

スピン偏極セミインクルーシブ深非弾性散乱
における再足し上げ効果の研究

新潟大学附属図書館



1053112389

永 嶋 純 二

スピン偏極セミインクルーシブ深非弾性散乱における 再足し上げ効果の研究

新潟大学大学院 自然科学研究科
エネルギー基礎科学専攻 エネルギー物質科学大講座

F03J003C 永嶋 純二

2006年2月7日

目次

1	序論	1
2	パートン分布関数とパートン破碎関数	6
2.1	クォーク分布関数	6
2.2	反クォーク分布関数	8
2.3	グルーオン分布関数	9
2.4	クォーク破碎関数	9
2.5	グルーオン破碎関数	10
3	Resummation 理論	11
4	SIDIS における q_T Resummation	13
4.1	Lorentz Scalar 変数	13
4.2	ハドロン座標系	14
4.3	NLO 断面積	15
4.4	Resummed Cross Section	18
4.5	q_T 領域の結合	23
5	数値計算	25
5.1	逆 Mellin 変換	25
5.2	b -積分	26
5.3	非摂動項	29
6	結果	31
7	まとめ	37
8	謝辞	38
A	Large p_T における NLO 断面積	39
B	Asymptotic Part の導出	44
C	パートン分布関数の Q^2 発展	48

図目次

1	SIDIS 過程	3
2	ハドロン座標系	14
3	1 パートン放出図	16
4	$O(\alpha_s)$ 仮想補正図	17
5	逆 Mellin 変換のモーメント積分経路	26
6	b -積分の積分経路	28
7	無偏極過程: $ep \rightarrow e\pi X$ の微分断面積 (e-RHIC エネルギー領域)	33
8	偏極過程: $\vec{e}\vec{p} \rightarrow e\pi X$ の微分断面積 (e-RHIC エネルギー領域)	33
9	スピン非対称 (e-RHIC エネルギー領域)	34
10	無偏極過程: $ep \rightarrow e\pi X$ の微分断面積 (COMPASS エネルギー領域)	35
11	偏極過程: $\vec{e}\vec{p} \rightarrow e\pi X$ の微分断面積 (COMPASS エネルギー領域)	35
12	スピン非対称 (COMPASS エネルギー領域)	36
13	δ 関数の $\lambda \rightarrow 0$ での振舞い	45

1 序論

現在、核子を始めとするハドロンはクォークやグルーオンから作られていることが知られているが、問題になるのが実際にクォーク・グルーオンがどのようにしてハドロンを構成しているかという事である。ハドロンの内部構造に関する情報は、高エネルギー粒子加速器による衝突実験を通して知ることができる。世界各地の研究所では 1960 年代から現在に至るまで様々な衝突実験が行われており、核子に電子等のレプトンを入射し、ハドロン群を生成する深部非弾性散乱過程 ($\text{DIS} : e + N \rightarrow e + X$) や、核子核子衝突でレプトン対とハドロン群を生成する Drell-Yan 過程 ($N + N' \rightarrow e + e' + X$) 等のインクルーシブ (包含) 過程の他に、セミインクルーシブ DIS ($\text{SIDIS} : e + N \rightarrow e + h + X$) や核子核子衝突 ($N + N' \rightarrow h + X$) 等といった、終状態で特定のハドロンを捕えるセミインクルーシブ (準包含) 過程がある。更には近年の実験技術の進歩により入射ビームや標的核子をスピン偏極させる事が可能になり、それらスピン偏極させた粒子を用いた衝突実験も盛んに行われ、ハドロンの内部構造に関する情報は種類や精度を増しつつ現在に至っている。

理論の側面においては、ハドロンが素粒子でない事をクォーク模型で提唱したのは Gell-Mann と Zweig である [1, 2]。当時、それまでに発見されていた粒子とは異なる性質を持つ粒子 (後にストレンジネス: S を持つ粒子だと分かる) の発見が相次いでおり、核子や π が素粒子ではなく、それらはより基本となる粒子から構成されていると考えられ始めていた。そこで彼らは坂田らの理論 [3, 4] を発展させ、ハドロンがクォーク (u, d, s) という、 $\text{SU}(3)$ 群に従う新しい量子数 "フレーバー" で分類される基本粒子から成るとした。彼らはクォークにスピン $\frac{1}{2}$ と分数電荷、ストレンジネスを持たせることで、クォークを構成子としてハドロンの質量や磁気能率等の静的な性質を再現する事や、ハドロンの系統的な分類に成功した。しかし核子等のバリオンの記述に関して 1 つだけ大きな問題が残っており、その問題を端的に示す例として Δ^{++} 粒子がある。 Δ^{++} はスピン $\frac{3}{2}$ 、電荷 $+2$ の粒子なので、クォークによる組成では $\Delta^{++} = (u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow)$ と表される。しかしクォークはフェルミオンであり、この Δ^{++} の組成は Pauli の排他律に反する。そこで Gell-Mann はクォークに新たな量子数として $\text{SU}(3)$ 群の "カラー" を導入する事で波動関数の完全反対称化を実現した。この様にクォーク模型によってハドロンの組成を説明することが可能になり、ハドロンの静的性質も再現できたが、実際にハドロンはクォークから構成されているのか、クォークは分数電荷を持つのか、といったハドロンの内部構造に関する事柄は説明することができなかった。この状況に対して大きな転機を与えたのが 1969 年の MIT-SLAC における DIS 実験である [5]。この実験により J.D.Bjorken によって予想されていた構造の無い質点との散乱における特徴である "Bjorken スケーリング" [6] が実証され、Feynman と Bjorken らによる「ハドロンは "パートン" と呼ぶ基本粒子によって構成され、高エネルギーにおいてパートンは準自由粒子として振る舞う。」というパートン模型 [7, 8] に根拠が与えられ、パートンがクォークであると

された。またカラーに関しては、 $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ の崩壊率や $p + p \rightarrow l + l' + X$ (l, l' : レプトン)、 $e^+ + e^- \rightarrow X$ 等の過程の実験から、カラー自由度が実在し自由度が3である事と、カラー自由度を頭わに持つ粒子は現実には観測できない（カラーの閉じ込め）という事が分かっていた。（閉じ込めに関しては、現在でも理論的に完全な証明は成されていないが、QCD の非可換ゲージ理論の性質から導けるものと信じられており、格子 QCD 理論を使って閉じ込めの性質を定性的に導くことには成功しているので、今日では既定の事実として受け入れられている。）こうしてハドロンはパートンであるクォークから構成されているとして決着すると思われたが、電子をプローブとしてハドロンの運動量を探る実験（DIS 等）において、クォークが運ぶ運動量の和はハドロン自体の運動量の半分程度しかない事が分かり、電子を用いた実験では確認できない電氣的に中性なパートンの存在が明らかになってきた。この中性パートンの正体は量子色力学（QCD）理論が確立する事で説明が可能になった。

QCD 理論に関しては誰が発明したか、その経緯はあまりはっきりしていない。歴史的には、前述の様にまずハドロン分光学におけるクォーク模型の成功とカラーの発見があり、MIT-SLAC の DIS 実験における Bjorken スケーリングとパートン描像の成功があった。また、既に 1965 年に Han-南部によるカラーを力の源泉とした SU(3) を含む理論の提唱もされていた [9]。こうした状況において、QCD が強い相互作用を記述する理論としての地位を確立できたのは、Gross-Wilczek や Politzer による QCD の漸近的自由性の発見 [10, 11] による所が大きい。

C.N.Yang と R.L.Mills の非可換ゲージ理論 [12] に従う QCD 理論における基本パートンは、クォークとクォーク同士のカラーによる相互作用を担うゲージ粒子のグルーオンである。グルーオンが QED における仮想光子と異なる点は、クーロン相互作用を担う仮想光子自身が電荷を持たない事に対し、QCD においてカラー相互作用を媒介するグルーオン自身がカラー電荷を持ち、自己相互作用が可能な点である。この媒介粒子の自己相互作用が非可換ゲージ理論の特徴であり、結果、色電荷が Anti-Screening され QCD 相互作用が短距離で弱まる事が分かった。これが漸近的自由性である。なお、実際に高エネルギーの電子陽電子対消滅過程における 3-jet 生成等でグルーオンが実在する証拠が提示されており、グルーオンが前述の中性パートンである事が分かった。

QCD 理論の確立により、 1GeV^{-1} より短距離のスケールにおけるパートンの相互作用の確率は、小さな QCD 有効相互作用 α_s の級数として摂動計算が可能であり、この事実からパートン模型が成功を収めたのであるが、長距離のスケールでは α_s は大きくなり、約 1GeV^{-1} のスケールでは QCD 相互作用は非摂動的になる。従って、QCD による数的計算では長距離、短距離それぞれに関連した力学の分離が必要となる。このような分離の可能性は QCD 因子化定理を用いて証明されており、高エネルギー過程では長距離部分である反応過程に依存しない分布関数や破碎関数 ($f(x), D(z)$) と呼ばれる関数等と、短距離部分である外的プローブとの相互作用を表すハード断面積 ($\hat{\sigma}(x, z)$) が因子化され、物理量はそれらの Convolution

として書かれる。

$$\sigma \sim f(x) \otimes D(z) \otimes \hat{\sigma}(x, z)$$

ハード断面積は短距離部分であるので、漸近的自由性により摂動論的 QCD による摂動計算が良い近似となるが、長距離部分である分布関数や破砕関数はハドロンの内部構造に関する非摂動的な関数であり、厳密な定義が存在するにも関わらず、詳細な情報（運動量分布、スピン分布等）は摂動論的 QCD では知る事ができない。しかし摂動論的 QCD によるハード断面積の計算が可能な高エネルギー過程の断面積にこれらの非摂動関数が含まれる事から、実験データと分布・破砕関数を未知関数とした理論解析の比較を幾つもの過程に対して行う事で、分布・破砕関数に対する解析が行われている。また上記の方法以外にも有効理論や格子 QCD 理論を用いてハドロンの構造を探る研究も行われている。

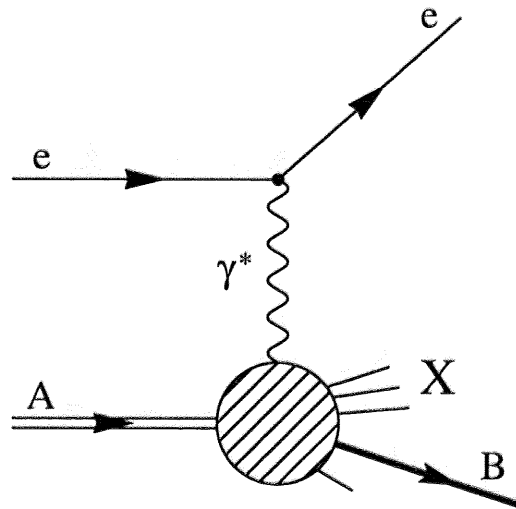


図 1 SIDIS 過程

本研究では電子と陽子を衝突させ、横運動量 (p_T) を持ったハドロンを捕える SIDIS 過程において、各粒子のスピン状態を考慮した偏極 SIDIS 過程を考察する。偏極 SIDIS 過程の実験としては DESY の HERMES (27.5GeV の偏極陽電子ビーム) や CERN の COMPASS(160GeV のミューオンビーム) 等が存在し、BNL では e-RHIC と呼ばれる 10GeV のレプトンビームと 100GeV の陽子ビームを用いた SIDIS 過程の実験も計画されている。このような偏極 SIDIS の実験に対応し、我々は以前の研究で大きな横運動量 (p_T) を持ったハドロンを捕える偏極 SIDIS 過程で各粒子の全てのスピンの組み合わせを考慮し、高

エネルギーで抑制されない反応過程の完全系：

$$\begin{aligned}
& \text{(i)} \quad e + p \rightarrow e' + \pi(p_T) + X \text{ or } e' + 2 \text{ jets} + X, \\
& \text{(ii)} \quad e + \vec{p} \rightarrow e' + \vec{\Lambda}(p_T) + X, \\
& \text{(iii)} \quad e + p^\uparrow \rightarrow e' + \Lambda^\uparrow(p_T) + X, \\
& \text{(iv)} \quad \vec{e} + \vec{p} \rightarrow e' + \pi(p_T) + X \text{ or } e' + 2 \text{ jets} + X, \\
& \text{(v)} \quad \vec{e} + p \rightarrow e' + \vec{\Lambda}(p_T) + X.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

について、断面積の定式化とスピン非対称に対する評価を行った [13]。\$\vec{e}, \vec{p}\$ は進行方向に対して平行にスピン偏極した状態を表し、\$p^\uparrow, \Lambda^\uparrow\$ は進行方向に対して垂直にスピン偏極した状態を表す。またこれらの過程では \$O(\alpha_S)\$ が摂動の Lowest Order になっている。[13] では、より詳細な情報を得るために \$q_T\$ に関する微分断面積形式で定式化を行っている。他の SIDIS の解析としては、\$q_T\$ に関して積分された形式で Leading Order (LO) については Xiangdong Ji が [14]、Next-to-Leading Order (NLO) では D. de Florian らによる研究等がある [15, 16]。

[13] の \$O(\alpha_S)\$ における摂動計算は、小さな \$p_T\$ 領域では断面積が \$\frac{\alpha_S}{p_T} \ln\left(\frac{Q^2}{p_T^2}\right)\$ という発散を含んでいる為に、\$p_T\$ が仮想光子による運動量移行 \$Q\$ と同じオーダーの場合にのみ有効な形式である事に注意が必要である。一般的に小さな \$p_T\$ 領域における \$O(\alpha_S^N)\$ の断面積には \$\frac{\alpha_S^N}{p_T} \ln^m\left(\frac{Q^2}{p_T^2}\right)\$ (\$m = 1, \dots, 2N - 1\$) という大きな対数の寄与が含まれている。この大きな対数はソフトグルーオンの多重放射に寄るもので、ほとんどの高エネルギー Inclusive 過程に共通の特徴である。つまり有効な断面積を得るためには、一定のオーダーにおける単純な摂動計算ではなく、高次からの大きな対数の寄与を再足し上げ (Resummation) しなければならない。このようなソフトグルーオンに起因する対数の再足し上げは、70 年代に Drell-Yan 過程に対して初めて行われ [17]、その後に横運動量 \$p_T\$ をインパクトパラメータ \$b\$-空間に Fourier 変換した形式での再足し上げが行われるようになり [18, 19, 20]、Collins-Soper-Sterman によって系統的に \$b\$-空間における Resummation 手法が確立された [21]。その後も種々の反応過程に対して Resummation を用いた解析が行われている [22, 23]。

本研究の目的は前研究を発展させ、Collins-Soper-Sterman (CSS) による \$b\$-空間における Resummation の手法を用いることにより、ソフトグルーオンの多重放出による大きな対数の寄与を全てのオーダーで取り入れ、小さな横運動量領域を含めた全横運動量領域で有効な全ての偏極 SIDIS 過程 (1.1) における断面積の定式化を実行することである。更に、無偏極過程：\$ep \rightarrow e\pi X\$ 及び、一つの偏極 SIDIS 過程：\$\vec{e}\vec{p} \rightarrow e\pi X\$ の数値計算を CERN の COMPASS と、BNL の e-RHIC 両実験のエネルギー領域で実行し、断面積と分布・破碎関数に関する情報を引き出すのに有用な量であるスピン非対称において、対数の再足し上げの効果と、付加的に加えられる非摂動項の効果を評価する。また、その際には CSS の形式に含まれる \$b\$-空間積分に対する異なった二つのアプローチの比較も行う。

この論文の構成は次の通りである。第 2 節では断面積を記述するのに必要なパートン

分布関数・破砕関数を分類し、それぞれの性質を説明する。第3節では本研究で用いる Resummation 理論の概要を述べ、第4節では SIDIS の運動学と [13] で求めた (1.1) の断面積の特徴を纏める。さらにそれらを基にソフトグルーオンからの寄与を Collins-Soper-Sterman による形式で再足し上げ (Resum) し、有効な断面積の表式を得る。なお得られる結果は、大きな横運動量領域で [13] の NLO の断面積と一致し、小さな横運動量領域においては各次数 (N) の結合定数に付随する対数のべき乗 ($m = 2N - 1 \sim 0$) の Next-to-Leading Logarithm (NLL) の精度である。第5節では $\bar{e}p \rightarrow e\pi X$ 過程に対する数値計算を実行する為の準備として、第4節で導出した式の変換と b -積分の手法、そして非摂動効果についての説明を行い、第6節に数値的結果を纏める。最後に第7節でまとめを行う。また補稿では幾つかの式の導出に関する細かい計算を記載している。

2 パートン分布関数とパートン破碎関数

DIS や Drell-Yan 過程のような高エネルギーのインクルーシブ過程の断面積は光学定理により前方散乱振幅の切断図として書ける。これはさらに QCD 因子化定理によってハード部分とソフト部分に分けることができる。ハード部分は QCD の漸近的自由性によって摂動論的 QCD で計算可能なクォーク、グルーオン、仮想光子等のハード断面積である。ソフト部分はハドロンに固有な量であり、過程には依存しない非摂動論的な力学によって決まり、標的ハドロン内のクォークやグルーオンといったパートンの運動量分布や相関などの情報を表す”分布関数 (Distribution Function)” や、ハード断面積から出て来たパートンがハドロンを生成するという非摂動論的な過程の情報を運ぶ”破碎関数 (Fragmentation Function)” がある。以下では、これらパートン分布・破碎関数を見ていくことにする。

2.1 クォーク分布関数

QCD におけるクォーク分布関数は、J.C.Collins と D.E.Soper が最初に導入し [24]、後に R.L.Jaffe と X.Ji によってクォーク場やグルーオン場の演算子の積のハドロン状態における期待値の光円錐上の Fourier 変換を使って系統的に分類された [25, 26]。

クォーク分布関数は、適当なガンマ行列 Γ を間に挟んだクォーク場 ψ の双一次演算子の行列要素を光円錐上で Fourier 変換した

$$\phi(x) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle PS | \bar{\psi}(0) \Gamma \psi(\lambda n) | PS \rangle \quad (2.1)$$

で定義される。ここで、 $|PS\rangle$ は核子 (スピン 1/2、質量 M) が四元運動量 P 、スピンベクトル S をもつ状態 ($P^2 = -S^2 = M^2$, $P \cdot S = 0$) を表し、これらの物理量は 2 つの光円錐ベクトル p^μ , n^μ ($p^2 = n^2 = 0$, $p \cdot n = 1$) を使って

$$P^\mu = p^\mu + \frac{M^2}{2} n^\mu \quad (2.2)$$

$$S^\mu = (S \cdot n) p^\mu + (S \cdot p) n^\mu + M S_\perp^\mu \quad (2.3)$$

と分解できる。 x は、核子の運動量に対してクォークが運ぶ運動量の割合を表し、 $\phi(x)$ は $|x| > 1$ でゼロになることが示される。また、上式では $\phi(x)$ がゲージ不変であることを保証する $\bar{\psi}$ と ψ の間のゲージリンク演算子

$$\mathcal{P}[0, \lambda n] = P[\exp(-ig \int_0^\lambda d\tau n \cdot A(\tau n))] \quad (A_\mu: \text{グルーオン場}) \quad (2.4)$$

を省略しており、上式における P は Path-ordering operation を表している。以降、ゲージリンク演算子はあらわに書かないことにする。

分布関数は、ハドロンのスピンやツイスト、カイラリティという量によって分類される。一般に高エネルギー過程の観測量は $1/\sqrt{Q^2}$ のべきで表され、 $(1/\sqrt{Q^2})^{t-2}$ の項で初めて現れる分布関数をツイスト t の分布関数と呼ぶ。最低次はツイスト 2 である。また、クォーク分布関数はクォークとハドロンの前方散乱振幅の虚部に比例するが、運動量割合 x を持ち、カイラリティが左 (右) 巻きのクォークがハドロンから出て、同じ運動量割合を持つ左 (右) 巻きクォークがハドロンに入ってくるような前方散乱振幅に対応する分布関数をカイラル偶の分布関数と言い、左 (右) 巻きクォークがハドロンから出て、右 (左) 巻きクォークがハドロンに入ってくるような、カイラリティが逆転する前方散乱振幅に対応する分布関数をカイラル奇の分布関数と呼ぶ。

入射ハドロンがスピン 1/2 のバリオンであるとき、 Γ として $1, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, i\sigma^{\mu\nu} \gamma_5$ を代入し、Lorentz テンソル分解することによって、ツイスト 4 までで 9 個のクォーク分布関数が得られる。

1) $\Gamma = \gamma^\mu$ のとき

$$\int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle PS | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(\lambda n) | PS \rangle = 2[f_1(x)p^\mu + f_4(x)n^\mu M^2] \quad (2.5)$$

2) $\Gamma = \gamma^\mu \gamma_5$ のとき

$$\begin{aligned} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle PS | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(\lambda n) | PS \rangle &= 2[g_1(x)p^\mu (S \cdot n) + g_T(x)MS_\perp^\mu \\ &\quad + g_3(x)M^2 n^\mu (S \cdot n)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

3) $\Gamma = 1$ のとき

$$\int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle PS | \bar{\psi}(0) \psi(\lambda n) | PS \rangle = 2e(x)M \quad (2.7)$$

4) $\Gamma = i\sigma^{\mu\nu} \gamma_5$ のとき

$$\begin{aligned} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle PS | \bar{\psi}(0) \sigma^{\mu\nu} i\gamma_5 \psi(\lambda n) | PS \rangle &= 2[h_1(x)(S_\perp^\mu p^\nu - S_\perp^\nu p^\mu) \\ &\quad + h_L(x)M(p^\mu n^\nu - p^\nu n^\mu)(S \cdot n) \\ &\quad + h_3(x)M^2(S_\perp^\mu n^\nu - S_\perp^\nu n^\mu)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

カイラリティは、 $\Gamma = \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5$ の場合がカイラル偶、 $\Gamma = 1, i\sigma^{\mu\nu} \gamma_5$ の場合はカイラル奇である。つまり、 f_1, g_1, g_T, f_4, g_3 がカイラル偶、 h_1, e, h_L, h_3 がカイラル奇の分布関数である。またツイストは次元解析により、因子 M^t を伴っているものがツイスト $(t+2)$ となる。

	無偏極 ターゲット	縦偏極 ターゲット	横偏極 ターゲット
ツイスト 2 $O(1)$	f_1	g_1	h_1
ツイスト 3 $O(1/Q)$	e	h_L	g_T
ツイスト 4 $O(1/Q^2)$	f_4	g_3	h_3

表 1：クォーク分布関数の分類

クォーク分布関数の定義式は、Lorentz テンソル分解の式の p^μ 、 n^μ や S_\perp^μ を使った射影によって得られる。ツイスト 2 の分布関数の式は

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle P | \bar{\psi}(0) \not{n} \psi(\lambda n) | P \rangle \quad (2.9)$$

$$g_1(x) = \frac{1}{2(S \cdot n)} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle P | \bar{\psi}(0) \not{n} \gamma_5 \psi(\lambda n) | P \rangle \quad (2.10)$$

$$h_1(x) = \frac{i}{2} \epsilon_{S_\perp \sigma p n} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle P | \bar{\psi}(0) \not{n} \gamma_\perp^\sigma \psi(\lambda n) | P \rangle \quad (2.11)$$

であり、文字通りパートンの運動量分布を表す確率密度関数と解釈できるので、パートン描像が成り立つ。なお $\epsilon_{S_\perp \sigma p n} \equiv \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} S_\perp^\mu p^\nu n^\lambda$ 、 $\gamma_\perp^\sigma \equiv \gamma^\sigma - \not{p} p^\sigma - \not{n} n^\sigma$ である。実際の計算には分布関数に対する以下の式が有用である。

$$\begin{aligned} M(x, S)_{i,j} &= \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle PS | \bar{\psi}_j(0) \psi_i(\lambda n) | PS \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\not{p})_{ij} f_1(x) + \frac{1}{2} (\gamma^5 \not{p})_{ij} (S \cdot n) g_1(x) + \frac{1}{2} (\gamma^5 \not{S}_\perp)_{ij} h_1(x) + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

ここで添字 i, j は Dirac スピノールの添字であり、 $+\dots$ はツイスト 3 以上を表す。

2.2 反クォーク分布関数

パートン分布関数は場の理論から、 $|x| < 1$ でのみゼロでない値をとりうることを証明され、 $-1 < x \leq 0$ におけるクォーク分布関数は、対応する反クォーク分布関数と関係付けられる。ツイスト 2 の分布関数については、

$$f_1(-x) = -\bar{f}_1(x), \quad g_1(-x) = \bar{g}_1(x), \quad h_1(-x) = -\bar{h}_1(x)$$

となる [25]。ここで、 $\bar{f}_1(x)$, $\bar{g}_1(x)$, $\bar{h}_1(x)$ はそれぞれ $f_1(x)$, $g_1(x)$, $h_1(x)$ に対応する反クォーク分布関数である。

反クォークの分布関数 $\bar{\psi}$ はクォーク場の荷電共役変換

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T, \quad \bar{\psi}^c = -\psi^T C^{-1} \quad (C = -C^{-1} = -C^\dagger)$$

をとることで次のように与えられる。

$$\bar{\phi}(x) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle PS | \bar{\psi}^c(0) \Gamma \psi^c(\lambda n) | PS \rangle \quad (2.13)$$

2.3 グルーオン分布関数

グルーオンの分布関数は、2つのグルーオンの field-strength: $F^{\mu\nu}$ の光円錐上の相関関数を Fourier 変換した形式で以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \rho^{\alpha\beta}(x) &= \frac{1}{x^2} \frac{1}{(P^+)^2} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \langle PS | F^{+\alpha}(0) F^{+\beta}(\lambda n) | PS \rangle \\ &= -\frac{1}{2x} G(x) g_{\perp}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2x} \Delta G(x) i\epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau} p_\sigma n_\tau (S \cdot n) \\ &\quad - \frac{1}{x} G_3(x) i\epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau} S_{\perp\sigma} n_\tau + \frac{1}{x} G_4(x) M^2 n^\mu n^\nu \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここで $G(x)$ は無偏極な核子の、 $\Delta G(x)$ は縦偏極した核子のツイスト 2 のグルーオン分布関数であり、ツイスト 2 のクォーク分布関数と同様にパートン描像が成り立ち、横偏極の核子に対するツイスト 2 のグルーオン分布関数は存在しない。 $G_3(x)$ は横偏極核子のツイスト 3 の、 $G_4(x)$ は無偏極核子に対するツイスト 4 のグルーオン分布関数である。なお、 $g_{\perp}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - p^\alpha n^\beta - p^\beta n^\alpha$ である。

2.4 クォーク破砕関数

ハドロン生成の断面積には、ハード部分から大きな横運動量を持って出てくるパートンが終状態で抑えるハドロンに破砕する部分を既述する破砕関数が現れる [14, 27]。クォークが、自身の運動量に対して光円錐運動量割合 $1/z$ を持つハドロンに破砕する場合の破砕関数は、 P_h, S_h, n_h をそれぞれ抑えるハドロンの運動量とスピン、ハドロンに破砕するクォークの光円錐ベクトルとすると、

$$D(z) = \frac{1}{N_c} \sum_X z \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda}{z}} \langle 0 | \Gamma \psi(0) | h(P_h S_h) X \rangle \langle h(P_h S_h) X | \bar{\psi}(\lambda n_h) | 0 \rangle \quad (2.15)$$

を分布関数と同様に適当なガンマ行列 Γ を代入して Lorentz テンソル分解することで得られ、抑えるハドロンがスピン 1/2 のバリオンの場合は、ツイスト 4 までで表 2 のように分類される。

	無偏極 ハドロン	縦偏極 ハドロン	横偏極 ハドロン
ツイスト 2 $O(1)$	\hat{f}_1	\hat{g}_1	\hat{h}_1
ツイスト 3 $O(1/Q)$	$\hat{e}_1(\hat{e}_{\bar{1}})$	$\hat{h}_L(\hat{h}_{\bar{L}})$	$\hat{g}_T(\hat{g}_{\bar{T}})$
ツイスト 4 $O(1/Q^2)$	\hat{f}_4	\hat{g}_3	\hat{h}_3

表 2: クォーク破砕関数の分類 (ツイスト 3 の () 内は時間反転奇の破砕関数)

破砕関数は分布関数とほぼ対応しているが、ツイスト 3 には終状態での $h + X$ の終状態相互作用のために、それぞれもうひとつの時間反転奇の破砕関数が存在する。

実際の計算には分布関数と同様に以下の式が有用である。

$$\begin{aligned}
\widehat{M}(z)_{ij} &= \sum_X \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda}{z}} \langle 0 | \psi_i(0) | h(P_h) X \rangle \langle h(P_h) X | \bar{\psi}_j(\lambda n_h) | 0 \rangle \\
&= (\not{p}_h)_{ij} \hat{f}_1(z) + (S_h \cdot n_h) (\gamma_5 \not{p}_h)_{ij} \hat{g}_1(z) + (\gamma_5 \not{p}_{h\perp})_{ij} \hat{h}_1(z) + \dots \quad (2.16)
\end{aligned}$$

本論文では Λ と π を抑える過程を扱うが、 π などのスピン 0 のハドロンに対するクォーク破砕関数は、表の無偏極に対するものしか存在しない。

2.5 グルーオン破砕関数

グルーオンの破砕関数は分布関数の場合と同様に与えられ、

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{ab}^{\alpha\beta} &= \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda}{z}} \langle 0 | A_a^\alpha(0) | h(P_h) X \rangle \langle h(P_h) X | A_b^\beta(\lambda n) | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{N^2 - 1} 2z^2 \delta_{ab} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda}{z}} \langle 0 | n_\lambda G_a^{\lambda\alpha}(0) | h(P_h) X \rangle \langle h(P_h) X | n_\sigma G_b^{\sigma\beta}(\lambda n) | 0 \rangle \\
&\quad \square \\
&= \delta_{ab} \left[-g_\perp^{\alpha\beta} \hat{G}(z) + i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} p_\gamma n_\sigma \Delta \hat{G}(z) + \dots \right] \quad (2.17)
\end{aligned}$$

である。ここで $g_\perp^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - p^\alpha n^\beta - p^\beta n^\alpha$ であり、 $\hat{G}(z)$ は無偏極ハドロンへの、 $\Delta \hat{G}(z)$ は縦偏極ハドロンへのグルーオン破砕関数を表す。なお、横偏極ハドロンへのグルーオン破砕関数は存在しない。

3 Resummation 理論

一般的に横運動量 q_T を持ったハドロンを捕える SIDIS 過程の $q_T \sim Q$ 領域における摂動計算の Lowest Order は $O(\alpha_s)$ であるので、微分断面積は以下のべき展開の形で得ることができる。

$$\frac{d\sigma}{dq_T^2} \sim \alpha_s(u_1 + u_2\alpha_s + u_3\alpha_s^2 + \dots) \quad (3.1)$$

ところが実験的にも興味がある小さな横運動量領域 ($q_T \ll Q$) においては摂動級数が大きな対数を含んでしまうために、級数の収束性が損なわれ摂動計算が破綻してしまう。

$$\left. \frac{d\sigma}{dq_T^2} \right|_{q_T \rightarrow 0} \sim \frac{1}{q_T^2} \sum_{N=1}^{\infty} \alpha_s^N \sum_{m=0}^{2N-1} v_m^{(N)} \ln^m \left(\frac{Q^2}{q_T^2} \right) \quad (3.2)$$

このような大きな対数は、小さなエネルギーのグルーオン（ソフトグルーオン）や入射もしくは捕獲ハドロンの方向に進むグルーオン（コリニアールグルーオン）の放射が要因となっている。 $\alpha_s \ln^2(Q^2/q_T^2) \simeq 1$ の領域では、これら大きな対数の寄与を足し上げなければ意味のある結果を得ることができない。この再足し上げを行う手法が本研究のテーマであるソフトグルーオン Resummation である。

1978 年に Dokshitzer-D'Yakonov-Troyan(DDT)[17] らは Drell-Yan 過程において、 α_s^N の項に対して主要となる対数の項 ($m = 2N - 1$) を足し合わせる Double-Leading-Logarithm-Approximation (DLA) での再足し上げを実行した。これは摂動級数

$$\left. \frac{d\sigma}{dq_T^2} \right|_{q_T \rightarrow 0} \sim \frac{1}{q_T^2} \alpha_s \ln \left(\frac{Q^2}{q_T^2} \right) \left[v_1^{(1)} + v_3^{(2)} \alpha_s \ln^2 \left(\frac{Q^2}{q_T^2} \right) + v_5^{(3)} \alpha_s^2 \ln^4 \left(\frac{Q^2}{q_T^2} \right) + \dots \right] \quad (3.3)$$

において、 $q_T \sim 0$ の極限では α_s が小さくても $\alpha_s \ln^2(Q^2/q_T^2)$ が大きな値を取り収束性が失われてしまうが、DLA における係数 $v_i^{(j)}$ はそれぞれが独立ではなく、各べき級数を正確に足し合わせる事が可能であり、 α_s についての全ての次数からの寄与を足し上げたものである。

$$\left. \frac{d\sigma}{dq_T^2} \right|_{\text{DLA}} \sim \frac{d}{dq_T^2} \exp \left[-\frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \ln^2 \left(\frac{Q^2}{q_T^2} \right) \right] \quad (3.4)$$

上式は DDT 公式と呼ばれている。

DLA や DDT 公式は放射されるグルーオンの横運動量 k_{T_i} が大きさに関して順序良く配置されている (strongly-ordering)

$$k_{T_1}^2 \ll k_{T_2}^2 \ll \dots \ll k_{T_N}^2 \leq p_T^2 \ll Q^2 \quad (3.5)$$

という仮定の下に成立しているが、その他の寄与 (non-strongly-ordering) も必要であることが Parisi-Petronzio によって導かれた [18]。彼らはインパクトパラメータ (b) 空間において、放射される全てのグルーオンに対して横運動量保存則：

$$\delta^{(2)}\left(\sum_{i=1}^N \vec{k}_{T_i} - \vec{q}_T\right) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2b e^{-i\vec{b}\cdot\vec{q}_T} \prod_{i=1}^N e^{i\vec{b}\cdot\vec{k}_{T_i}} \quad (3.6)$$

を課す事で non-strongly-ordering の全ての効果を含むことを可能にした。これが b -空間における Resummation 理論である。その後も b -空間における Resummation 理論は [19, 20, 21] 等で Drell-Yan 過程に適応されている他、[22, 23] では無偏極の SIDIS 過程の記述にも用いられており、[23] においては CERN における HERA のデータを良く再現することがわかった。

後年、Collins-Soper-Sterman (CSS) は Parisi-Petronzio[18] による表式を更に推し進め、くりこみ群の性質を適応することで $q_T \rightarrow 0$ の極限における特異性を α_s の全ての次数で足し合わせ、実験結果と比較できる様な有限の横運動量分布を引き出すことに成功した [19, 21]。彼らの微分断面積に対する最終的な形式は、 q_T のインパクトパラメータ (b) による Fourier 変換によって次式で表される。

$$\frac{d\sigma}{dq_T^2} \sim \int_0^\infty d^2b e^{i\vec{b}\cdot\vec{q}_T} \widetilde{W}(b, Q) + Y(q_T, Q) \quad (3.7)$$

ここで関数 $\widetilde{W}(b, Q)$ は再足し上げの結果を含み $q_T \ll Q$ で主要な寄与となる項であり、関数 $Y(q_T, Q)$ は $q_T \rightarrow 0$ では特異性を持たず無視できる補正項であるが、 $q_T \sim Q$ 領域においては主要な項となる。CSS-Resummation 理論において注目すべき点は、二次元のインパクトパラメータ \vec{b} を導入し、全てのソフトグルーオンについて横運動量保存則を課していることである。CSS-Resummation の詳細な説明と、本研究における扱いは 4.4 章で扱う。

4 SIDIS における q_T Resummation

今考えているのは

$$e(k) + A(p_A, S_A) \rightarrow e'(k') + B(p_B, S_B) + X \quad (4.1)$$

である。ここで e, e' は電子もしくは陽電子を表しており、 A は陽子、 B は終状態で捕獲されるハドロン (π や Λ) である。また X はそれ以外の生成ハドロン群である。 A, B それぞれの運動量を p_A^μ, p_B^μ 、スピンベクトルを S_A, S_B とした。始状態、終状態のレプトンの運動量は k^μ, k'^μ であり、核子への運動量移行を $q^\mu = k^\mu - k'^\mu$ とする。なお、入射レプトンとハドロン A は一光子交換で相互作用を行うものとする。従って q^μ は交換される仮想光子の運動量である。

4.1 Lorentz Scalar 変数

断面積の定式化を行う際に用いる 5 つの Lorentz Scalar 変数を定義する。入射レプトンと陽子の重心エネルギーは $\sqrt{S_{ep}}$ であり、 S_{ep} は

$$S_{ep} \equiv (p_A + k)^2 = 2p_A \cdot k \quad (4.2)$$

で表される量である。また、DIS において有益な変数である Q^2, x_{bj} を定義する。

$$Q^2 \equiv -q^2 = 2k \cdot k' \\ x_{bj} \equiv \frac{Q^2}{2p_A \cdot q} \quad (4.3)$$

この Q^2, x_{bj} は終状態レプトンの運動量を測定する事で決定することができる。

次に捕獲ハドロン B の運動量に関する変数として、 z_f を

$$z_f \equiv \frac{p_A \cdot p_B}{p_A \cdot q} = \frac{2x_{bj} p_A \cdot p_B}{Q^2} \quad (4.4)$$

とする。この z_f はパートンから終状態ハドロンへの破砕に関して重要な変数である。また、仮想光子が運ぶ四元運動量の p_A, p_B に直行する成分を

$$q_t^\mu \equiv q^\mu - p_A^\mu \frac{p_B \cdot q}{p_A \cdot p_B} - p_B^\mu \frac{p_A \cdot q}{p_A \cdot p_B} \quad (4.5)$$

と定義する ($p_A \cdot q_T = p_B \cdot q_T = 0$)。 q_T は空間的ベクトル ($q_T^2 < 0$) であり、Lorentz Scalar 変数として

$$q_T^2 \equiv -q_t^\mu q_{t\mu} \quad (4.6)$$

が定義される。

4.2 ハドロン座標系

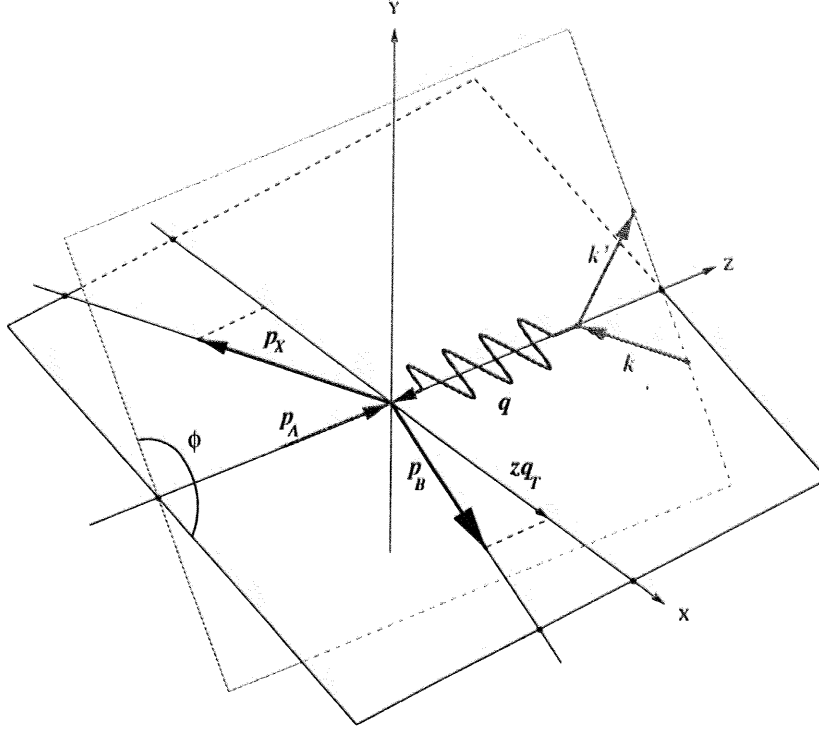


図2 ハドロン座標系

ハドロン座標系は以下の2つの状況を設定することで定められる。

- 1、仮想光子の四元運動量の第ゼロ成分を0にとる
- 2、捕獲ハドロンBの運動量 p_B が $x-z$ 平面に存在する

この座標系で入射ハドロンAは $+z$ 方向に動き、また運動量移行 q^μ の第0成分 q^0 はゼロであり、空間成分 \vec{q} は $-z$ 方向にとる。

$$q^\mu = (0, 0, 0, -Q) \quad (4.7)$$

$$p_A^\mu = \frac{Q}{2x_{bj}}(1, 0, 0, 1) \quad (4.8)$$

捕獲ハドロンBの運動量は $x-z$ 平面に存在することから

$$p_B^\mu = \frac{z_f Q}{2} \left(1 + \frac{q_T^2}{Q^2}, 2\frac{q_T}{Q}, 0, \frac{q_T^2}{Q^2} - 1 \right) \quad (4.9)$$

と書ける。また、入射・散乱電子の運動量はレプトン散乱平面とハドロン散乱平面が成す角 ϕ

と、

$$\cosh \psi = \frac{2x_{bj}S_{eA}}{Q^2} - 1 \quad (4.10)$$

を満たす角度 ψ を導入することで

$$\begin{aligned} k^\mu &= \frac{Q}{2} (\cosh \psi, \sinh \psi \cos \phi, \sinh \psi \sin \phi, -1) \\ k'^\mu &= \frac{Q}{2} (\cosh \psi, \sinh \psi \cos \phi, \sinh \psi \sin \phi, 1) \end{aligned} \quad (4.11)$$

と書ける。また (4.9) より p_B の横成分は

$$p_T = z_f q_T \quad (4.12)$$

となる。また、ハドロン A,B の横偏極スピンベクトルはそれぞれ \vec{p}_A と \vec{p}_B に直行する平面上に存在する。ハドロン座標系においてこれらのベクトルは

$$\begin{aligned} S_{A\perp}^\mu &= (0, \cos \Phi_A, \sin \Phi_A, 0) \\ S_{B\perp}^\mu &= (0, \cos \Theta_B \cos \Phi_B, \sin \Phi_B, -\sin \Theta_B \cos \Phi_B) \end{aligned} \quad (4.13)$$

と書かれる。なお $\Phi_{A,B}$ はハドロン散乱平面から計られる $S_{A,B\perp}$ の方位角である。また Θ_B は \vec{p}_A から \vec{p}_B への極角であり、

$$\cos \Theta_B = \frac{q_T^2 - Q^2}{q_T^2 + Q^2}, \quad \sin \Theta_B = \frac{2q_T Q}{q_T^2 + Q^2} \quad (4.14)$$

と書き表すことが出来る。なおスピン偏極状態は選んだ座標系に依存し、例えばハドロン座標系における横偏極状態は入射レプトンと入射ハドロンが正面衝突するような実験室系では、縦偏極状態と横偏極状態が混じることになる。

これらの定義を用いて (4.1) の断面積は $S_{ep}, x_{bj}, Q^2, z_f, q_T^2, \phi$ で書き表されるが、 ϕ は q 方向へのブーストに対して不変である事に注意が必要である。

4.3 NLO 断面積

SIDIS における大きな p_T を持ったハドロン生成に対する $O(\alpha_s)$ 断面積は、1 パートン放出図形 (図 3) から得ることができる [13]。なお、図 3 内の \otimes はパートン破砕関数の挿入を表す。各反応過程に関する断面積はハドロン系における方位角 ϕ の依存性の異なる項の和として表され、簡略化して書くと以下のような形になっている。(詳細な式は Appendix A に記載)

(i),(ii)

$$\frac{d^5 \sigma^{[OO,LL]}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} = \sigma_0^{[OO,LL]} + \cos(\phi) \sigma_1^{[OO,LL]} + \cos(2\phi) \sigma_2^{[OO,LL]} \quad (4.15)$$

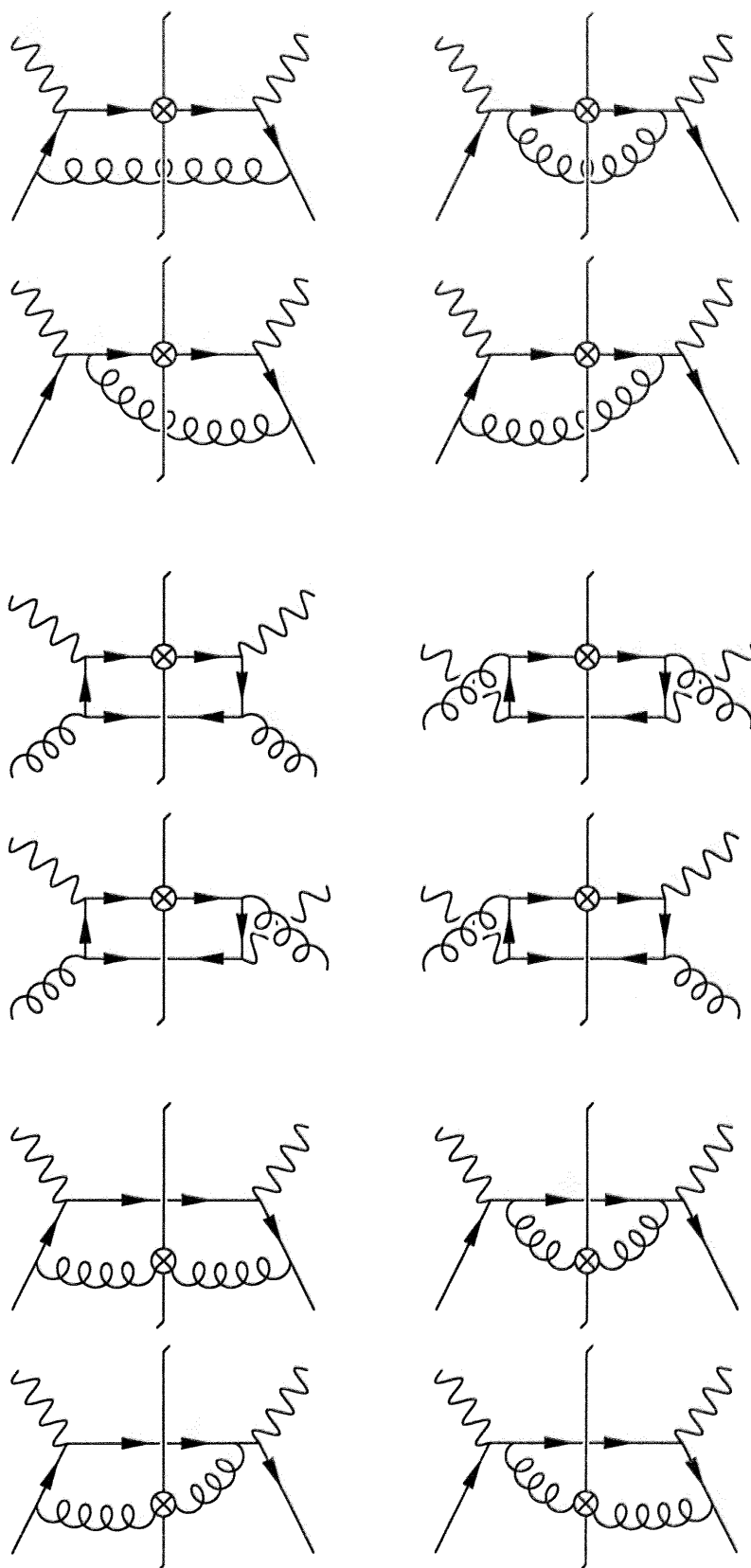


図 3 1 パートン放出図

(iv),(v)

$$\frac{d^5\sigma^{[\text{LO,OL}]}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} = \sigma_0^{[\text{LO,OL}]} + \cos(\phi)\sigma_1^{[\text{LO,OL}]} \quad (4.16)$$

(iii)

$$\frac{d^5\sigma^{\text{TT}}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} = \cos(\Phi_A - \Phi_B - 2\phi)\sigma_0^{\text{TT}} + \cos(\Phi_A - \Phi_B - \phi)\sigma_1^{\text{TT}} + \cos(\Phi_A - \Phi_B)\sigma_2^{\text{TT}} \quad (4.17)$$

上記の各 σ_0 には $\frac{1}{q_T^2} \ln\left(\frac{Q^2}{q_T^2}\right)$ という $q_T \rightarrow 0$ での発散項が含まれており、これはソフト発散とコリニアール発散の現れに寄るものである。しかし $O(\alpha_s)$ の仮想補正図 (図 4) を考慮することでソフト発散はキャンセルし、コリニアール発散は分布関数や破碎関数の中に因子化して押し込めることが出来る。だが、これらの発散を取り除いた後にも $O(\alpha_s^N)$ には最大で $\frac{\alpha_s^N}{q_T^2} \ln^{2N-1}\left(\frac{Q^2}{q_T^2}\right)$ の大きな対数の発散が残っており、小さな q_T 領域における固定次数の摂動計算では良い結果を得ることが出来ない。Meng らや、Nadolsky らは Collins,Soper,Starman の Resummation(CSS-Resummation) の形式を無偏極 SIDIS 過程に適応し、大きな対数の寄与が再足し上げされた $\sigma_0^{[OO]}$ に対する結果を得ている [22, 23]。本研究では、偏極 SIDIS 過程に対し CSS-Resummation を適応し、5 つの過程の σ_0 に対して再足し上げされた断面積を得る。

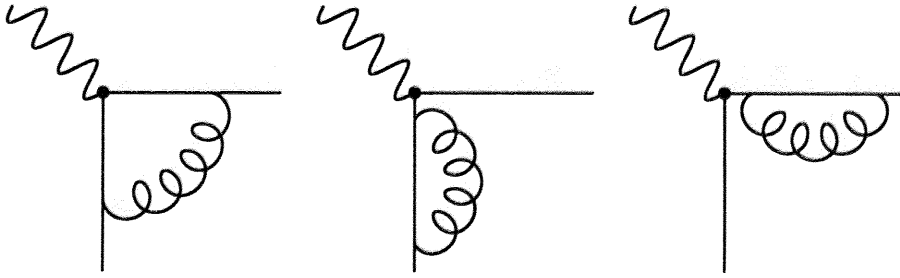


図 4 $O(\alpha_s)$ 仮想補正図

4.4 Resummed Cross Section

再足し上げされた断面積 (Resummed Cross Section) を得るために、NLO の断面積から $q_T \rightarrow 0$ における大きな対数を含んだ項を引き出さなければならない。[23] と同様に、この項を *asymptotic part* と呼ぶことにすると、1 パートン放出過程からくる $O(\alpha_s)$ の断面積は

$$\frac{d^5\sigma^{\text{NLO}}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} = \frac{d^5\sigma^{\text{asym}}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} + Y(S_{ep}, Q, q_T, x_{bj}, z_f) \quad (4.18)$$

のように書くことができる。Y は左辺の *asymptotic part* 以外の項であり、大きな q_T においては主要項になる。一例として、無偏極 SIDIS 過程 ($ep \rightarrow e\pi X$) における *asymptotic part* は

$$\begin{aligned} \frac{d^5\sigma^{\text{asym}}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} = & F_\sigma \mathcal{A}_1 \left(\frac{2Q^2}{q_T^2} \right) \left[2q(x_{bj}) \hat{q}(z_f) \left(C_F \ln \left(\frac{Q^2}{q_T^2} \right) - \frac{3}{2} C_F \right) \right. \\ & + \hat{q}(z_f) \left\{ P_{qq}^{\text{in},(0)} \otimes q(x_{bj}) + P_{qg}^{\text{in},(0)} \otimes G(x_{bj}) \right\} \\ & \left. + \left\{ P_{qq}^{\text{out},(0)} \otimes \hat{q}(z_f) + P_{gq}^{\text{out},(0)} \otimes \hat{G}(z_f) \right\} q(x_{bj}) \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

であり、式中の F_σ は

$$F_\sigma \equiv \frac{\alpha_e^2 \alpha_s}{8\pi x_{bj}^2 S_{ep}^2 Q^2}, \quad (4.20)$$

である。(Appendix B に簡単な導出方法を記述しておく。) また $\mathcal{A}_1 = 1 + \cosh^2 \psi$ であり、 $q(x), G(x)$ はそれぞれ陽子のツイスト 2 レベルの無偏極クォーク分布関数と無偏極グルーオン分布関数である。また $\hat{q}(z), \hat{G}(z)$ は π への無偏極クォーク破碎関数と無偏極グルーオン破碎関数を表す。 $P_{ab}^{\text{in},(0)}$ と $P_{ab}^{\text{out},(0)}$ ($(a, b) = (q, q), (q, g), (g, q)$) は LO の無偏極 Splitting 関数 $P_{ab}^{(0)}$:

$$P_{qq}^{(0)}(x) = C_F \left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right], \quad (4.21)$$

$$P_{gq}^{(0)}(x) = C_F \frac{1+(1-x)^2}{x}, \quad (4.22)$$

$$P_{qq}^{(0)}(x) = T_R(1-2x+2x^2). \quad (4.23)$$

であり、 $T_R = \frac{1}{2}$ 、 $P_{ab}^{\text{in},(0)}(x) = P_{ab}^{\text{out},(0)}(x) = P_{ab}^{(0)}(x)$ となっている。また \otimes は Convolution を表しており、具体的には

$$\begin{aligned} P_{qq}^{(0)} \otimes q(x_{bj}) &= \int_{x_{bj}}^1 \frac{dx}{x} P_{qq}^{(0)}(\hat{x}) q(x) \\ P_{qq}^{(0)} \otimes q(z_f) &= \int_{z_f}^1 \frac{dz}{z} P_{qq}^{(0)}(\hat{z}) \hat{q}(z) \end{aligned} \quad (4.24)$$

と書かれる。他の過程についても同様に *asymptotic part* を得ることが出来る。それらは (4.19) において分布関数、破砕関数、Splitting 関数をそれぞれ適したものに置き換えることで記述される。なお以下において $\Delta q(x), \Delta G(x)$ はそれぞれツイスト 2 縦偏極クォーク、グルーオン分布関数を表し、 $\Delta_T q(x)$ はツイスト 2 横偏極クォーク分布関数である。同様に $\Delta \hat{q}(x), \Delta \hat{G}(x)$ はそれぞれツイスト 2 縦偏極クォーク破砕関数、縦偏極グルーオン破砕関数であり、 $\Delta_T \hat{q}(x)$ はツイスト 2 横偏極クォーク破砕関数である。また、 $\Delta P_{ab}^{(0)}$ は LO の縦偏極 Splitting 関数:

$$\begin{aligned}\Delta P_{qq}^{(0)}(x) &= C_F \left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right], \\ \Delta P_{gq}^{(0)}(x) &= C_F [2-x], \\ \Delta P_{qg}^{(0)}(x) &= T_R [2x-1].\end{aligned}\tag{4.25}$$

である。同様に $\Delta_T P_{ab}^{(0)}$ は LO の横偏極 Splitting 関数 [28]:

$$\Delta_T P_{qq}^{(0)}(x) = C_F \left[\frac{2x}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right].\tag{4.26}$$

を表している。以下が偏極過程の *asymptotic part* を表す置き換えである。

(ii) $e\vec{p} \rightarrow e\vec{\Lambda}X$:

$$\begin{aligned}q(x) &\rightarrow \Delta q(x), & G(x) &\rightarrow \Delta G(x), & \hat{q}(x) &\rightarrow \Delta \hat{q}(x), & \hat{G}(x) &\rightarrow \Delta \hat{G}(x), \\ P_{ab}^{in,(0)} &\rightarrow \Delta P_{ab}^{(0)}, & P_{ab}^{out,(0)} &\rightarrow \Delta P_{ab}^{(0)},\end{aligned}\tag{4.27}$$

(iv) $e\vec{p} \rightarrow e\Lambda X$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &\rightarrow -\mathcal{A}_6, & q(x) &\rightarrow \Delta q(x), & G(x) &\rightarrow \Delta G(x), \\ P_{ab}^{in,(0)} &\rightarrow \Delta P_{ab}^{(0)}, & P_{ab}^{out,(0)} &\rightarrow P_{ab}^{(0)}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

(v) $e\vec{p} \rightarrow e\vec{\Lambda}X$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &\rightarrow -\mathcal{A}_6, & \hat{q}(x) &\rightarrow \Delta \hat{q}(x), & \hat{G}(x) &\rightarrow \Delta \hat{G}(x), \\ P_{ab}^{in,(0)} &\rightarrow P_{ab}^{(0)}, & P_{ab}^{out,(0)} &\rightarrow \Delta P_{ab}^{(0)}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

(iii) $ep^\uparrow \rightarrow e\Lambda^\uparrow X$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &\rightarrow \sinh^2 \psi \cos(\Phi_A - \Phi_B - 2\phi), \\ q(x) &\rightarrow \Delta_T q(x), & G(x) &\rightarrow 0, & \hat{q}(x) &\rightarrow \Delta_T \hat{q}(x), & \hat{G}(x) &\rightarrow 0, \\ P_{qq}^{in,(0)} &\rightarrow \Delta_T P_{qq}^{(0)}, & P_{qq}^{out,(0)} &\rightarrow \Delta_T P_{qq}^{(0)},\end{aligned}\tag{4.30}$$

$O(\alpha_s)$ の仮想補正図 (図 4) とコリニア発散の分布、破砕関数への因子化を考慮すると *asymptotic part* は大きな対数のべきを含めて指数関数化することができ、小さな q_T 領域で

主要項となる。再足し上げの方法として Collins,Soper,Sterman の b -空間における方法 [21] を用いる。[22, 23] と同様で、再足し上げされた断面積は Fourier 変換された形で、

$$\frac{d^5\sigma^{\text{res}}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} = F_{\text{res}} \mathcal{A} \int \frac{d\vec{b}}{(2\pi)^2} e^{i\vec{b}\cdot\vec{q}_T} W(b, Q, x_{bj}, z_f), \quad (4.31)$$

と書き表され、ここで \mathcal{A} は反応過程によって異なり、

$$\begin{aligned} \text{(i), (ii): } \mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 = 1 + \cosh^2 \psi, \\ \text{(iii): } \mathcal{A} &= \sinh^2 \psi \cos(\Phi_A - \Phi_B - 2\phi), \\ \text{(iv), (v): } \mathcal{A} &= -\mathcal{A}_6 = 2 \cosh \psi. \end{aligned} \quad (4.32)$$

である。また F_{res} は

$$F_{\text{res}} = \frac{\pi \alpha_e^2}{2x_{bj}^2 S_{ep}^2}. \quad (4.33)$$

である。Resummed Cross Section の b -空間における式 W は

$$W(b, Q, x_{bj}, z_f) = \sum_{j,a,b} e_j^2 (D_{B/b} \otimes C_{bj}^{\text{out}})(z_f, b, \mu) (C_{ja}^{\text{in}} \otimes f_{a/A})(x_{bj}, b, \mu) e^{S(b,Q)} \quad (4.34)$$

であり、指数関数に含まれる $S(b, Q)$ は Sudakov 形状因子と呼ばれ、

$$S(b, Q) = - \int_{C_1^2/b^2}^{C_2^2 Q^2} \frac{d\bar{\mu}^2}{\bar{\mu}^2} \left[A(\alpha_s(\bar{\mu}), C_1) \ln \left(\frac{C_2^2 Q^2}{\bar{\mu}^2} \right) + B(\alpha_s(\bar{\mu}), C_1, C_2) \right] \quad (4.35)$$

で表される。ここで C_1, C_2 は $O(1)$ の任意定数である。また、数式内に含まれる関数 A, B は摂動展開することができ、

$$\begin{aligned} A(\alpha_s(\bar{\mu}), C_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(C_1) \left(\frac{\alpha_s(\bar{\mu})}{\pi} \right)^k \\ B(\alpha_s(\bar{\mu}), C_1, C_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k(C_1, C_2) \left(\frac{\alpha_s(\bar{\mu})}{\pi} \right)^k \end{aligned} \quad (4.36)$$

それらの各定数 $A_{1,2}$ と B_1 は反応過程に依存せず、良く知られている [29, 30]。

$$\begin{aligned} A_1 &= C_F \\ A_2 &= \frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{10}{27} n_f + 2C_F \pi \beta_0 \ln \left(\frac{C_1}{b_0} \right) \\ B_1 &= 2C_F \ln \left(\frac{e^{-3/4} C_1}{b_0 C_2} \right) \\ \left(\beta_0 &= \frac{33 - 2N_f}{12\pi} \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

なお、これより高次の近似では Sudakov 形状因子は反応過程に依存した形式になる [31]。

また (4.34) 内の $f_{a/A}, D_{B/a}$ はそれぞれパートン ($a = u, d, s \dots$ or g) の分布関数と破砕関数である。添え字 i, j はクォークのフレーバーを表し、全てのフレーバーにおいて和が実行される。またそれらの分布、破砕関数に付いた \otimes は

$$\begin{aligned} (C_{ja}^{in} \otimes f_{a/A})(x_{bj}, b, \mu) &\equiv \int_{x_{bj}}^1 \frac{dx}{x} C_{ja}^{in}(\hat{x}, \mu b) f_{a/A}(x, \mu) \\ (D_{B/b} \otimes C_{bj}^{out})(z_f, b, \mu) &\equiv \int_{z_f}^1 \frac{dz}{z} C_{bj}^{out}(\hat{z}, \mu b) D_{B/b}(z, \mu) \end{aligned} \quad (4.38)$$

で表される。関数 C^{in}, C^{out} は摂動展開することができ、

$$C_{ab}^{in,out}(\hat{x}, b, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{ab}^{in,out(k)}(\hat{x}, C_1, C_2, b, \mu) \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \right)^k \quad (ab) = (ij), (ig), (gi) \quad (4.39)$$

それらの LO の係数 $C_{ab}^{in,out(0)}$ は

$$\begin{aligned} C_{ij}^{in(0)}(\hat{x}, b, \mu) &= \delta_{ij} \delta(1 - \hat{x}), & C_{ij}^{out(0)}(\hat{z}, b, \mu) &= \delta_{ij} \delta(1 - \hat{z}) \\ C_{ig}^{in(0)} &= C_{gi}^{out(0)} = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

である。NLO の係数 $C_{ab}^{in,out(1)}$ は、(4.31) の $O(\alpha_s)$ における展開と仮想補正図からの寄与を考慮した *asymptotic part* を比較して得られる。なお実際に比較するには、 q_T^2 が小さい領域 ($0 < q_T^2 < q_{T\max}^2$) において q_T^2 で積分したもの同士で比較を行う。 $\overline{\text{MS}}$ スキームでは、得られた $C_{ab}^{in,out(1)}$ は $d = 4 - 2\epsilon$ 次元の Splitting 関数と密接な関係があることが知られている [31]。

$4 - 2\epsilon$ 次元の無偏極 Splitting 関数は

$$P_{ab}(x, \epsilon) = P_{ab}^{(0)}(x) + \epsilon \left(P_{ab}^{\epsilon}(x) + \delta_{ab} \frac{1}{2} \delta(1 - x) \right) \quad (ab) = (qq), (qg), (gq) \quad (4.41)$$

で与えられ [32]、 $P_{ab}^{(0)}(x)$ は (4.23) である。対応する ϵ 部分は

$$P_{qq}^{\epsilon}(x) = -C_F(1 - x), \quad P_{qg}^{\epsilon}(x) = -2T_R x(1 - x), \quad P_{gq}^{\epsilon}(x) = -C_F x \quad (4.42)$$

である。同様に $4 - 2\epsilon$ 次元での縦偏極 Splitting 関数も

$$\Delta P_{ab}(x, \epsilon) = \Delta P_{ab}^{(0)}(x) + \epsilon \left(\Delta P_{ab}^{\epsilon}(x) + \delta_{ab} \frac{1}{2} \delta(1 - x) \right) \quad (ab) = (qq), (qg), (gq) \quad (4.43)$$

として与えられ、 $\Delta P_{ab}^{(0)}(x)$ は (4.25) であり、 ϵ 部分は

$$\Delta P_{qq}^{\epsilon}(x) = -C_F(1 - x), \quad \Delta P_{qg}^{\epsilon}(x) = -2T_R(1 - x), \quad \Delta P_{gq}^{\epsilon}(x) = 2C_F(1 - x) \quad (4.44)$$

である。4-2 ϵ 次元の横偏極 Splitting 関数は、(4.26) の 4 次元の Splitting 関数と一致することがわかっている [33]。つまり、

$$\Delta_T P_{qq}^\epsilon(x) = 0 \quad (4.45)$$

である。これらを用いると、 $C_{ab}^{in,out(1)}$ は

$$\begin{aligned} C_{ij}^{in(1)}(\hat{x}, \mu b) &= \delta_{ij} \left[-\frac{1}{2} P_{qq}^{in,\epsilon}(\hat{x}) - P_{qq}^{in,(0)}(\hat{x}) \ln \left(\frac{\mu b}{b_0} \right) - C_F \delta(1-\hat{x}) \left(\frac{23}{16} + \ln^2 \left(\frac{e^{-3/4} C_1}{b_0 C_2} \right) \right) \right] \\ C_{jg}^{in(1)}(\hat{x}, \mu b) &= -\frac{1}{2} P_{qg}^{in,\epsilon}(\hat{x}) - P_{qg}^{in,(0)}(\hat{x}) \ln \left(\frac{\mu b}{b_0} \right) \\ C_{ij}^{out(1)}(\hat{z}, \mu b) &= \delta_{ij} \left[-\frac{1}{2} P_{qq}^{out,\epsilon}(\hat{z}) - P_{qq}^{out,(0)}(\hat{z}) \ln \left(\frac{\mu b}{\hat{z} b_0} \right) - C_F \delta(1-\hat{z}) \left(\frac{23}{16} + \ln^2 \left(\frac{e^{-3/4} C_1}{b_0 C_2} \right) \right) \right] \\ C_{gj}^{out(1)}(\hat{z}, \mu b) &= -\frac{1}{2} P_{gq}^{out,\epsilon}(\hat{z}) - P_{gq}^{out,(0)}(\hat{z}) \ln \left(\frac{\mu b}{\hat{z} b_0} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

と書ける。なお上式における $P_{ab}^{in,(0)}$, $P_{ab}^{out,(0)}$, $P_{ab}^{in,\epsilon}$, $P_{ab}^{out,\epsilon}$ はそれぞれの反応過程に対応した LO の Splitting 関数と ϵ 部分である。なお本研究では [21] と同様、任意定数である C_1, C_2 と繰り込み定数 μ をそれぞれ

$$\begin{aligned} C_1 &= 2e^{-\gamma_E} \equiv b_0 \quad (\gamma_E = 0.5772 \dots : Euler \text{ 定数}) \\ C_2 &= 1 \\ \mu &= b_0/b \end{aligned} \quad (4.47)$$

とした。その結果、(4.46) は

$$\begin{aligned} C_{ij}^{in(1)}(\hat{x}, \mu b) &= \delta_{ij} \left[-\frac{1}{2} P_{qq}^{in,\epsilon}(\hat{x}) - 2C_F \delta(1-\hat{x}) \right] \\ C_{jg}^{in(1)}(\hat{x}, \mu b) &= -\frac{1}{2} P_{qg}^{in,\epsilon}(\hat{x}) \\ C_{ij}^{out(1)}(\hat{z}, \mu b) &= \delta_{ij} \left[-\frac{1}{2} P_{qq}^{out,\epsilon}(\hat{z}) + P_{qq}^{out,(0)}(\hat{z}) \ln \hat{z} - 2C_F \delta(1-\hat{z}) \right] \\ C_{gj}^{out(1)}(\hat{z}, \mu b) &= -\frac{1}{2} P_{gq}^{out,\epsilon}(\hat{z}) + P_{gq}^{out,(0)}(\hat{z}) \ln \hat{z} \end{aligned} \quad (4.48)$$

の様に幾つかの対数部分が消え簡略化される。

本研究では Sudakov 形状因子において $A_{1,2}, B_1$ を採用し、C-関数は $C^{in,out,(0,1)}$ までとした。この近似は Resummed Cross Section において Next Leading Logarithm(NLL) の精度に対応する。また有効結合定数に関しては 2-loop の表現を用いており、パートン分布、破碎関数に関しては NLO での Q^2 発展を採用している。これらの近似に応じて、Sudakov 形状因子は

$$S(Q, b) = \frac{1}{\alpha_s} f_0(\alpha_s L) + f_1(\alpha_s L), \quad \alpha_s = \alpha_s(Q^2), \quad L = \ln \left(\frac{Q^2 b^2}{b_0^2} \right) \quad (4.49)$$

と与えることが出来る。[34]

式中に含まれる f_0, f_1 は $A_{1,2}, B_1$ を含んでおり、引数を y とすると

$$f_0(y) = \frac{A_1}{\pi\beta_0^2} [\beta_0 y + \ln(1 - \beta_0 y)] \quad (4.50)$$

$$f_1(y) = \frac{A_1\beta_1}{\pi\beta_0^2} \left[\frac{1}{2} \ln^2(1 - \beta_0 y) + \frac{\beta_0 y}{1 - \beta_0 y} + \frac{\ln(1 - \beta_0 y)}{1 - \beta_0 y} \right] - \frac{A_2}{\pi^2\beta_0^2} \ln(1 - \beta_0 y) + \frac{\beta_0 y}{1 - \beta_0 y} + \frac{B_1}{\pi\beta_0} \ln(1 - \beta_0 y) \quad (4.51)$$

$$\left(\beta_0 = \frac{33 - 2n_f}{12\pi}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{153 - 19n_f}{33 - 2n_f} \right)$$

と定義される関数である。

4.5 q_T 領域の結合

(4.31) と (4.18) の第二項 (Y 項) を加えると、小さな q_T 領域では NLL の精密さの Resummation 形式であり、大きな q_T では NLO である断面積の表式が得られる。しかしながら、Sudakov 形状因子 (4.49) 内の因子 L は大きな b (つまり小さな q_T) 領域だけでなく小さな b (大きな q_T) 領域においても大きな対数の寄与を生じてしまう。本来、 b 空間における Sudakov 形状因子は

$$\int_0^{Q^2} \frac{d\bar{\mu}^2}{\bar{\mu}^2} (J_0(b\bar{\mu}) - 1) [A \dots] \quad (4.52)$$

のような形式をしており $S(Q, 0) = 0$ であるが、CSS-Resummation の形式では (4.52) 中の $J_0(b\bar{\mu}) - 1$ は解析の簡単化のために $-\theta(\bar{\mu} - b_0/b)$ で置き換えられる。この手順により (4.49) の様な Sudakov 形状因子の解析的な計算が可能になり、大きな b 領域において正しい振る舞い ($\sim \ln(bQ)$) を与えるが、同時に小さな b 領域においても大きな対数を生じてしまい $S(Q, 0) = 0$ の条件を満たさない。しかしこの問題は (4.49) における $L = \ln(b^2 Q^2/b_0^2)$ を $\tilde{L} = \ln(1 + b^2 Q^2/b_0^2)$ に置き換えることで回避される。[35, 36] この $L \rightarrow \tilde{L}$ の置換に応じて (4.34) の $W, S(Q, b)$ を $\tilde{W}, \tilde{S}(Q, b)$ とする。また、 \tilde{W} により与えられる (4.31) の σ^{res} を $\tilde{\sigma}^{\text{res}}$ とする。この作用により、 q_T で積分された断面積が NLO 断面積と等しくなるために (4.18) で Y としていた *finite part* を再定義しなければならない。

断面積を

$$\frac{d^5\sigma}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} = \frac{d^5\tilde{\sigma}^{\text{res}}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} + \frac{d^5\tilde{\sigma}^{\text{fin}}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} \quad (4.53)$$

と書く。右辺の第一項は上記の様に (4.31) 内の L を \tilde{L} で置き換えることで得られ、第二項は

$$\frac{d^5\tilde{\sigma}^{\text{fin}}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} = \frac{d^5\sigma^{\text{NLO}}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} - \left[\frac{d^5\tilde{\sigma}^{\text{fin}}}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} \right]_{O(\alpha_s)} \quad (4.54)$$

で与えられる。ここで $[\dots]_{O(\alpha_s)}$ は \dots の摂動展開から得られる $O(\alpha_s)$ の部分である。

(4.53) が全ての q_T 領域で有効な、大きな対数の寄与を再足し合わせした断面積である。

5 数値計算

偏極 SIDIS 過程の断面積とスピン非対称における対数の再足し上げによる効果を調べるために、無偏極過程： $ep \rightarrow e\pi X$ 及び、偏極過程： $\bar{e}p \rightarrow e\pi X$ に対する数値計算を実行する。なお比較の為に現在実行中の実験である CERN の COMPASS と、BNL で企画されている e-RHIC の二つのエネルギー領域で計算を実行する。

5.1 逆 Mellin 変換

CSS-Resummation の形式において、因子化スケール： $\mu = b_0/b$ における \widetilde{W} を計算する必要があり、実行の為に x_{bj} と z_f に対する \widetilde{W} のモーメントを取り逆 Mellin 変換を行う。この作用により、 \widetilde{W} に含まれる $C_{ja}^{in} \otimes f_{a/A}(x_{bj}, b, \mu)$ 等の Convolution はモーメント空間において単純な N 次のモーメント同士の積として書くことができ、 $C^{in,out}$ -関数と分布、破碎関数のスケール依存性を計算することが出来る。

一般的に逆 Mellin 変換は

$$f(x, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_N dN x^{-N} f^N(\mu) \quad (5.1)$$

であり、中に含まれる関数の N 次のモーメントは Mellin 変換によって

$$f^N(\mu) \equiv \int_0^1 dx x^{N-1} f(x, \mu) \quad (5.2)$$

与えられる。なお逆 Mellin 変換の積分経路は f^N の特異点より右側になくなくてはならない。よって、 \widetilde{W} は

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(b, Q, x_{bj}, z_f, \mu) = & \sum_k e_k^2 \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int dN \int dM z_f^{-M} x_{bj}^{-N} \\ & \times \widetilde{D}_{B/b}(M, \mu) \widetilde{C}_{kb}^{out}(M, b\mu) \widetilde{f}_{a/A}(N, \mu) \widetilde{C}_{ka}^{in}(N, b\mu) e^{\widetilde{S}(b, Q)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

となる。なお式中の各関数の N 次のモーメントは

$$\widetilde{f}_{a/A}(N, \mu) \equiv \int_0^1 dx x^{N-1} f_{a/A}(x, \mu), \quad \widetilde{C}_{ka}^{in}(N, bu) \equiv \int_0^1 dx x^{N-1} C_{ka}^{in}(x, bu) \quad (5.4)$$

と定義される。なお、無偏極分布関数、無偏極破碎関数の特異点は 1 に、偏極分布関数の特異点は 0 に存在することが知られているので、逆 Mellin 変換の積分経路はモーメント N, M で実軸に対してそれぞれ、角度 ϕ_N, ϕ_M で曲げられた経路：

$$N = C_N + z_N e^{\pm i\phi_N}, \quad M = C_M + z_M e^{\pm i\phi_M} \quad (5.5)$$

を取る。なお、式中の上の符号は虚数の正領域において $0 \leq z_{N,M} \leq \infty$ 動く経路を表し、同様に下の符号は $\infty \geq z_{N,M} \geq 0$ で動く虚数の負領域の経路を表す。(figure 参照)

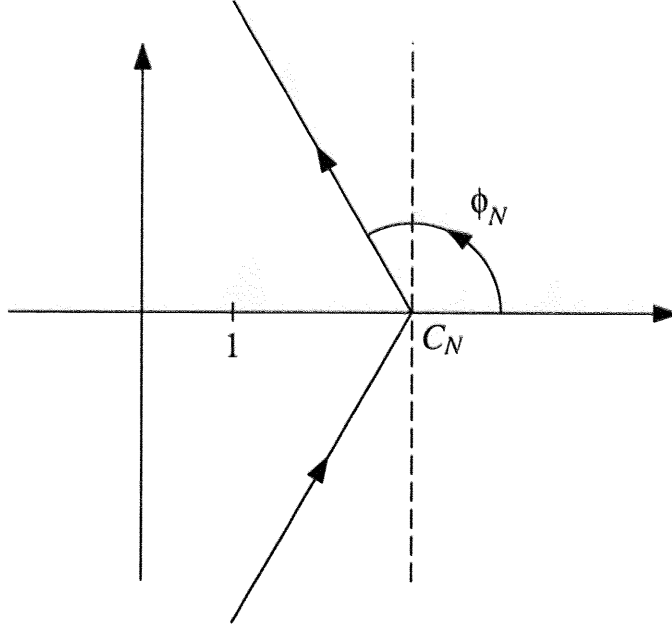


図 5 逆 Mellin 変換のモーメント積分経路

$\phi_{N,M} > \pi/2$ において、(5.3) の積分は指数関数的に収束する。本研究ではそれぞれの過程において特異点の場所を考慮し、

$$\begin{aligned} \text{無偏極過程 } (ep \rightarrow e\pi X) : \phi_{N,M} &= \frac{25}{32}\pi, C_{N,M} = 0.8 \\ \text{偏極過程 } (\vec{e}\vec{p} \rightarrow e\pi X) : \phi_{N,M} &= \frac{22}{32}\pi, C_{N,M} = 1.8 \end{aligned} \quad (5.6)$$

としている。

5.2 b -積分

Sudakov 形状因子の摂動展開を含んだ (4.31) は、 b -積分の積分区間が摂動領域 ($b \ll 1/\Lambda_{\text{QCD}}$) と非摂動領域 ($b \leq 1/\Lambda_{\text{QCD}}$) の両区間に渡って存在するため、その領域内に $\alpha_s(\mu)$ が発散する *Landau Pole* :

$$b^2 = \frac{b_0^2}{Q^2} e^{1/\beta_0 \alpha_s} \quad (5.7)$$

を含み良い定義ではない。この問題を避けるためにしばしば使用される手法が、CSS の論文でも用いられている、*Landau Pole* より小さな定数 b_{max} を導入することで \widetilde{W} 内の b を

$$b^* = b / \sqrt{1 + b^2/b_{\text{max}}^2} \quad (5.8)$$

で置き換え、積分変数 b が $0 \sim \infty$ まで動いても $\widetilde{W}(b^*)$ が b_{\max} 付近でカットされる方法である。*Landau Pole* を回避する他の方法として、A.Kulesta らが用いた複素 b 空間において b -積分を実行する方法がある。[37] この手法は b_{\max} の様な新しい変数を導入せず、摂動論の全次数で Sudakov 形状因子を評価する際に (4.31) の元の b -積分に完全に一致する。

(4.31) の b -積分は

$$\int d^2\vec{b} e^{i\vec{b}\cdot\vec{q}_T} w(b) = 2\pi \int_0^\infty db b J_0(bq_T) w(b) \quad (5.9)$$

のように Bessel 関数を用いて記述することができ、更に便利のために任意の正の実数 v を用いて

$$\begin{aligned} J_0(bq_T) &= \frac{1}{2} (h_1(bq_T, v) + h_2(bq_T, v)) \\ h_1(y, v) &= \frac{-1}{\pi} \int_{-iv\pi}^{-\pi+iv\pi} d\theta e^{-iy \sin \theta} \\ h_2(y, v) &= \frac{-1}{\pi} \int_{\pi+iv\pi}^{-iv\pi} d\theta e^{-iy \sin \theta} \end{aligned} \quad (5.10)$$

と $J_0(bq_T)$ を書き換える。なお θ は h_1, h_2 それぞれに対して

$$\begin{aligned} h_1 : \theta &= -iv\pi + x_\theta \pi (-1 + 2iv) \quad (0 \leq x_\theta \leq 1) \\ h_2 : \theta &= -iv\pi + x_\theta \pi (1 + 2iv) \quad (1 \geq x_\theta \geq 0) \end{aligned} \quad (5.11)$$

と因子化される。 $v \rightarrow \infty$ の時、 $h_{1,2}(y, v)$ は急速に Hankel 関数 $H_{1,2}(y)$ に収束する。つまり h_1, h_2 により正の位相と負の位相を分離でき、(5.9) の b -積分を二つの経路の和として記述できた事になる。(5.9) に (5.10) の分解を適応すると、収束性を保障する為に h_1 に対する積分経路を複素 b 平面の上半面で置き換える。同様に h_2 に対する積分経路を下半面で置き換えると、上半面の b は

$$C_1 : \quad b = \begin{cases} t, & (0 \leq t \leq b_c) \\ b_c - te^{-\phi_b}, & (0 \leq t \leq \infty) \end{cases} \quad (5.12)$$

と因子化され、下半面は

$$C_2 : \quad b = \begin{cases} t, & (0 \leq t \leq b_c) \\ b_c - te^{\phi_b}, & (0 \leq t \leq \infty) \end{cases} \quad (5.13)$$

で因子化される。本研究では b_c, ϕ_b は *Landau Pole* を避け、かつ収束性が良い値として

$$\phi_b = \frac{22}{32}\pi, \quad b_c Q = 0.2 \quad (5.14)$$

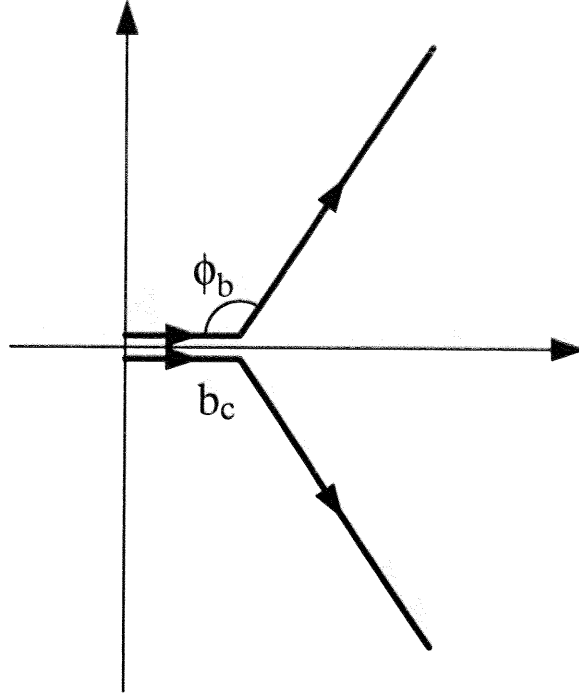


図 6 b -積分の積分経路

を採用している。以上の逆 Mellin 変換と b -積分に対する処方によって、(4.53) の Resummed Cross Section は

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^5 \tilde{\sigma}^{\text{res}}}{dx_{bj} dz_f dQ^2 dq_T^2 d\phi} \\
 &= F_{\text{res}} \mathcal{A} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{C_N} dN \int_{C_M} dM x_{bj}^{-N} z_f^{-M} \\
 & \times \left\{ \int_{C_1} \frac{db b}{4\pi} h_1(bq_T, v) \tilde{w}(N, M, b, Q, \frac{b_0}{b}) + \int_{C_2} \frac{db b}{4\pi} h_2(bq_T, v) \tilde{w}(N, M, b, Q, \frac{b_0}{b}) \right\} \\
 & \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

と書くことが出来る。ここで \tilde{w} は

$$\tilde{w}(N, M, b, Q, \mu) = \sum_k e_k^2 \tilde{D}_{B/b}(M, \mu) \tilde{C}_{kb}^{\text{out}}(M, b\mu) \tilde{f}_{a/A}(N, \mu) \tilde{C}_{ka}^{\text{in}}(N, b\mu) e^{\tilde{S}(b, Q)} \quad (5.16)$$

である。数値計算ではこの式を用いて評価を行う。なお、 \tilde{w} には $\tilde{D}_{B/b}(M, \mu)$, $\tilde{f}_{a/A}(N, \mu)$ が含まれている。分布、破碎関数は $\mu = Q$ 依存性を持っており、本研究では $\mu = b_0/b$ である事から、 b -積分を実行する際にそれぞれの μ における分布、破碎関数が必要である事に注意する。(分布関数の Q 依存性については Appendix C に記載)

5.3 非摂動項

現在まで行われてきている b -空間における Resummation に関する研究 [21, 23, 30, 37, 38] と同様に、本研究においても大きな b 領域における非摂動効果を Sudakov 形状因子において考慮する。 $eA \rightarrow eBX$ という過程において Sudakov 形状因子 S_{BA} は

$$S_{BA}(b, Q, x_{bj}, z_f) = S^P(b, Q, x_{bj}, z_f) + S_{BA}^{NP}(b, Q, x_{bj}, z_f) \quad (5.17)$$

の様に摂動部分 S^P と非摂動部分 S_{BA}^{NP} の和として書かれるとする。 S_{BA}^{NP} に対する明確な解はまだ見つかっていないが、一般的に理論の Renormalization の性質によって S_{BA}^{NP} における Q 依存性は他の力学的変数の依存性からは切り離されることが要求される。すなわち

$$S_{BA}^{NP}(b, Q, x_{bj}, z_f) = g_{BA}^{(1)}(b, x_{bj}, z_f) + g_{BA}^{(2)}(b, x_{bj}, z_f) \ln \frac{Q}{Q_0} \quad (5.18)$$

と書かれる。なお $Q_0 \sim 1\text{GeV}$ である。理論では $g_{BA}^{(1)}, g_{BA}^{(2)}$ の関数形は予言できず、実験との Fitting によって決定されなければならない。加えて、もし $S_{BA}^{NP}(b, Q, x_{bj}, z_f)$ が長距離の力学を記述しているのならば、 $b < b_{\max}$ という摂動論的な領域において値を取らないか、 $S^P(b, Q, x_{bj}, z_f)$ よりも非常に小さくなるべき項である。 S_{BA}^{NP} は一般的には幾つかの変数に依存する形になっているが、 $q_T \ll Q$ 領域における横運動量分布が Gauss 型で記述できる事がわかっていることから、本研究においては非摂動的な Sudakov 形状因子として Gaussian 型の補正を加える。

複素 b 空間における方法では、断面積は

$$e^{\tilde{S}(b, Q)} \rightarrow e^{\tilde{S}(b, Q) - gb^2} \quad (5.19)$$

の置き換えによって与えられる。なお (5.19) における g は正の値を取る。 g がパートンの固有横運動量 k_\perp の二乗の平均値であることから、この Gauss 型の形状因子はパートンの固有横運動量の効果を具体化していると捉える事ができる。この非摂動 Gaussian 項を用いて、(5.12) 及び (5.13) における ϕ_b は b -積分の収束性を保障する為に、 $3\pi/4$ より大きくなければならない。本研究において、Gaussian 形状因子を用いる際には

$$\phi_b = \frac{25}{32}\pi, \quad b_c Q = 0.2 \quad (5.20)$$

とする。[37] の Tevatron における Z 生成に対する Joint resummation の研究において $g \sim 0.8$ と決定されているが、原理的には g はスケールに対する対数依存性を持つので低いエネルギーにおいては小さな値を取る。本研究では g 依存性を調べるために $g = 0.8\text{GeV}^2$ と $g = 0.6\text{GeV}^2$ の二つの値を用いて結果を比較する。

b -積分において、 b^* を定義することで Landau Pole を回避する方法では、非摂動的な

Sudakov 形状因子を

$$e^{S(b,Q)} \rightarrow e^{S(b^*,Q)-gb^2}. \quad (5.21)$$

の様に与える。本研究では b^* の処方における変数を

$$g = 0.8 \text{ GeV}^2, \quad b_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ GeV}^{-1} \quad (5.22)$$

と与え、複素 b 空間における処方との比較を行う。

6 結果

対数の再足し上げによる断面積とスピン非対称への影響を調べるために、COMPASS、e-RHIC それぞれのエネルギー領域における数値計算を行った。それぞれのエネルギー領域における変数の組として、

$$\begin{aligned}\text{EIC} : S_{ep} &= 10^4 \text{GeV}^2, Q^2 = 100 \text{GeV}^2, x_{bj} = 0.012 \\ \text{COMPASS} : S_{ep} &= 300 \text{GeV}^2, Q^2 = 10 \text{GeV}^2, x_{bj} = 0.04\end{aligned}$$

を用いた。なお z_f については、ある $z_f > 0$ の領域で積分される。上記の 3 つの変数が与えられることで (4.10) の $\cosh \psi$ が定まり、(4.31) に含まれている各反応過程によって異なる変数 \mathcal{A} も定まることになる。なお数値計算を行う際に、既存の実験に Fit するように作られた分布・破碎関数のモデルを使用しており、Next-Leading-Order を考えているので、それぞれのモデルにおける NLO の分布・破碎関数を使っている。

$$\begin{aligned}\text{無偏極分布関数} &: \text{GRV98 [39]} \\ \text{偏極分布関数} &: \text{GRSV2000 [40]} \\ \pi \text{ 破碎関数} &: \text{Kretzer [41]}\end{aligned}$$

なお、以降の全ての結果はこれまでに述べてきた断面積を z_f, ϕ で積分したもの

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0.2}^{z_f^{\max}} dz_f d\phi \frac{d^5(\Delta)\sigma}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T d\phi} \quad (6.1)$$

であり、積分上限の z_f^{\max} は (A.8) で与えられる。また (4.53) と比べて $2q_T$ が掛かった結果になっていることにも注意が必要である。

図 6,8 はそれぞれ e-RHIC のエネルギー領域における無偏極と偏極断面積の q_T 依存性の結果を記したものである。なおグラフには数種の結果が載せてあるが、それぞれ

$$\begin{aligned}\text{NLO} &: \text{NLO 断面積 (再足し上げを行っていない)} \\ \text{Resum} &: \text{複素 } b - \text{空間積分を用い、非摂動項を含まない } (g = 0) \\ \text{Resum} + \text{Gaussian}(g = 0.6) &: \text{複素 } b - \text{空間積分を用い、非摂動項が } g = 0.6 \\ \text{Resum} + \text{Gaussian}(g = 0.8) &: \text{複素 } b - \text{空間積分を用い、非摂動項が } g = 0.8 \\ b^* - \text{method}(g = 0.8) &: b^* \text{ を定義する積分を用い、非摂動項が } g = 0.8\end{aligned}$$

である。グラフの特徴は共通しており、まず NLO 断面積が $q_T \rightarrow 0$ において発散していることが挙げられる。これはこれまでに述べてきたように、ソフト グルーオンの多重放出による大きな対数が”そのまま”存在するからである。それに比べ再足し上げを施した他の 4 つの結果は期待していた通り、 $q_T = 0$ における発散が抑えられている事が分かる。更に、 q_T の中間領域において値が増加している事も特徴的である。また、Sudakov 形状因子の Gaussian 型

の非摂動項の値を大きくする (g を大きくする) 事でこの特徴が顕著になるが Gaussian のパラメータ g の取り方による差はあまり重要でない結果となっており、このエネルギー領域における理論的予想は、より信頼できると言える。また b -積分における b^* の手法による結果は複素 b 空間積分の $g = 0$ としたものに近い値となっている。つまり、無偏極過程と偏極過程に共通した特徴的な振る舞いは偏極状態に依存しない Sudakov 形状因子に強く関連していると言える。

図 9 は偏極断面積と無偏極断面積の比：

$$A_{LO} = \frac{\frac{d^4 \Delta \sigma}{dQ^2 dx_{bj} dq_T d\phi}}{\frac{d^4 \sigma}{dQ^2 dx_{bj} dq_T d\phi}}$$

で定義されるスピン非対称を、図 6,8 の全ての曲線に対して示している。図 6,8 では再足上げと非摂動項 Gaussian の効果は偏極状態を問わず大きなものであり、共通した振る舞いをしていた。その為、スピン非対称においては、それぞれの計算は近い値となっている。細かく見ると、NLO の結果と比較して再足し上げを施した計算は q_T の中間領域で大きな値を取っている。これは図 8 の偏極断面積が図 6 の無偏極断面積に比べて中間領域で大きくなっている為である。

図 10,11,12 は図 6,8,9 と同じ量を COMPASS のエネルギー領域で求めたものである。特徴は e-RHIC 領域と同様、 $q_T = 0$ における発散が抑えられ、中間領域では NLO と比べて大きな値を取っている。なお、複素 b 空間積分で非摂動項が無い計算 ($g = 0$) は $q_T \leq 1.5 \text{ GeV}$ で非常に大きな値を取ったのでグラフ上には記入されていない。しかし、再足し上げと非摂動項を加えた 3 本の曲線は非常に近い値を取っており、断面積に対する明確な予言を与えてくれる。つまりこのエネルギー領域では Gaussian 型で加えた非摂動効果が強く影響していることになる。この理由として、重心エネルギー S_{ep} にも依るが、e-RHIC の場合と比べて q_T 領域が小さな領域 ($q_T \leq 3.0 \text{ GeV}$) なので、パートンの固有横運動量等の効果が強く影響している為だと思われる。また、本研究の対数の再足し上げでは大きな q_T 領域において NLO と一致するような定式化を行っているが、COMASS 領域が $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ であり、ソフトグルーオンによる対数が $\ln(Q^2/q_T^2)$ である事から、 $q_T \sim 3 \text{ GeV}$ では対数の寄与が消えて NLO の結果と一致するように思われる。しかし図 10,11 では再足し上げを施した結果と NLO ではかなりの差が見られる。つまり、対数が小さな値になっても b -空間で横運動量保存則を課す等をして取り込んだソフトグルーオン放出の効果は残っているということになる。次に、図 12 では 3 本の再足し上げを施した結果が全ての q_T 領域で近い値であり、NLO と比較して小さな値になっている。これは e-RHIC 領域の結果と比べると逆転したものになっている。

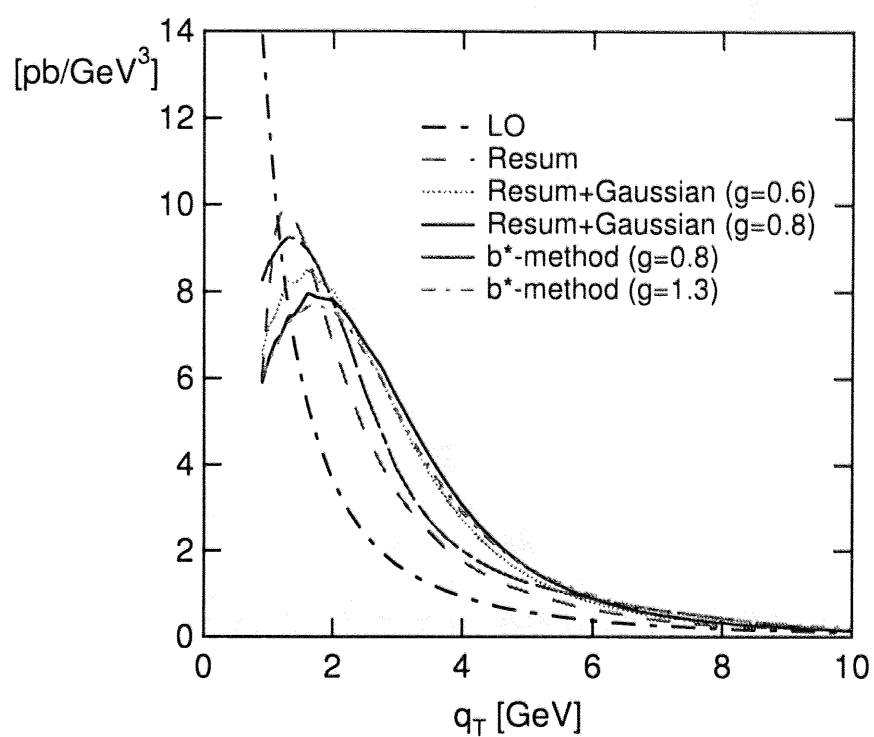


図 7 無偏極断面積 (e-RHIC)

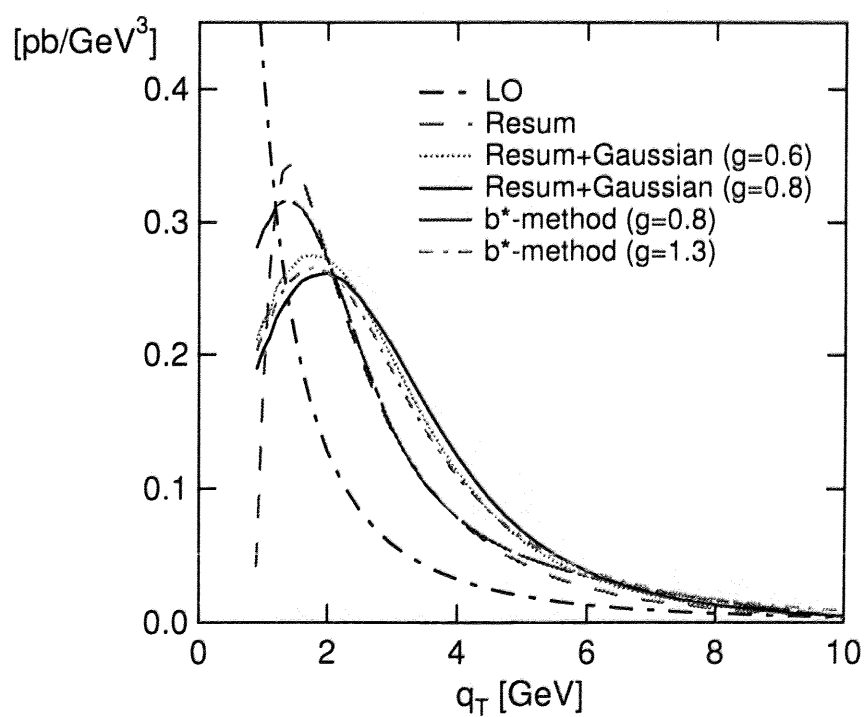


図 8 偏極断面積 (e-RHIC)

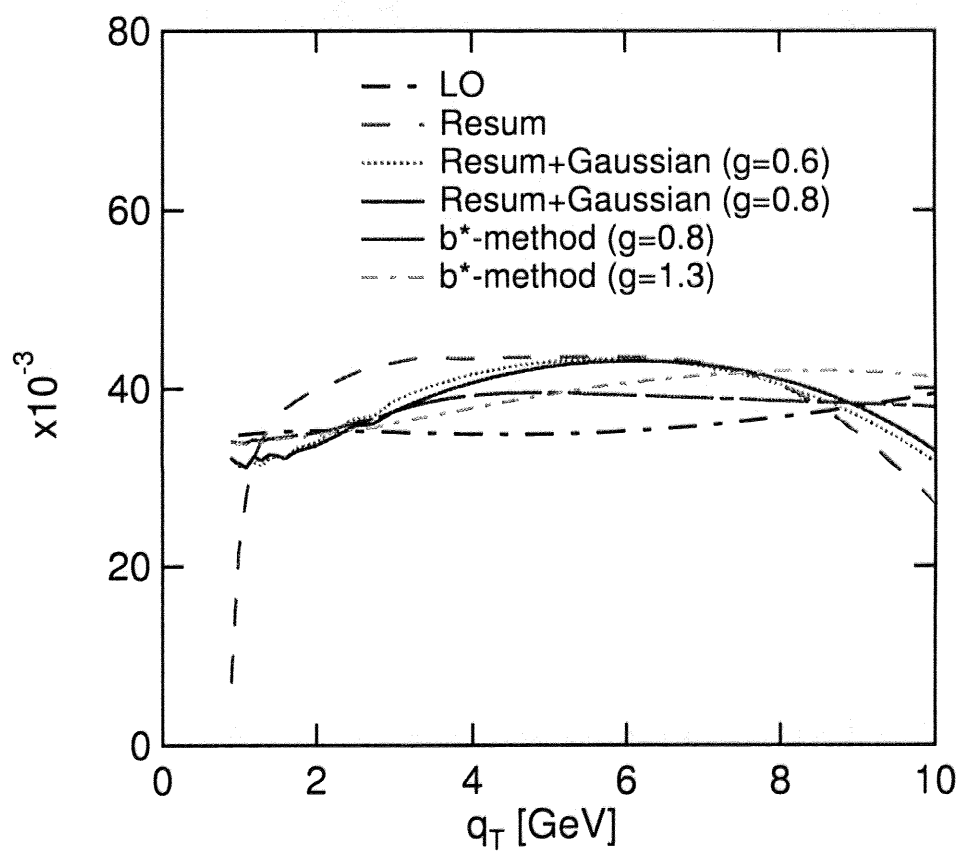


図 9 スピン非対称 (e-RHIC)

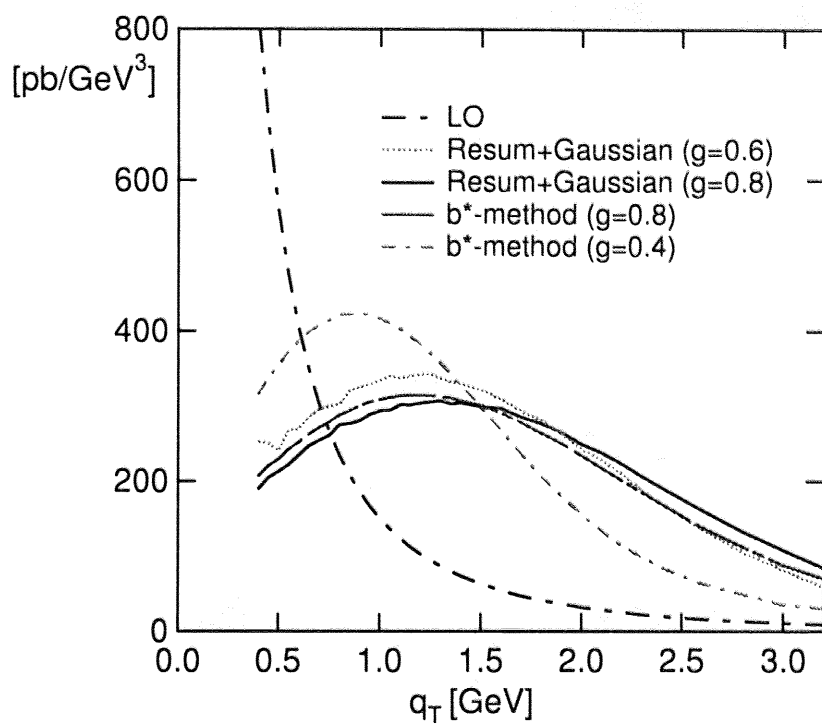


図 10 無偏極断面積 (COMPASS)

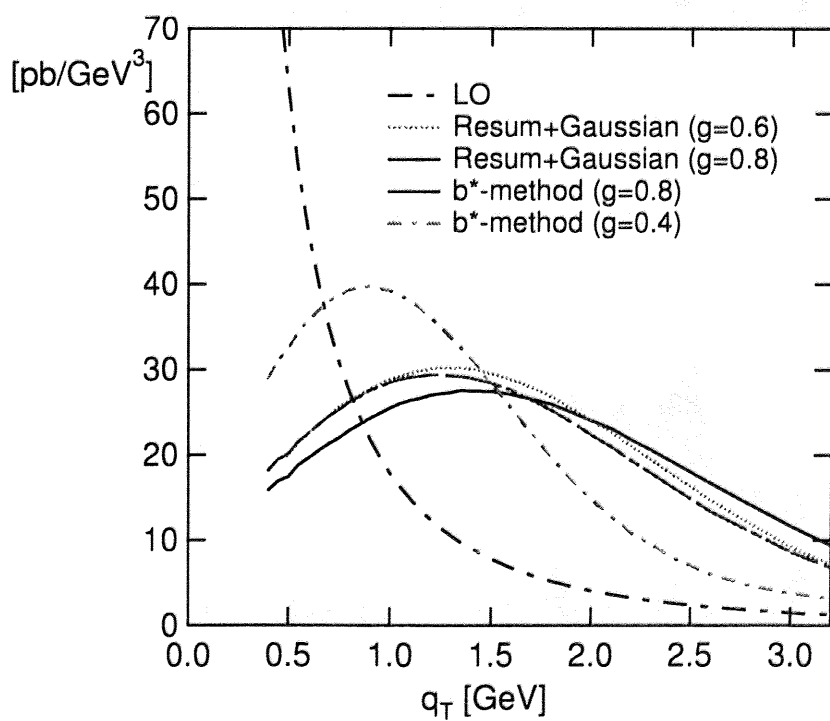


図 11 偏極断面積 (COMPASS)

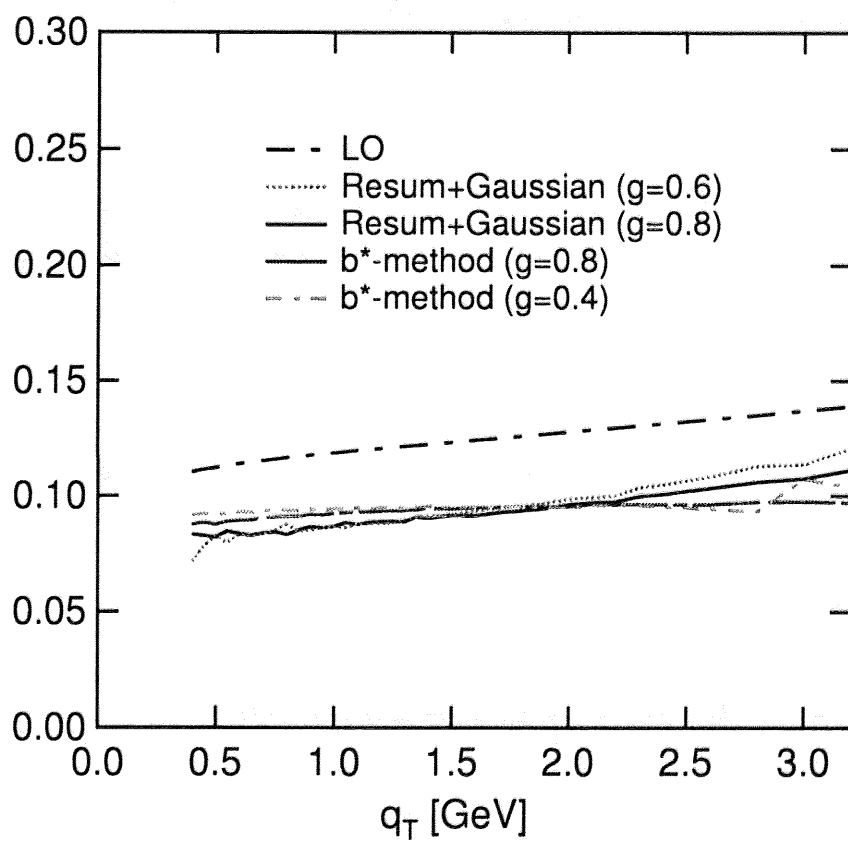


図 12 スピン非対称 (COMPASS)

7 まとめ

この論文では、ツイスト 2 レベルの偏極 SIDIS 過程の完全系である 5 つの過程：

- (i) $e + p \rightarrow e' + \pi(p_T) + X$ or $e' + 2 \text{ jets} + X$,
- (ii) $e + \vec{p} \rightarrow e' + \vec{\Lambda}(p_T) + X$,
- (iii) $e + p^\uparrow \rightarrow e' + \Lambda^\uparrow(p_T) + X$,
- (iv) $\vec{e} + \vec{p} \rightarrow e' + \pi(p_T) + X$ or $e' + 2 \text{ jets} + X$,
- (v) $\vec{e} + p \rightarrow e' + \vec{\Lambda}(p_T) + X$.

に対して、全ての横運動量 (q_T) 領域で有効な微分断面積の定式化を行った。その際に $q_T \rightarrow 0$ 領域で発生するソフトグルーオンの多重放出に伴う大きな対数の寄与を、 q_T のインパクトパラメータ (b) 空間における Fourier 変換で与えられる Collis-Soper-Sterman の再足し合わせ (Resummation) の手法を用いた。結果として得られた式は各過程を纏めて書くと (4.53) と (4.54) であり、 q_T が大きな領域では前研究である NLO 断面積の結果と一致し、小さな q_T 領域では Next-to-Leading Logarithm (NLL) の精密さになっている。

また導出した断面積の式を用いて $ep \rightarrow e\pi X$ 及び $\vec{e}\vec{p} \rightarrow e\pi X$ 過程に対する数値計算を COMPASS、e-RHIC の 2 つのエネルギー領域で実行した。その際に b -積分の積分領域内に存在する *Landau Pole* を回避する方法として、過去から用いられてきている Cut-off 変数 b_{\max} を導入し、再足し合わせされた断面積に含まれる \widetilde{W} において b を b^* で置き換える方法と、近年提唱された A.Kulesta らの b を複素空間に解析接続する方法のそれぞれで b -空間積分を実行し、結果の比較を行った。またパートンの固有横運動量等の潜在的な非摂動効果も考慮し、 \widetilde{W} 内の Sudakov 形状因子に Gaussian を付加した結果も評価した。同様に断面積を元に得られるスピン非対称についても、それぞれの状況における比較を実行した。

予想された通り再足し上げの効果は極めて大きく、偏極・無偏極の両過程において、横運動量についての微分断面積の形状を NLO の断面積から大きく変えるものであった。しかしながら、再足し上げ効果は概してスピンには依存せず、両断面積の比として定義されるスピン非対称では 10 ~ 20 % 程度であった。また、非摂動効果として加えた Gaussian 型 Sudakov 形状因子も大きく断面積に影響するが、パートンの固有横運動量の広がりを表すパラメータ (g) には大きく依存しないこともわかった。これにより、我々の結果は各エネルギー領域においての断面積やスピン非対称に対し適当な指標となっていることが期待される。

本論文により、統計が上がりやすい小さな横運動領域の実験データと比較を行う事が可能になり、COMPASS 等の実験との比較によって摂動論的 QCD 及び Resummation 理論の正確さを実証する場を提供すると共に、付加した非摂動効果に対する考察や、本研究の数値計算では現存のモデルで与えた未知関数である分布・破砕関数に関するより詳細な情報が引き出せるものと期待される。

8 謝辞

本研究を行うにあたり、指導教官である小池裕司助教授には、的確で熱意ある御指導、御鞭撻を頂き深く感謝しております。また、原子核理論研究室の鈴木宜之教授をはじめ、金子恒雄教授、松尾正之教授には、視野を広めていただいたことに感謝いたしております。研究室の院生の方々にも、議論や相談などで大変御世話になりました。特に PD の稲倉恒法氏には PostScript による図の作成や TeX に関する相談に、PD の横谷洋氏、D2 の江口桐土君には研究を進める上で議論をして頂き、知識を深めさせて頂きました。また D2 の水山一仁君には様々な点で相談に乗って頂いた事に大変感謝しております。最後に、数年に渡る私の我儘を心配しながらも黙認して頂いた母に感謝します。

Appendix A Large p_T における NLO 断面積

この Appendix では、[13] で導いた各反応過程 (1.1) に対する NLO 断面積の定式化を纏めておく。

NLO の微分断面積は

$$\frac{d^5\sigma}{dQ^2 dx_{bj} dz_f dq_T^2 d\phi} = F_\sigma \sum_k \mathcal{A}_k \int_{x_{\min}}^1 \frac{dx}{x} \int_{z_{\min}}^1 \frac{dz}{z} [f \circ D \circ \hat{\sigma}_k] \times \delta \left(\frac{q_T^2}{Q^2} - \left(\frac{1}{\hat{x}} - 1 \right) \left(\frac{1}{\hat{z}} - 1 \right) \right) \quad (\text{A.1})$$

$$F_\sigma \equiv \frac{\alpha_e^2 \alpha_s}{8\pi x_{bj}^2 S_{ep}^2 Q^2}, \quad \alpha_e = \frac{e^2}{4\pi}, \quad \hat{x} = \frac{x_{bj}}{x}, \quad \hat{z} = \frac{z_f}{z} \quad (\text{A.2})$$

である。また、運動量割合である x, z の最小値は微分断面積に含まれる δ -関数の要請から

$$x_{\min} = x_{bj} \left(1 + \frac{z_f}{1 - z_f} \frac{q_T^2}{Q^2} \right), \quad z_{\min} = z_f \left(1 + \frac{x_{bj}}{1 - x_{bj}} \frac{q_T^2}{Q^2} \right) \quad (\text{A.3})$$

となる。また角度関数 \mathcal{A}_k は反応過程によって寄与する関数が異なり、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= 1 + \cosh^2 \psi, & \mathcal{A}_2 &= -2, & \mathcal{A}_3 &= -\cos \phi \sinh 2\psi, \\ \mathcal{A}_4 &= \cos 2\phi \sinh^2 \psi, & \mathcal{A}_6 &= -2 \cosh \psi, & \mathcal{A}_7 &= 2 \cos \phi \sinh \psi \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

の 6 つが断面積に現れる。 $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_4$ は入射レプトンが偏極していない場合、つまり反応過程の (i) ~ (iii) で現れる。 $\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7$ は入射レプトンが偏極している (iv), (v) の過程で寄与する。

S_{ep}, Q^2, q_T が与えられることで x_{bj}, z_f の範囲が制限され、

$$\frac{Q^2}{S_{ep}} < x_{bj} < 1 \quad (\text{A.5})$$

$$0 < z_f < \frac{1 - x_{bj}}{1 - x_{bj} + x_{bj} q_T^2 / Q^2} \quad (\text{A.6})$$

となる。また、 Q^2, x_{bj}, z_f が与えられることで、 q_T は

$$0 < q_T < Q \sqrt{\left(\frac{1}{x_{bj}} - 1 \right) \left(\frac{1}{z_f} - 1 \right)} \quad (\text{A.7})$$

の範囲になる。これにより、ハドロン座標系における捕獲ハドロン横運動量 p_T は

$$p_T = z_f q_T < z_f Q \sqrt{\left(\frac{1}{x_{bj}} - 1 \right) \left(\frac{1}{z_f} - 1 \right)} \quad (\text{A.8})$$

で制限される。なお (A.1) における $[f \circ D \circ \hat{\sigma}_k]$ は各反応過程 (1.1) に対して以下の通りである。

(i) $e + p \rightarrow e' + \{\pi, \Lambda\} + X$

$$[f \circ D \circ \hat{\sigma}_k] = \sum_q e_q^2 q(x) \hat{q}(z) \hat{\sigma}_{qq}^k + \sum_q e_q^2 G(x) \hat{q}(z) \hat{\sigma}_{qg}^k + \sum_q e_q^2 q(x) \hat{G}(z) \hat{\sigma}_{gq}^k, \quad e_q : \text{クォーク Charge}, \quad C_F = \frac{4}{3} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{qq}^1 &= 2C_F \hat{x} \hat{z} \left\{ \frac{1}{Q^2 q_T^2} \left(\frac{Q^4}{\hat{x}^2 \hat{z}^2} + (Q^2 - q_T^2)^2 \right) + 6 \right\}, \\ \hat{\sigma}_{qq}^2 &= 2\hat{\sigma}_4^{qq} = 8C_F \hat{x} \hat{z}, \\ \hat{\sigma}_{qq}^3 &= 4C_F \hat{x} \hat{z} \frac{1}{Q q_T} (Q^2 + q_T^2), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{qq}^1 &= \hat{x}(1 - \hat{x}) \left\{ \frac{Q^2}{q_T^2} \left(\frac{1}{\hat{x}^2 \hat{z}^2} - \frac{2}{\hat{x} \hat{z}} + 2 \right) + 10 - \frac{2}{\hat{x}} - \frac{2}{\hat{z}} \right\}, \\ \hat{\sigma}_{qq}^2 &= 2\hat{\sigma}_{qq}^4 = 8\hat{x}(1 - \hat{x}), \\ \hat{\sigma}_{qq}^3 &= \hat{x}(1 - \hat{x}) \frac{2}{Q q_T} \left\{ 2(Q^2 + q_T^2) - \frac{Q^2}{\hat{x} \hat{z}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{gq}^1 &= 2C_F \hat{x}(1 - \hat{z}) \left\{ \frac{1}{Q^2 q_T^2} \left(\frac{Q^4}{\hat{x}^2 \hat{z}^2} + \frac{(1 - \hat{z})^2}{\hat{z}^2} \left(Q^2 - \frac{\hat{z}^2 q_T^2}{(1 - \hat{z})^2} \right)^2 \right) + 6 \right\}, \\ \hat{\sigma}_{gq}^2 &= 2\hat{\sigma}_{gq}^4 = 8C_F \hat{x}(1 - \hat{z}), \\ \hat{\sigma}_{gq}^3 &= -4C_F \hat{x}(1 - \hat{z})^2 \frac{1}{\hat{z} Q q_T} \left\{ Q^2 + \frac{\hat{z}^2 q_T^2}{(1 - \hat{z})^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

(ii) $e + \vec{p} \rightarrow e' + \vec{\Lambda} + X$

$$[f \circ D \circ \hat{\sigma}_k] = \sum_q e_q^2 \Delta q(x) \Delta \hat{q}(z) \Delta_L \hat{\sigma}_{qq}^k + \sum_q e_q^2 \Delta G(x) \Delta \hat{q}(z) \Delta_L \hat{\sigma}_{qg}^k \\ + \sum_q e_q^2 \Delta q(x) \Delta \hat{G}(z) \Delta_L \hat{\sigma}_{gq}^k, \quad (\text{A.13})$$

$$\Delta_L \hat{\sigma}_{qq}^k = \hat{\sigma}_{qq}^k \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{A.14})$$

$$\Delta_L \hat{\sigma}_{qg}^1 = -\frac{(2\hat{x} - 1) \{Q^4(\hat{x} - 1)^2 - q_T^4 \hat{x}^2\}}{Q^2 q_T^2 \hat{x}(\hat{x} - 1)}, \\ \Delta_L \hat{\sigma}_{qg}^2 = \Delta_L \hat{\sigma}_4^{gq} = 0, \\ \Delta_L \hat{\sigma}_{qg}^3 = -\frac{2 \{Q^2(\hat{x} - 1) - q_T^2 \hat{x}\}}{Q q_T}, \quad (\text{A.15})$$

$$\Delta_L \hat{\sigma}_{gq}^1 = 2C_F \hat{x} \hat{z} \left\{ \frac{\hat{x} - 2}{\hat{x} - 1} + \frac{\hat{x}(\hat{x} + 1)}{(\hat{x} - 1)^2} \frac{q_T^4}{Q^4} + \frac{2(2\hat{x}^2 - 2\hat{x} + 1)}{(\hat{x} - 1)^2} \frac{q_T^2}{Q^2} \right\}, \\ \Delta_L \hat{\sigma}_{gq}^2 = 2\Delta_L \hat{\sigma}_4^{gq} = 8C_F \frac{\hat{x}^2 \hat{z}}{\hat{x} - 1} \frac{q_T^2}{Q^2}, \\ \Delta_L \hat{\sigma}_{gq}^3 = \frac{4C_F \hat{x} \hat{z}}{(\hat{x} - 1)^2} \left\{ (\hat{x} - 1)^2 + \frac{\hat{x}^2 q_T^2}{Q^2} \right\} \frac{q_T}{Q}. \quad (\text{A.16})$$

(iii) $e + p^\uparrow \rightarrow e' + \Lambda^\uparrow + X$

$$\sum_k \mathcal{A}_k [f \circ D \circ \hat{\sigma}_k] = \sum_q e_q^2 \delta q(x) \delta \hat{q}(z) \Delta_T \hat{\sigma}^{qq}, \quad (\text{A.17})$$

□

$$\Delta_T \hat{\sigma}^{qq} = 4C_F \left[(1 + \cosh^2 \psi) \cos(\Phi_A - \Phi_B) - \frac{Q}{q_T} \sinh 2\psi \cos(\Phi_A - \Phi_B - \phi) \right. \\ \left. + \frac{Q^2}{q_T^2} \sinh^2 \psi \cos(\Phi_A - \Phi_B - 2\phi) \right]. \quad (\text{A.18})$$

$$(iv) \vec{e} + \vec{p} \rightarrow e' + \{\pi, \Lambda\} + X$$

$$\begin{aligned} [f \circ D \circ \hat{\sigma}_k] &= \sum_q e_q^2 \Delta q(x) \hat{q}(z) \Delta_{LO} \hat{\sigma}_{qq}^k + \sum_q e_q^2 \Delta G(x) \hat{q}(z) \Delta_{LO} \hat{\sigma}_{qg}^k \\ &\quad + \sum_q e_q^2 \Delta q(x) \hat{G}(z) \Delta_{LO} \hat{\sigma}_{gq}^k, \end{aligned} \quad (A.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{LO} \hat{\sigma}_{qq}^6 &= -2C_F \left\{ \left(\frac{1}{\hat{x}\hat{z}} + \hat{x}\hat{z} \right) \frac{Q^2}{q_T^2} - \frac{\hat{x}\hat{z}q_T^2}{Q^2} \right\}, \\ \Delta_{LO} \hat{\sigma}_{qq}^7 &= -4C_F \hat{x}\hat{z} \frac{Q^2 - q_T^2}{Qq_T}, \end{aligned} \quad (A.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{LO} \hat{\sigma}_{qg}^6 &= \frac{2\hat{x} - 1}{\hat{x}} \left(2\hat{x} + \frac{\hat{x} - 1}{\hat{z}^2} \frac{Q^2}{q_T^2} \right), \\ \Delta_{LO} \hat{\sigma}_{qg}^7 &= \frac{2Q}{q_T} \frac{(\hat{x} - 1)(2\hat{z} - 1)}{\hat{z}}, \end{aligned} \quad (A.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{LO} \hat{\sigma}_{gq}^6 &= \frac{2C_F \hat{z}}{\hat{x} - 1} \left\{ \frac{1}{\hat{z}^2} - (\hat{x} - 1)^2 + \frac{\hat{x}^4}{(\hat{x} - 1)^2} \frac{q_T^4}{Q^4} \right\}, \\ \Delta_{LO} \hat{\sigma}_{gq}^7 &= \frac{4C_F \hat{x}\hat{z}}{\hat{x} - 1} \left(1 - \frac{\hat{x}}{\hat{z}} \right) \frac{q_T}{Q}. \end{aligned} \quad (A.22)$$

$$(v) \vec{e} + p \rightarrow e' + \vec{\Lambda} + X$$

$$\begin{aligned} [f \circ D \circ \hat{\sigma}_k] &= \sum_q e_q^2 q(x) \Delta \hat{q}(z) \Delta_{OL} \hat{\sigma}_{qq}^k + \sum_q e_q^2 G(x) \Delta \hat{q}(z) \Delta_{OL} \hat{\sigma}_{qg}^k \\ &\quad + \sum_q e_q^2 q(x) \Delta \hat{G}(z) \Delta_{OL} \hat{\sigma}_{gq}^k, \end{aligned} \quad (A.23)$$

$$\Delta_{OL} \hat{\sigma}_{qq}^{6,7} = \Delta_{LO} \hat{\sigma}_{qq}^{6,7}, \quad (A.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{OL} \hat{\sigma}_{qq}^6 &= \frac{2\hat{x}^2 - 2\hat{x} + 1}{\hat{x}\hat{z}} \left(\hat{x} + (\hat{x} - 1) \frac{Q^2}{q_T^2} \right), \\ \Delta_{OL} \hat{\sigma}_{qq}^7 &= \frac{2Q}{q_T} \frac{(\hat{x} - 1)(2\hat{x} - 1)}{\hat{z}}, \end{aligned} \quad (A.25)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{OL} \hat{\sigma}_{gq}^6 &= \frac{2C_F \hat{z}}{\hat{x} - 1} \left\{ \frac{1}{\hat{z}^2} + (\hat{x} - 1)^2 - \frac{\hat{x}^4}{(\hat{x} - 1)^2} \frac{q_T^4}{Q^4} \right\}, \\ \Delta_{OL} \hat{\sigma}_{gq}^7 &= -\frac{4C_F \hat{x}\hat{z}}{\hat{x} - 1} \left(1 - \frac{\hat{x}}{\hat{z}} \right) \frac{q_T}{Q}. \end{aligned} \quad (A.26)$$

Appendix B Asymptotic Part の導出

この appendix では、 $O(\alpha_s)$ の断面積における *Asymptotic part* (4.19) の導出を行う。
(A.1)~(A.12) で与えられている無偏極過程における NLO 断面積において、 $1/q_T^2$ に比例する項を取り出すと、

$$I = \int_{x_0(\lambda)}^1 \frac{dx}{x} \int_{z_0(\lambda)}^1 \frac{dz}{z} \left[S_{ab}(\hat{x}, \hat{z}, \lambda) \circ f(x) \circ D(z) \right] \delta \left\{ \lambda - \left(\frac{1}{\hat{x}} - 1 \right) \left(\frac{1}{\hat{z}} - 1 \right) \right\} \quad (\text{B.1})$$

である。ここで $\lambda \equiv q_T^2/Q^2$ であり、 $[S_{ab} \circ f \circ D]$ ($(a, b) = (q, q), (q, g), (g, q)$) は

$$\begin{aligned} S_{qq} &= 2C_F \hat{x} \hat{z} \left(1 + \frac{1}{\hat{x}^2 \hat{z}^2} \right) \frac{1}{\lambda} q(x) \hat{q}(z) \\ S_{gq} &= \hat{x}(1 - \hat{x}) \left(\frac{1}{\hat{x}^2 \hat{z}^2} - \frac{2}{\hat{x} \hat{z}} + 2 \right) \frac{1}{\lambda} G(x) \hat{q}(z) \\ S_{qg} &= 2C_F \hat{x}(1 - \hat{z}) \left(\frac{1}{\hat{x}^2 \hat{z}^2} + \frac{(1 - \hat{z})^2}{\hat{z}^2} \right) \frac{1}{\lambda} q(x) \hat{G}(z) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

となる。また運動量割合 x, z の積分の下限は δ -関数からの要請により

$$x_0(\lambda) = x_{bj} \left(1 + \frac{z_f \lambda}{1 - z_f} \right), \quad z_0(\lambda) = z_f \left(1 + \frac{x_{bj} \lambda}{1 - x_{bj}} \right) \quad (\text{B.3})$$

で抑えられている。上式から *Asymptotic part* を引き出すために、 δ -関数の $q_T \rightarrow 0$ における振る舞いを考察してみる。

$q_T \rightarrow 0$ つまり $\lambda \rightarrow 0$ の極限において δ -関数は、

$$X = \frac{1}{\hat{x}} - 1, \quad Z = \frac{1}{\hat{z}} - 1, \quad \xi = \sqrt{\lambda} \quad (\text{B.4})$$

とした場合に、図 13 の様に

$$\frac{1}{\hat{x}} - 1 = \frac{1}{\hat{z}} - 1 = \sqrt{\lambda} \quad (\text{B.5})$$

で積分領域を二分する様な役割を持つと解釈することができる。結果、積分領域は

$$\begin{aligned} (1) : x_1(\lambda) &\leq x \leq 1, \quad \epsilon \leq z \leq z_1(\lambda) \\ (2) : \epsilon &\leq x \leq x_1(\lambda), \quad z_1(\lambda) \leq z \leq 1 \end{aligned}$$

の二区間に分けられる。なお $x_1(\lambda), z_1(\lambda)$ は (B.5) で与えられる x, z の値に対応する。

$$x_1(\lambda) = x_{bj}(1 + \sqrt{\lambda}), \quad z_1(\lambda) = z_f(1 + \sqrt{\lambda}) \quad (\text{B.6})$$

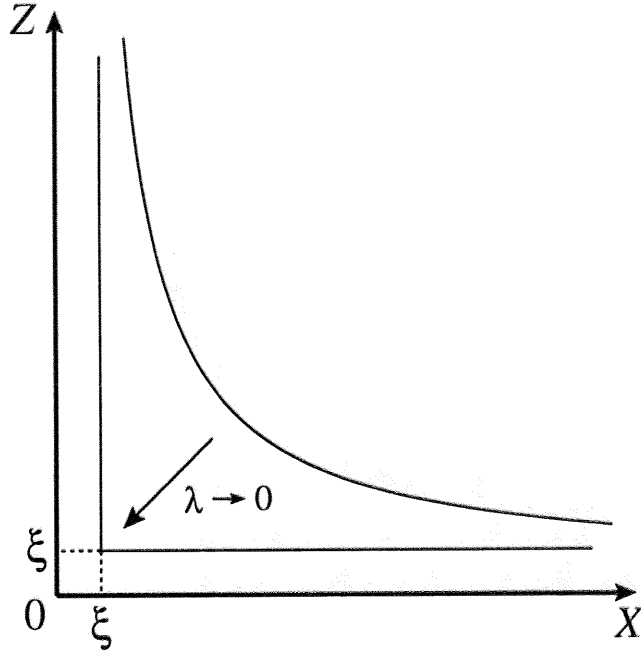


図 13 δ 関数の $\lambda \rightarrow 0$ での振舞い

ここで

$$f(\hat{z}) = \lambda - \left(\frac{1}{\hat{x}} - 1 \right) \left(\frac{1}{\hat{z}} - 1 \right)$$

と置くと δ -関数は $F(\hat{z}^*) = 0$ より、

$$\begin{aligned} \delta\{f(\hat{z})\} &= \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{z}} \right)^{-1}_{\hat{z}=\hat{z}^*} \delta(\hat{z} - \hat{z}^*) \\ &= \frac{\hat{x}}{1 - \hat{x}} \hat{z}^{*2} \delta(\hat{z} - \hat{z}^*), \quad \hat{z}^* = \frac{1 - \hat{x}}{1 - \hat{x} + \lambda \hat{x}} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

と変型できるので、積分領域 (1) における z 積分は

$$\int_{\epsilon}^{z_1(\lambda)} \frac{d\hat{z}}{\hat{z}} \frac{\hat{x}}{1 - \hat{x}} \hat{z}^{*2} \delta(\hat{z} - \hat{z}^*) = \frac{\hat{x}}{1 - \hat{x}} \hat{z}^* = \frac{\hat{x}}{1 - \hat{x} + \lambda \hat{x}} \quad (\text{B.8})$$

となり、同様に積分領域 (2) における x 積分は

$$\int_{\epsilon}^{x_1(\lambda)} \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} \frac{\hat{z}}{1 - \hat{z}} \hat{x}^{*2} \delta(\hat{x} - \hat{x}^*) = \frac{\hat{z}}{1 - \hat{z}} \hat{x}^* = \frac{\hat{z}}{1 - \hat{z} + \lambda \hat{z}}, \quad \left(\hat{x}^* = \frac{1 - \hat{z}}{1 - \hat{z} + \lambda \hat{z}} \right) \quad (\text{B.9})$$

である。従って (B.1) は

$$I = I_X + I_Z \quad (\text{B.10})$$

$$I_X = \int_{x_1(\lambda)}^1 \frac{dx}{x} \frac{\hat{x}}{1 - \hat{x} + \lambda \hat{x}} S_{ab}(\hat{x}, \hat{z}^*, \lambda) f(x) D(z^*) \quad (\text{B.11})$$

$$I_Z = \int_{z_1(\lambda)}^1 \frac{dz}{z} \frac{\hat{z}}{1 - \hat{z} + \lambda \hat{z}} S_{ab}(\hat{x}^*, \hat{z}, \lambda) f(x^*) D(z) \quad (\text{B.12})$$

になる。なお $\hat{x} = x_{bj}/x$, $\hat{z} = z_f/z$ より $x^* = x_{bj}/\hat{x}^*$, $z^* = z_f/\hat{z}^*$ である。

今、一例として S_{qq} の場合の I_X を考えてみる。

$$I_X = \int_{x_1(\lambda)}^1 \frac{dx}{x} \frac{\hat{x}}{1 - \hat{x} + \lambda \hat{x}} \frac{2C_F}{\lambda} \hat{x} \hat{z}^* \left(1 + \frac{1}{\hat{x}^2 \hat{z}^{*2}} \right) q(x) \hat{q}(z^*) \quad (\text{B.13})$$

$\lambda \rightarrow 0$ の時、 $1 - \hat{x} \gg \lambda \hat{x}$, $\hat{z}^* \rightarrow 1$, $z^* \rightarrow z_f$ なので、

$$I_X = \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_1(\lambda)}^1 \frac{dx}{x} \frac{1 + \hat{x}^2}{1 - \hat{x}} q(x) \hat{q}(z_f) \quad (\text{B.14})$$

であり、 $x \rightarrow \hat{x}$ に積分変数変換：

$$\frac{dx}{x} = -\frac{d\hat{x}}{\hat{x}}, \quad \begin{cases} x: & x_1(\lambda) \rightarrow 1 \\ \hat{x}: & 1/(1 + \sqrt{\lambda}) \equiv \hat{x}_1(\lambda) \rightarrow x_{bj} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

を行うと

$$\begin{aligned} I_X &= \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_{bj}}^{\hat{x}_1(\lambda)} \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} \frac{1 + \hat{x}^2}{1 - \hat{x}} q(x) \hat{q}(z_f) \\ &= \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_{bj}}^{\hat{x}_1(\lambda)} \frac{d\hat{x}}{1 - \hat{x}} \left(\frac{1 + \hat{x}^2}{\hat{x}} q(x) \right) \hat{q}(z_f) \\ &= \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_{bj}}^{\hat{x}_1(\lambda)} \frac{d\hat{x}}{1 - \hat{x}} \left\{ \frac{1 + \hat{x}^2}{\hat{x}} q(x) - \left(\frac{1 + \hat{x}^2}{\hat{x}} q(x) \right)_{\hat{x}=1} \right\} \hat{q}(z_f) \\ &\quad + \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_{bj}}^{\hat{x}_1(\lambda)} \frac{d\hat{x}}{1 - \hat{x}} \left(\frac{1 + \hat{x}^2}{\hat{x}} q(x) \right)_{\hat{x}=1} \hat{q}(z_f) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

ここで

$$F(\hat{x}) = \frac{1 + \hat{x}^2}{\hat{x}} q(x)$$

とすると、 $\lambda \rightarrow 0$ の時、 $\hat{x}_1(\lambda) = 1/(1 + \sqrt{\lambda}) \rightarrow 1$ であり、 $\hat{x} = \hat{x}_1(\lambda)$ ならば $F(\hat{x}) - F(1) \rightarrow 0$ なので右辺第一項の積分上限を 1 で置き換えることが可能なので、 $F(\hat{x})$ を用いて

$$I_X = \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_{bj}}^1 \frac{d\hat{x}}{1 - \hat{x}} \{F(\hat{x}) - F(1)\} \hat{q}(z_f) + \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_{bj}}^{\hat{x}_1(\lambda)} \frac{d\hat{x}}{1 - \hat{x}} 2q(x_{bj}) \hat{q}(z_f) \quad (\text{B.17})$$

と書き換えることができる。また”+”関数が

$$\int_z^1 dx f(x) \frac{1}{(1-x)_+} \equiv \int_z^1 dx \frac{1}{1-x} \{f(x) - f(1)\} + f(1) \ln(1-z) \quad (\text{B.18})$$

と定義されているので、(B.17) は”+”関数を用いて

$$\begin{aligned} I_X &= \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_{bj}}^1 \frac{d\hat{x}}{(1-\hat{x})_+} \frac{1+\hat{x}^2}{\hat{x}} q(x) \hat{q}(z_f) - \frac{2C_F}{\lambda} F(1) \ln(1-x_{bj}) \hat{q}(z_f) \\ &\quad + \frac{2C_F}{\lambda} 2q(x_{bj}) \hat{q}(z_f) \int_{x_{bj}}^{\hat{x}_1(\lambda)} \frac{d\hat{x}}{1-\hat{x}} \\ &= \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_{bj}}^1 \frac{d\hat{x}}{(1-\hat{x})_+} \frac{1+\hat{x}^2}{\hat{x}} q(x) \hat{q}(z_f) + \frac{2C_F}{\lambda} q(x_{bj}) \hat{q}(z_f) \left\{ 2 \ln(1+\sqrt{\lambda}) - 2 \ln \sqrt{\lambda} \right\} \\ &= \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_{bj}}^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} \left[\frac{1+\hat{x}^2}{(1-\hat{x})_+} + \frac{3}{2} \delta(1-\hat{x}) \right] q(x) \hat{q}(z_f) \\ &\quad - \frac{2C_F}{\lambda} \int_{x_{bj}}^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} \frac{3}{2} \delta(1-\hat{x}) q(x) \hat{q}(z_f) - \frac{2C_F}{\lambda} q(x_{bj}) \hat{q}(z_f) \ln \lambda \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

となる。LO の無偏極 Splitting 関数が

$$P_{qq}(x) = C_F \left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right]$$

であり、任意関数との convolution を

$$\begin{aligned} [P_{qq} \otimes f](x_{bj}) &\equiv \int_{x_{bj}}^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} P_{qq}(\hat{x}) f(x) \\ &= C_F \int_{x_{bj}}^1 \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} \left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right] f(x) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

と定義すると、最終的に I_X は

$$I_X = \frac{2}{\lambda} [P_{qq} \otimes q](x_{bj}) \hat{q}(z_f) - \frac{C_F}{\lambda} (3 + 2 \ln \lambda) q(x_{bj}) \hat{q}(z_f) \quad (\text{B.21})$$

となる。

同様の手法で S_{qq} に対する I_Z も計算することが可能である。また S_{gq}, S_{qg} においても同様に、全ての計算を行うと (4.19) の *Asymptotic Part* を得ることができる。

Appendix C パートン分布関数の Q^2 発展

(5.16) における b -積分を実行するためにパートン分布、破砕関数の μ^2 依存性を求めたい。
($\mu = b_0/b$) パートン分布関数の x 依存性については非摂動的であるが、パートン分布関数の μ^2 (繰り込みスケール) 依存性については演算子の紫外発散により決まるので、摂動計算と繰り込み群に基づいて求めることができる。

パートン分布関数 $f(x, \mu^2)$ の n 次のモーメントを、Mellin 変換によって以下のように定義する。

$$f^n(\mu^2) \equiv \int_0^1 dx x^{n-1} f(x, \mu^2) \quad (C.1)$$

ここで n は複素数である。

分布関数の n 次のモーメント f^n は、 $(n-1)$ 個の共変微分 $D^\mu = \partial^\mu - igA^\mu$ (A^μ はグルーオン場, g は結合定数) を含むツイスト 2, 局所演算子 $O^n(0; \mu^2)$ の核子による期待値で表す個とができる。

$$f^n(\mu^2) = \langle PS | O^n(0; \mu^2) | PS \rangle \quad (C.2)$$

繰り込まれた演算子 O^n は、裸 (Bare) の演算子 O^{nB} と以下の関係にある。

$$O^n(\mu) = Z^{-1,n}(\mu) O^{nB} \quad (C.3)$$

ここで $Z^{-1,n}(\mu)$ は繰り込み定数である。

$O^n(\mu)$ のスケール依存性は、繰り込み群方程式

$$\mu \frac{dO^n(\mu)}{d\mu} + \gamma^n(g(\mu)) = 0 \quad (C.4)$$

を解くことによって得られる。

ここで $\gamma^n(g(\mu))$ は、複合演算子 $O^n(\mu)$ の異常次元で、

$$\gamma^n(g(\mu)) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z^n(\mu) \quad (C.5)$$

である。これを解くと、

$$O^n(Q^2) = O^n(\mu^2) \exp \left[- \int_{g(\mu^2)}^{g(Q^2)} dg \frac{\gamma^n(g)}{\beta(g)} \right] \quad (C.6)$$

を得ることができる。これにより O^n のスケール依存性は、異常次元 $\gamma^n(g)$ と β 関数

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} \quad (C.7)$$

によって決まることがわかる。

$\gamma^n(g)$ と $\beta(g)$ を $\alpha_s = g^2/4\pi$ について摂動展開し,

$$\begin{aligned}\gamma_{NS}^n(g) &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \gamma_{qq}^{(0)n} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \gamma_{NS}^{(1)n}(\eta), \quad \eta = \pm 1 \\ \gamma_{\gamma\gamma'}^n(g) &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \gamma_{\gamma\gamma'}^{(0)n} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \gamma_{\gamma\gamma'}^{(1)n}, \quad \gamma, \gamma' = q, g\end{aligned}\tag{C.8}$$

$\gamma^n(g), \beta(g)$ の 1 次の項まで取った場合が Leading Order(LO), 2 次の項まで取った場合が Next-to-Leading Order(NLO) の Q^2 発展をそれぞれ与える。ここで (C.8) は、フレーバー非一重項についての異常次元とフレーバー一重項についての異常次元である。一重項については、クォーク場の演算子とグルーオン場の演算子とが混同するため、異常次元は行列となる。

(C.8) の非一重項、一重項を (C.6) に代入し、これを解く事によって分布関数の n 次のモーメントについての Q^2 発展を知ることができる。

フレーバー非一重項について、Paton 分布関数の n 次のモーメント V_η^n の Q^2 発展は

$$V_\eta^n(Q^2) = \left[1 + \frac{\alpha_s(Q^2) - \alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \left(\frac{\gamma_{NS}^{(1)n}(\eta)}{2\beta_0} - \frac{\beta_1 \gamma_{qq}^{(0)n}}{2\beta_0^2} \right) \right] \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\mu^2)} \right)^{\gamma_{qq}^{(0)n}/2\beta_0} V_\eta^n(\mu^2)\tag{C.9}$$

によって与えられる [43]。ここで $\eta = -1$ は $u - \bar{u} = u_v, d - \bar{d} = d_v$ の非一重項の組み合わせに対応し、 $\eta = 1$ は $(u + \bar{u}) - (d + \bar{d}), (u + \bar{u}) + (d + \bar{d}) - 2(s + \bar{s})$ の組み合わせに対応する。また結合定数 α_s は Two-Loop の order では

$$\frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \simeq \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\lambda^2)} - \frac{\beta_1 \ln \ln(Q^2/\lambda^2)}{\beta_0^3 (\ln(Q^2/\lambda^2))^2}\tag{C.10}$$

である。またこの場合の β 関数の各係数は

$$\beta_0 = \frac{11 - 2n_f}{3}, \quad \beta_1 = \frac{102 - 38n_f}{3}\tag{C.11}$$

で、 n_f は Q^2 発展に寄与するクォークのフレーバー数である。 λ は QCD の典型的なスケール ($\sim 200 \text{ MeV}$) である。

フレーバー一重項について、分布関数の n 次のモーメント Γ^n は

$$\begin{aligned}\Gamma^n(Q^2) &\equiv \begin{pmatrix} \Sigma^n(Q^2) \\ G^n(Q^2) \end{pmatrix} \\ \Sigma^n(Q^2) &\equiv \sum_{q=u,d,s} [q^n(Q^2) + \bar{q}^n(Q^2)]\end{aligned}\tag{C.12}$$

である。またその Q^2 発展は、異常次元行列：

$$\gamma^{(p)n} \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{qq}^{(p)n} & \gamma_{qg}^{(p)n} \\ \gamma_{gq}^{(p)n} & \gamma_{gg}^{(p)n} \end{pmatrix}, \quad p = 0, 1\tag{C.13}$$

によって支配される。(C.6) を解くと、

$$\Gamma^n(Q^2) = \left\{ \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\mu^2)} \right)^{\lambda_-^n/2\beta_0} \left[P_-^n - \frac{1}{2\beta_0} \frac{\alpha_s(\mu^2) - \alpha_s(Q^2)}{4\pi} P_-^n \gamma^n P_-^n \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} - \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\mu^2)} \right)^{\lambda_+^n - \lambda_-^n/2\beta_0} \right) \frac{P_-^n \gamma^n P_+^n}{2\beta_0 + \lambda_+^n - \lambda_-^n} \right] + (+ \leftrightarrow -) \right\} \Gamma^n(\mu^2) \quad (\text{C.14})$$

となる [43]。ここで、

$$\gamma^n = \gamma^{(1)n} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \gamma^{(0)n} \\ P_\pm^n = \pm \left(\gamma^{(0)n} - \lambda_\mp^n \right) / (\lambda_+^n - \lambda_-^n) \\ \lambda_\pm^n = \frac{1}{2} \left[\gamma_{qq}^{(0)n} + \gamma_{gg}^{(0)n} \pm \sqrt{\left(\gamma_{gg}^{(0)n} - \gamma_{qq}^{(0)n} \right)^2 + 4\gamma_{qg}^{(0)n} \gamma_{gq}^{(0)n}} \right] \quad (\text{C.15})$$

であり、 λ_\pm^n は LO の異常次元行列 $\gamma^{(0)n}$ の固有値である。

参考文献

- [1] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964) 214.
- [2] G. Zweig, report CERN-TH (1964) 401.
- [3] S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **16** (1956) 686.
- [4] M. Ikeda, S. Ogawa and Y. Ohnuki, Prog. Theor. Phys. **22** (1959) 715.
- [5] E. D. Bloom et al., Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 930.
- [6] J. D. Bjorken, Phys. Rev. **179** (1969) 1547.
- [7] R. P. Feynman, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 1415.
- [8] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, Phys. Rev. **185** (1969) 1975.
- [9] M. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. **B139** (1965) 1006.
- [10] D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.
- [11] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [12] C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. **96** (1954) 151.
- [13] Y. Koike and J. Nagashima, Nucl. Phys. **B660** (2003) 269.
- [14] X. Ji, Phys. Rev. **D49** (1994) 114.
- [15] D. de Florian, C.A. Garcia Canal and R. Sassot, Nucl. Phys. **B470** (1996) 195;
D. de Florian and R. Sassot, Nucl. Phys. **B488** (1997) 367.
- [16] D. De Florian, M. Stratmann and W. Vogelsang, Phys. Rev. **D63** (1998) 5811.
- [17] Yu.L. Dokshitzer, D.I. D'Yakonov and S.I. Troyan, Phys. Lett. **79B** (1978) 269.
- [18] G. Parisi and R. Petronzio, Nucl. Phys. **B154** (1979) 427.
- [19] J.C. Collins and D. Soper, Nucl Phys. **B193** (1981) 381; **B213** (1983) 545(E); **B197**
(1982) 197.
- [20] G. Altarelli, R.K. Ellis, G. Greco and G. Martinelli, Nucl. Phys. **B246** (1984) 12.
- [21] J.C. Collins, D. Soper and G. Sterman, Nucl Phys. **B250** (1985) 199.
- [22] R. Meng, F.I. Olness and D. Soper, Phys. Rev. **D54** (1996) 1919.
- [23] P.M. Nadolsky, D.R. Stump and C.P. Yuan, Phys. Rev. **D61** (2000) 014003; **D64**
(2001) 114011.
- [24] C. COLLINS and E. SOPER, Nucl. Phys. **B194** (1982) 445.
- [25] R.L. Jaffe, hep-ph/9602236
- [26] R.J. Jaffe and Xiangdong Ji, Nucl. Phys. **B375** (1992) 527.
- [27] X. Ji, Phys. Lett. **B289** (1992) 137.
- [28] X. Artru and M. Mekhfi, Z. Phys. **C45** (1990) 669.
- [29] J. Kodaira and L. Trentadue, Phys. Lett. **B112** (1982) 66; Phys. Lett. **B123** (1983)
335.

- [30] C. Davies and E.J. Stirling, Nucl. Phys. **B244** (1984) 337.
- [31] D. De Florian and M. Grazzini, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 4678; Nucl. Phys. **B616** (2001) 247.
- [32] W. Vogelsang, Nucl. Phys. **B475** (1996) 47.
- [33] W. Vogelsang, Phys. Rev. **D57** (1998) 1886.
- [34] S. Frixione, P. Nason and G. Ridolfi, Nucl. Phys. **B542** (1999) 311.
- [35] G. Bozzi, S. Catani, D. de Florian and M. Grazzini, Phys. Lett. **B564** (2003) 65; hep-ph/0508068.
- [36] S. Catani, D. de Florian, M. Grazzini, P. Nason, JHEP 0307:028, (2003).
- [37] A. Kulesza, G. Sterman and W. Vogelsang, Phys. Rev. **D66** (2002) 014011.
- [38] G.A. Ladinsky and C.-P. Yuan, Phys. Rev. **D50** (1994) 4239; F. Landry, R. Brock G. Ladinsky and C.P. Yuan, ibd. **D63** (2001) 013004; J.-W. Qiu and X.-F. Zhang, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2724; Phys. Rev. **D63** (2001) 114011.
- [39] M. Glück, E. Reya and A. Vogt, Eur. Phys. J. **C5** (1998) 461.
- [40] M. Glück, E.Reya, M. Stratmann and W. Vogelsang, Phys. Rev. **D63** (2001) 094005.
- [41] S. Kretzer, Phys. Rev. **D62** (2000) 054001.
- [42] A. Méndez, Nucl. Phys. **B145** (1978) 199.
- [43] M. Glück, E. Reya and A. Vogt, Z. Phys. **C48** (1990) 471.