

反変速度—圧力交互時間進行による一般曲線座標系 FDTD 音場解析手法

FINITE-DIFFERENCE TIME-DOMAIN ACOUSTIC SIMULATION TECHNIQUE IN GENERALIZED CURVILINEAR COORDINATES USING CONTRAVARIANT VELOCITY AND PRESSURE FOR LEAPFROG TIME MARCHING

大鳴 拓也*
Takuya OSHIMA

Finite-difference time-domain (FDTD) acoustic simulation technique in generalized curvilinear coordinates using contravariant velocity and pressure as variables for two-step leapfrog time marching scheme is presented. The technique excels the conventional generalized curvilinear technique using contravariant velocity, covariant velocity and pressure as variables for three-step time marching, especially in that normal acoustic impedance boundary conditions which are indispensable in practical application are also presented.

Validation of the technique through comparison against orthogonal FDTD with staircasing applied in irregularly-shaped sound field suppressions of phase error in initial time marching stage and diffusion from staircased boundaries.

Keywords: Acoustic simulation, FDTD method, Generalized curvilinear coordinates, Normal acoustic impedance boundary condition, Staircasing
音場数値解析, FDTD 法, 一般曲線座標系, 法線方向音響インピーダンス境界条件, 階段近似

1 序

スタッガード格子系およびリープフロッグ・スキームから構成される時間領域有限差分 (FDTD) 法による音場解析手法は, 各格子点の物理量が前時刻ステップの値から陽に求められる簡明な手法であり, 有限要素法など他の音場数値解析手法と比較して格子点当たりの計算機負荷が少ない特長を有する。加えて高い汎用性により, 頭部伝達関数の推定¹⁾からコンサートホール²⁾まで, 多種の時間応答解析に適用されている。このような音場解析に使用される FDTD 法では従来, 境界形状によらず音場を直交直線格子系で分割する手法の適用が一般的であった^{3), 4)}。しかしながら, 任意形状の境界を直交直線格子系によって階段状に近似する, いわゆる階段近似の妥当性については殆ど議論されていない。

一方, 音場と形式的に類似な Maxwell 方程式で表される波動伝搬現象を解く電磁気学分野では, 直交直線格子系 FDTD 法⁵⁾における階段近似誤差が従来から認識されており^{6), 7)}, Maxwell 方程式の FDTD 解法における各種の境界形状適合格子系に関する研究が行われている⁸⁾。特に Holland⁹⁾に始まる, 一般座標変換による曲線座標スタッガード格子系解法^{10), 11)}は数学的な取扱いが比較的容易であり, 簡明かつ高い汎用性との FDTD 法の特長を維持しつつ境界適合座標系の構成が可能な手法として発展している¹²⁾⁻¹⁶⁾。

これら一連の電磁気学分野における研究成果を受けて, 音場解析のための FDTD 法においても上記の電磁気学分野における一般曲線座標系解法からの類推による手法を板倉ら¹⁷⁾が提案している。こ

れは一般座標変換された連続式の粒子速度を反変速度, 運動方程式では共変速度により表現し, 両式を反変速度—共変速度変換を介して連立させる手法である。しかしながら本手法の実際の音場解析への適用を考えた場合, 以下の問題点が浮かび上がる。

1. 運動方程式から算出される共変速度を反変速度への変換を介して連続式に与えるため, 変換時の補間操作に起因する連続式評価の際の数値誤差¹⁸⁾が懸念される。
2. 1 時刻ステップの時間進行が運動方程式計算, 速度変換, 連続式計算の 3 段階スキームで表現されるため, やや煩雑である。
3. 実際の音場解析で実用上不可欠な境界条件である法線方向音響インピーダンス境界条件が与えられていない。

特に 3. は, 解析対象となる音場の多くに何らかの吸音境界が存在することを考えれば, 実際の音場解析への本手法適用に対する大きな制約となる。

一方で, 音場解析と同様に流体の速度および圧力を変数とする質量保存式および運動方程式を解く流体解析分野では, 連続式の高精度な満足を重視して, 両式の速度成分ともに反変速度で表現し速度成分の変換を要しない一般曲線座標系解析手法が広く適用されている¹⁸⁾⁻²¹⁾。本手法の音場解析への適用により, 上記の問題点が以下のように解決されると期待される。

1. 運動方程式により得られた反変速度が直接に連続式へ与えられるため, 速度成分変換による数値誤差の懸念が無い。

* 新潟大学工学部 助手・博士(環境学)

Research Assoc., Faculty of Engineering, Niigata University, M. Eng.

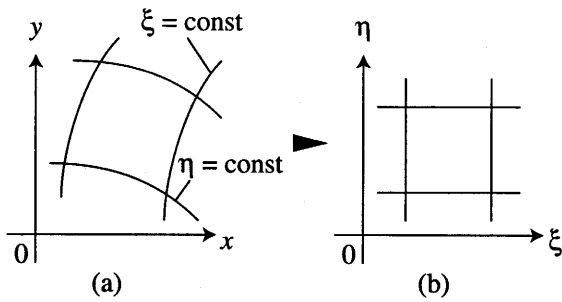


Fig. 1 Coordinate transformation from (a) generalized physical coordinate to (b) computational coordinate.

- 時間進行が直交直線座標系解法と同様に2段階で表現されるため簡明であり、さらに一般曲線座標系スキームと直交直線座標系スキームの混用が容易な利点を有する。
- 反変速度はセル界面における法線方向粒子速度成分に比例した量であるから、境界面の法線方向粒子速度と音圧の関係を規定する法線方向音響インピーダンス境界条件が容易に導出される。

前述のとおり3.の音響インピーダンス境界条件導出は実際の音場解析において不可欠であるから、板倉らの手法に対する本手法の決定的な利点である。さらに、階段近似された音響インピーダンス境界面において、階段近似そのものの煩雑さに加えて法線方向音響インピーダンスを各座標軸方向に分解して与える²⁾煩雑さを有する直交直線格子系解法に対し、階段近似を排除し法線方向音響インピーダンスをそのまま与えれば良い一般曲線座標系解法の利点を最大限に訴求する上でも、本境界条件の導出は不可欠である。

以上の考察から本稿では、反変速度-圧力交互時間進行による一般曲線座標系 FDTD 音場解析手法を導出し、検証計算により基本的な妥当性を示す。なお本稿では、簡単のため二次元の場合を扱う。

2 定式化

2.1 基礎式

静止媒質中の音響伝搬の基礎式である連続式および運動方程式は、それぞれ以下ようになる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2)$$

ただし2次元の場合、

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]^T, \quad \mathbf{u} = [u, v]^T$$

であり、 u, v は x, y 方向の粒子速度 (以下、物理速度と呼ぶ)、 p は音圧、 t は時刻、 κ は体積弾性率、 ρ は流体密度、 T は転置を表す。

ここで Fig. 1 に示す物理座標系 (x, y) から計算座標系 (ξ, η) への座標変換において、 x, y 方向の各微分は以下の連鎖則で表される²²⁾。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3)$$

ただし $\xi_x = \partial \xi / \partial x$ であり、 η_x, η_y, ξ_y も同様である。さらに一般座標での物理速度の反変成分 (反変速度) を U, V とすると

$$U = J(\xi_x u + \xi_y v), \quad V = J(\eta_x u + \eta_y v) \quad (4)$$

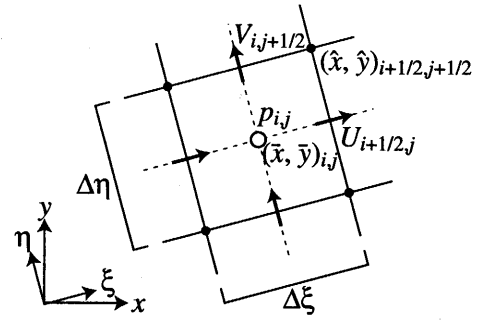


Fig. 2 Definition points of variables on staggered grid.

ただし、

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi.$$

U, V はそれぞれ、 $\xi = \text{一定}$ 、 $\eta = \text{一定}$ の面における η, ξ 単位長さ当たりの法線方向流量成分である¹⁹⁾。

Eqs. (3), (4) の関係を Eq. (1) に代入すると、一般座標変換された連続式が得られる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\kappa}{J} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \quad (5)$$

さらに Eq. (2) と $[J\xi_x, J\xi_y]^T$ の内積および $[J\eta_x, J\eta_y]^T$ の内積をそれぞれ取ると、Eqs. (3), (4) から、速度成分として反変速度を用いる一般座標変換された運動方程式が得られる^{18), 20)}。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{J}{\rho} (\xi_x p_x + \xi_y p_y), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{J}{\rho} (\eta_x p_x + \eta_y p_y) \quad (6)$$

ただし、

$$p_x = \xi_x \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad p_y = \xi_y \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial p}{\partial \eta}. \quad (7)$$

2.2 離散化

Eqs. (5)-(7) を ξ, η 方向の離散化幅がそれぞれ $\Delta \xi, \Delta \eta$ のスタaggerドグリッド (Fig. 2) で離散化する。

Eq. (5) の連続式を時空間方向に2次精度中心差分で離散化すると、Table 1 の Eq. (8) となる。下付き添字の i, j は離散化されたスタaggerドグリッドの (ξ, η) 方向に (i, j) 番目のセル中心格子点、 $\pm \frac{1}{2}$ はセル界面格子点を表す (Fig. 2)。上付き添字の n は時間離散化幅 Δt における n 番目の時刻ステップを表す。

Eqs. (6), (7) の運動方程式の離散化にあたって、 ξ_x などの幾何学量の算出方法は任意性を有する。特に圧力勾配項の離散化には、保存形・非保存形の選択²³⁾、定義点以外の点への補間と差分式の関係²⁴⁾、厳密な物理量定義点の取り方²¹⁾ など、数値流体解析分野で多くの検討が行われている。本報では、定式化にあたっての曖昧さが少なく圧力勾配項の離散化精度に配慮されている、Bernard らによる MAC 系非圧縮性流体解法のための離散化手法^{19), 20)} を適用した。本手法により Eqs. (6), (7) を離散化すると、Eqs. (9), (10) となる。最良な離散化手法の比較検討は今後の課題としたい。

Eqs. (8)-(10) に含まれる $J\xi_x, \xi_x$ などの幾何学量は、セル四隅の物理座標 $(\hat{x}, \hat{y})_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$ から Bernard らの手法によって Table 2 の Eqs. (11)-(20) のように算出する。

計算手順は従来の直交直線格子による FDTD 法と同様に、以下の2段階を交互に実行する。

- 時刻ステップ n における反変速度 U, V から、Eq. (8) により時刻ステップ $n + \frac{1}{2}$ における音圧 p を計算する。

Table 1 Discretized continuity and momentum equations in generalized curvilinear grid.Continuity equation

$$p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\kappa \Delta t}{\bar{J}_{i,j}} \left\{ \frac{1}{\Delta \xi} \left(U_{i+\frac{1}{2},j}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) + \frac{1}{\Delta \eta} \left(V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \right\} \quad (8)$$

Momentum equations of contravariant velocity

$$U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = U_{i+\frac{1}{2},j}^n - \frac{\Delta t}{\rho \Delta \xi} \left\{ (\hat{J} \hat{\xi}_x)_{i+\frac{1}{2},j} (\bar{\xi}_x)_{i+\frac{1}{2},j} + (\hat{J} \hat{\xi}_y)_{i+\frac{1}{2},j} (\bar{\xi}_y)_{i+\frac{1}{2},j} \right\} \left(p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{4\rho \Delta \eta} \left\{ (\hat{J} \hat{\xi}_x)_{i+\frac{1}{2},j} (\bar{\eta}_x)_{i+\frac{1}{2},j} + (\hat{J} \hat{\xi}_y)_{i+\frac{1}{2},j} (\bar{\eta}_y)_{i+\frac{1}{2},j} \right\} \left(p_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + p_{i+1,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i+1,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (9)$$

$$V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\rho \Delta \eta} \left\{ (\hat{J} \hat{\eta}_x)_{i,j+\frac{1}{2}} (\bar{\eta}_x)_{i,j+\frac{1}{2}} + (\hat{J} \hat{\eta}_y)_{i,j+\frac{1}{2}} (\bar{\eta}_y)_{i,j+\frac{1}{2}} \right\} \left(p_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{4\rho \Delta \xi} \left\{ (\hat{J} \hat{\eta}_x)_{i,j+\frac{1}{2}} (\bar{\xi}_x)_{i,j+\frac{1}{2}} + (\hat{J} \hat{\eta}_y)_{i,j+\frac{1}{2}} (\bar{\xi}_y)_{i,j+\frac{1}{2}} \right\} \left(p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + p_{i+1,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-1,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (10)$$

Table 2 Calculation of geometric quantities.Geometric quantities

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_\xi \\ \bar{y}_\xi \end{bmatrix}_{i,j} = \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_\eta \\ \bar{y}_\eta \end{bmatrix}_{i,j} = \frac{1}{2\Delta \eta} \left(\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{J} \hat{\xi}_x \\ \hat{J} \hat{\xi}_y \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta \eta} \left(\begin{bmatrix} \hat{y} \\ -\hat{x} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \begin{bmatrix} \hat{y} \\ -\hat{x} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right), \quad \begin{bmatrix} \hat{J} \hat{\eta}_x \\ \hat{J} \hat{\eta}_y \end{bmatrix}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta \xi} \left(\begin{bmatrix} -\hat{y} \\ \hat{x} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \begin{bmatrix} -\hat{y} \\ \hat{x} \end{bmatrix}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi}_x \\ \bar{\xi}_y \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\bar{J}_{i+\frac{1}{2},j}} \begin{bmatrix} \bar{y}_\eta \\ -\bar{x}_\eta \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j}, \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_\eta \\ \bar{y}_\eta \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4\Delta \eta} \left(\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i,j+1} - \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i,j-1} + \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i+1,j+1} - \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i+1,j-1} \right) \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\eta}_x \\ \bar{\eta}_y \end{bmatrix}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\bar{J}_{i,j+\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} -\bar{y}_\xi \\ \bar{x}_\xi \end{bmatrix}_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_\xi \\ \bar{y}_\xi \end{bmatrix}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\Delta \xi} \left(\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i+1,j} - \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i-1,j} + \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i+1,j+1} - \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i-1,j+1} \right) \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\eta}_x \\ \bar{\eta}_y \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\bar{J}_{i+\frac{1}{2},j}} \begin{bmatrix} -\bar{y}_\xi \\ \bar{x}_\xi \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j}, \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_\xi \\ \bar{y}_\xi \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta \xi} \left(\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i+1,j} - \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i,j} \right) \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi}_x \\ \bar{\xi}_y \end{bmatrix}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\bar{J}_{i,j+\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} \bar{y}_\eta \\ -\bar{x}_\eta \end{bmatrix}_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_\eta \\ \bar{y}_\eta \end{bmatrix}_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta \eta} \left(\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i,j+1} - \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i,j} \right) \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}_{i,j} = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \quad (18)$$

Jacobians

$$\bar{J}_{i,j} = (\bar{x}_\xi)_{i,j} (\bar{y}_\eta)_{i,j} - (\bar{x}_\eta)_{i,j} (\bar{y}_\xi)_{i,j} \quad (19)$$

$$\bar{J}_{i+\frac{1}{2},j} = (\bar{x}_\xi)_{i+\frac{1}{2},j} (\bar{y}_\eta)_{i+\frac{1}{2},j} - (\bar{x}_\eta)_{i+\frac{1}{2},j} (\bar{y}_\xi)_{i+\frac{1}{2},j}, \quad \bar{J}_{i,j+\frac{1}{2}} = (\bar{x}_\xi)_{i,j+\frac{1}{2}} (\bar{y}_\eta)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\bar{x}_\eta)_{i,j+\frac{1}{2}} (\bar{y}_\xi)_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (20)$$

2. 時刻ステップ $n + \frac{1}{2}$ における音圧 p から, Eqs. (9), (10) によって時刻ステップ $n + 1$ における反変速度 U, V を計算する.

上記反復計算においては共変速度および物理速度のいずれも介在せず, 反変速度のみを速度成分として計算が進行する. したがって反変速度-物理速度あるいは共変速度の変換で発生する時間進行に対し累積的な誤差が存在しない. 物理速度が必要な場合は, Eq. (4) を u, v について解いた以下の式から計算する.

$$u = \frac{1}{J} (x_\xi U + x_\eta V), \quad v = \frac{1}{J} (y_\xi U + y_\eta V)$$

ただし離散化された U, V および幾何学量の定義点はそれぞれ異なるため, 適宜補間操作が必要である.

物理座標系 (x, y) と計算座標系 (ξ, η) が一致する場合, $\xi_x = \eta_y = J = 1$ かつ $\xi_y = \eta_x = 0$ であるから, Eq. (4) より反変速度は物理速度と一致する. さらに計算座標系の離散化幅 $\Delta \xi, \Delta \eta$ を物理座標系の離散化幅 $\Delta x, \Delta y$ と読み替えれば, Table 1 の各式は直交直線格子系における離散化式²⁵⁾

$$p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} - \kappa \Delta t \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left(u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) \right\}$$

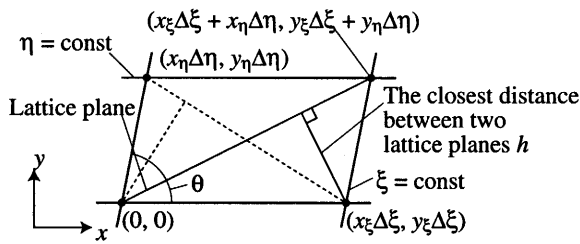


Fig. 3 Geometrical relationships in a single cell constituting the stability condition.

$$+ \frac{1}{\Delta y} \left(v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \} \quad (21)$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j}^n - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \left(p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (22)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \left(p_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (23)$$

に一致する。従って解析領域内に物理座標系および計算座標系が一致する部分があれば、当該部分に本手法より効率の良い Eqs. (21)–(23) の直交直線格子系解法を適用し、それ以外を Eqs. (8)–(10) の一般曲線座標系解法によって解く、解法の混用が可能である。

2.3 安定条件

セルの一頂点を原点とする局所座標系を考えたとき、セル内の幾何学量と頂点座標の関係は Fig. 3 のようになる。ここでセル頂点を含む格子面 (lattice plane) 間の最短距離 h は図中の $\theta \leq 90^\circ$ のとき図示した部分となり

$$h = \frac{J \Delta \xi \Delta \eta}{\sqrt{(x_\xi \Delta \xi + x_\eta \Delta \eta)^2 + (y_\xi \Delta \xi + y_\eta \Delta \eta)^2}}$$

ただし、 $J \Delta \xi \Delta \eta$ はセルの面積であり、簡単のため幾何学量がセル内で変化しない場合を考えた。 $\theta > 90^\circ$ の場合は図中の点線部が最短距離およびその格子面となる。両者を考慮して、さらに音響エネルギーが音速 c を超えて伝搬することは不可能であるため、 Δt は h/c を超えられない¹²⁾との制約から、全解析領域に対する Δt の安定条件が次式で与えられる。

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{J}{c \sqrt{\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{(\Delta \eta)^2} + \frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{(\Delta \xi)^2} + 2 \frac{|x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta|}{\Delta \xi \Delta \eta}}} \right\}_{\text{all cells}} \quad (24)$$

3 境界条件の導出

3.1 剛壁境界条件

Fig. 4 に示すように、 $(i + \frac{1}{2}, j)$ 番目格子点の位置に剛境界面が存在する場合を考える。

まず、境界面上の反変速度 $U_{i+\frac{1}{2},j}$ は常に 0 とする。さらに、Eq. (10) からわかるように、剛境界面に隣接する点 $(i, j + \frac{1}{2})$ における反変速度 $V_{i,j+\frac{1}{2}}$ の算出には、Fig. 4 に示した計算領域外のダミー格子点 $(i+1, j)$ 、 $(i+1, j+1)$ を含む 6 点における圧力の値が必要となる。したがって Fig. 4 に示す $p_{i+1,j}$ 、 $p_{i+1,j+1}$ のような計算領域外での圧力定義点での値を、剛壁の境界条件式

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

から与える必要がある。直交直線座標系では上式は

$$p_{i+1,j} = p_{i,j} \quad (25)$$

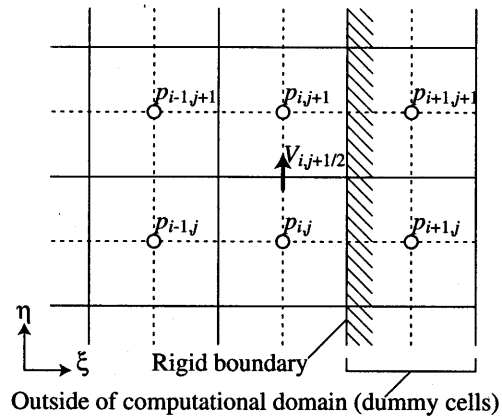


Fig. 4 Finite-difference stencil of Eq. (10) at the definition point of V adjacent to rigid boundary.

のように離散化されるが、本手法では $\xi = \text{一定}$ の軸と $\eta = \text{一定}$ の軸が物理座標系において直交するとは限らないため、例えば $p_{i+1,j}$ の値は $p_{i,j-1}$ 、 $p_{i,j}$ 、 $p_{i,j+1}$ 等の値を補間して与える必要がある。しかしながらこのような演算は煩雑となるため、境界面において両軸がほぼ直交する格子分割を前提として、Eq. (25) を適用することとする。

3.2 実数法線方向音響インピーダンス境界条件

実数法線方向音響インピーダンス境界条件は実用上不可欠な境界条件であり、本境界条件の導出が本手法最大の特徴となる。一般曲線座標系では解析領域外のダミー格子点における圧力の値を与える必要があることから、以下のように導出する。

Fig. 5 のように、 $(i + \frac{1}{2}, j)$ 番目格子点の位置に境界面が存在する場合を考える。 $U_{i+\frac{1}{2},j} \Delta \eta$ は境界面における流量であり、さらに

$$S = \sqrt{\left\{ (\tilde{x}_\eta)_{i+\frac{1}{2},j} \right\}^2 + \left\{ (\tilde{y}_\eta)_{i+\frac{1}{2},j} \right\}^2}$$

なる S に対し $S \Delta \eta$ が $(i + \frac{1}{2}, j)$ におけるセル界面の長さとなることから、境界面における粒子速度の法線方向成分は $U_{i+\frac{1}{2},j}/S$ と表される。したがって、境界面上における法線方向音響インピーダンス z は以下となる。

$$z = \frac{p_{i+\frac{1}{2},j}}{U_{i+\frac{1}{2},j}/S} \quad (26)$$

ここで時刻ステップ $n + \frac{1}{2}$ における境界面上の圧力と反変速度の関係を考えて、Eq. (26) に対し圧力および反変速度をそれぞれ空間および時間方向に線形補間して次のようになる。

$$\frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + U_{i+\frac{1}{2},j}^n}{2S} = \frac{p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2z} \quad (27)$$

さらに、Eq. (27) およびセル界面における運動方程式 Eq. (9) により求められた $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ は等しくなければならない²⁶⁾。よって両式を連立させて解けば、 $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ およびダミー格子点における圧力の値が求められる。Eq. (9) にダミー格子点 3 点における圧力の値 $p_{i+1,j-1}^{n+\frac{1}{2}}$ 、 $p_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}$ 、 $p_{i+1,j+1}^{n+\frac{1}{2}}$ が含まれているため、本連立方程式は一般的には境界面全体に対する三重対角の連立方程式となる。ただし剛壁の場合と同様に、境界面において物理座標系上の (ξ, η) 軸が概ね直交することを前提とすると、Fig. 3 より

$$[x_\xi, y_\xi] [x_\eta, y_\eta]^T \approx 0$$

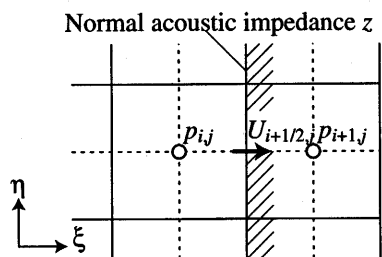


Fig. 5 Acoustic impedance boundary condition.

であるから、

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_\eta & -y_\xi \\ -x_\eta & x_\xi \end{bmatrix} \quad (28)$$

の関係より

$$\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \approx 0$$

となる。したがって、Eq. (9) の右辺第三項を無視することができ
注 1), $U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ および $p_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$ が陽に求められる。すなわち

$$p_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+z'A} \left\{ 2z'U_{i+\frac{1}{2},j}^n - (1-z'A)p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \quad (29)$$

$$U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \frac{1}{1+z'A} \left\{ (1-z'A)U_{i+\frac{1}{2},j}^n + 2Ap_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \quad (30)$$

ここで

$$A = \frac{\Delta t}{\rho \Delta \xi} \left\{ (j\hat{\xi}_x)_{i+\frac{1}{2},j} (\hat{\xi}_x)_{i+\frac{1}{2},j} + (j\hat{\xi}_y)_{i+\frac{1}{2},j} (\hat{\xi}_y)_{i+\frac{1}{2},j} \right\}$$

$$z' = \frac{z}{S}$$

4 検証計算

4.1 解析概要

吸音境界を有する不整形の二次元音場を、階段近似を利用した直交直線系 FDTD 法および本手法によって解析し結果を比較する。階段近似・直交直線格子による解析 Eqs. (21)–(23) の離散化式を使用する。さらに Fig. 6 のような法線方向音響インピーダンス z を有する境界面の階段近似において、 x 軸に垂直な階段近似された境界面上の格子点における法線方向音響インピーダンス z_x は、当該点に最も近い実際の境界面における外向き単位法線方向ベクトル n の x 軸成分 n_x により以下で表される²⁾。

$$z_x = \frac{z}{n_x}$$

実数法線方向音響インピーダンス境界条件式については、直交直線系において最も一般的な下式²⁾を適用した。

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{z_x} \quad (31)$$

y 軸に垂直な境界面の扱いも以上と同様とする。

本手法による解析 $\Delta \xi$, $\Delta \eta$ とともに単位長さ ($\Delta \xi = \Delta \eta = 1$) として本手法を実装した。音響インピーダンス境界面は Eqs. (29), (30) を適用した。

解析対象および条件 Fig. 7 に示す円弧状の音場を解析対象とする。原点からの距離 15 m の円弧面および $y = 0$ の面を吸音面とし、それぞれ吸音率 $\alpha = 0.5, 0.97$ に対応する実数法線方向音響イ

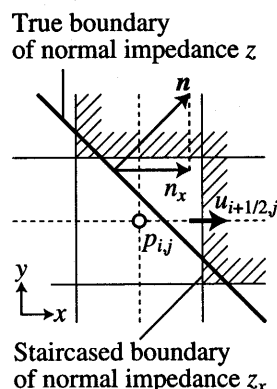


Fig. 6 Treatment of staircased boundary.

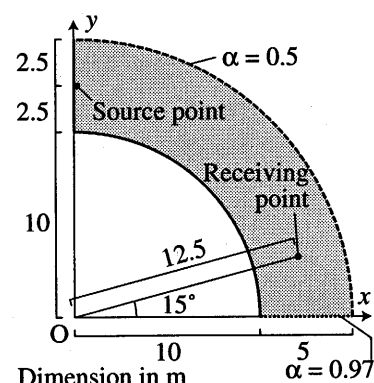


Fig. 7 Computational field.

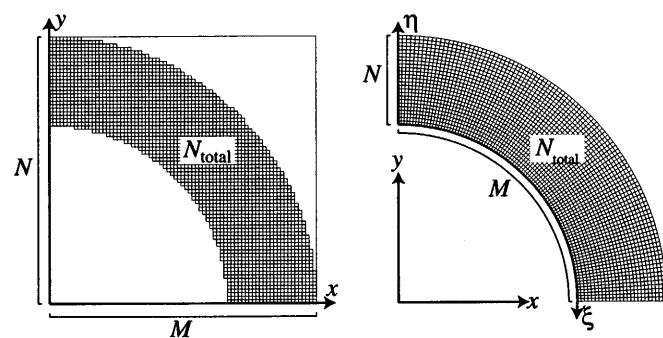


Fig. 8 Schematic of computational grids.

ンピーダンスを与える。音源は図中に示した音源中心点からの距離 r [m] に応じ、以下の初期音圧分布を与えた。

$$p(r) = \frac{1 + \cos \pi r}{2} \quad (0 \leq r \leq 1), \quad 0 \quad (1 < r) \quad [\text{Pa}]$$

各手法における格子分割は Fig. 8 のとおりである。解析条件は 4 ケースを設定し、Table 3 のように各ケースのケース名、解析手法 (格子系)、Fig. 8 図中に示した格子分割数 $M \times N$ および総格子数 N_{total} 、格子幅、 Δt 、Eq. (24) の安定条件から設定可能な Δt の最大値に対する設定値の比 (Courant 数) λ 、受音点を設定する。直交直線格子系については粗格子分割の Case OC、密格子分割の Case OF の 2 ケースとし、Case OF を精度比較のための参照ケースとする。一般曲線座標系も格子分割の疎密により Cases GC, GF の 2 ケースとし、それぞれ Cases OC, OF と N_{total} がほぼ同等となるようにした。さらに Cases OC, GC では両者の安定条件を満足する共通の Δt を設定した。Cases OC, GC の受音点は Fig. 7 に示す受音点に最も近い圧力定義点位置とし、Case OF の受音点は Cases OC, GC の受音点にそれぞれ最も近い圧力定義点である Table 3 表中 R_O , R_G の 2 点とした。Case GF の受音点は R_G に最も近い圧力定義点とした。

4.2 解析結果

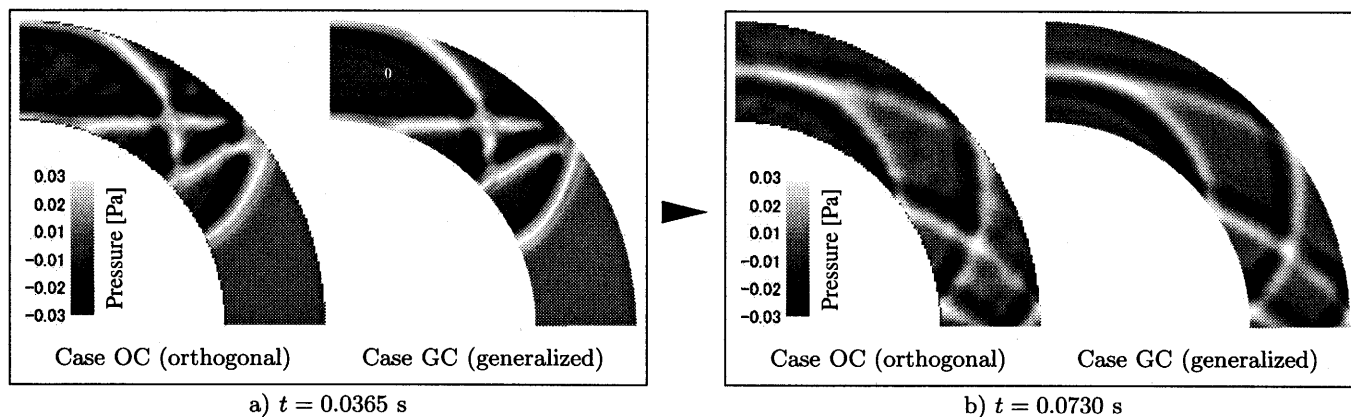
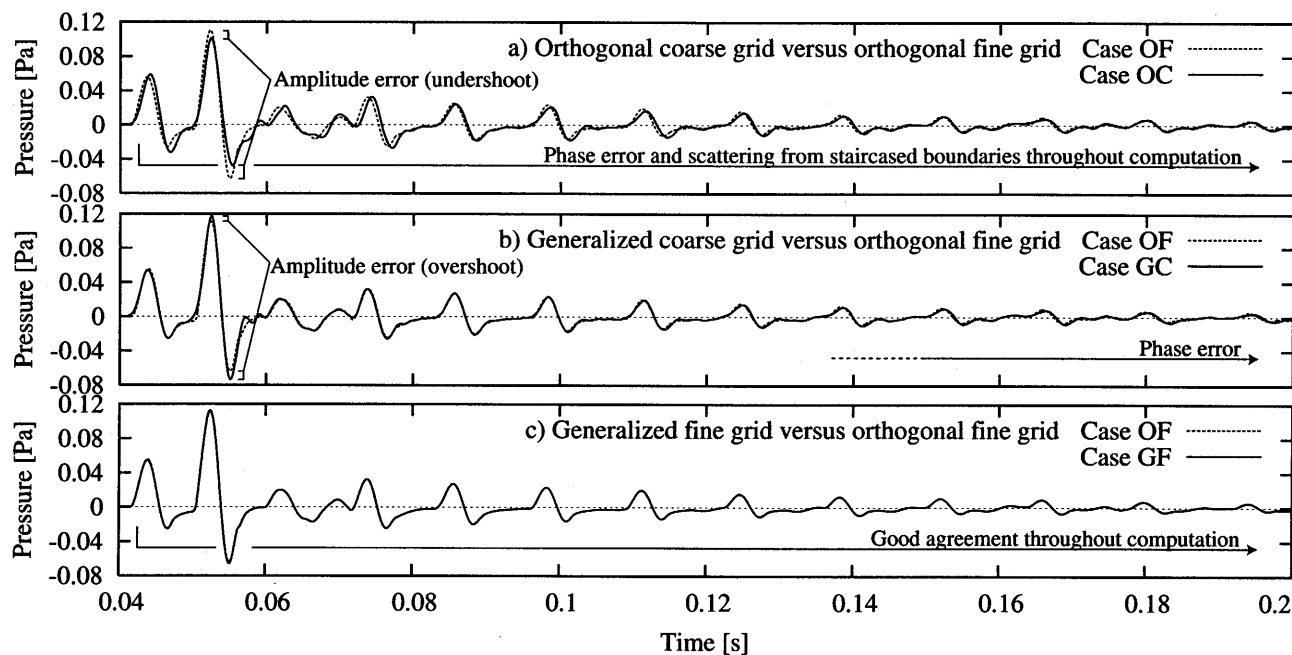
瞬時音圧分布 Fig. 9 に Cases OC, GC における瞬時音圧分布の時間推移を示す。直交直線系格子の Case OC では波面後方に階段近似面からの散乱が見られるのに対し、一般曲線座標系格子の Case GC では見られない。

音圧時間波形 Fig. 10 には受音点における伝搬音到来以降の音圧

Table 3 Computational conditions.

Cases*	Grid system	$M \times N$	N_{total}	Grid spacing [m]	Δt [s]	λ	Receiving point (x, y) [m]
OC	Orthogonal	150 × 150	9 815	0.1	1.83×10^{-4}	0.887	(12.05, 3.250)
OF	Orthogonal	1 200 × 1 200	628 317	0.0125	2.57×10^{-5}	1	R_O : (12.06, 3.256), R_G : (12.13, 3.231)
GC	Generalized	196 × 50	9 800	0.0805 – 0.120	1.83×10^{-4}	1	(12.13, 3.232)
GF	Generalized	1 568 × 400	627 200	0.0100 – 0.0150	2.28×10^{-5}	1	(12.13, 3.227)

*O, G, C and F each stands for orthogonal, generalized, coarse and fine.


Fig. 9 Instantaneous pressure distribution.

Fig. 10 Comparison of transient sound pressure at the receiving points.

時間波形を示す。a) に示す直交直線系の粗格子 (Case OC) と密格子 (Case OF の受信点 R_O) の比較では、Case OC では 0.05 s – 0.06 s の初期到来音の振幅が Case OF より小さく、また全域で位相遅れおよび階段近似面からの散乱による波形の乱れが観察される。

一方、b) は一般座標系の粗格子 (Case GC) と直交直線系の密格子 (Case OF の受信点 R_G) の比較を示す。Case GC での初期到来音振幅は Case OF より若干大きいとその誤差は a) の場合より小さく、また初期の位相遅れはほとんど見られず Cases GC, OF は非常に良く一致している。ただしおよそ 0.14 s 以降で次第に位相誤差が拡大し、0.2 s では Case OC とほぼ同様な誤差である。

さらに c) は一般曲線座標系および直交直線系の密格子どうし

(Case GF および Case OF の受信点 R_G) の比較を示す。充分な格子数の確保により両者の解が一致しており、本手法の基本的な妥当性が示される。

以上から本手法の基本的な妥当性が示され、さらに本手法は階段近似面からの散乱抑止および特に初期の位相誤差改善に有効と言える。

5 まとめ

反変速度-圧力交互時間進行による二次元の一般曲線座標系 FDTD 音場解析手法を定式化し、実数型およびバネマス系近似による音響インピーダンス境界条件の一般曲線座標系への拡張を行った。さら

に本手法および従来の直交直線座標系格子による手法の解析結果比較から、本手法の妥当性および有効性に関し有望な知見を得た。

計算効率の観点から、一般曲線座標系解法導入による格子当たりの解析負荷増大と階段近似誤差改善のための直交直線格子の細密化による負荷増大のいずれを得策とするかは、今後の検討を要する。しかしながら直交直線格子系における階段近似された吸音境界面の煩雑な取扱いを排除可能な点は、解析対象をモデリングする上での本手法の大きな利点である。

本手法に関するその他の検討課題としては、2.2 節で述べた保存系・非保存系による離散化式の構成手法比較のほか、より現実的な解析条件における本手法の有効性の実証、一般曲線座標系における各種の完全吸音境界条件^{27), 28)}の導出、差分スキームの高精度化、三次元への拡張などが挙げられる。

謝辞

新潟大学 2004 年度卒業研究生・伊藤克彦君の協力を感謝する。本研究の一部は科学研究費補助金 基盤 (A)(1)15206064 によった。

注

注 1) 一例として、Fig. 3 のように η = 一定の面が x 軸と平行であり、かつ格子点が x 軸、 y 軸両方向に等間隔すなわち

$$x_{\xi} \Delta \xi = y_{\eta} \Delta \eta$$

である平行四辺形格子において、等方な圧力勾配が存在する場合の Fig. 3 中の θ に対する Eq. (9) の右辺第二項および第三項の寄与の比を算出する。このとき格子系両項の寄与 G_2 、 G_3 はそれぞれの項に含まれる幾何学量で決まり

$$G_2 = \frac{J}{\Delta \xi} (\xi_x^2 + \xi_y^2), \quad G_3 = \frac{J}{\Delta \eta} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)$$

で表される。さらに Eq. (28) および

$$x_{\eta} = \frac{y_{\eta}}{\tan \theta}$$

の関係から、右辺第二項に対する第三項の寄与の比は以下となる。

$$\frac{G_3}{G_2} = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

3.1 節の剛壁境界条件においても同様である。仮に第三項を無視した取扱いが実用的に可能な限度を $|G_3/G_2| < 0.1$ とすれば、対応する θ の範囲は上式から $84.2^\circ < \theta < 95.8^\circ$ となるが、詳細は今後の検討課題である。

参考文献

- 1) Xiao, T. and Liu, Q. H.: Finite difference computation of head-related transfer function for human hearing, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 113, No. 5, pp. 2434-2441, 2003.5
- 2) 坂本慎一, 清宮拓磨, 横田考俊, 橋秀樹: 差分法によるホールのインパルス応答計算, 日本音響学会建築音響研究会資料 AA99-18, 1999.5
- 3) 佐久間哲哉: 室内音響設計におけるシミュレーション技術の活用, 日本音響学会誌, Vol. 57, No. 7, pp. 463-469, 2001
- 4) 日本建築学会 (編): 室内音場予測手法 - 理論と応用 -, 丸善, 東京, 2001
- 5) Yee, K. S.: Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. AP-14, No. 3, pp. 302-307, 1966.5
- 6) Cangellaris, A. C. and Wright, D. B.: Analysis of the numerical error caused by the stair-stepped approximation of a conducting boundary in FDTD simulations of electromagnetic phenomena, *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 39, No. 10, pp. 1518-1525, 1991.10
- 7) Schneider, J. B. and Shlager, K. L.: FDTD simulations of TEM horns and the implications for staircased representations, *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 45, No. 12, pp. 1830-1838, 1997.12

- 8) Jurgens, T. G., Taflove, A., Umashankar, K., and Moore, T. G.: Finite-difference time-domain modeling of curved surfaces, *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 40, No. 4, pp. 357-366, 1992.4
- 9) Holland, R.: Finite-difference solution of Maxwell's equations in generalized nonorthogonal coordinates, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, Vol. NS-30, No. 6, pp. 4589-4591, 1983.12
- 10) Fusco, M.: FDTD algorithm in curvilinear coordinates, *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 38, No. 1, pp. 76-88, 1990.1
- 11) Fusco, M. A., Smith, M. V., and Gordon, L. W.: A three-dimensional FDTD algorithm in curvilinear coordinates, *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 39, No. 10, pp. 1463-1471, 1991.10
- 12) Lee, J.-F., Palandech, R., and Mittra, R.: Modeling three-dimensional discontinuities in waveguides using nonorthogonal FDTD algorithm, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 40, No. 2, pp. 346-352, 1992.2
- 13) Lee, J.-F., Palandech, R., and Mittra, R.: Corrections to "modeling three-dimensional discontinuities in waveguides using nonorthogonal FDTD algorithm", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 40, No. 8, p. 1736, 1992.8
- 14) Harms, P. H., Lee, J.-F., and Mittra, R.: A study of the nonorthogonal FDTD method versus the conventional FDTD technique for computing resonant frequencies of cylindrical cavities, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 40, No. 4, pp. 741-746, 1992.4
- 15) Harms, P. H., Lee, J.-F., and Mittra, R.: Corrections to "a study of the nonorthogonal FDTD method versus the conventional FDTD technique for computing resonant frequencies of cylindrical cavities", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 40, No. 11, pp. 2115-2116, 1992.11
- 16) Ray, S. L.: Numerical dispersion and stability characteristics of time-domain methods on nonorthogonal meshes, *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 41, No. 2, pp. 233-235, 1993.2
- 17) 板倉啓介, 柏達也, 霧田英彦, 鏡慎, 田頭博昭: 任意格子 FD-TD 法を用いた音響管解析, 日本音響学会誌, Vol. 51, No. 8, pp. 606-612, 1995.8
- 18) 石田義洋, 村上周三, 大岡龍三, 持田灯, 工藤邦昭: 数値解析法の定式化と LES によるチャンネル流解析 一般曲線座標系・スタガードグリッドによる気流数値解析手法 その 1, 日本建築学会計画系論文集, No. 496, pp. 45-52, 1997.6
- 19) Bernard, R. S. and Kapitza, H.: How to discretize the pressure gradient for curvilinear MAC grids, *J. Comput. Phys.*, Vol. 99, pp. 288-298, 1992
- 20) van Beek, P., van Nooyen, R. R. P., and Wesseling, P.: Accurate discretization of gradients on non-uniform curvilinear staggered grids, *J. Comput. Phys.*, Vol. 117, pp. 364-367, 1995
- 21) 石田義洋, 村上周三, 大岡龍三, 持田灯: 立方体周辺気流の LES 解析における数値振動抑制手法の研究 一般曲線座標系・スタガードグリッドによる気流数値解析手法 その 2, 日本建築学会計画系論文集, No. 521, pp. 63-71, 1999.7
- 22) 荒川忠一: 数値流体工学, 東京大学出版会, 東京, 1994
- 23) 小垣哲也, 小林敏雄, 谷口伸行: 非圧縮性乱流数値解析に適した一般座標系差分スキーム (第 1 報, 座標変換後の基礎方程式の解析的保存特性と適切な差分スキームの一般座標系への拡張), 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 65, No. 633, pp. 1559-1567, 1999.5
- 24) 梶島岳夫: 乱流の数値シミュレーション, 養賢堂, 東京, 1999
- 25) 坂本慎一, 荒井毅志, 矢野博夫, 橋秀樹: 差分法による 2 次元閉空間音場のインパルス応答の計算とその可聴化, 日本音響学会建築音響研究会資料 AA96-32, 1996.9
- 26) Tam, C. K. W. and Auriault, L.: Time-Domain impedance boundary conditions for computational aeroacoustics, *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 5, pp. 917-923, 1996.5
- 27) 内藤洋一, 横田孝俊, 坂本慎一, 橋秀樹: 差分法による開領域計算のための完全吸音境界の検討, 日本音響学会研究発表会講演論文集 (秋季), Vol. II, pp. 751-752, 2000.9
- 28) Liu, Q.-H. and Tao, J.: The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 102, No. 4, pp. 2072-2082, 1997.10

(2005年4月28日原稿受理, 2005年9月26日採用決定)