第 5 節の数値的な研究により、Weyl 項が Ricci 項より有効に働いていることから、Weyl 項の定性的な性質に従って、パラメータ領域 (δ, Δ) を以下のように分類していく。

シュワルツシルト時空 $\delta = \Delta = 1$ のとき、Weyl 項 (4.26) は、

$$F(x) = \frac{3h^2}{\sigma^4(x+1)^5} = \frac{3mh^2}{r^5}, \quad (4.29)$$

となる。このとき、Weyl 項 (4.29) は、次のような性質を持つことがわかる。

A1 散乱軌道 $x > x_0$ に対して、厳密に正定値をとる。

4.2 光学的スカラー量の解析

A2 座標 x に対する、単調減少関数である。

A3 散乱軌道に沿って、最接近点 $x = x_0$ で最大値となる。

上記の性質のため、最接近点付近の Weyl 項が、最も光線に影響を与えていると単純に推測できる。この理由により、まず、最接近点における Weyl 項 $F(x_0)$ の定性的振る舞いによって、パラメータ領域 (δ, Δ) を分類する。式 (4.8) と (4.26) から、 $F(x_0)$ は

$$\begin{aligned} F(x_0) &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{x_0^3(x_0^2-1)} \left(\frac{x_0^2}{x_0^2-1} \right)^{\Delta^2} f(x_0), \\ f(x_0) &= 3\delta x_0^2 - (\Delta^2 + 2\delta)x_0 + 2\delta(\Delta^2 - 1), \end{aligned} \quad (4.30)$$

となる。最も興味深いことは、 $x_0 = x_{F+}$ と $x_0 = x_{F-}$ に対して $F(x_0) = 0$ となることである。ここで、

$$\begin{aligned} x_{F\pm} &= \frac{1}{6\delta} \left\{ (\Delta^2 + 2\delta^2) \pm \sqrt{D} \right\}, \\ D &= (\Delta^2 - 10\delta^2)^2 - 24\delta^2(2\delta - 1)(2\delta + 1). \end{aligned} \quad (4.31)$$

であり、 $x_{F\pm}$ と D は、それぞれ二次方程式 $f(x_0) = 0$ の解と判別式である。ところが、実際の散乱軌道上において、 $f(x_0) = 0$ の解が存在するかどうかは、次の条件を考慮しなければならない。つまり、解 x_0 が実数値であるかどうか、さらに $\delta > 1/2$ の場合は、条件 $x_0 > 2\delta$ 、また $\delta \leq 1/2$ の場合は、条件 $x_0 > 1$ が成立するかどうかを調べる必要がある。そこで、これらの条件を満たす解 x_0 の個数をもとに、パラメータ領域 (δ, Δ) を以下のように分類する。

(a) 領域 $\delta > 1/2$ の場合

このとき、 $x_{F\pm}$ が実数であるためには、判別式 D が正あるいは0になる必要があり、この条件は、 $\Delta^2 \leq \Delta_-^2$ の場合、あるいは $\Delta^2 \geq \Delta_+^2$ の場合に満足する。ここで、

$$\Delta_{\pm}^2 = 10\delta^2 \pm \sqrt{24\delta^2(2\delta - 1)(2\delta + 1)}. \quad (4.32)$$

である。領域が $\delta > 1/2$ の場合には、 Δ_+^2 と Δ_-^2 は、つねに正であり、さらに、関係式 $0 < \Delta_-^2 < \Delta_+^2$ を満足することがわかる。また、領域 $\delta > 1/2$ において、解 x_0 が散乱軌道上に存在するためには、さらなる条件 $x_0 > 2\delta$ が成立する必要がある。この条件は、 $\Delta^2 \geq \Delta_+^2$ の場合のみ成立し、 $\Delta^2 \leq \Delta_-^2$ の場合には、つねに破れることがわかる。また、 $x_{F-} < 2\delta < x_{F+}$ は、起こり得ないことがわかる。方程式 $\Delta = \Delta_+$ と $\delta = 1/2$ は、パラメータ領域 (δ, Δ) における臨界線を示しており、ここでは、それぞれ $x_{F+} = x_{F-}$ と $\Delta_+^2 = \Delta_-^2$ が成立する。まとめると、 $\delta > 1/2$ の領域は、次の2つの領域に分類される：

4.2 光学的スカラー量の解析

- (i) $\Delta^2 < \Delta_+^2$
 このとき、方程式 $F(x_o) = 0$ は、条件を満足する解を持たない。そこで、条件 $\delta > 1/2$ と $\Delta^2 < \Delta_+^2$ で決まるこの領域を領域 N_A (N: none) と呼ぶことにする。
- (ii) $\Delta^2 > \Delta_+^2$
 このとき、方程式 $F(x_o) = 0$ には、条件を満足する2つ解 x_{F+} と x_{F-} が存在する。そこで、条件 $\delta > 1/2$ と $\Delta^2 > \Delta_+^2$ で決まるこの領域を領域 Π (Π : two) と呼ぶことにする。
- (b) 領域 $0 < \delta < 1/2$ の場合
 このとき、2次方程式 $f(x_o) = 0$ には、つねに2つの実数解 x_{F+} と x_{F-} が存在する。なぜなら、この2次方程式の判別式 D は、 $0 < \delta < 1/2$ に対して、つねに正定値となるからである。また、この領域において、解 x_o が散乱軌道上に存在するためには、さらなる条件 $x_o > 1$ が成立する必要があるが、 x_{F-} は、つねに1以下であることがわかる。一方、 x_{F+} に関しては、 $\delta < \Delta^2$ のとき $x_{F+} > 1$ となることができ、 $\delta = \Delta^2$ によって定義される新しい臨界線上では、 $x_{F+} = 1$ が成り立つことがわかる。まとめると、 $0 < \delta < 1/2$ の領域は、次の2つの場合に分類される:
- (i) $\delta < \Delta^2$
 このとき、方程式 $F(x_o) = 0$ には、条件を満足する1つの解 x_{F+} が存在する。そこで、条件 $0 < \delta < 1/2$ と $\delta < \Delta^2$ によって決まるこの領域を領域 I (I: one) と呼ぶことにする。
- (ii) $\delta > \Delta^2$
 このとき、方程式 $F(x_o) = 0$ は、条件を満足する解を持たない。そこで、条件 $0 < \delta < 1/2$ と $\delta > \Delta^2$ によって決まるこの領域を領域 N_B と呼ぶことにする。
- (c) 境界線 $\delta = 1/2$ の場合
 このとき、領域 $\Delta^2 > 5/2$ では、条件に合う1つの解 $x_{F+} = 2(\Delta^2 - 1)/3$ が存在するが、領域 $\Delta^2 \leq 5/2$ に対しては、条件に合う解が存在しない。
- (d) $\delta = 0$ の場合
 このとき、正の値をとる任意の Δ^2 に対して、 $F(x_o)$ は、負になる。

上記の分類の結果を、図4に示した。

次に、座標 x ($x > x_o$) の関数としての、Weyl項 $F(x)$ の振る舞いを図5に示した。座標 x が最接近点 x_o に到達したときに $F(x)$ のグラフは終わる。衝突係数 h が大きいとき、 $F(x)$ は、シュワルツシルト時空の場合と同じ特徴 (A1~A3) を持つが、小さな h に対しては、次のような全く違う特徴 B1~B3 が、Weyl項 $F(x)$ に見られた。

4.2 光学的スカラー量の解析

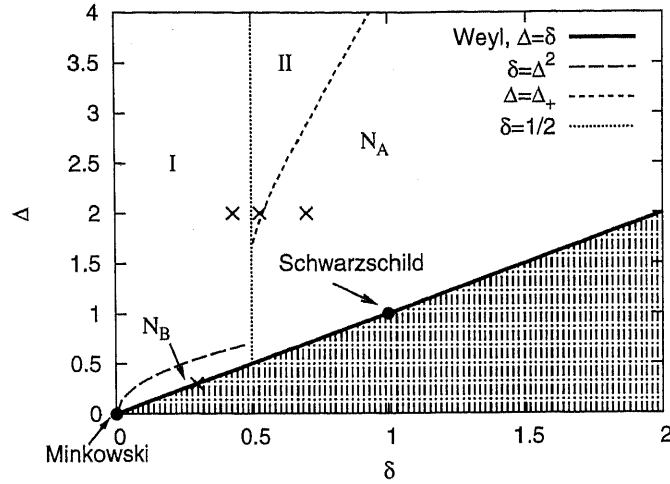


図 4: 本文中に述べられた条件を満足する、2 次方程式 $f(x_0) = 0$ の解の個数によってパラメータ領域 (δ, Δ) を、4 つの領域 (N_A , N_B , I および II) に分類した。横軸は、 δ 、縦軸は Δ を表す。スカラー・テンソル・ワイル解は、不等式 $\Delta \geq \delta$ が成り立つ範囲にある。また、領域を 4 つに分ける境界線 $\delta = 1/2$, $\delta = \Delta^2$ および $\Delta = \Delta_+$ が図示されている。ここで、 Δ_+ は、 $\Delta_+^2 = 10\delta^2 + \delta\sqrt{24(2\delta-1)(2\delta+1)}$ である。なお、2 つの特別な点、 $(\delta, \Delta) = (0, 0)$ と $(\delta, \Delta) = (1, 1)$ は、それぞれ、Minkowski 時空と、シュワルツシルト時空の位置を表している。また、第 5 節では、4 つの領域のそれぞれから典型的な具体例を選び、数値計算をするが、その具体例を \times 印によって示した。

- B1 負になることができ、散乱軌道 $x > x_0$ に対して、 $F(x) = 0$ の解の最大の個数は 2 個である。
- B2 極値を持つことができ、 $x > x_0$ に対して、極値の最大の個数は 2 個である。
- B3 散乱軌道に沿って、必ずしも、最接近点 $x = x_0$ で最大値をとるとは限らない。

そこで、数値的に関数 $F(x)$ を調べ、解の個数 (B1) と極値の個数 (B2) によってパラメータ領域 (δ, Δ) を分類した。その結果を、図 6 にまとめ、図 4 でなされた分類と比較した。図 6a では、 $F(x) = 0$ の解の最大の個数を記号 * と + によって示した。記号 * によって記された領域は、解の個数が 2 個となる衝突係数 h が、少なくとも 1 つ存在する。記号 + によって記された領域は、解の個数が 1 個となる衝突係数 h が、少なくとも 1 つ存在し、解の個数が 2 個となる衝突係数 h はない。無印の領域は、どんな衝突係数 h に対しても、 $F(x) = 0$ の解が存在しない。図 6a の場合と同様に、極値の最大の個数によって分類した結果を図 6b に示した。つまり、極値が 2 個の場合は *、極値が 1 個の場合は +、極値が存在しない場合は、無印で示した。すぐわかることは、図 6a, b によって分類された領域と、前述図 4 によって分類された領域には、高い類似性があるということである。次節で、光の伝搬と重力レンズ効果のさまざまな性質が、図 4 で示された分類と密接な関係にあることが数値的に示されるであろう。

4.2 光学的スカラー量の解析

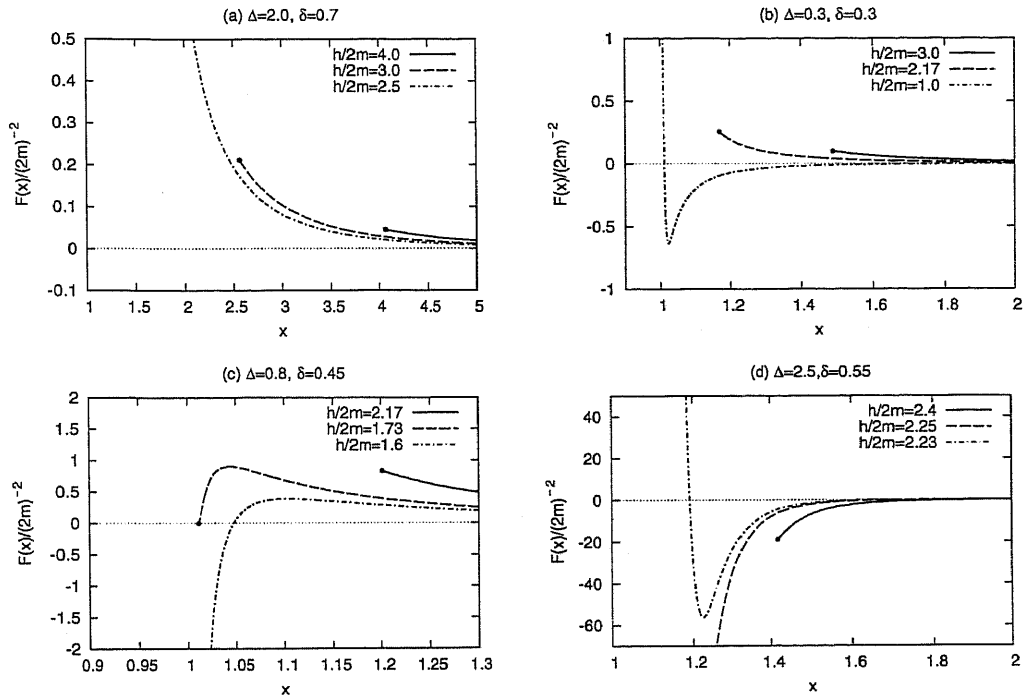


図 5: 座標 x ($x > x_0$) の関数としての、Weyl 項, $F(x)$ の振る舞い。典型的なパラメータ (δ, Δ) として次の値を、図示した。(a) 領域 N_A : $(\delta, \Delta) = (0.7, 2.0)$ (b) 領域 N_B : $(\delta, \Delta) = (0.3, 0.3)$ (c) 領域 I: $(\delta, \Delta) = (0.45, 0.8)$ (d) 領域 II: $(\delta, \Delta) = (0.55, 2.5)$ 。印 \bullet は、最接近点 $x = x_0$ における $F(x)$ を示している。

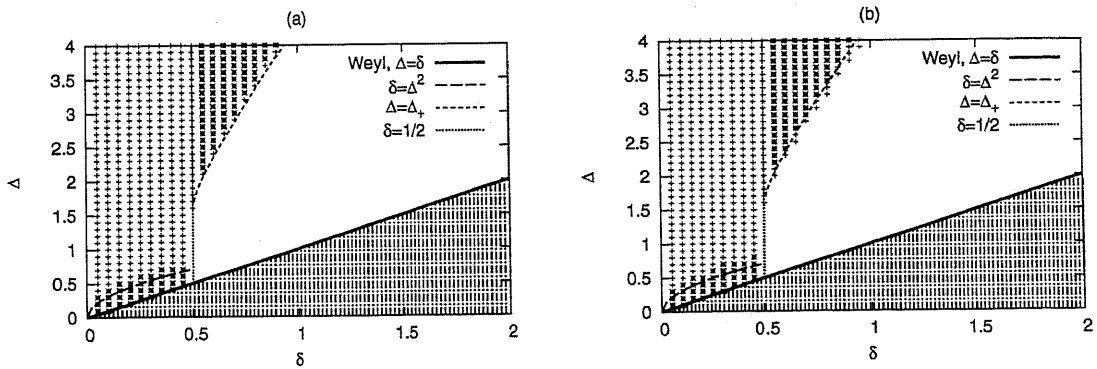


図 6: Weyl 項 $F(x)$ の定性的性質によるパラメータ領域 (δ, Δ) の分類: (a) $F(x) = 0$ の解の最大の個数による分類。(b) $F(x)$ の極値の最大の個数による分類。これらの図の詳細は、本文中で説明した。

§5 光的測地線と光学的スカラー量の数値計算結果

ここでは、光的測地線と光学的スカラー量のさまざまな数値計算結果を示す。

5.1 計算準備

スカラー・テンソル重力理論には、3つのパラメータ σ , δ , Δ があるが、シュワルツシルト時空と比較するという意味で、長さの単位として、 $m \equiv \delta\sigma$ を選び、パラメータの数を2つに減らす。今後、数値計算結果を示すとき、4つの領域のそれぞれから典型的な具体例を選ぶ。そのとき、具体例としてほぼ次のパラメータ (δ, Δ) を用いる。

$$(\delta, \Delta) = \begin{cases} [n_A] & (0.7, 2.0) & \text{領域 } N_A \\ [n_B] & (0.3, 0.3) & \text{領域 } N_B \\ [i] & (0.43, 2.0) & \text{領域 I} \\ [ii] & (0.53, 2.0) & \text{領域 II} \end{cases} \quad (5.1)$$

第4.2節では、方程式 $F(x_0) = 0$ の条件つき解について調べた。そして、領域 I では、1つの解 x_{F+} 、領域 II では、2つの解 x_{F+} と x_{F-} が存在することがわかった。そこで、(4.8) 式から、解 x_{F+} と x_{F-} に対応する特別な衝突係数 h を、次のように h_{F+} と h_{F-} によって表す。

$$\begin{aligned} h_{F+} &= \sigma \sqrt{x_{F+}^2 - 1} \left(\frac{x_{F+} + 1}{x_{F+} - 1} \right)^\delta, \\ h_{F-} &= \sigma \sqrt{x_{F-}^2 - 1} \left(\frac{x_{F-} + 1}{x_{F-} - 1} \right)^\delta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

忘れてならないのは、 $h_{F\pm}$ は、パラメータ (δ, Δ) だけに依存する時空固有の量であることである。この特別な衝突係数 h_{F+} と h_{F-} の重要性は、繰り返し強調されるであろう。

赤道面 $y = 0$ での、計量 (3.1) の空間的な部分は、

$$ds^2 = \frac{m^2}{\delta^2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-\delta} \left[\left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^{\Delta^2-1} dx^2 + (x^2-1)d\phi^2 \right], \quad (5.3)$$

となり、赤道面上での円周 L_x は、次のように与えられる。

$$L_x = 2\pi R_x(x), \quad R_x(x) \equiv \frac{m}{\delta} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-\frac{\delta}{2}} \sqrt{x^2-1}. \quad (5.4)$$

この $R_x(x)$ を用いて無次元局所デカルト的座標を、

$$X = \frac{R_x(x)}{2m} \cos \phi, \quad Y = \frac{R_x(x)}{2m} \sin \phi, \quad (5.5)$$

5.1 計算準備

によって定義する。

光学的スカラー方程式は、光の軌道に沿って、解かれるべきなので、以下の初期条件に従って、光学的スカラー方程式と光的測地線方程式の両方を、同時に数値積分する。

- (a) 初期の光の伝搬方向が、 X 軸方向の反対になるように、 X 軸を選ぶ。つまり、図 7 では、右から左に光が伝搬する。
- (b) アフィンパラメータ λ の初期条件は、 $\lambda = 0$ とする。
- (c) 光的測地線の座標 x と R_x の初期値を、それぞれ x_i および $R_i \equiv R_x(x_i)$ と表記する。このとき、 R_i の値がパラメータ (δ, Δ) に依存しないように、ほぼ一定の初期距離 R_i から光を伝播させる。強い重力場でのスカラー・テンソル重力理論の特徴を理解する目的から、 $x_i = 100\delta$ とすると、

$$\begin{aligned} R_i/m &= \frac{1}{\delta} \left(\frac{x_i - 1}{x_i + 1} \right)^{-\frac{\delta}{2}} \sqrt{x_i^2 - 1} \\ &= \frac{x_i}{\delta} \left\{ 1 + \frac{\delta}{x_i} + \mathcal{O}\left(\frac{\delta^2}{x_i^2}\right) \right\} \sim 101 + \mathcal{O}(10^{-2}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

が得られる。したがって、特に断りのない限り、 x_i の値として 100δ を採用する。散乱軌道に沿って、座標 x は初期値 x_i から減少していき、最接近点で最小値 x_o となる、その後、再び増加し x_i に達する。数値積分は、座標 x が、再び x_i に到達するまで行う。今後、計算終了時のアフィンパラメータ $\lambda = \lambda_f$ を最終時間と呼ぶことにする。また、幾何学的考察からアインシュタイン半径 h_E を、

$$\frac{h_E}{2m} \equiv \sqrt{\frac{R_i}{2m}} \sim 7. \quad (5.7)$$

と定義する。通常、アインシュタイン半径 h_E は、弱い重力場において定義され $m/h_E \ll 1$ となるが、上記の見積もり h_E は、まさにアインシュタイン半径において、比較的重力が弱いという前提と一致する。

- (d) 光学的スカラー量 C_+ と C_- に関しては、 $\lambda = 0$ における初期条件として

$$C_+ = C_- = 0, \quad \frac{dC_+}{d\lambda} = \frac{dC_-}{d\lambda} = 1, \quad (5.8)$$

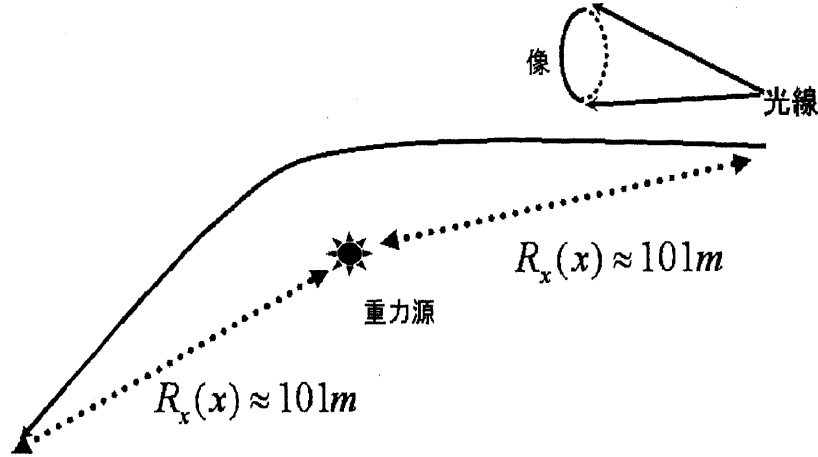
とする。これは、Minkowski 時空では、 $C_+ = C_- = \lambda$ を意味する。

さて、光学的スカラーは、共形変換に対して、 $\hat{C}_\pm = AC_\pm$ のように変化することに注意すべきである。そこで、共形変換に対して不変な光学的スカラー量 C を、次のように定義する。

$$C \equiv \frac{C_+ - C_-}{C_+} = \frac{\hat{C}_+ - \hat{C}_-}{\hat{C}_+}. \quad (5.9)$$

ここで、 \hat{C}_+ と \hat{C}_- は、それぞれ、無限小の像の主軸の大きさを表しているのので、新しい変数 C は、像の変形度を意味する。ある衝突係数 h に対して、 C_+ と C_-

5.2 光的測地線と屈折角



のどちらかが最終時間でゼロになるとき、この特別な衝突係数 h のことを、臨界係数と呼ぶことにする。なお、衝突係数の値の大きい順にしたがって、臨界係数を、 h_a 、 h_b 、 h_c ... と表すことにする。重要なことは、 $C_- \rightarrow 0$ と $C_+ \rightarrow 0$ に応じて、2種類の臨界係数があることである。像の変形度 C の振る舞いは、 $C_- \rightarrow 0$ のとき $C \rightarrow 1$ 、また、 $C_+ \rightarrow 0$ のとき $|C| \rightarrow \infty$ となる。

5.2 光的測地線と屈折角

第5.1節で説明された初期条件のもとで、 (X, Y) 面上の光線の軌道を、図7に示した。パラメータ (δ, Δ) は、第5.1節で説明された典型例を選び、衝突係数 h は、それぞれ (a) $h/2m = 3.0$ と (b) $h/2m = 2.17$ の場合を図示した。図7cは、図7bの原点付近の拡大図である。なお、散乱軌道ではないという理由から、図7bと図7cは、 $[n_A]$ の場合の軌道を省いて図示してある。

衝突係数 h が図7a ($h/2m = 3.0$) の場合のように比較的大きいときは、軌道に沿って重力は引力として作用し、スカラー場と非球対称性の効果は、定量的な違いとなって現れている。それとは対照的に、より小さな衝突係数である図7c ($h/2m = 2.17$) では、第4節において、負の屈折角の存在によって既に予想されたように、重力が反発的に作用することができることを示している。

そこで、光の軌道が反射する条件について考察する。光が、特異点 $x = 1$ を中心に反時計回りに伝搬しているとする、簡単な幾何学的考察により $d/d\lambda(dY/dX) > 0$ が実現すれば、光の軌道がその不等式を満たす場所で、必ず反射していることがわかる。この条件は、不等式 $p(x) < 0$ に帰着することができる。ここで、補助関数 $p(x)$ は、

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{h}{\sigma^4 x^3 (x^2 - 1)^2} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^{\Delta^2} \times q(x), \\
 q(x) &= \{(\delta^2 - \Delta^2)x + (\Delta^2 - 1)\delta\} \left\{ h^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2\delta} - \sigma^2 (x^2 - 1) \right\} \\
 &\quad + h^2 x \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2\delta} \left\{ x^2 \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^{\Delta^2} - x^2 + 3\delta x - 2\delta^2 \right\}, \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

5.2 光的測地線と屈折角

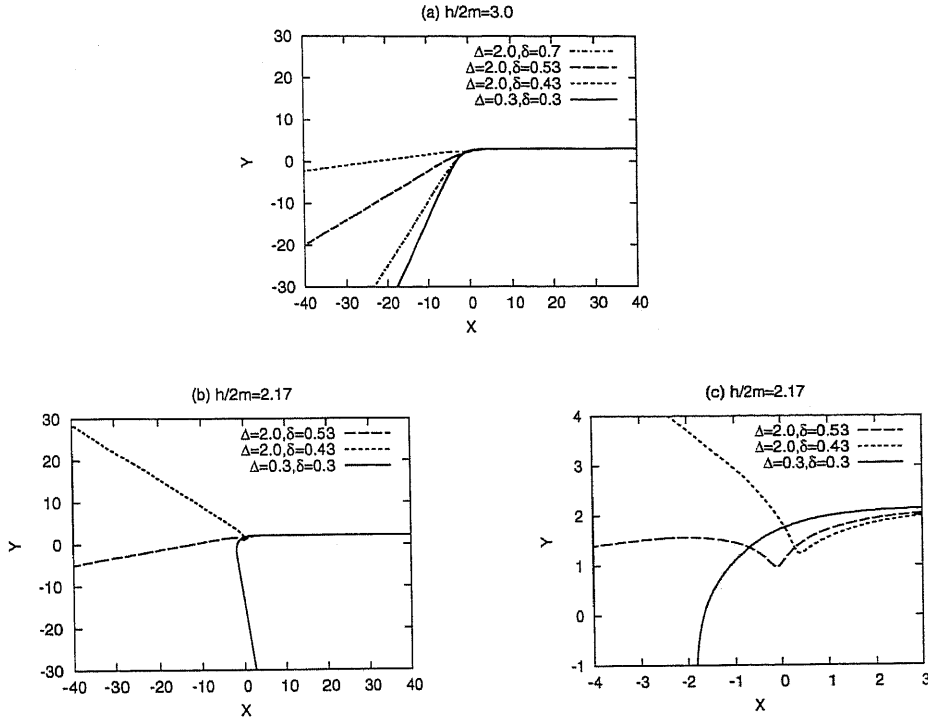


図 7: 衝突係数が (a) $h/2m = 3.0$ および (b) $h/2m = 2.17$ のときの (X, Y) 面上における光線の軌道。図 (c) は、図 (b) の原点部分の拡大図。光線は、主に右から左方向へ伝播している。

で定義される関数である。シュワルツシルト時空の場合は、 $p(x) = 3mh^2/r^5 > 0$ となり、反射は起こらない。

図 8 では、数値的に $p(x)$ を調べ、反射する条件 $p(x) < 0$ が実現したパラメータ領域 (δ, Δ) と反射が起きなかった領域 (δ, Δ) を区別し、Weyl 項 $F(x_0)$ によって分類された 4 つの領域 (N_A, N_B, I, II) と比較した。反射が実現した領域 (δ, Δ) には、+ 印を記し、反射が起きない領域は、無印で表した。その結果、両者の分類には、密接な関係があることがわかる。特に臨界線 $\delta = 1/2$ は、よく一致していることがわかる。一方、臨界線 $\Delta = \Delta_+$ と反射する領域の境界は、合致せず少し漠然としている。

屈折角 α に関しては、(4.7) 式と (4.8) 式を数値的に計算し衝突係数 h の関数として、図 9 に示した。ここで、 h_1 と h_2 そして h_3 は、それぞれ、次のような特別な衝突係数を表す：

$$(h_1, h_2) = (h_{F-}, h_{F+}) \text{ 領域 [ii]}, \quad h_3 = h_{F+} \text{ 領域 [i]}. \quad (5.11)$$

ここで、特別な衝突係数の具体的な値は、 $(h_1/2m, h_2/2m, h_3/2m) = (2.23, 2.63, 3.99)$ である。

屈折角 α を、衝突係数 h の関数として数値計算により求めた結果、領域 II では、2 つの極値が存在し、それぞれ、特別な衝突係数 $h = h_{F+}$ と $h = h_{F-}$ の近傍に位置することがわかった。領域 I については、極値の数は 1 つだけであり、それは $h = h_{F+}$ の近傍に存在することがわかった。また、領域 I と領域 N_B の

5.2 光的測地線と屈折角

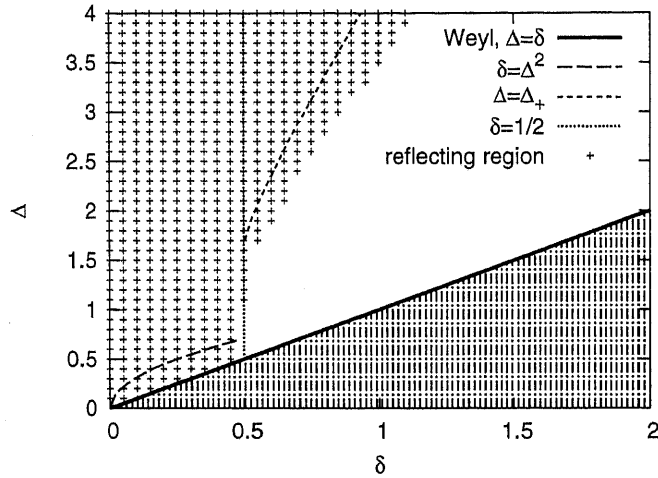


図 8: $F(x_0)$ によって分類されたパラメータ領域 (δ, Δ) において、光線の軌道が反射する領域を、+印で示した。

屈折角の振る舞いは、次のような類似した特徴を持つことがわかった。

- C1 1つの極値があり、そこで屈折角は、最大値をとる。
- C2 屈折角は、衝突係数がゼロに近付いたとしても、有限である。

特に注目すべきことは、領域 N_B には、特別な衝突係数 h_{F+} と h_{F-} が存在しないにも関わらず、上記 C1 の特徴を示すことである。ここで、屈折角が最も大きくなる特徴的な衝突係数を h_α とすると、数値計算から、 h_α の値は、領域 I と領域 N_B の境界をまたいで連続的に変化し、領域 N_B では、 $h_\alpha = 2m \sim 6m$ となることがわかった。

図 10 に、 δ と h の値を固定したときの屈折角 α の Δ 依存性を示した。ただし、一般相対性理論 ($\Delta = \delta$) の場合は、 δ は固定されていない。衝突係数 h は、それぞれ (a) $h/2m = 3.0$ と (b) $h/2m = 2.17$ の場合を示した。図 10 より、一般相対性理論 ($\Delta = \delta$) の場合、屈折角は、 Δ の増加関数であるが、その他の場合は、 Δ の減少関数であることがわかる。

パラメータ領域 (δ, Δ) における屈折角 $\alpha(h)$ を数値的に調べたところ、次のような、顕著な特徴があることがわかった。

- D1 屈折角が、負になり得る。これは、屈折角がつねに正の値であるシュワルツシルト時空とは対照的である。
- D2 シュワルツシルト時空の場合、屈折角は、 h の減少関数であるが、スカラー・テンソル重力理論の場合は、1つあるいは、2つの極値を持つことができる。
- D3 円軌道が存在する $\delta > 1/2$ の領域では、光線は、円軌道の周りを何周もし屈折角がとても大きな値になる。対照的に、 $0 \leq \delta < 1/2$ の場合は、 h が

5.2 光的測地線と屈折角

ゼロに近づいたときでさえ、屈折角は、有限に保たれる。また、 $\delta = 1/2$ の場合は、 h が $4m$ に近づいたとき、 $\Delta > 1$ の場合は、屈折角は有限値であるが、 $\Delta \leq 1$ のときは発散する事が解析的にわかった。

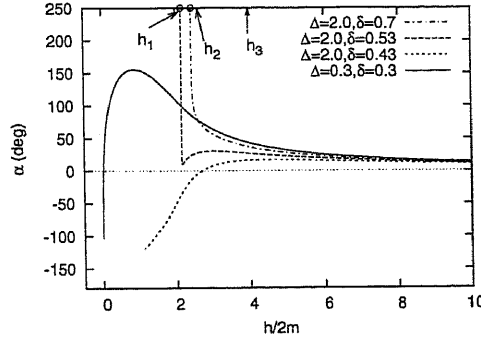


図 9: 衝突係数 h に対する、屈折角 α の振る舞いパラメータは、第 5.1 節で説明した典型例を選んだ。また、特別な衝突係数 $(h_1/2m, h_2/2m, h_3/2m) = (2.23, 2.63, 3.99)$ の位置を記した。記号 [o] は、衝突係数が $h \rightarrow h_*$ で屈折角 α が発散することを示している。記号 [o] が付いていない線は、衝突係数が $h \rightarrow h_*$ で屈折角 α は、有限値となる。

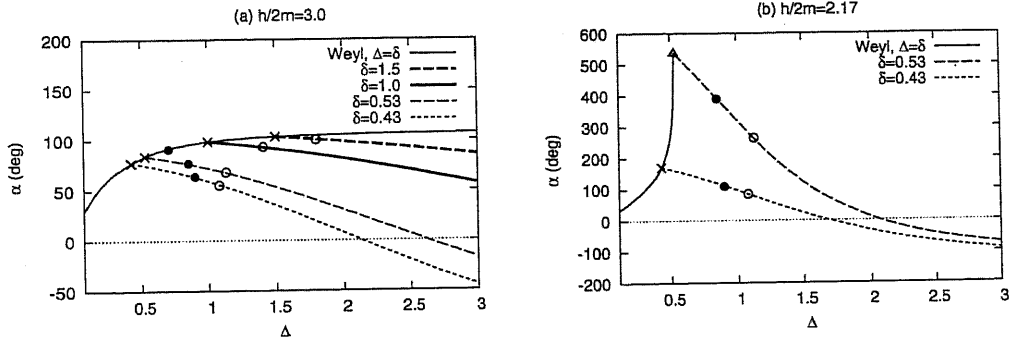


図 10: 衝突係数 (a) $h/2m = 3.0$ および (b) $h/2m = 2.17$ における、 Δ に対する屈折角 α の振る舞い。細い実線は、Weyl 解 ($\Delta = \delta$) の屈折角を表している。条件 $\Delta \geq \delta$ のために、 δ が定数のときの線には、細い線上に終点 (x 印) がある。図 (b) にある Δ 印は、そこで散乱軌道が無くなることを意味している。印 o と \bullet は、それぞれ $Q = 1$ ならびに $Q = -1$ となるデータポイントを意味する。ここで、 $Q \equiv (\Delta^2 - 1)/\delta^2$ は、時空の非球対称性の尺度を表す量である。また、スカラー場の大きさを $S \equiv \Delta^2/\delta^2 - 1$ で表す。図 (a) において、 $Q = 1$ (o 印) に対する S は、屈折角の大きい順に 0.4、1.0、3.6、5.4 であり、 $Q = -1$ (\bullet 印) に対する S は、屈折角の大きい順に 0、1.6、3.4 である。また、図 (b) において、 $Q = 1$ (o 印) に対する S は、屈折角の大きい順に 3.6、5.4 であり、 $Q = -1$ (\bullet 印) に対する S は屈折角の大きい順に 1.6、3.4 である。

5.2 光的測地線と屈折角

図 11 では、屈折角 $\alpha(h)$ の極値の個数によって、パラメータ領域 (δ, Δ) を分類し、Weyl 項 $F(x_0)$ によって分類された 4 つの領域 (N_A , N_B , I, II) と比較した。極値の個数が 2 個に対しては * 印、1 個に対しては + 印、また、極値が存在しない場合には、空白で示した。同様に、図 12 では、負の屈折角が実現するかどうかで領域を区別した。印 \bullet は、負の屈折角が実現される領域を表し、空白は、実現されない領域を表す。すぐにわかることは、図 11 と図 12 の分類には、自明でない一致が見られることである。これは、強い重力場領域を通過する光の軌道、つまり小さな衝突係数 h では、屈折角 $\alpha(h)$ のグラフの傾きが非常に大きいため、極値となる衝突係数の近傍で、直ちに負の屈折角が誘発されるからと思われる。また、図 11 の分類ならびに図 12 の分類は、それぞれ Weyl 項 $F(x_0)$ による分類 (N_A , N_B , I, II) と、とても高い類似性があることがわかる。このことから、重力レンズ効果に対しては、図 4 で示された分類 (N_A , N_B , I, II) が、非常に重要な物理的意味を持つことが予想できる。また、領域 N_B と領域 I は、全く同様な特性を持つことがわかる。球対称時空 ($\Delta = 1$) だけに限って考えれば、領域 I が、一般相対性理論 (シュワルツシルト時空) ではみられない、スカラー・テンソル重力理論特有の性質を持つ領域である。ところが、軸対称性 ($\Delta \neq 1$) の領域も含めば、一般相対性理論は、領域 I と同じ特徴を持つ領域 N_B にも存在し、領域 I で現れる特性は、スカラー・テンソル重力理論特有の性質ではなくなる。このことは、一般相対性理論の場合であっても、光の反射が実現できる軌道が存在することを意味している。それに対して、とても興味深いのは II の領域であり、この領域が一般相対性理論にはない、スカラー・テンソル重力理論特有の性質を持つ領域であることがわかる。また、図 11 と図 12 より、 N_A 的な領域と I 的な領域の境界は明瞭であるが、 N_A 的な領域と II 的な領域の境界は、やや漠然としていることがわかる。

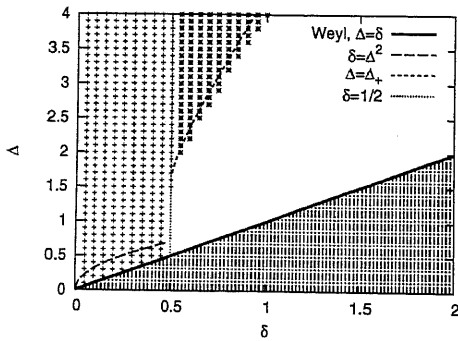


図 11:
パラメータ領域 (δ, Δ) を、屈折角 $\alpha(h)$ の極値の個数によって分類した図。極値の個数が 2 個に対しては * 印、1 個に対しては + 印、また、極値が存在しない場合には、空白で示した。

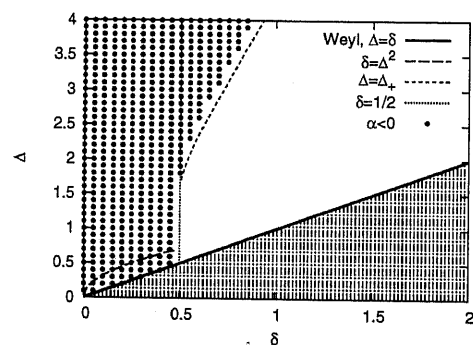


図 12:
屈折角が、負になり得るかどうかで、パラメータ領域 (δ, Δ) を二つの領域に分類した図。印 \bullet は、屈折角が負になる領域を表す。

5.3 光的測地線束と像の変形度

5.3 光的測地線束と像の変形度

第 5.1 節において説明されたやり方で、光学的スカラー方程式を光の軌道に沿って、数値的に積分する。図 13 に、さまざまな衝突係数 h に対して、アフィンパラメータ λ に沿った、(a) C_+ と (b) C_- の振る舞いを示した。図 13 は、 $[n_A]$ 、つまり $(\delta, \Delta) = (0.7, 2.0)$ の場合である。すぐわかることは、Weyl 項 F と Ricci 項 R の重力的な効果によって、 C_+ のグラフの傾きが、 $\lambda = 50$ 近くで急激に変わっていることである。一方、 C_- に関しては、 $h/2m = 3.0$ と 4.0 に対しては、1 回だけグラフの傾きが変わっており、 $h/2m = 2.5$ に対しては、2 回グラフの傾きが変わっている。このようなグラフの「曲がり」は、 λ に沿って狭い範囲で起きていることがわかる。例えば、 $h/2m = 2.5$ のときの C_- の場合、幅 $\Delta\lambda$ は 2~3 であり、その他の場合は、見えないほど薄い。この意味で、薄いレンズの描像が成立していると考えることができる。また、重力の強さは、およそグラフの曲げ角度として現れる。

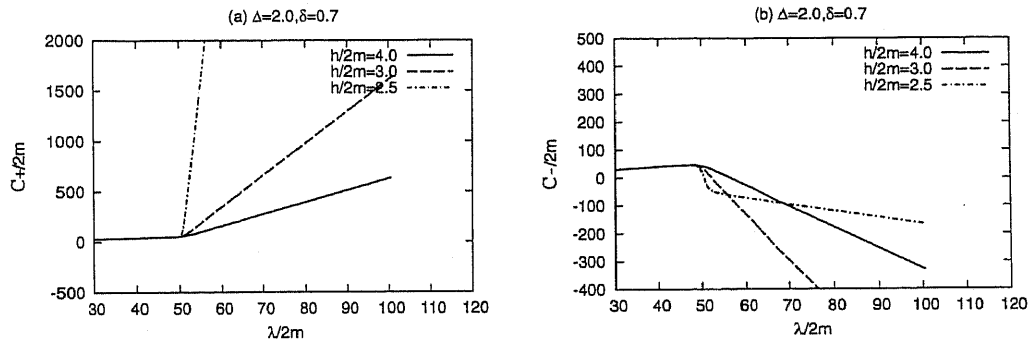


図 13: アフィンパラメータ λ の関数としての (a) C_+ 、ならびに (b) C_- の振る舞い。各衝突係数 h の値は、図中に示した。パラメータは、 $[n_A]$ の場合、つまり $(\delta, \Delta) = (0.7, 2.0)$ である。

図 14、15、16 に典型例として $[n_B]$ 、 $[i]$ および $[ii]$ の場合について、 λ に沿った (a) C_+ と (c) C_- の振る舞いを示した。比較ため、これらのグラフの拡大図を、 C_+ は (b) に、 C_- は (d) に、それぞれ示した。これらの場合も同様に、薄いレンズ的描像が適応できることがわかる。レンズが薄いという状況を確認するために、アフィンパラメータ λ に沿った、Weyl 項 F ならびに Ricci 項 R の振る舞いを図 17~20 に示した。ところで、このような薄いレンズは、薄さ（または厚み）によって、さらに次の 2 つに分類される。

- E1 レンズは、見えないくらい薄く、グラフの曲がる角度は、衝突係数 h の関数として、適度に変化する。
- E2 レンズは、見えるくらいの厚さ $\Delta\lambda$ を持っており、光線がレンズを通過すると比較的急激なグラフの変化が認められる。

5.3 光的測地線束と像の変形度

以下の単純な解析的モデルで説明されているように、レンズの上記の場合分けは、分類されたパラメータ領域 (δ, Δ) が各々持っている本質的な特性によるものではなく、外部からの影響、特に衝突係数 h と初期距離 R_i に依存することに注意すべきである。

薄いレンズの仮定のもとで、光学的スカラー方程式 (4.21) を、次のように近似した解析的モデルについて考察する。

$$\frac{d^2 u_{\pm}}{d\lambda^2} = \begin{cases} 0 & (|\lambda| > \epsilon) \\ \pm \kappa^2 u_{\pm} & (|\lambda| < \epsilon). \end{cases} \quad (5.12)$$

ここで、 κ^2 と $\epsilon \sim \Delta\lambda/2$ は、それぞれ、 $-\mathcal{R} \pm F$ の大きさとレンズの厚さを表す。また、アフィンパラメータ λ は、薄いレンズの中心で $\lambda = 0$ となるように再定義した。例として、 C_+ の振る舞いを決める $-\mathcal{R} + F$ の値が負のときは、 C_+ に対して、(5.12) 式の負の符号が選ばれる：

$$\frac{d^2 C_+}{d\lambda^2} = (-\mathcal{R} + F) C_+ \rightarrow \frac{d^2 u_-}{d\lambda^2} = \begin{cases} 0 & (|\lambda| > \epsilon) \\ -\kappa^2 u_- & (|\lambda| < \epsilon). \end{cases} \quad (5.13)$$

方程式 (5.12) は、以下の初期条件のもとで簡単に解かれる (Appendix G)。

$$u_{\pm} = 0, \quad \frac{du_{\pm}}{d\lambda} = 1 \quad \text{at } \lambda = -\lambda_0 < 0. \quad (5.14)$$

また、条件 $\epsilon \sim \Delta\lambda/2 \ll \lambda_0 \sim R_i$ のもとでは、次のような性質があることがわかる。

F1 $\epsilon\kappa \ll 1$ の場合

これは、E1 の場合に該当する。このとき、 C_{\pm} のグラフの曲がり角度 $\Delta\theta_{\pm}$ は次の表式で良く近似される。

$$\Delta\theta_{\pm} = \pm(\kappa\lambda_0)(2\kappa\epsilon) \sim \pm\kappa^2\lambda_0\Delta\lambda. \quad (5.15)$$

ここで重要なのは、 $\kappa\lambda_0 \sim \kappa R_i$ の値がとても大きい場合は、 $|\Delta\theta_{\pm}|$ は、1 より大きな値になることである。

F2 $\epsilon\kappa > 1$ の場合

これは、E2 の場合に該当する。光線がレンズを通過したとき、 u_- は、約 $\epsilon\kappa/\pi$ 回振動する。一方、 u_+ は、

$$\log u_+ \sim \kappa\lambda + \log \left(\frac{1}{2} \lambda_0 e^{\epsilon\kappa} \right). \quad (5.16)$$

のように指数関数的に成長する。

ところで、 $-\mathcal{R} \pm F$ が、複数のピークを持つときは、薄いレンズの重ね合わせであると見なすことができる。

5.3 光的測地線束と像の変形度

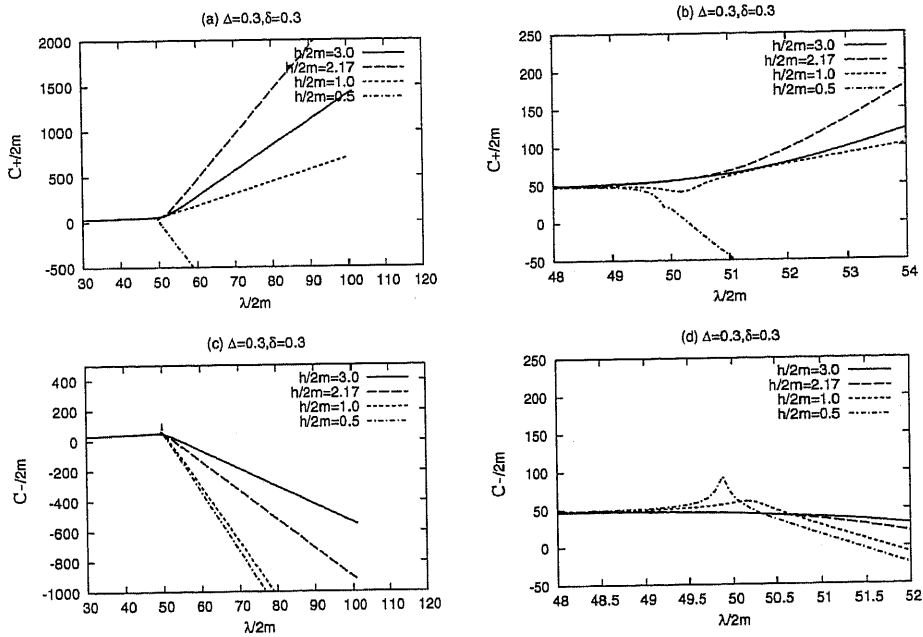


図 14: アフィンパラメータ λ の関数としての (a) C_+ ならびに (b) C_- の振る舞い。各衝突係数 h の値は、図中に示した。パラメータは、 $[n_B]$ の場合、つまり $(\delta, \Delta) = (0.3, 0.3)$ である。図 (b) と図 (d) は、それぞれ図 (a) と図 (c) の拡大図である。

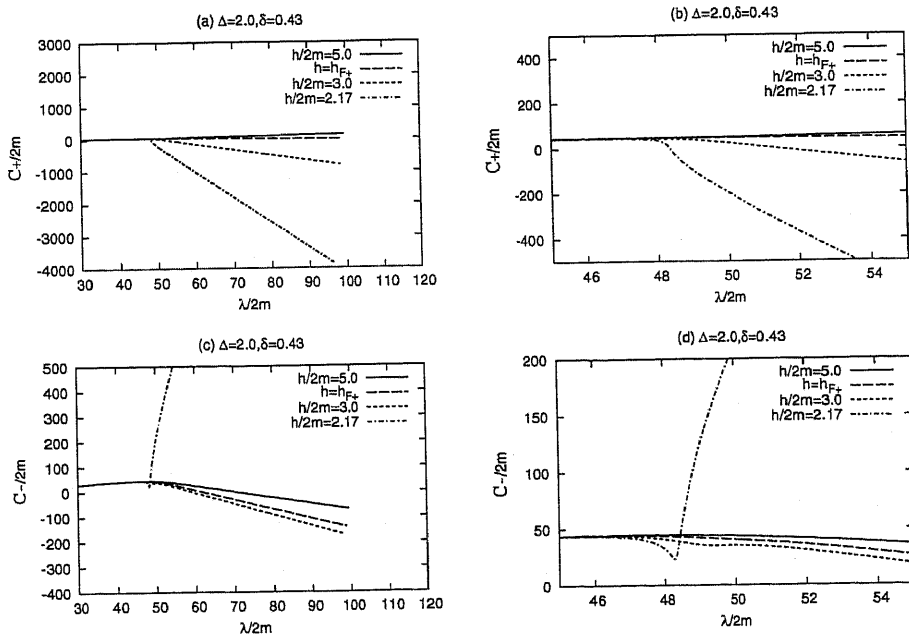


図 15: アフィンパラメータ λ の関数としての (a) C_+ ならびに (b) C_- の振る舞い。各衝突係数 h の値は、図中に示した。パラメータは、 $[i]$ の場合、つまり $(\delta, \Delta) = (0.43, 2.0)$ である。図 (b) と図 (d) は、それぞれ図 (a) と図 (c) の拡大図である。

5.3 光的測地線束と像の変形度

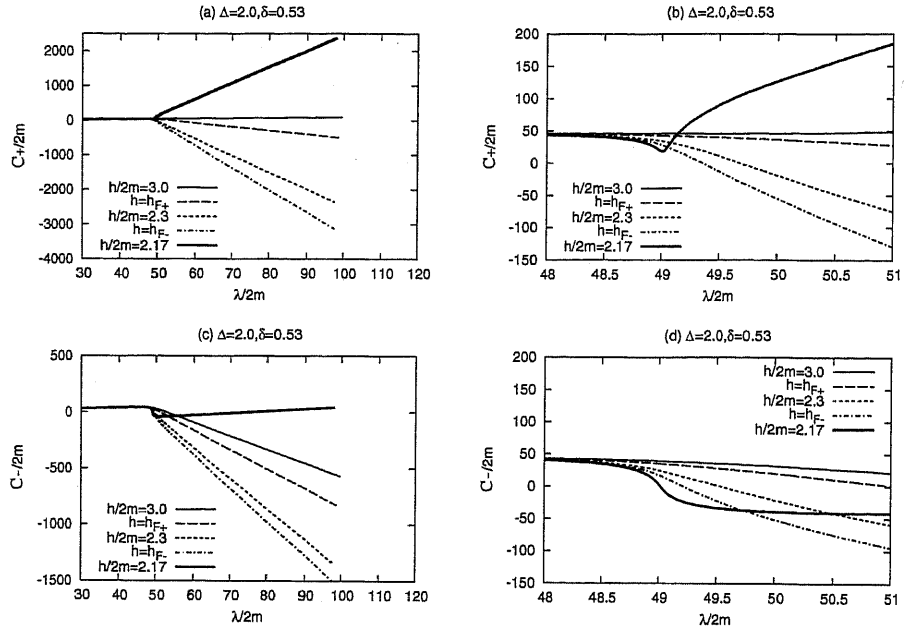


図 16: アフィンパラメータ λ の関数としての (a) C_+ ならびに (b) C_- の振る舞い。各衝突係数 h の値は、図中に示した。パラメータは、[ii] の場合、つまり $(\delta, \Delta) = (0.53, 2.0)$ である。図 (b) と図 (d) は、それぞれ図 (a) と図 (c) の拡大図である。

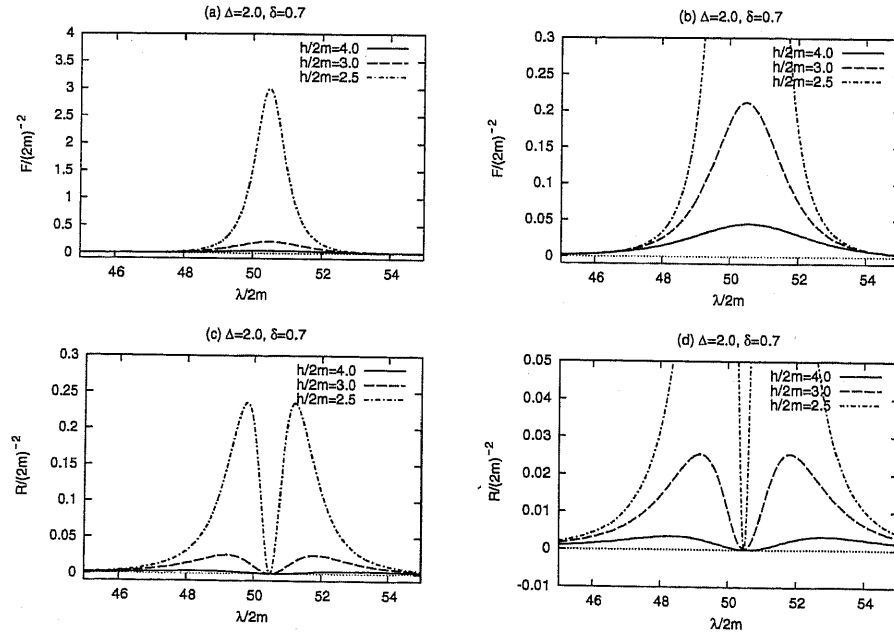


図 17: アフィンパラメータ λ の関数としての (a) Weyl 項 $F(\lambda)$ 、ならびに (b) Ricci 項 $R(\lambda)$ の振る舞い。各衝突係数 h の値は、図中に示した。パラメータは、[nA] の場合、つまり $(\delta, \Delta) = (0.7, 2.0)$ である。図 (b) と図 (d) は、それぞれ図 (a) と図 (c) の拡大図である。

5.3 光的測地線束と像の変形度

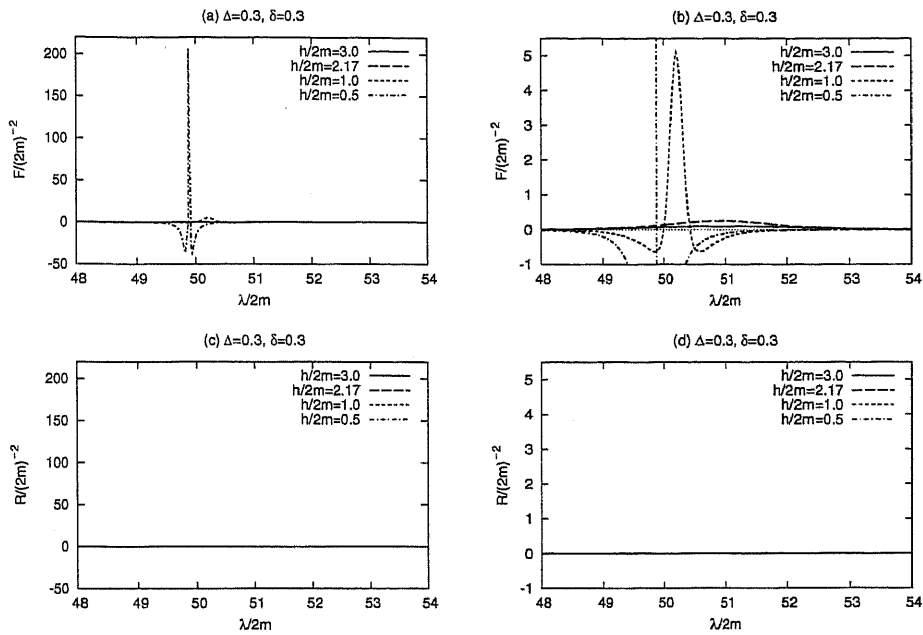


図 18: アフィンパラメータ λ の関数としての (a)Weyl 項 $F(\lambda)$ 、ならびに (b)Ricci 項 $R(\lambda)$ の振る舞い。各衝突係数 h の値は、図中に示した。パラメータは、 $[n_B]$ の場合、つまり $(\delta, \Delta) = (0.3, 0.3)$ である。図 (b) と図 (d) は、それぞれ図 (a) と図 (c) の拡大図である。Ricci 項 R は、どんな h の値に対しても厳密にゼロである。

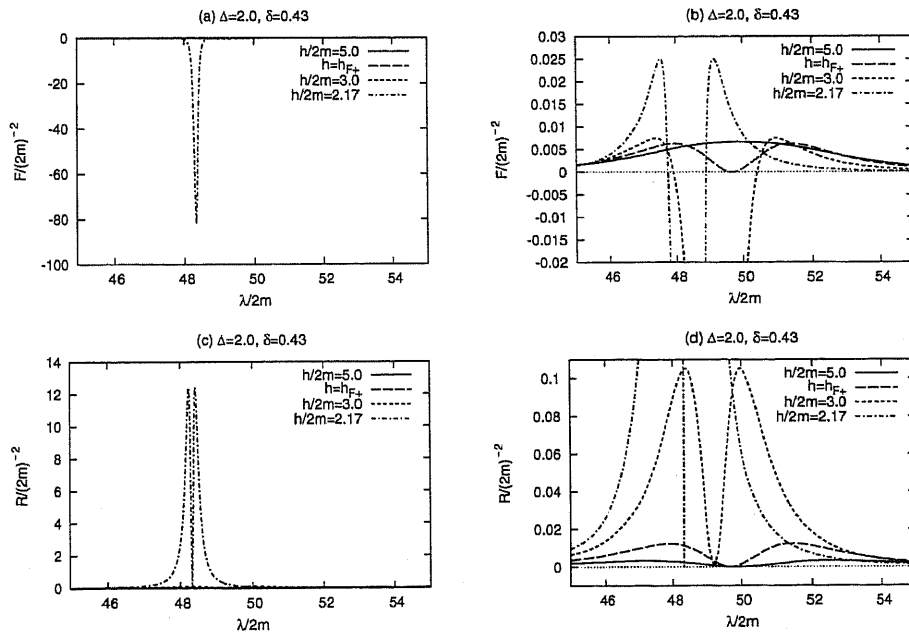


図 19: アフィンパラメータ λ の関数としての (a)Weyl 項 $F(\lambda)$ 、ならびに (b)Ricci 項 $R(\lambda)$ の振る舞い。各衝突係数 h の値は、図中に示した。パラメータは、 $[i]$ の場合、つまり $(\delta, \Delta) = (0.43, 2.0)$ である。図 (b) と図 (d) は、それぞれ図 (a) と図 (c) の拡大図である。

5.3 光的測地線束と像の変形度

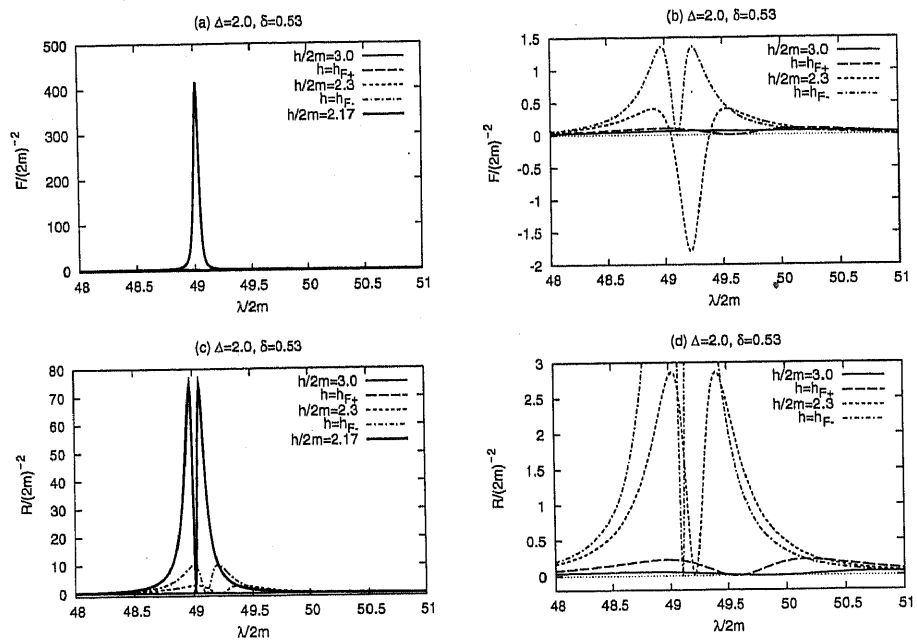


図 20: アフィンパラメータ λ の関数としての (a)Weyl 項 $F(\lambda)$ 、ならびに (b)Ricci 項 $R(\lambda)$ の振る舞い。各衝突係数 h の値は、図中に示した。パラメータは、[ii] の場合、つまり $(\delta, \Delta) = (0.53, 2.0)$ である。図 (b) と図 (d) は、それぞれ図 (a) と図 (c) の拡大図である。

5.3 光的測地線束と像の変形度

Dyerの結果から、光学的スカラー量 C_- が振動する性質を持つことは、予想されている (Appendix F)。今回の計算では、円軌道が存在する領域 $\delta > 1/2$ において C_- が振動する例を見つけることができた。図 21 に、光学的スカラー C_- が振動する例として、 C_{\pm} 、および $-R \pm F$ を示した。衝突係数 h は、 $h/2m = 2.1609$ で、[ii] の場合を選んだ。図 21a と図 21b から、 $-R \pm F$ の大きさとレンズの厚さを見積もると $\epsilon = 0.04 \times (2m)$ と $\kappa = 77/(2m)$ が得られ、その結果 $\epsilon\kappa = 3.1 > 1$ となる。このとき、解析的モデルから予想される振動の回数は、 $\epsilon\kappa/\pi \sim 1$ 、となるが、これは、数値計算結果 (図 21) とほぼ一致している。また、 C_+ に関する解析的結果 (5.16) は、次のように数値計算結果と良く一致している。

$$\log C_+/2m \sim \begin{cases} 78\lambda/(2m) + 4 & (\text{解析的}) \\ 80\lambda/(2m) + 6 & (\text{数値的}). \end{cases} \quad (5.17)$$

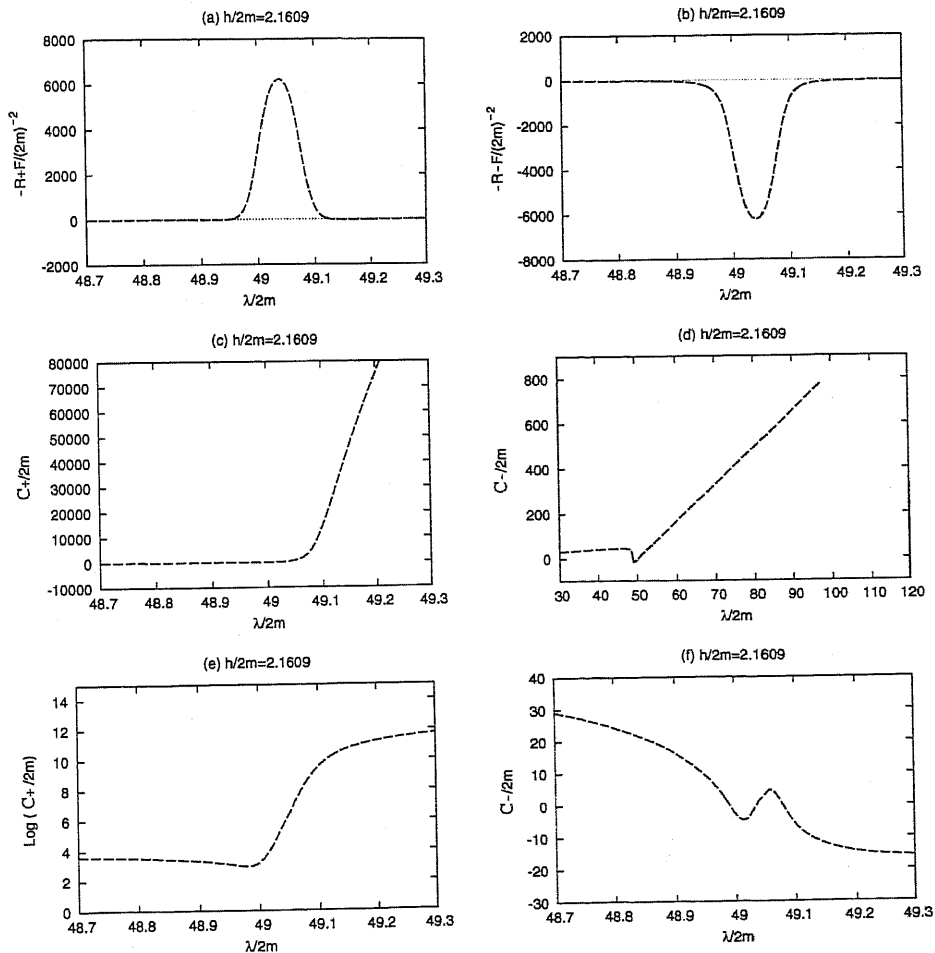


図 21: 光学的スカラー C_- が振動する例として、[ii] の場合、つまり $(\delta, \Delta) = (0.53, 2.0)$ のときの、(a) $-R + F$ 、(b) $-R - F$ 、(c) C_+ 、(d) C_- ならびに (e) $\log C_+$ を示した。衝突係数 h は、 C_- が振動するように $h/2m = 2.1609$ に調整した。図 (f) は、図 (d) の拡大図である。

5.3 光的測地線束と像の変形度

ここで、それぞれの領域における、光の軌道に沿った C_+ と C_- の定性的性質についてまとめる。すでに述べたように、衝突係数の値の大きい順にしたがって、臨界係数を、 h_a 、 h_b 、 h_c … と表すことにする。

- (N_A) 領域 N_A では、Weyl 項 F は、つねに Ricci 項 \mathcal{R} より優位に効き、かつ正符号である。衝突係数が m より十分大きいときは、不等式 $\epsilon\kappa \ll 1$ が成立し、重力源付近で曲げられるグラフの角度は、衝突係数が減少するにしたがって、単調に増える。したがって、 C_+ がゼロになる臨界係数は存在しない。臨界係数 $h = h_a$ は、Einstein 半径 h_E 近くにあり、そこでは、最終時間 $\lambda = \lambda_f$ (第 5.1 節) で、 C_- は、ゼロになる。衝突係数 h が小さくなり h_* (4.9) に近づくと、不等式 $\epsilon\kappa > 1$ が成り立ち、 C_- は、振動する。したがって、 $C_- = 0$ に対応する臨界係数 $h = h_a$ 、 $h = h_b$ … が存在する。
- (N_B) 領域 N_B では、Weyl 項 F は、つねに Ricci 項 \mathcal{R} より優位に効く。衝突係数が十分大きいときは、 C_+ と C_- の定性的振る舞いは、領域 N_A の場合と同じである。したがって、Einstein 半径 h_E の近傍に、 C_- による臨界係数 $h = h_a$ が存在する。衝突係数が小さくなると Weyl 項 F は負になることができ、その結果、 C_- は増加する一方 C_+ は、減少する事ができる。したがって、最終時間において C_+ がゼロになる新しい臨界係数 $h = h_b$ が $h_b = 3m \sim 6m$ に存在する。興味深いことは、 $h < h_b$ のとき、最終時間で C_- は、適度な大きさの負となる一方、 C_+ が C_- と比較して十分大きな負の値となることである。なお、3つの薄いレンズの重ね合わせの例が図 18a (C_- 、 $h/2m = 0.5$) に見られる。
- (I) 領域 I では、Weyl 項 F は、ほとんどの場合 Ricci 項 \mathcal{R} より優位に効き、Ricci 項 \mathcal{R} が優位に効く場合は、特別な衝突係数 h_{F+} 付近に限られる。特別な衝突係数が $h_{F+} < h_E$ であるときは、 $C_- = 0$ に関する臨界係数 h_a が、領域 N_A と同様に h_E 近傍で存在する。また、2番目の臨界係数 h_b は、 h_{F+} 近傍でみられ、そこでは、最終時間において C_+ がゼロである。ここで、衝突係数 h の関数として、最終時間 $\lambda = \lambda_f$ での C_+ と C_- の振る舞いを考察してみる。衝突係数が $h < h_b$ のとき、小さな衝突係数に対し、 C_+ は、十分大きな負の値となる一方、 C_- は、再び符号が入れ変わり十分大きな正の値となる。その結果、最終時間で C_- がゼロになる3番目の臨界係数 h_c がある。ところで、注目すべきことは、数値計算を初期条件 $x_i = 100\delta$ で行ったために不等式 $h_{F+} < h_E$ が成立する領域が存在することである (図 24: 参照)。この場合、 $C_- = 0$ に関する臨界係数 h_a が消滅し、 C_+ に関する2番目の臨界係数 h_b が、最初に現れる。
- (II) 領域 II では、Weyl 項 F は、ほとんどの場合 Ricci 項 \mathcal{R} より優位に効き、Ricci 項 \mathcal{R} が優位に効く場合は、特別な衝突係数 h_{F+} と h_{F-} 付近に限られる。このとき、臨界係数は、複雑な構成となることがわかった。例えば、[ii] の場合、最初の臨界係数は、Einstein 半径 h_E 付近で現れ、最終時間で C_- は、ゼロになる。第2番目と第3番目の臨界係数は、 $C_+ = 0$ に関する臨界係数であり、それぞれ h_{F+} と h_{F-} 付近で現れる。さらに、衝突係数が小さい状況では、 C_- が振動することにより第4番目、第5番目の臨界係数が現れる。それぞれ、最終時間で C_- は、ゼロとなる。

5.3 光的測地線束と像の変形度

第5.1節において、像の変形度を意味する共形不変な光学的スカラー量 C を定義した。図22に、最終時間における C の振る舞いを、衝突係数 h の関数として示した。もっとも興味深いグラフの性質の1つは、臨界係数の出現である。シュワルツシルト時空では存在しない C_+ に関する臨界係数に着目し、その個数で場合分けすると、次の4つの場合が見つかった:

- (a) $N_+ = 0$, (b) $N_+ = 1$, (c) $N_+ = 2$, (d) $N_+ \neq 0$ かつ $h_E < h_{F+}$.

ところで、Einstein 半径 h_E は、(5.7) 式からわかるように、領域 (δ, Δ) の固有の量ではなく、光源までの初期の距離 $R_i = R_x(x_i)$ が与えられることによって決まる量である。したがって、初期値 $R_i = R_x(x_i)$ を大きくすることによって上記の分類 (d) は、分類 (b) あるいは分類 (c) の場合に帰着できると期待するのは自然であろう。そのような例は、図23でみられる。図23は、衝突係数 h の関数としての像の変形度 C の振る舞いを示した図である。領域 II: $(\delta, \Delta) = (0.6, 4.0)$ については図 (a)、領域 I: $(\delta, \Delta) = (0.3, 2.0)$ については、図 (c) にそれぞれ示した。図 (b) と (d) は、それぞれ図 (a) と図 (c) の拡大図である。いずれの場合も、 $x_i = 100\delta$ に対して $h_{F+}/2m > h_E/2m \sim 7$ となるが、 $x_i = 400\delta$ に対しては、 $h_{F+}/2m < h_E/2m \sim 14$ となる。したがって、図23より、初期値 $x_i = 100\delta$ のときは、分類 (d) であったものが初期値を大きく $x_i = 400\delta$ にすることによって、領域 I については、分類 (b)、領域 II については、分類 (c) に、それぞれ帰着されていることがわかる。また、図23(b) と (d) から、 $x_i = 100\delta$ の場合に対しては、Einstein 半径 h_E 付近の最初の臨界係数 $C = 1$ が消滅している。この意味で、グラフは、“異常性”を示していることがわかる。つまり、 h_{F+} の近くで、 C_+ に関する裸の臨界係数が出現している。一方、 $x_i = 400\delta$ の場合に対しては、この異常な臨界係数は、Einstein 半径 h_E に隠れ、 C_- に関する臨界係数が h_E 付近に現れている。図24では、上記の条件 (a) ~ (d) にしたがって、パラメータ領域 (δ, Δ) を分類し、前節で行った Weyl 項 $F(x_0)$ による分類 (N_A, N_B, I, II) との比較を行った。本質的ではない、分類 (d) を除けば、再び、上記の新しい分類 (a) ~ (d) と Weyl 項 $F(x_0)$ による分類 (N_A, N_B, I, II) に密接な関係があることがわかる。

パラメータ領域 (δ, Δ) の分類と数値計算結果の関係をまとめ、表 I に示した。

5.3 光的測地線束と像の変形度

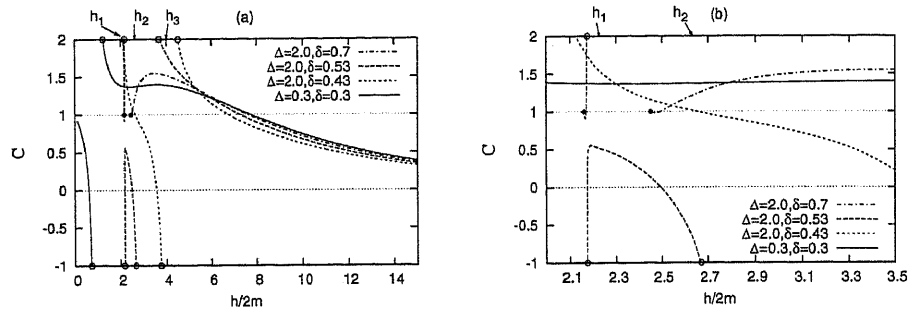


図 22: 衝突係数の関数としての、像の変形度 $C(h)$ の振る舞い: $h_F < h_E$ の場合。図 (b) は、図 (a) の拡大図。パラメータは、典型的な例を選んだ (第 5.1 節)。また、(5.11) 式で述べた特別な衝突係数 $(h_1/2m, h_2/2m, h_3/2m) = (2.23, 2.63, 3.99)$ の位置を記した。記号 $[\bullet]$ は、 $h = h_*$ の点を示している。記号 $[o]$ は、衝突係数が臨界係数に近づき、像の変形度 C が発散していることを示している。記号がない終点は、 $h \rightarrow h_*$ で像の変形度 C が有限値にとどまるか発散するかは、不明確である。

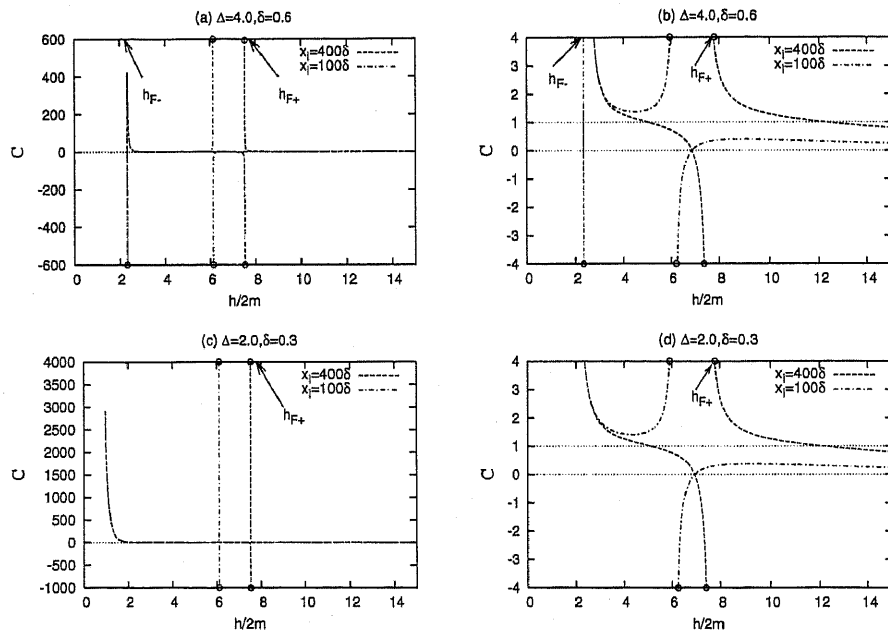


図 23: 衝突係数の関数としての、像の変形度 $C(h)$ の振る舞い: $h_F > h_E$ の例。領域 II: $(\delta, \Delta) = (0.6, 4.0)$ については図 (a) と図 (b) に、領域 I: $(\delta, \Delta) = (0.3, 2.0)$ については、図 (c) と (d) に示した。図 (b) と図 (d) は、それぞれ図 (a) と図 (c) の拡大図である。図 (a) と図 (b) に記されている特別な衝突係数 $h_+/2m$ と $h_-/2m$ の値は、それぞれ 7.73、2.33 である。また、図 (b) と図 (d) に記されている特別な衝突係数 $h_+/2m$ の値は、7.80 である。記号 $[o]$ は、衝突係数が臨界係数に近づき、像の変形度 C が発散していることを示している。図 (c) において、記号がない終点は、 $h \rightarrow h_*$ で像の変形度 C が有限値にとどまるか発散するかは、不明確である。初期値を $x_i = 100\delta$ から $x_i = 400\delta$ へ大きくすると、Einstein 半径と特別な衝突係数の大小関係は、 $h_F > h_E$ から $h_F < h_E$ へ変化する。したがって、この図より、本論文でなされた分類は、 $\begin{cases} d \rightarrow b \text{ (I)} \\ d \rightarrow c \text{ (II)} \end{cases}$ のように移り変わる。

5.3 光的測地線束と像の変形度

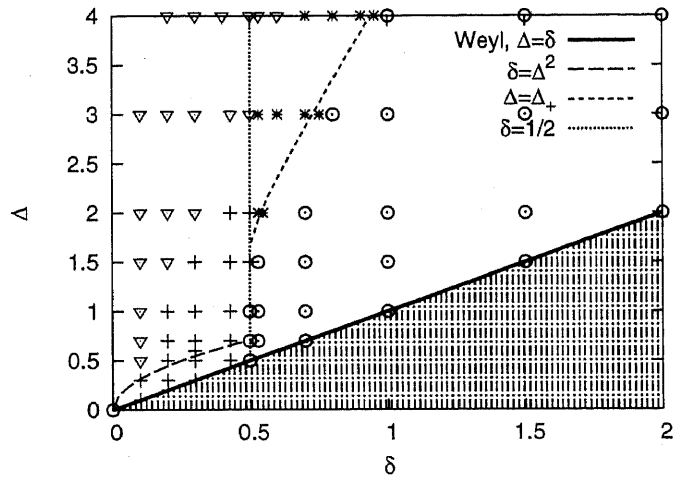


図 24: 本文中に説明された C_+ に関する臨界係数 N_+ の条件 (a) ~ (d) をもとに、パラメータ領域 (δ, Δ) を4つに分類し、前節で行った $F(x_0)$ による分類との比較を行った。条件 (a) ~ (d) に当てはまる領域を、それぞれ (a) ○印、(b) +印、(c) *印、および (d) ▽印で区別した。

Table 1: 領域 (δ, Δ) の分類のまとめ

$F(x_0)$ の分類	N_A	N_B	I	II	Fig. 4
反射する領域	ほぼ空白	+	+	+	Fig. 8
屈折角の極値の個数	ほぼ空白	+	+	*	Fig. 11
負の屈折角	空白	•	•	ほぼ•	Fig. 12
$C+$ に関する臨界係数の個数	ほぼ○	+	+	*	Fig. 24

§6 まとめ

本論文は、強い重力場でのスカラー・テンソル重力理論の局所的な時空構造を理解することを目的に、静的軸対称真空解のひとつであるスカラー・テンソル・ワイル解を用いて光の伝搬ならびに重力レンズ効果を調べた。

スカラー・テンソル重力理論は、理論に含まれる $\omega(\phi)$ の関数形によってさまざまなモデルが存在する。この $\omega(\phi)$ は、スカラー・テンソル重力理論によって決めることが出来ない関数である。もし、スカラー・テンソル重力理論が、重力も含めた力を統一的に記述する究極理論から誘起される有効重力理論ならば、 $\omega(\phi)$ の関数形が具体的に決まっている可能性がある。しかし、究極理論は未完成であり、また、有効重力理論の導出方法も定まっていない。そこで、本論文では、 $\omega(\phi)$ の関数形に依存にしない理論固有の性質をつかむため、光的測地線が持つ共形変換に対して不変な性質に着目した。その結果、共形変換に対して不変でかつ、スカラー・テンソル重力理論のモデルの詳細にはよらない時空の特徴を導き出すことに成功した。

最初に、スカラー・テンソル・ワイル解の定性的性質を決定する3つのパラメータ (σ, δ, Δ) の物理的意味を明白にするため、空間的無限遠方でのスカラー・テンソル・ワイル解の漸近形を求めた。重力場が静的で、そのうえ非常に弱いときは、計量テンソルの時間成分 g_{tt} が、重力ポテンシャル Φ_G ($: g_{tt} \sim -1 - 2\Phi_G$) に対応する。その結果、 Φ_G とパラメータ (σ, δ, Δ) との関係は、 $m = \sigma\delta$ とすると、次のようになる。

$$\Phi_G \sim -\frac{m}{r} + \left\{ \underbrace{\frac{1}{3} \left(\frac{\Delta^2}{\delta^2} - 1 \right)}_{\text{スカラー場}} + \underbrace{\frac{2}{3} \left(\frac{\Delta^2 - 1}{\delta^2} \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)}_{\text{4重極モーメント}} \right\} \frac{m^3}{2r^3}. \quad (6.1)$$

したがって、パラメータの3つの自由度は、質量 m 、スカラー場の大きさ、そして時空の非球対称性を表すと解釈できる。ニュートン重力ポテンシャルの形から類推すると、 $O(m^3/r^3)$ の項の係数が正である場合は、円盤型の重力場であり、係数が負の場合は、棒状型の重力場である。このことを考慮すると、スカラー場の大きさは常に正の値であり、重力場が円盤型になるのに寄与していることになる。

次に、赤道面における光的測地線と光学的スカラー方程式を調べた。これまでになされた球対称時空における Weyl 項の解析から、パラメータ δ に対し臨界線 $\delta = 1/2$ が存在し時空の性質は、 $\delta > 1/2$ の場合と $\delta < 1/2$ の場合とで異なることが知られていた [17]。本論文では、さらに軸対称性をもつ Weyl 項の解析から臨界線 $\delta = 1/2$ だけでなく、パラメータ Δ に対する臨界線 $\Delta = \Delta_+$ と $\delta = \Delta^2$ の存在を明らかにした。これは、時空 (δ, Δ) が、それぞれの臨界線によって仕切られた 4 つ (N_A , N_B , I, II) の領域に分類されることを意味している。そこで、4 つの領域 (N_A , N_B , I, II) の特徴を理解するため、光的測地線と光学的スカラー方程式を解き、光の屈折角および光の像の振る舞いを調べた。その結果、光の屈折角および光の像の振る舞いは、上記の分類、すなわち臨界線と密接な関係があることがわかった。特に、領域 (I, II) には、Weyl 項の解析から特別な衝突係数が存在し、衝突係数がこの特別な衝突係数に近づくにつれ、光の屈折角および光の像の振る舞いは、シュワルツシルト時空を含む領域 N_A とは大きく異なることが示された。それに対し領域 N_B の場合は、予想できない結果が得られた。すなわち、領域 N_B には、特別な衝突係数が存在しないにも関わらず、領域 I と同じ定性的特徴を持つことである。重要なことは、領域 N_B は、一般相対性理論における Weyl 解も一部、含んでいるということである。したがって、一般相対性理論においても、領域 I と同じ定性的特徴を持つ軸対称な時空が存在する。

本論文は、スカラー・テンソル・ワイル解という特解を用いており、かつ赤道面上 $y = 0$ においての研究であるのでかなり制限されている。このような制限された状況が実際に実現されるかどうかは、疑わしくまったく保障はできない。しかしながら、本論文において、強い重力場領域におけるスカラー・テンソル重力理論の新たな側面として、領域 II の発見に成功したことを主張したい。ただし、領域 II の特徴が現れる、特別な衝突係数 h_{F+} と h_{F-} は、通常、Einstein 半径 h_E の内側に隠れているだろう。

謝辞

本論文を作成するにあたって広く適切な指導をしてくださった渡辺助手に心から御礼申しあげます。さまざまな有益な意見をしてくださった大原助教授、西助教授に感謝いたします。また、研究室の皆さまには、多くの議論に付き合っていただき、感謝しております。

Appendix A —スカラー・テンソル重力理論における場の方程式の導出—

ここでは、一般相対性理論ならびにスカラー・テンソル重力理論の作用と場の方程式についてまとめる。

一般相対性理論では重力場の方程式は、次の Einstein-Hilbert 作用から導かれる。

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi\hat{G}} \int \sqrt{-\hat{g}} \hat{R} d^4x + S_{\text{matter}}[\Psi_m, \hat{g}_{\mu\nu}]. \quad (\text{A.1})$$

ここで、 \hat{G} は、重力定数であり、また $S_{\text{matter}}[\Psi_m, \hat{g}_{\mu\nu}]$ は、物質場 Ψ_m に関する作用である。

Einstein-Hilbert 作用の $\hat{g}_{\mu\nu}$ に関する変分をから次の Einstein 方程式が得られる。

$$\hat{G}_{\mu\nu} = 8\pi\hat{G}\hat{T}_{\mu\nu}. \quad (\text{A.2})$$

ここで $\hat{T}^{\mu\nu}$ は、

$$\hat{T}^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\delta S_{\text{matter}}[\Psi_m, \hat{g}_{\mu\nu}]}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}}, \quad (\text{A.3})$$

で定義されるエネルギー運動量テンソルである。物質場に対する保存則は Bianchi 恒等式から、

$$\hat{\nabla}_\nu \hat{G}^\nu_\mu = 0 \implies \hat{\nabla}_\nu \hat{T}^\nu_\mu = 0, \quad (\text{A.4})$$

となる。

本論文では、スカラー・テンソル重力理論の作用として次のものを採用する。

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left[\hat{\phi} \hat{R} - \frac{\omega(\hat{\phi})}{\hat{\phi}} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\phi}_{,\mu} \hat{\phi}_{,\nu} \right] \sqrt{-\hat{g}} d^4x + S_{\text{matter}}[\hat{\Psi}_m, \hat{g}_{\mu\nu}], \quad \hat{\phi}_{,\mu} \equiv \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^\mu}. \quad (\text{A.5})$$

この作用は、一般相対性理論の場合と比べると、重力定数 \hat{G} を、 $\hat{G} \sim 1/\hat{\phi}$ のようにスカラー場 $\hat{\phi}$ の関数で置き換え、スカラー場の運動項と解釈される項を加えたものになっている。ここで、 $\omega(\hat{\phi})$ は、スカラー・テンソル重力理論を特徴づける $\hat{\phi}$ の無次元関数であり、定数の場合は、Brans-Dicke 理論になる [1]。また、 S_{matter} は、物質場 $\hat{\Psi}_m$ に関する作用である。この作用のテンソル場 $\hat{g}_{\mu\nu}$ とスカラー場 $\hat{\phi}$ に関する変分をそれぞれ取ると、次の場の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\mu\nu} &= \frac{8\pi}{\hat{\phi}} \hat{T}_{\mu\nu} + \frac{\omega(\hat{\phi})}{\hat{\phi}^2} \left(\hat{\phi}_{,\mu} \hat{\phi}_{,\nu} - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{g}^{\alpha\beta} \hat{\phi}_{,\alpha} \hat{\phi}_{,\beta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\hat{\phi}} (\hat{\nabla}_\mu \hat{\phi}_{,\nu} - \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}^\alpha \hat{\phi}_{,\alpha}), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{\nabla}^\alpha \hat{\phi}_{,\alpha} = \frac{1}{3 + 2\omega(\hat{\phi})} \left(8\pi \hat{T} - \frac{d\omega(\hat{\phi})}{d\hat{\phi}} \hat{g}^{\alpha\beta} \hat{\phi}_{,\alpha} \hat{\phi}_{,\beta} \right). \quad (\text{A.7})$$

ここで、 $\hat{\nabla}_\alpha$ と $\hat{T}_{\mu\nu}$ は、それぞれ $\hat{g}_{\mu\nu}$ に関する共変微分とエネルギー運動量テンソルを表す。また、物質場 $\hat{T}^{\mu\nu}$ に対する保存則は Bianchi 恒等式から、

$$\hat{\nabla}_\nu \hat{G}^\nu_\mu = 0 \implies \hat{\nabla}_\nu \hat{T}^\nu_\mu = 0, \quad (\text{A.8})$$

となる。さて、次の共形変換を考えて、 (\hat{g}, ϕ) で書かれた場の方程式を以下で定義する (g, φ) で書くことにする。

$$g_{\mu\nu} = A^{-2}(\varphi)\hat{g}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.9})$$

$$A^2(\varphi) = \frac{1}{\hat{\phi}}, \quad \frac{1}{3+2\omega(\hat{\phi})} = \left(\frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \equiv \alpha^2(\varphi). \quad (\text{A.10})$$

このとき作用は、

$$S = \frac{1}{16\pi} \int (R - 2g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu})\sqrt{-g} d^4x + S_{\text{matter}}[\hat{\Psi}_m, A^2(\varphi)g_{\mu\nu}], \quad (\text{A.11})$$

と書き換えられる (Appendix B)。この作用の $g_{\mu\nu}$ と φ に関する変分をそれぞれ取ると、次のようになる。

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + 2 \left(\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \right), \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla^\mu \varphi_{,\mu} = -4\pi\alpha(\varphi)T. \quad (\text{A.13})$$

ここで、 ∇_α と $T_{\mu\nu}$ は、それぞれ $g_{\mu\nu}$ に関する共変微分とエネルギー-運動量テンソルを表し、 $T^{\mu\nu}$ と $\hat{T}^{\mu\nu}$ の関係は、つぎのように与えられる。

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}[\hat{\Psi}_m, A^2(\varphi)g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = A^6(\varphi)\hat{T}^{\mu\nu}. \quad (\text{A.14})$$

また、物質場 $T^{\mu\nu}$ に対する保存則は Bianchi 恒等式から、

$$\nabla_\nu G^\nu{}_\mu = 0 \implies \nabla_\nu T^\nu{}_\mu = \alpha(\varphi)T\nabla_\mu \varphi, \quad (\text{A.15})$$

となる。なお、(A.12) 式は、

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) + 2\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}, \quad (\text{A.16})$$

と同値である。

本論文では \hat{g} を計量にもつ多様体を Brans-Dicke 系、 g を計量にもつ多様体を、Einstein 系と呼ぶことにする。

Appendix B —Einstein 系でのラグランジアン の導出—

ここでは Brans-Dicke 系 (\hat{g}, ϕ) から Einstein 系 (g, φ) への共形変換をおこなう際に必要になる諸公式をまとめる。

$$\hat{g}_{ab} = A^2(\varphi)g_{ab}, \quad A^2(\varphi) = \frac{1}{\hat{\phi}}. \quad (\text{B.1})$$

共形変換にともなう幾何学量の変換則は、次のようになる。

$$\alpha(\varphi) \equiv \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi}, \quad (\text{B.2})$$

$$S^a{}_{bc} \equiv \alpha (\delta_b^a \varphi_{,c} + \delta_c^a \varphi_{,b} - g^{am} g_{bc} \varphi_{,m}), \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{\Gamma}^a{}_{bc} = \Gamma^a{}_{bc} + S^a{}_{bc}, \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{R}^a{}_{bcd} = R^a{}_{bcd} + \nabla_c S^a{}_{bd} - \nabla_d S^a{}_{bc} + S^a{}_{mc} S^m{}_{bd} - S^a{}_{md} S^m{}_{bc}, \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{R}_{bd} = R_{bd} + \nabla_c S^c{}_{bd} - \nabla_d S^c{}_{bc} + S^c{}_{mc} S^m{}_{bd} - S^c{}_{md} S^m{}_{bc}, \quad (\text{B.6})$$

$$\hat{R} = \frac{1}{A^2} \left[R - 6\alpha^2 g^{ab} \varphi_{,a}\varphi_{,b} - 6g^{ab} \nabla_a (\alpha \nabla_b \varphi) \right]. \quad (\text{B.7})$$

以上の公式を使ってラグランジアンを変換すると、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-\hat{g}} \left[\hat{\phi} \hat{R} - \frac{\omega(\hat{\phi})}{\hat{\phi}} \hat{g}^{ab} \hat{\phi}_{,a} \hat{\phi}_{,b} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} \left[R - 2\alpha^2 (3 + 2\omega(\hat{\phi})) g^{ab} \varphi_{,a} \varphi_{,b} \right] - \frac{1}{16\pi} \partial_a (6\sqrt{-g} \alpha \nabla^a \varphi), \quad (\text{B.9})$$

となる。ここで公式

$$\sqrt{-g} \nabla_a V^a = \partial_a (\sqrt{-g} V^a), \quad (\text{B.10})$$

を使った。式 (B.9) の第 2 項は表面項で、場の方程式の導出には関与しない。表面項を落として

$$\alpha^2(\varphi) = \frac{1}{3 + 2\omega(\hat{\phi})}, \quad (\text{B.11})$$

とすればラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left[R - 2g^{ab} \varphi_{,a} \varphi_{,b} \right], \quad (\text{B.12})$$

となる。

Appendix C —スカラー・テンソル・ワイル解の導出—

ここでは、静的軸対称真空解の 1 つであるスカラー・テンソル・ワイル解の導出を行う。

C.1 スカラー・テンソル重力理論における Ernst 方程式

定常性から時間的キリングベクトル $\xi = \partial_t$ が存在し、軸対称性から空間的キリングベクトル $\eta = \partial_\phi$ が存在する。Maxwell 場のエネルギー運動量テンソル $\hat{T}^{\alpha\beta}$ は、次の関係式を満たすことが知られている。

$$\xi^\alpha \hat{T}_\alpha^{[\beta} \xi^\gamma \eta^{\delta]} = \eta^\alpha \hat{T}_\alpha^{[\beta} \xi^\gamma \eta^{\delta]} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Brans-Dicke 系と Einstein 系のエネルギー運動量テンソルは、(A.14) 式の関係にあるので、 $T_{\mu\nu}$ でも (C.1) 式は成り立つ。さらに、場の方程式 (2.8) のスカラー場に関する項 $S_{\mu\nu}^{[\varphi]} \equiv 2\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$ についても、 $\xi\varphi = \eta\varphi = 0$ であることから (C.1) 式と同様な関係が成り立つ。したがって、計量は以下のように書き下すことができる。

$$ds^2 = -e^{2\psi} (dt - \omega d\phi)^2 + e^{-2\psi} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2]. \quad (\text{C.2})$$

ここで計量関数 ψ 、 γ 、 ω は、 $x^2 \equiv \rho$ と $x^3 \equiv z$ の関数である。

C.2 スカラー・テンソル・ワイル解

長く複雑な計算の後、場の方程式は、次のようになる。

$$e^{2\psi} = \frac{1}{2} (\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) + \Phi \bar{\Phi}, \quad (\text{C.3a})$$

$$e^{2\psi} \nabla^2 \mathcal{E} = (\nabla \mathcal{E}) \cdot [(\nabla \mathcal{E}) + 2\bar{\Phi} \nabla \Phi], \quad (\text{C.3b})$$

$$e^{2\psi} \nabla^2 \Phi = (\nabla \Phi) \cdot [(\nabla \mathcal{E}) + 2\bar{\Phi} \nabla \Phi], \quad (\text{C.3c})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{,2} = & \rho [(\psi_{,2})^2 - (\psi_{,3})^2] - \frac{1}{4\rho} [(\omega_{,2})^2 - (\omega_{,3})^2] e^{4\psi} \\ & - \rho (\bar{\Phi}_{,2} \bar{\Phi}_{,2} - \bar{\Phi}_{,3} \bar{\Phi}_{,3}) e^{-2\psi} + \rho [(\varphi_{,2})^2 - (\varphi_{,3})^2], \end{aligned} \quad (\text{C.3d})$$

$$\gamma_{,3} = 2\rho \psi_{,2} \psi_{,3} - \frac{1}{2\rho} \omega_{,2} \omega_{,3} e^{4\psi} - \rho (\bar{\Phi}_{,2} \bar{\Phi}_{,3} + \bar{\Phi}_{,3} \bar{\Phi}_{,2}) e^{-2\psi} \quad (\text{C.3e})$$

$$+ 2\rho \varphi_{,2} \varphi_{,3}, \quad (\text{C.3f})$$

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (\text{C.3g})$$

ここで ∇ は、任意関数 f と h に対して、

$$\nabla^2 f \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \nabla f \cdot \nabla h \equiv \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial h}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z}, \quad f_{,i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad i = 2, 3, \quad (\text{C.4})$$

で定義される演算子である。場の方程式で導入した \mathcal{E} は、 ψ と ω で決まる複素ポテンシャルで Ernst ポテンシャルと呼ばれている。また、 Φ は、電磁場に関するポテンシャルである。(C.3a)~(C.3c) 式は、一般相対論の場合と全く同じ方程式で、Einstein-Maxwell 系の Ernst 方程式と呼ばれる。一般相対論との違いは、(C.3d)~(C.3g) 式にあらわれる。計量関数 γ にのみスカラー場 φ の効果が入り、また、 ψ と φ が同じ形で寄与する。この意味で、 γ に対して ψ の寄与と φ の寄与の重ね合わせの原理が成り立つ。

C.2 スカラー・テンソル・ワイル解

前節で導かれた場の方程式を解くことは複雑で非常に難しいが、静的で真空解の場合には、比較的簡単な式になる。静的であることから $\omega = 0$ 、また、真空であることから $\Phi = 0$ とすることができる。このとき場の方程式 (C.3a)~(C.3g) は、次のようになる。

$$e^{2\psi} = \mathcal{E}, \quad (\text{C.5a})$$

$$\mathcal{E} \nabla^2 \mathcal{E} = (\nabla \mathcal{E}) \cdot (\nabla \mathcal{E}), \quad (\text{C.5b})$$

$$\gamma_{,2} = \rho [(\psi_{,2})^2 - (\psi_{,3})^2] + \rho [(\varphi_{,2})^2 - (\varphi_{,3})^2], \quad (\text{C.5c})$$

$$\gamma_{,3} = 2\rho \psi_{,2} \psi_{,3} + 2\rho \varphi_{,2} \varphi_{,3}, \quad (\text{C.5d})$$

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (\text{C.5e})$$

ここで Ernst ポテンシャル \mathcal{E} は、実関数で、Ernst 方程式 (C.5b) は

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (\text{C.6})$$

と書ける。したがって φ と ψ は、調和関数であることがわかる。

方程式を解くために、次式で定義される偏長型楕円体座標と偏平型楕円体座標を導入する。

$$\rho = \sigma \sqrt{(x^2 + \epsilon)(1 - y^2)}, \quad (\text{C.7a})$$

$$z = \sigma xy. \quad (\text{C.7b})$$

C.2 スカラー・テンソル・ワイル解

ここで σ は正の定数で、 $\epsilon = 1$ の場合は、偏平型楕円体座標、 $\epsilon = -1$ の場合は、偏長型楕円体座標である。このとき Ernst 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 + \epsilon) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 - y^2) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = 0, \quad (\text{C.8})$$

となり、同様の方程式は φ についても成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 + \epsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 - y^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0. \quad (\text{C.9})$$

C.2.1 偏長解

ここで一般相対論における Weyl 解の 1 つ、つまり、Voorhees の偏長解に対応している解の導出を行う。

そこで、Voorhees の偏長解の導出と同じように、 ψ が x のみに依存している場合を考える。このとき (C.9) 式は容易に解けて、

$$\psi = \frac{\delta}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right), \quad (\text{C.10})$$

となる。ここで δ は、積分定数である。同様に φ について解くと、

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right), \quad (\text{C.11})$$

となる。ここで φ_0 と d は、積分定数である。このとき対応する計量関数 γ は、

$$e^{2\gamma} = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right)^{\Delta^2}, \quad (\text{C.12})$$

となる。ここで Δ は、

$$\Delta^2 \equiv \delta^2 + d^2, \quad (\text{C.13})$$

で定義される定数である。計量を書くと、

$$ds^2 = - \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\delta dt^2 + \sigma^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-\delta} \times \left[\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right)^{\Delta^2} (x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 - 1)(1 - y^2) d\phi^2 \right], \quad (\text{C.14})$$

となる。

C.2.2 偏平解

最も簡単な偏平解は、 ψ が x のみに依存している場合で、

$$\psi = \delta \cdot \operatorname{arccot} x, \quad (\text{C.15})$$

となる。ここで δ は積分定数である。また、 φ についても同様に、

$$\varphi = \varphi_0 + d \cdot \operatorname{arccot} x, \quad (\text{C.16})$$

となる。ここで φ_0 と d は積分定数である。このとき対応する計量関数 γ は、

$$e^{2\gamma} = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + 1} \right)^{\Delta^2}, \quad (\text{C.17})$$

となる。ここで Δ は、

$$\Delta^2 = \delta^2 + d^2, \quad (\text{C.18})$$

で定義される定数である。計量を書くと、

$$ds^2 = -e^{2\delta \cdot \operatorname{arccot} x} dt^2 + \sigma^2 e^{-2\delta \cdot \operatorname{arccot} x} \times \left[\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + 1} \right)^{\Delta^2} (x^2 + y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 + 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + (x^2 + 1)(1 - y^2) d\phi^2 \right], \quad (\text{C.19})$$

となる。特に、 $\Delta = \delta$ のとき計量は、一般相対論における Voorhees の偏平解に一致する。なお、偏長解とは異なり、どんな δ と Δ をとっても Minkowski 時空 ($\Delta = \delta = 0$) を除く自明でない球対称解にはならない。

Appendix D — 光の屈折角の解析解 —

ここでは、特別なパラメータ (δ, Δ) に対する屈折角を解析的に求める。

D.1 屈折角の解析解

光的測地線の方程式 (4.2) により、光線の屈折角 α は、次のように与えられる。

$$\alpha(x_o) = 2 \int_{x_o}^{\infty} \frac{dx}{E(x)} - \pi. \quad (\text{D.1})$$

ここで、 $E(x)$ は、

$$E(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^{\frac{1 - \Delta^2}{2}} \sqrt{x^2 - 1} \left[\frac{x^2 - 1}{x_o^2 - 1} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^{2\delta} \left(\frac{x_o + 1}{x_o - 1} \right)^{-2\delta} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{D.2})$$

である。

D.1.1 $\delta = 0$, $\Delta^2 = 2N$ ($N = 1, 2, 3, \dots$) のとき

このとき、 $E(x)$ は、

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{x_o^2 - 1}} \frac{x^{2N-1}}{(x^2 - 1)^{N-1}} \sqrt{x^2 - x_o^2}, \quad (\text{D.3})$$

D.1 屈折角の解析解

となる。ここで、次のような2項展開をおこなう。

$$(x^2 - 1)^{N-1} = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(-1)^{N+r+1}(N-1)!}{r!(N-r-1)!} x^{2r}. \quad (\text{D.4})$$

このとき、屈折角 $\alpha(x_0)$ は、

$$\alpha(x_0) = 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{E(x)} - \pi \quad (\text{D.5})$$

$$= 2\sqrt{x_0^2 - 1} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(-1)^{N+r+1}(N-1)!}{r!(N-r-1)!} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^{2(N-r)-1} \sqrt{x^2 - x_0^2}} - \pi, \quad (\text{D.6})$$

と表される。

次に、 $x = x_0/\sqrt{t}$ と置換し、 $p = N - r$ とおくと、(D.6) 式は、次のように書き換えられる。

$$\alpha(x_0) = \sum_{p=1}^N \frac{(-1)^{p+1}(N-1)!}{(N-p)!(p-1)!} \frac{\sqrt{x_0^2 - 1}}{x_0^{2p-1}} \int_0^1 t^{p-\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt - \pi \quad (\text{D.7})$$

$$= \sum_{p=1}^N \frac{(-1)^{p+1}(N-1)!}{(N-p)!(p-1)!} \frac{\sqrt{x_0^2 - 1}}{x_0^{2p-1}} B\left(p - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \pi. \quad (\text{D.8})$$

ここで、 B は、ベータ関数であり、ガンマ関数 Γ と次のような関係がある。

○ベータ関数

$$B(x, y) \equiv \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (\text{D.9})$$

$$= B(y, x) \quad (\text{D.10})$$

$$= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (\text{D.11})$$

○ガンマ関数

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (\text{D.12})$$

したがって、

$$B\left(p - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p)} = \frac{(2p-3)!!\pi}{2^{p-1}(p-1)!}, \quad (\text{D.13})$$

であることを考慮すると、屈折角 $\alpha(x_0)$ は、

$$\alpha(x_0) = \pi(N-1)! \sqrt{x_0^2 - 1} \sum_{p=1}^N \frac{(-1)^{p+1}(2p-3)!!}{(N-p)! \{(p-1)!\}^2 2^{p-1} x_0^{2p-1}} - \pi, \quad (\text{D.14})$$

となる。

D.1 屈折角の解析解

D.1.2 $\delta = 1/2$, $\Delta^2 = 2N$ ($N = 1, 2, 3, \dots$) のとき

このとき、 $E(x)$ は、

$$E(x) = \frac{x^{2N-1}}{(x_o+1)(x^2-1)^{N-1}} \{x^2 + 2x - x_o(x_o+2)\}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{D.15})$$

となる。ここで、 $x = 1/t$ と置換すると

$$\alpha(x_o) = 2 \int_{x_o}^{\infty} \frac{dx}{E(x)} - \pi \quad (\text{D.16})$$

$$= 2(x_o+1) \int_{x_o}^{\infty} \frac{(x^2-1)^{N-1}}{x^{2N-1} \{x^2 + 2x - x_o(x_o+2)\}^{\frac{1}{2}}} dx - \pi \quad (\text{D.17})$$

$$= 2(x_o+1) \int_0^{\frac{1}{x_o}} \frac{(1-t^2)^{N-1}}{\{1+2t-x_o(x_o+2)t^2\}^{\frac{1}{2}}} dt - \pi, \quad (\text{D.18})$$

と書き換えられる。さらに、変数変換

$$t = \frac{1}{x_o(x_o+2)} \{(x_o+1) \sin \theta + 1\}, \quad (\text{D.19})$$

をおこない、

$$\theta_o = \sin^{-1} \frac{1}{x_o+1}, \quad (\text{D.20})$$

とすると、屈折角 $\alpha(x_o)$ は、

$$\begin{aligned} \alpha(x_o) &= (-1)^{N-1} 2\sqrt{x_o(x_o+2)} \left[\frac{x_o+1}{x_o(x_o+2)} \right]^{2N-1} \\ &\quad \times \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \{\sin^2 \theta + \xi(x_o) + \eta(x_o) \sin \theta\}^{N-1} d\theta - \pi, \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

と表される。ここで、 $\eta(x_o)$ と $\xi(x_o)$ は、

$$\eta(x_o) = \frac{2}{x_o+1}, \quad \xi(x_o) = 1 - 2x_o - x_o^2, \quad (\text{D.22})$$

であり、その範囲は、以下のようになる。

$$1 < x_o < \infty \rightarrow 0 < \eta(x_o) < 1, \quad 1 < \xi(x_o). \quad (\text{D.23})$$

次に、(D.21) 式の右辺の被積分関数の指数 $N-1$ が偶数の場合 (1) と奇数の場合 (2) に場合分けをする。

(1) $N = 2L+1$, $L = 0, 1, 2, \dots$ の場合
このとき、(D.21) 式は、

$$\alpha(x_o) = 2\sqrt{x_o(x_o+2)} \left[\frac{x_o+1}{x_o(x_o+2)} \right]^{4L+1} I_L(x_o) - \pi, \quad (\text{D.24})$$

D.1 屈折角の解析解

と表される。ここで、 $I_L(x_o)$ は、

$$I_L(x_o) \equiv \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \{(\sin^2 \theta + \xi(x_o)) + \eta(x_o) \sin \theta\}^{2L} d\theta, \quad (\text{D.25})$$

である。

(a) $L=0$ のとき

このとき、屈折角 α は、次のようになる。

$$\alpha(x_o) = \pi \left\{ \frac{x_o + 1}{\sqrt{x_o(x_o + 2)}} \left[\frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{x_o + 1} + 1 \right] - 1 \right\} \quad (\text{D.26})$$

(b) $L \geq 1$ のとき

このとき、 $I_L(x_o)$ の被積分関数を 2 項展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} I_L(x_o) &\equiv \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \{(\sin^2 \theta + \xi(x_o)) + \eta(x_o) \sin \theta\}^{2L} d\theta \\ &= \sum_{n=0}^L \sum_{k=0}^{2n} {}_{2L}C_{2n} \cdot {}_{2n}C_k \cdot \eta(x_o)^{2(L-n)} \xi(x_o)^k \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(L+n-k)} \theta d\theta \\ &\quad + \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{2n+1} {}_{2L}C_{2n+1} \cdot {}_{2n+1}C_k \cdot \eta(x_o)^{2(L-n)-1} \xi(x_o)^k \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(L+n-k)+1} \theta d\theta \\ &= \sum_{n=0}^L \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2L)!}{(2L-2n)!(2n-k)!k!} \eta(x_o)^{2(L-n)} \xi(x_o)^k A_\ell(x_o) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2L)!}{(2L-2n-1)!(2n-k+1)!k!} \eta(x_o)^{2(L-n)-1} \xi(x_o)^k B_\ell(x_o). \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

ここで、関数 $A_p(x_o)$ 、 $B_p(x_o)$ は、

$$A_p = \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x dx, \quad B_p = \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x dx,$$

である。また、 $\ell \equiv L+n-k$ である。関数 $A_p(x_o)$ 、 $B_p(x_o)$ に対して次の積分公式を用いると、(4.12) 式の表式が導出される。

$$\int \sin^{2p} x dx = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \left\{ x - \cos x \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(2p-2r-2)!!}{(2p-2r-1)!!} \sin^{2p-2r-1} x \right\},$$

$$\int \sin^{2p+1} x dx = \frac{(2p)!!}{(2p+1)!!} \cos x \sum_{r=0}^p \frac{(2p-2r-1)!!}{(2p-2r)!!} \sin^{2p-2r} x. \quad (\text{D.28})$$

- (2) $N = 2(L + 1)$, $L = 0, 1, 2, \dots$ のとき
このとき、(D.21) 式は、

$$\alpha(x_o) = -2\sqrt{x_o(x_o + 2)} \left[\frac{x_o + 1}{x_o(x_o + 2)} \right]^{4L+3} J_L(x_o) - \pi, \quad (\text{D.29})$$

と表される。ここで、 $J_L(x_o)$ は、

$$J_L(x_o) \equiv \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \{(\sin^2 \theta + \xi(x_o)) + \eta(x_o) \sin \theta\}^{2L+1} d\theta, \quad (\text{D.30})$$

である。ここで、 $J_L(x_o)$ の被積分関数を 2 項展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} J_L(x_o) &\equiv \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \{(\sin^2 \theta + \xi(x_o)) + \eta(x_o) \sin \theta\}^{2L+1} d\theta \\ &= \sum_{n=0}^L \sum_{k=0}^{2n+1} {}_{2L+1}C_{2n+1} \cdot {}_{2n+1}C_k \cdot \eta(x_o)^{2(L-n)} \xi(x_o)^k \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(L+n-k+1)} \theta d\theta \\ &+ \sum_{n=0}^L \sum_{k=0}^{2n} {}_{2L+1}C_{2n} \cdot {}_{2n}C_k \cdot \eta(x_o)^{2(L-n)+1} \xi(x_o)^k \int_{-\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(L+n-k)+1} \theta d\theta \\ &= \sum_{n=0}^L \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2L+1)!}{(2L-2n)!(2n-k+1)!k!} \eta(x_o)^{2(L-n)} \xi(x_o)^k A_{\ell+1}(x_o) \\ &+ \sum_{n=0}^L \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2L+1)!}{(2L-2n+1)!(2n-k)!k!} \eta(x_o)^{2(L-n)+1} \xi(x_o)^k B_{\ell}(x_o). \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

ここで、関数 $A_p(x_o)$ 、 $B_p(x_o)$ および ℓ は、(1) の場合と同じである。

Appendix E —光の屈折角の近似解—

E.1 弱い重力場領域における屈折角

弱い重力場領域における光の屈折角は、次のように近似される [25]。

$$\alpha(h) = \frac{4m}{h} + \frac{\pi}{4} \left(16 - \frac{\Delta^2}{\delta^2} \right) \frac{m^2}{h^2} + \mathcal{O} \left(\frac{m^3}{h^3} \right). \quad (\text{E.1})$$

E.2 強い重力場領域における屈折角 ($\delta > 1/2$)

E.2 強い重力場領域における屈折角 ($\delta > 1/2$)

円軌道が存在する領域 $\delta > 1/2$ において、衝突係数 $h \rightarrow h_*$ の極限で、光の屈折角 $\alpha(h)$ は、次のように近似される [26]。

$$\begin{aligned} \alpha(h) \sim & -\left(\frac{4\delta^2-1}{4\delta^2}\right)^{\frac{\Delta^2-1}{2}} \log\left(\frac{h}{h_*}-1\right) \\ & +\left(\frac{4\delta^2-1}{4\delta^2}\right)^{\frac{\Delta^2-1}{2}} \log\frac{[(2\delta+1)^\delta-(2\delta-1)^\delta]^2(2\delta+1)}{2\delta^2(2\delta-1)^{2\delta-1}} \\ & +b_R-\pi. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

ここで、 h_* は、

$$h_* = 2m\sqrt{1-\frac{1}{4\delta^2}\left(\frac{2\delta+1}{2\delta-1}\right)^\delta}, \quad (\text{E.3})$$

で与えられる。また、 b_R は、有限な定数であり以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} b_R &= \int_0^1 g(z)dz, \quad (\text{E.4}) \\ g(z) &= \frac{1}{\delta} \left(\frac{x(z)^2-1}{x(z)^2}\right)^{\frac{\delta^2-1}{2}} \left\{ (2\delta+1)^\delta - (2\delta-1)^\delta \right\} \\ &\times \left[\frac{(2\delta-1)^{2\delta-1}}{2\delta+1} - \left(\left\{ 1 - \left(\frac{2\delta-1}{2\delta+1}\right)^\delta \right\} z + \left(\frac{2\delta-1}{2\delta+1}\right)^\delta \right) \frac{(x(z)-1)^{\delta-1}}{(x(z)+1)^{\delta+1}} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &- \frac{4\delta^2-1}{2z\delta^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

ここで、 $x(z)$ は、

$$x(z) = \frac{1 + \delta \sqrt{\left\{ 1 - \left(\frac{2\delta-1}{2\delta+1}\right)^\delta \right\} z + \left(\frac{2\delta-1}{2\delta+1}\right)^\delta}}{1 - \delta \sqrt{\left\{ 1 - \left(\frac{2\delta-1}{2\delta+1}\right)^\delta \right\} z + \left(\frac{2\delta-1}{2\delta+1}\right)^\delta}}, \quad (\text{E.6})$$

である。球対称時空 ($\Delta = 1$) の場合について δ の値が 1 に近いときは、 b_R は、次のような値になる。

$$b_R \sim 0.9496 - 0.1199(\delta-1) + \mathcal{O}\{(\delta-1)^2\}. \quad (\text{E.7})$$

特に、シュワルツシルト時空 ($\Delta = \delta = 1$) のときは、

$$b_R = 2 \log 6 (2 - \sqrt{3}) \sim 0.9496, \quad (\text{E.8})$$

となる。これより、シュワルツシルト時空 ($\Delta = \delta = 1$) のとき、(E.2) 式は、

$$\alpha(h) \sim -\log\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{h}{2m}-1\right) + \log\left[216(7-4\sqrt{3})\right] - \pi, \quad (\text{E.9})$$

と表される。

Appendix F — 光学的スカラー方程式の厳密解 —

ここでは Dyer による光学的スカラー方程式に対する解析の結果をまとめる [21].

F.1 静的球対称時空

静的球対称時空の計量は、

$$ds^2 = -e^{2C} dt^2 + e^{2A} dr^2 + e^{2B} d\Omega^2, \quad (\text{F.1})$$

である。ここで、 A 、 B 、 C は、 r の関数である。この時空での光的測地線の接ベクトル k^μ は、

$$\begin{aligned} k^0 &= e^{-2C}, \quad k^2 = 0, \quad k^3 = he^{-2B}, \\ k^1 &= \pm e^{-(A+C)} \sqrt{1 - h^2 e^{2(C-B)}}, \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

である。ここで定数 h は、衝突係数であり、球対称から一般性を欠くことなく $k^2 = 0$ とした。この接ベクトル k^μ に対し、光波面を規定する複素光的ベクトル t^μ は、

$$\begin{aligned} t^0 &= \frac{e^{-C}}{2\sqrt{2}} \left[\frac{2}{h} S_+ S_- e^B + H(S_+^2 + S_-^2) \right], \quad t^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-B}, \\ t^1 &= \frac{e^{-A}}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{h} (S_+^2 + S_-^2) e^B + 2HS_+ S_- \right], \quad t^3 = \frac{Hh}{\sqrt{2}} e^{-2B}, \\ S_\pm &= \sqrt{e^{-C} \pm he^{-B}}, \quad H = -\frac{1}{h} \int^r \frac{B'}{S_+ S_-} e^{B-C} dr, \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

となる。ここでプライムは、 r に関する微分である。このとき Ricci 項 \mathcal{R} と Weyl 項 F は、それぞれ

$$\begin{aligned} -\mathcal{R} + F &= e^{-2(A+C)} (B'' + (B')^2 - B'C' - B'A') \\ &\quad - h^2 e^{-2(A+B)} (C'' + (C')^2 - C'B' - C'A'), \\ -\mathcal{R} - F &= e^{-2(A+C)} (B'' + (B')^2 - B'C' - B'A') \\ &\quad - h^2 e^{-2(A+B)} (e^{2(A-B)} + B'' - A'B'), \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

となる。Weyl 項 F は、実数であるから、一般性を欠くことなく σ を実数とすることができる。Dyer は、次式で定義される光学的スカラー量 C_\pm を導入した。

$$\frac{d}{d\lambda} \ln C_\pm = \theta \pm \sigma. \quad (\text{F.5})$$

このとき光学的スカラー方程式は、

$$\frac{d^2 C_\pm}{d\lambda^2} = (-\mathcal{R} \pm F) C_\pm, \quad (\text{F.6})$$

となる。Dyer は、この方程式に対する一般解が次のようになることを示した。

$$\begin{aligned} C_+ &= C_+^0 \sqrt{e^{2B} - h^2 e^{2C}} \left\{ \int^r \frac{e^{A+B+C}}{[e^{2B} - h^2 e^{2C}]^{\frac{3}{2}}} dr + D_+^0 \right\}, \\ C_- &= C_-^0 e^B \sin \left(h \int^r \frac{e^{A-B+C}}{\sqrt{e^{2B} - h^2 e^{2C}}} dr + D_-^0 \right). \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

ここで C_\pm^0 と D_\pm^0 は積分定数である。

F.2 静的軸対称時空

F.2 静的軸対称時空

静的軸対称時空の計量は、

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} dx^2 + e^{2\gamma} dy^2 + e^{2\mu} d\phi^2, \quad (\text{F.8})$$

である。ここで $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ は x と y の関数である。定数 h を衝突係数とすると、 $y = 0$ 面上にとどまる光的測地線の接ベクトル k^μ は、

$$\begin{aligned} k^0 &= e^{-2\alpha}, & k^2 &= 0, & k^3 &= he^{-2\mu}, \\ k^1 &= \pm e^{-\beta} \sqrt{e^{-2\alpha} - h^2 e^{-2\mu}}, \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

である。この接ベクトル k^μ に対し、光波面を規定する複素光的ベクトル t^μ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} t^0 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{2}{h} e^\mu S_+ S_- + H(S_+^2 + S_-^2) \right] e^{-\alpha}, & t^2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\gamma}, \\ t^1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{h} (S_+^2 + S_-^2) e^\mu + 2HS_+ S_- \right] e^{-\beta}, & t^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} H h e^{-2\mu}, \\ S_\pm &= \sqrt{e^{-\alpha} \pm h e^{-\mu}}, & H &= -\frac{1}{h} \int^x \frac{e^{\mu-\alpha}}{S_+ S_-} \frac{\partial \mu}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Appendix G —光学的スカラー方程式の解析的モデル—

ここでは、光学的スカラー方程式 (4.21) を、次のように近似した解析的モデルの解を求める。

$$\frac{d^2 u_\pm}{d\lambda^2} = \begin{cases} 0 & (|\lambda| > \epsilon) \\ \pm \kappa^2 u_\pm & (|\lambda| < \epsilon). \end{cases} \quad (\text{G.1})$$

ここで、 κ^2 と $\epsilon \sim \Delta\lambda/2$ は、それぞれ、 $-\mathcal{R} \pm F$ の大きさとレンズの厚さを表す。また、アフィンパラメータ λ は、薄いレンズの中心で $\lambda = 0$ となるように再定義した。また、初期条件は、 $\lambda = -\lambda_0 < 0$ において

$$u_\pm = 0, \quad \frac{du_\pm}{d\lambda} = 1, \quad (\text{G.2})$$

とする。

G.1 解析的モデル： u_+ の場合

(1) $\lambda \leq -\epsilon$ の領域

初期条件より、 u_+ は、

$$u_+ = \lambda + \lambda_0, \quad (\text{G.3})$$

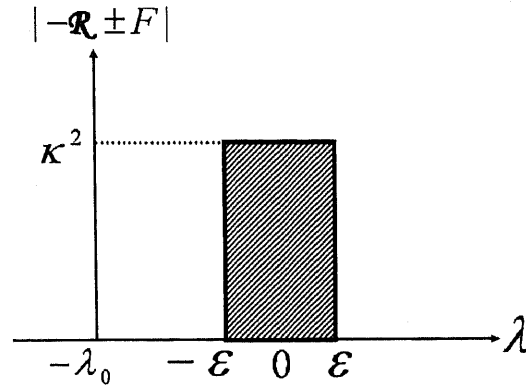
となる。

(2) $-\epsilon < \lambda < \epsilon$ の領域

この領域では、 u_+ は、(G.1) 式より、

$$u_+ = A_+ e^{\kappa\lambda} + B_+ e^{-\kappa\lambda}, \quad (\text{G.4})$$

G.1 解析的モデル： u_+ の場合



とおける。ここで、 A_+ と B_+ は、 $\lambda = -\epsilon$ での接続条件

$$\begin{cases} u_+(-\epsilon-0) = u_+(-\epsilon+0) \\ \frac{d}{d\lambda}u_+(-\epsilon-0) = \frac{d}{d\lambda}u_+(-\epsilon+0), \end{cases} \quad (\text{G.5})$$

から、次のように決まる。

$$\begin{cases} A_+ = \frac{1}{2}e^{\epsilon\kappa} \left\{ \frac{1}{\kappa} + \lambda_0 - \epsilon \right\} \\ B_+ = \frac{1}{2}e^{-\epsilon\kappa} \left\{ -\frac{1}{\kappa} + \lambda_0 - \epsilon \right\}. \end{cases} \quad (\text{G.6})$$

薄いレンズの近似 $\epsilon \ll \lambda_0$ のもとで、レンズの薄さ（厚さ）によって、 u_+ の振る舞いは、さらに次の2つに分類される。

◇ $\epsilon\kappa \ll 1$ $\epsilon \ll \lambda_0$ のとき

$$u_+ \sim \frac{1}{2} \left(\lambda_0 + \frac{1}{\kappa} \right) e^{\kappa\lambda} + \frac{1}{2} \left(\lambda_0 - \frac{1}{\kappa} \right) e^{-\kappa\lambda}. \quad (\text{G.7})$$

○ $\epsilon\kappa \gg 1$ $\epsilon \ll \lambda_0$ のとき

$$\log u_+ \sim \kappa\lambda + \log \left(\frac{1}{2} \lambda_0 e^{\epsilon\kappa} \right). \quad (\text{G.8})$$

(3) $\epsilon \leq \lambda$ の領域

この領域では、 u_+ は、(G.1) 式より、

$$u_+ = a_+\lambda + b_+, \quad (\text{G.9})$$

とおける。ここで、 a_+ と b_+ は、 $\lambda = \epsilon$ での接続条件

$$\begin{cases} u_+(\epsilon-0) = u_+(\epsilon+0) \\ \frac{d}{d\lambda}u_+(\epsilon-0) = \frac{d}{d\lambda}u_+(\epsilon+0), \end{cases} \quad (\text{G.10})$$

G.2 解析的モデル： u_- の場合

から、次のように決まる。

$$\begin{cases} a_+ = \cosh 2\epsilon\kappa + \omega(\lambda_0 - \epsilon) \sinh 2\epsilon\kappa \\ b_+ = (\lambda_0 - 2\epsilon) \cosh 2\epsilon\kappa + \left\{ \frac{1}{\kappa} + (\epsilon - \lambda_0)\epsilon\kappa \right\} \sinh 2\epsilon\kappa. \end{cases} \quad (\text{G.11})$$

薄いレンズの近似 $\epsilon \ll \lambda_0$ のもとで、レンズの薄さ（厚さ）によって、 u_+ の振る舞いは、さらに次の2つに分類される。

◇ $\epsilon\kappa \ll 1$, $\epsilon \ll \lambda_0$ のとき

$$u_+ \sim (1 + \Delta\theta_+) \lambda + \lambda_0. \quad (\text{G.12})$$

ここで、 $\Delta\theta_+ = \kappa\lambda_0(2\epsilon\kappa) \sim \kappa^2\lambda_0$, である。

○ $\epsilon\kappa \gg 1$, $\epsilon \ll \lambda_0$ のとき

$$u_+ \sim \frac{1}{2}\kappa\lambda_0 e^{2\epsilon\kappa} \lambda - \frac{1}{2}\epsilon\kappa\lambda_0 e^{2\epsilon\kappa}. \quad (\text{G.13})$$

G.2 解析的モデル： u_- の場合

(1) $\lambda \leq -\epsilon$ の領域

初期条件より u_- は、

$$u_- = \lambda + \lambda_0, \quad (\text{G.14})$$

となる。

(2) $-\epsilon < \lambda < \epsilon$ の領域

この領域では、 u_- は、(G.1) 式より、

$$u_- = A_- \sin \kappa\lambda + B_- \cos \kappa\lambda, \quad (\text{G.15})$$

とおける。ここで、 A_- と B_- は、 $\lambda = -\epsilon$ での接続条件

$$\begin{cases} u_-(-\epsilon - 0) = u_-(-\epsilon + 0) \\ \frac{d}{d\lambda} u_-(-\epsilon - 0) = \frac{d}{d\lambda} u_-(-\epsilon + 0), \end{cases} \quad (\text{G.16})$$

から、次のように決まる。

$$\begin{cases} A_- = \frac{1}{\kappa} \cos \epsilon\kappa + (\epsilon - \lambda_0) \sin \epsilon\kappa \\ B_- = \frac{1}{\kappa} \sin \epsilon\kappa - (\epsilon - \lambda_0) \cos \epsilon\kappa. \end{cases} \quad (\text{G.17})$$

薄いレンズの近似 $\epsilon \ll \lambda_0$ のもとで、レンズの薄さ（厚さ）によって、 u_- の振る舞いは、さらに次の2つに分類される。

◇ $\epsilon\kappa \ll 1$, $\epsilon \ll \lambda_0$ のとき

$$u_- \sim \left(\frac{1}{\kappa} - \lambda_0\epsilon\kappa \right) \sin \kappa\lambda + \lambda_0 \cos \kappa\lambda. \quad (\text{G.18})$$

G.2 解析的モデル： u_- の場合

○ $\epsilon\kappa \gg 1$, $\epsilon \ll \lambda_0$ のとき

$$u_- \sim \lambda_0 \sin \kappa(\lambda - \epsilon). \quad (\text{G.19})$$

これは、 u_- が振幅が λ_0 、振動数が κ で振動することを意味している。
この場合、光線がレンズを通過したとき u_- は、約 $\epsilon\kappa/\pi$ 回振動する。

(3) $\epsilon \leq \lambda$ の領域

この領域では、 u_- は、(G.1) 式より、

$$u_- = a_- \lambda + b_-, \quad (\text{G.20})$$

とおける。ここで a_- と b_- は、 $\lambda = \epsilon$ での接続条件

$$\begin{cases} u_-(\epsilon - 0) = u_-(\epsilon + 0) \\ \frac{d}{d\lambda} u_-(\epsilon - 0) = \frac{d}{d\lambda} u_-(\epsilon + 0), \end{cases} \quad (\text{G.21})$$

から、次のように決まる。

$$\begin{cases} a_- = \cos 2\epsilon\kappa + \kappa(\epsilon - \lambda_0) \sin 2\epsilon\kappa \\ b_- = \left\{ \frac{1}{\kappa} + (\lambda_0 - \epsilon)\epsilon\kappa \right\} \sin 2\epsilon\kappa + (\lambda_0 - 2\epsilon) \cos 2\epsilon\kappa. \end{cases} \quad (\text{G.22})$$

薄いレンズの近似 $\epsilon \ll \lambda_0$ のもとで、レンズの薄さ（厚さ）によって、 u_- の振る舞いは、さらに次の2つに分類される。

◇ $\epsilon\kappa \ll 1$, $\epsilon \ll \lambda_0$ のとき

$$u_- \sim (1 + \Delta\theta_-) \lambda + \lambda_0. \quad (\text{G.23})$$

ここで、 $\Delta\theta_- = -(\kappa\lambda_0)(2\epsilon\kappa)$ である。

○ $\epsilon\kappa \gg 1$, $\epsilon \ll \lambda_0$ のとき

$$u_- \sim -\kappa\lambda_0 \sin 2\epsilon\kappa \cdot (\lambda - \epsilon). \quad (\text{G.24})$$

この場合、傾き $-\kappa\lambda_0 \sin 2\epsilon\kappa$ の値は、位相 $\epsilon\kappa$ の値にしたがって大きく変化する、不規則な値となる。

References

- [1] C. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 (1962).
- [2] P. G. Bergmann, Int. J. Theor. Phys. **1**, 25 (1968)
- [3] R. V. Wagoner, Phys. Rev. **D1**, 3209 (1970)
- [4] Y. Fujii and K. Maeda, *The Scalar – Tensor Theory of Gravitation* (Cambridge University Press, 2003).
- [5] T. Damour and G. Esposito-Farèse, Class. Quant. Grav. **9**, 2093 (1992).
- [6] T. Damour and G. Esposito-Farèse, Phys. Rev. Lett. **70**, 2220 (1993).
- [7] T. Damour and B. Pichon, Phys. Rev. **D59**, 123502 (1999).
- [8] J. D. Barrow and P. Parsons, Phys. Rev. **D55**, 1906 (1997).
- [9] M. B. Green, J. H. Schwartz and E. Witten, *Superstring Theory vols. 1, 2*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [10] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064]; *ibid.*, 3370 (1999) [arXiv:hep-th/9905221].
- [11] S. Kanno and J. Soda, Astrophys. Space Sci. **283**, 481 (2003);
T. Shiromizu and K. Koyama, Phys. Rev. **D67**, 084022 (2003).
- [12] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993); *ibid.*, Living Rev.Rel. **4** (2001);
B. Bertotti, L. Less and P. Tortora, Nature, **425**, 374 (2003).
- [13] T. Damour and G. Esposito-Farèse, Phys. Rev. **D54**, 1474 (1996).
- [14] I. Kovner, APJ, **312**, 22 (1987);
H. Asada and M. Kasai, Prog. Theor. Phys. **104**, 95 (2000);
H. Asada, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **356**, 1249 (2005).
- [15] A. Tomimatsu and H. Sato, Prog. Theor. Phys. **50**, 95 (1972).
- [16] T. Tsuchida, G. Kawamura and K. Watanabe, Prog. Theor. Phys. **100**, 291 (1998) [arXiv:gr-qc/9802049].
- [17] T. Tsuchida and K. Watanabe, Prog. Theor. Phys. **101**, 73 (1999) [arXiv:gr-qc/9809010].
- [18] S. Tsuneishi, K. Watanabe and T. Tsuchida, Prog. Theor. Phys. **115**, ? (2006) [arXiv:gr-qc/0512157].
- [19] R. K. Sachs, Proc. R. Soc. London, **A264**, 309 (1961).
- [20] B. Voorhees, Phys. Rev. **D2**, 2119 (1970).
- [21] C. C. Dyer, Mon. Not. R. Astr. Soc. **180**, 231 (1977).

- [22] B. Carter, *J. Math. Phys.* **10**, 70 (1969).
- [23] R. M. Wald, *General Relativity*, (The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984).
- [24] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, New York, 1983).
- [25] Ephraim Fischbach and Belvin S. Freeman, *Phys. Rev.* **D**, 2950 (1980);
Mauro Sereno, *Phys. Rev.* **D67**, 064007 (2003); *ibid.*, **D69**, 023002 (2004).
- [26] V. Bozza, *Phys. Rev.* **D66**, 103001 (2002).