

ふりがな	にしざわ しょうご
氏名	西澤 正悟
学位位	博士(理学)
学位記番号	新大院博(理)第240号
学位授与の日付	平成17年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
博士論文名	Nonlinear scalarization for set-valued maps and its applications (集合値写像に対する非線形スカラー化とその応用)

論文審査委員	主査 教授 田中 環
	副査 教授 磯貝 英一
	副査 教授 印南 信宏
	副査 教授 竹内 照雄
	副査 助教授 山田 修司

博士論文の要旨

本論文は、集合値写像に対する非線形スカラー化とその手法を用いた応用に関する研究を行っている。ベクトル値関数に対する非線形スカラー化の手法は1990年にGerth(Tammer)とWeiderによって紹介され、非凸な集合に対する分離定理に応用された。その非線形スカラー化の手法と似たような手法が様々な応用に対して用いられており、本研究もその1つの応用研究と位置づけてよい。応用結果として、(1)集合値写像の二者択一の定理、(2)集合値最適化問題に対する最適性条件、(3)集合値写像に対する遺伝的性質の分析と(4)一般化ベクトル均衡問題の解の存在定理を与えていている。

まず、(1)と(2)に関して説明すると次のとおりである。二者択一の定理に関しては、Farkas(1902)やGordan(1873)の二者択一の定理という最適化において重要な役割を果たす定理がある。具体的には、非線形計画問題に対する最適性の条件を導くことや双対定理の証明に貢献している。このタイプの二者択一の定理は、有限個のベクトルからなる集合の凸包と零ベクトルの関係を表現したものであるが、その関係をベクトル値関数の値域における像と零ベクトルの関係と捕らえなおして、1986年にはJeyakumarによりベクトル値関数に対する一般化されたGordan型の二者択一の定理が与えられた。さらに、1999年にはLi、2000年にはYangらによって、集合値写像へ一般化した様々な二者択一の定理が示された。しかし、それらの結果はどれも、内積による線形型のスカラー化を施し分離定理による証明をしていた為、集合値写像にある種の凸性の仮定を必要としていた。そこで、本研究では非線形スカラー化の手法を適用することを考え、特別なスカラー化関数を用いることにより、集合値写像に対する二者択一の定理を凸性の仮定なしで示すことに成功している。それを用いた応用の一つとして、集合値最適化問題に対する最適性条件を導いている。集合値最適化とは、集合値目的関数を持つベクトル最適化のことであり、ここでの解の概念としてはベクトル最適化の有効解が利用されている。

次に、(3)と(4)に関して説明すると次のとおりである。本論文では、AnsariとYaoが示した(一般化)ベクトル均衡問題の解の存在定理のさらなる一般化を考えている。その2人が示した定理は

Fan-Browder の不動点定理を用いて証明されている。一方では、様々な種類の一般化ベクトル均衡問題に対して存在定理の一般化を考える研究がなされていて、それらの存在定理は Fan-KKM 定理を拡張した結果を用いて証明されている。そこで、本研究では Georgiev と Tanaka により示された集合値写像に対する Fan の不等式に着目し、その証明に用いられた Simons の 2 変数関数の結果を拡張し、それを用いて（2 種類の）一般化ベクトル均衡問題の解の存在定理を新たに証明している。本質は、ある種のスカラー化関数が準凸性や半連続性を持つことであり、元の集合値写像からどんな種類の凸性や半連続性がどのようにスカラー化関数に遺伝（伝達）するかを調査することが重要である。本論文では、様々な種類の凸性や半連続性がいくつかの非線形スカラー化関数に遺伝する内容を体系的にまとめて報告している。それらの結果を用いて、一般化ベクトル均衡問題の解の存在定理の一般化を行っている。

本論文の構成は以下のようにになっている。第 1 章では、数学的な基本概念と第 2 章以降の準備として凸解析学や集合値解析学の基本事項のうちで本研究と関連する事柄について述べている。特に、集合値写像の凸性や半連続性の概念においてどのような拡張がなされてきたかについて着目し、実数値・ベクトル値・集合値のそれぞれの場合に分けて体系的にまとめている。第 2 章では、集合値写像に対する非線形スカラー化の手法を紹介し、その手法における特徴関数の性質や非線形スカラー化関数の性質について考察している。第 3 章では、その非線形スカラー化手法により凸性の仮定を用いずに、集合値写像に対する二者択一の定理を証明している。成立する状況を正確に分析しながら定理の結果を正しく捉えなおすために、凸錐による順序ベクトル空間における集合とベクトルの比較法を紹介し、零ベクトルと集合値写像の像との比較に対して 5 通りの分類を与えており、これにより、凸錐の内部を考えて比較した場合に対応して 5 通り、凸錐の閉包を考えて比較した場合に 5 通りの新しいタイプの二者択一の定理をそれぞれ導いている。第 4 章では、4 種類の非線形スカラー化関数を用いて、集合値写像に対する凸性と半連続性の遺伝的性質の結果を体系的に示している。最後に第 5 章では、これまでに示された結果の応用がまとめられている。まず、集合値写像に対する二者択一定理を用いた応用として、集合値最適化問題に対する最適性条件を与えている。また、集合値写像に対する遺伝的性質を用いた応用として、2 種類の一般化ベクトル均衡問題の解の存在定理を示している。

審査結果の要旨

本論文は、集合値写像に対する非線形スカラー化とその手法を用いた様々な応用に関する研究をまとめたものである。非線形関数によるスカラー化手法を考察することで、従来、必要とされてきたいいくつかの条件を取り除くことに成功し、集合値写像の二者択一の定理とその応用、集合値写像に対する遺伝的性質の分析とその応用を与えている。このような取り組みは、数理科学的に独創性、新規性、有効性の高いものと認められ、今後のこの分野の発展に貢献が期待できる。また、申請論文の内容の一部はすでに 3 編の学術論文として掲載されている。このことから、本学位申請論文が当該分野において評価される研究であることを確認した。

よって、上記の内容に基づき本論文が博士（理学）の学位論文として十分であると認定した。