日本機械学会論文集(C編)
53巻491号(昭62-7)

論文 No. 86-1137 A

油圧駆動系の摩擦による振動*
(第1報，最大静止摩擦力が孤立点とならない場合)

高野英資*1，原　利昭*1，佐伯暢人*2

Oscillations Gaused by Solid Friction in a Hydraulic Driving System
(1st Report, In the Case of Maximum Static Friction Equal to Kinetic Friction without Slipping)

Eisuke TAKANO, Toshiaki HARA, and Masato SAEKI

Oscillations caused by solid friction in hydraulic driving systems are treated theoretically. The system consists of a table lying on a rectilinear sliding surface, an actuater cylinder, a 4-way servo valve, a relief valve, an oil pump and so on. The solid friction force considered is assumed to vary with the relative sliding velocities between the table and sliding surface, namely the friction-velocity characteristic is given by a polygon having two straight line segments and the critical value of static friction is equal to the value of kinetic friction without slipping. The stick-slip motions of the table are analysed considering the 4-way valve pressure-flow characteristic, friction-velocity relation, oil compressibility and the sizes of the hydraulic driving elements. Several types of limit cycles and the regions in which they occur are shown in figures according to the parameters meotioned above. Lastly, the steady-state displacement waves of the table are described and the curves of amplitudes and their periods are given.

Key Words: Frictional Vibration, Nonlinear Vibration, Solid Friction, Hydraulic Driving System, Self-excited Oscillation, Limit Cycle, 4-Way Valve, Sliding Surface, Piecewise Linear System

1. 緒　　言

直動形しゅう動面を有する油圧駆動系に発生するスティックスリップについては理論的にも実験的にもかなりの検討が行われているが，まだ十分とは言えないようである．松崎ら[1][2]は直動形油圧駆動テーブルのスティックスリップについて四方弁の特性，可動部分の摩擦特性，作動油の圧縮率および油圧回路の各部寸法をもとに理論解析し，モデルテーブルを用いてえられる実験結果との比較をおこない，またスティックスリップの発生限界に関し理論的に各種パラメータの影響を検討している．また中川ら[3]は同様な振動について扱い，実験からえられる摩擦の時間依存性を考慮した動作の定量的取扱いが解析結果と実験結果の良好な一致をしめすことを指摘している．著者の一人は機械駆動系において発生する摩擦振動についてかなり詳細な検討結果を報告しているが[4][5]本報では油圧駆動系において可動部分の摩擦特性を2本の折れ線で近似した場合に，機械駆動系の場合と同様な取扱いがリミットサイクルの発生やその諸特性にどのような影響を与えるかについて検討したので，それらの結果について報告する．ここでは可動部分の摩擦特性が相対速度の小さいところで負の傾斜をもち，相対速度の大きいところで正または零の傾斜をもつ直線で与えられる場合で，最大静止摩擦力が孤立点とならない場合を扱う．

2. 油圧駆動系の基礎式と位相面上の解曲線

図1は四方弁を使用した直動形油圧駆動系の回路図を略記したものであり，松崎らが行ったように，可動部分の質量を $m=m_e+m_T$(m_T：テーブルの質量，m_e：配管中の油の等価質量)，テーブル速度を v，配管中の粘性抵抗をふくむ可動部分の摩擦特性を $f_N(v)$，ピストンの有効断面積を A_p，四方弁出口の圧力差ならびに流量を p_m，q_m，シリンダおよび配管の容量変化ならびに作動油の圧縮性によって定まる係数を c とする．可動部分の運動方程式ならびに圧縮性を考慮した作動油の連続の式はつぎの式(1)，(2)のように与えられる．式中の t は時間を示す．またスプール変位を x とすると四方弁の特性から式(3)が成り立つ．

$$mdv/dt+f_N(v)=A_pp_m \quad \cdots\cdots(1)$$

$$q_m=A_pv+cdp_m/dt \quad \cdots\cdots(2)$$

$$q_m=q_m(x, p_m) \quad \cdots\cdots(3)$$

式(3)は x，p_m の値が小さい範囲では

* 昭和62年3月14日　東北支部第22期総会講演会において講演，原稿受付　昭和61年9月24日．

*1 正員，新潟大学工学部(〒950-21 新潟市五十嵐2の町8050)．
*2 准員，新潟大学大学院．

$$q_m = k_x x - k_p p_m \quad \cdots\cdots (4)$$

のように書ける．ここで $k_x = \partial q_m / \partial x$, $k_p = -\partial q_m / \partial q_m$ でそれぞれ無負荷流量特性，圧力流量特性から定まる定数で供給圧力 p_s をかえた場合に大きくかわる．テーブルがしゅう動面上に停止する場合には $v=0$ となるから

$$dp_m/dt = q_m(x, p_m)/c \quad \cdots\cdots (5)$$

から出力圧力差の時間的変化を求めることができる．

式(2)と式(3)を等置し式(1)をもちいると

$$\frac{dp_m}{dv} = \frac{m}{c} \cdot \frac{-A_p v + q_m(x, p_m)}{A_p p_m - f_N(v)} \quad \cdots\cdots (6)$$

がえられ，$V = \sqrt{m/c}\, v$ とおくと，これは拡張されたリーナードの図的方法を用いて V-p_m 位相面上に解曲線をもとめることができることを示している．図2は v-p_m 平面にえがかれた解曲線の一例であり，式(6)の分子，分母を零とおいた次式，すなわち

$$v = q_m(x, p_m)/A_p \quad \cdots\cdots (7)$$

$$p_m = f_N(v)/A_p \quad \cdots\cdots (8)$$

を示す図2中の両曲線の交点は位相面上の特異点 (v_s, p_{ms}) を与える．また解曲線が両曲線を横切る点で解曲線にひいた接線はそれぞれ v, p_m 両軸に平行となる．

3. 運動摩擦力速度特性曲線とテーブルの運動

つぎに図1のテーブルの運動を解析的に求めるために系の線形化を行うことを考える．四方弁の特性式については式(4)が適用できるものとし，可動部分の摩擦力特性については図3のように2本の折れ線(実線)で近似するものとする．このとき $f_N(v)$ $(i=1, 2)$ は

$$f_N(v) = \begin{cases} b_i v + F_{di} & (V_i < V < V_{i+1}) \\ -F_s \sim F_s & (v=0) \\ b_i v - F_{di} & (-V_{i+1} < v < -V_i) \end{cases} \quad \cdots\cdots (9)$$

で表され，最大静止摩擦力を F_s, i 番め折れ線の傾斜を b_i, その延長線が横軸と交わる点の高さを F_{di}, 特性折れ線の i 番め折れ点に対応する速度を V_i とすると $F_{d2} = F_{d1} - (b_2 - b_1) V_2$, $F_{d1} = F_d = F_s$, $V_1 = 0$ なる関係がある．線形化の結果前述の式(7)は v-p_m 平面において図4のように点 $(0, k_x x_0/k_p)$ を通る直線，すなわち

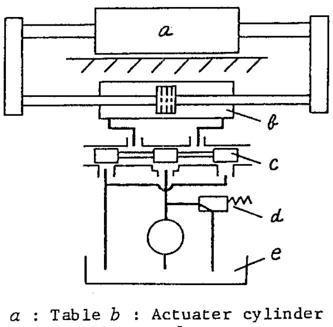
$$p_m = (k_x/k_p)x - (A_p/k_p)v \quad \cdots\cdots (10)$$

に，また式(8)は座標原点に関し対称な折れ線III-II-I-IV-V-VIに変換される．したがってスプール変位 x が小さい値 $x_0(>0)$ のときは特異点は折れ線 I-II 上で生じ，大きい値 x_0 のときは折れ線II-III上で生ずることになる．このときの特異点速度 v_s と x_0 の関係はそれぞれの折れ線のもつ特性値を用いて表せば式(11)，(12)のようになる．

$$v_s = (k_x x_0 A_p - k_p F_s)/(A_p^2 + b_1 k_p) \quad \cdots\cdots (11)$$

$$v_s = (k_x x_0 A_p - k_p F_{d2})/(A_p^2 + b_2 k_p) \quad \cdots\cdots (12)$$

つぎにテーブルのすべり運動を v-p_m 位相面上の解



a : Table b : Actuater cylinder
c : Servo valve d: Relief valve
e : Oil tank

図 1

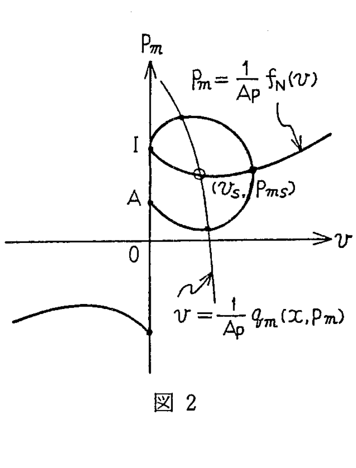


図 2

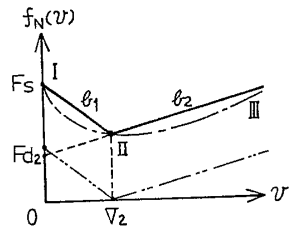


図 3

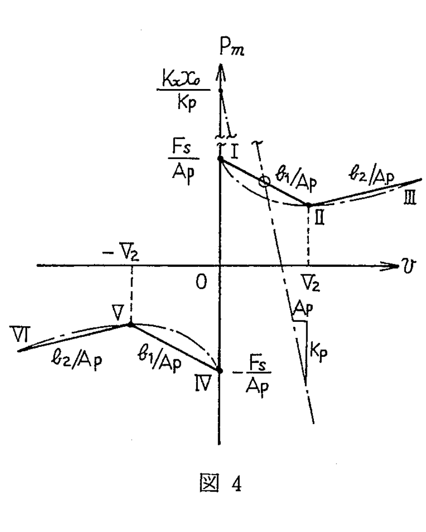


図 4

曲線として求めるために，テーブル速度 v と出力圧力差 p_m の時間的変化を規定する微分方程式を求めてみよう．式(2)と式(4)を等置した式と，式(9)を式(1)に代入してえられる式の両式から p_m または v を消去し，v のみの式と p_m のみの微分方程式をもとめると次式(13)がえられる．

$$\left.\begin{aligned} &cmd^2v/dt^2+(b_ic+k_pm)dv/dt\\ &\quad+(A_p^2+b_ik_p)v=(A_p^2+b_ik_p)v_{sc}\\ &cmd^2p_m/dt^2+(b_ic+k_pm)dp_m/dt\\ &\quad+(A_p^2+b_ik_p)p_m=(A_p^2+b_ik_p)p_{msc}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(13)$$

これは特異点が j 番めの折れ線上にある場合，すなわち $V_j\leqq v_s\leqq V_{j+1}(j=1,2)$ の場合にテーブルの運動を示す v-p_m 位相面上の代表点が $V_i\leqq v\leqq V_{i+1}$ または $-V_{i+1}\leqq v\leqq -V_i$ なる速度領域 $(i=1,2)$ を i 番め特性折れ線に支配されて運動する場合の v, p_m に関する微分方程式を示しており，テーブルの運動は各折れ線の支配する速度限界において解のつなぎ合せの方法を用いることにより順次もとめることができる．式中の v_{sc}, p_{msc} は v-p_m 平面においてテーブルが運動している速度領域内の特性折れ線またはその延長線が式(10)の直線と交わる点の v, p_m 両座標の値を示し，テーブル速度の正負によって式(14)，(15)のように与えられる．

$$\left.\begin{aligned} &v_{sc}=v_s+A_pk_p(p_{msj}-p_{msi})/(A_p^2+b_ik_p)\\ &p_{msc}=p_{msj}-A_p^2(p_{msj}-p_{msi})/(A_p^2+b_ik_p)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$(V_i\leqq v\leqq V_{i+1})$$

$$\left.\begin{aligned} &v_{sc}=v_s+A_pk_p(p_{msj}-p_{msi})/(A_p^2+b_ik_p)\\ &\quad+2k_pF_{di}/(A_p^2+b_ik_p)\\ &p_{msc}=p_{msj}-A_p^2(p_{msj}-p_{msi})/(A_p^2+b_ik_p)\\ &\quad-2F_{di}A_p/(A_p^2+b_ik_p)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$(-V_{i+1}\leqq v\leqq -V_i)$$

ここで $p_{msi}=F_{di}/A_p+(b_i/A_p)v_s$, $p_{msj}=F_{dj}/A_p+(b_j/A_p)v_s(\equiv p_{ms})$ であり，以上の諸式における i, j の値は特異点速度の大きさと特性折れ線の支配する速度領域によって表1のような値をとる．テーブルの変位 y は v に関する微分方程式の解を時間 t について積分すれば得られる．またテーブルが停止している場合の p_m の変化は式(5)から得られる次式から求められる．

$$dp_m/dt+(k_p/c)p_m=k_xx/c\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

4. リミットサイクルの種類と形状

さて，テーブルの運動を表す式(13)は v-p_m 平面においてどのような解曲線を与えるのであろうか．実験において観測される定常運動の中には図2から推察されるように，特異点速度 v_s の大きさよってすべり $(v\neq 0)$ と停止 $(v=0)$ の両運動を交互に繰返すものがあり，このほかにすべり運動のみからなる周期運動の発生が考えられる．これらは v-p_m 平面で閉じた解曲線を示し，リミットサイクルと呼ばれている．表2は後述する ε_i が $|\varepsilon_i|<1(i=1,2)$ の範囲で $b_1<0$, $b_2\geqq 0$ となる場合について v-p_m 平面においてえられるリミットサイクルを，主として I 点を出発する安定なリミットサイクルについて分類し，その種類と形状に名前を付して示したものである．前述の機械駆動系の場合と同様，特性折れ線上の特異点位置 (v_s, p_{ms}) のほかにリミットサイクルの軌道のもつ最小速度 $v_{\min}$ や最大速度 $v_{\max}$ と折れ線I，IIに対応する速度 $V_1(=0)$, V_2 との大小関係を考慮して定常振動解の分類を行っている．図5はこれら位相面上のリミットサイクルの一例を図示したもので，太い実線は安定なリミットサイクル，点線は不安定なリミットサイクルを示す．また図5中の⊗印は v-p_m 位相面上の特異点を表す．図5によれば特異点が v-p_m 平面において負の傾斜を有するI-II特性折れ線上に存在し，かつ(i)形となる場合

表 1

Position of the singular point / Velocity range of motion	On segment I-II ($V_1=0<v_s<V_2$) i	j	On segment II-III ($V_2<v_s$) i	j
I - II	1	1	1	2
II - III	2		2	
IV - V	1		1	
V - VI	2		2	

表 2

Existence of limit cycle / Position of the singular point			On segment I-II $v_s<V_2$: $v_{max}\leqq V_2$	On segment I-II $v_s<V_2$: $v_{max}>V_2$	On segment II-III $v_s>V_2$
Existent	Segment I-IV is a portion of the trajectory of closed limit cycle	$v_{min}=0$	Type(i)-(α)	Type(ii)-(α)	Type(iii)-(α)
		$v_{min}<0$	Type(i)-(β)	Type(ii)-(β)	Type(iii)-(β)
	Segment I-IV is inside or outside the trajectory of limit cycle	$v_{min}<0$	Type(i)-(γ)	Type(ii)-(γ)	Type(iii)-(γ)
		$v_{min}>0$	Type(i)-(δ)	Type(ii)-(δ)	――
Nonexistent			Type(i)-(ε)	Type(ii)-(ε)	Type(iii)-(ε)

でも，（i）-(ε)形のように特異点が安定な焦点となって運動が減衰していく場合や（i）-(α')形や（i）-(δ)形のように特異点が渦心点V.P.となってI点またはII点を通る外側に安定な半安定リミットサイクルが生ずることがあるなど，機械駆動系の場合とは異なる特性をしめす場合があることは注目に値しよう．

5. リミットサイクルを表す曲線

つぎにこれらのリミットサイクルを表す解曲線式を式(13)，(16)の両式からもとめてみよう．ここでは簡単にするため次式のようにおく．

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_i=-(b_ic+k_pm)/2cm,\quad \varepsilon_i=\alpha_i/\omega_{ni}\\&\omega_{ni}=\sqrt{(A_p^2+b_ik_p)/cm},\quad \omega_i^2=\omega_{ni}^2-\alpha_i^2\end{aligned}\right\}\quad\cdots(17)$$

前述したように $|\varepsilon_i|<1$ でかつ $b_1<0$, $b_2\geqq 0$ の場合を対象としているので，特異点が j 番め折れ線上にあるとき，$t=0$ において i 番め折れ線が支配する速度領域の境界上（$v=\pm V_i$ または $\pm V_{i+1}$, $v\gtrless 0$）の任意の一点（v_0, p_{m0}）から出発した代表点が i 番め特性折れ線の支配する速度領域内を運動する場合，v, p_m, y に関する解曲線式は次式のように与えられる．式中の y_0 は $t=0$ のときの y の値である．

$$\left.\begin{aligned}&v=v_{sc}+e^{\alpha_it}(c_{1i}\cos\omega_it+c_{2i}\sin\omega_it)\\&p_m=p_{msc}+e^{\alpha_it}(c_{3i}\cos\omega_it+c_{4i}\sin\omega_it)\\&y=y_0+v_{sc}t+e^{\alpha_it}\{c_{1i}(\alpha_i\cos\omega_it+\omega_i\sin\omega_it)\\&\quad+c_{2i}(\alpha_i\sin\omega_it-\omega_i\cos\omega_it)\}/(\alpha_i^2+\omega_i^2)\\&\quad-(c_{1i}\alpha_i-c_{2i}\omega_i)/(\alpha_i^2+\omega_i^2)\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}&c_{1i}=v_0-v_{sc}\\&c_{2i}=\{A_pc_{3i}-(m\alpha_i+b_i)c_{1i}\}/m\omega_i\\&c_{3i}=p_{m0}-p_{msc}\\&c_{4i}=\{(m\alpha_i+b_i)c_{2i}-m\omega_ic_{1i}\}/A_p\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(19)$$

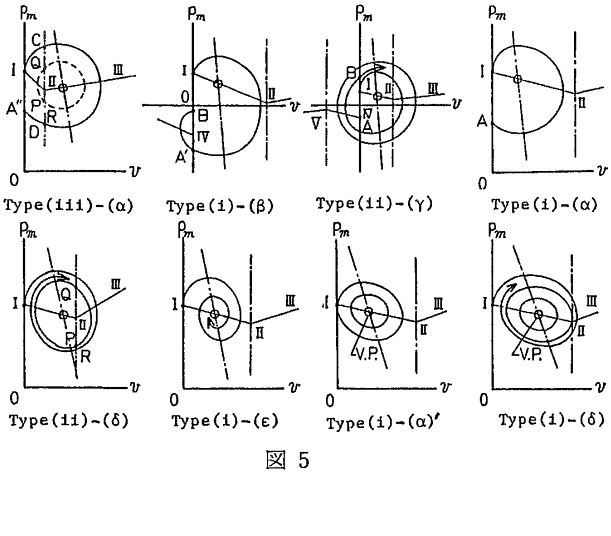


図 5

したがって i 番め折れ線領域から $t=t_{cH}$ において隣接する速度領域に運動が入りこむ場合には，これらの速度境界における v, p_m, y の値（それぞれ V_{cH}, p_{mcH}, y_{cH} とする）が隣接する領域内の運動を求める場合の $t=0$ における新たな v_0, p_{m0}, y_0 の値となる．t_{cH} は次の式(20)の超越方程式の解として求められ，これを式(18)の第2，3式の t に代入すれば p_{mcH}, y_{cH} が得られる．

$$v_{sc}+e^{\alpha_it_{cH}}(c_{1i}\cos\omega_it_{cH}+c_{2i}\sin\omega_it_{cH})=V_{cH}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

表3は4章で述べた各種リミットサイクルのうち，I点をとおる(α)形と(β)形について解曲線式をもとめる場合の各適用速度範囲における式(18)，(19)中の初期値 v_0, p_{m0}, y_0 ならびに隣接する速度境界 V_{cH} までの到達時間 t_{cH} および到達点での p_{mcH}, y_{cH} をまとめて示したものである．表3の t_{cH} 欄中下線を付した（i）形の $\underline{t_A}$，(iii)形の $\underline{t_D}$ については ω_it_{cH} が π と 2π との間で，また下線を付していないそれ以外のものについては ω_it_{cH} が零から π までの間で式(20)を満足する根 t_{cH} が決定される．I点を出発した解曲線が再び $v=0$ となってテーブルがしゅう動面上に停止する場合には，p_m の時間的変化は式(16)から次のようにえられる．$v=0$ のとき改めて $t=0$ とおき p_m, y の値を p_{m0}, y_0 とすると

$$\left.\begin{aligned}&v=0,\quad y=y_0\\&p_m=\{k_xx-(k_xx_0-p_{m0}k_p)\exp(-k_pt/c)\}/k_p\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

となり，p_m が増大して F_s/A_p に達すると v-p_m 位相面上で解曲線は閉じ，リミットサイクルを形成する．式(21)中の y_0 はすべり運動から停止に移行する y の値，すなわち y_A, y_A', y_A'', y_B を示すことはいうまでもない．

次にすべり運動のみから成る（ii）-(δ)形の安定なリミットサイクルや(iii)-(α)形において発生する不

表 3

$V_1=0$

Type	Range applied	i	j	Initial values			Values at the boundary of velocity range			
				v_0	p_{m0}	y_0	t_{cH}	V_{cH}	p_{mcH}	y_{cH}
(i)	I ∿ A	1	1	V_1	F_s/A_p	0	$\underline{t_A}$	V_1	p_{mA}	y_A
	A ∿ B	1	1	V_1	p_{mA}	y_A	t_B	V_1	p_{mB}	y_B
(ii)	I ∿ C	1	1	V_1	F_s/A_p	0	t_C	V_2	p_{mC}	y_C
	C ∿ D	2	1	V_2	p_{mC}	y_C	t_D	V_2	p_{mD}	y_D
	D ∿ A'	1	1	V_2	p_{mD}	y_D	$t_{A'}$	V_1	$p_{mA'}$	$y_{A'}$
	A'∿ B	1	1	V_1	$p_{mA'}$	$y_{A'}$	t_B	V_1	p_{mB}	y_B
(iii)	I ∿ C	1	2	V_1	F_s/A_p	0	t_C	V_2	p_{mC}	y_C
	C ∿ D	2	2	V_2	p_{mC}	y_C	$\underline{t_D}$	V_2	p_{mD}	y_D
	D ∿ A''	1	2	V_2	p_{mD}	y_D	$t_{A''}$	V_1	$p_{mA''}$	$y_{A''}$
	A''∿ B	1	2	V_1	$p_{mA''}$	$y_{A''}$	t_B	V_1	p_{mB}	y_B

安定なリミットサイクルの解曲線式はどのようにして求めたらよいのであろうか．図5の(ii)-(δ)形を例にとって説明しよう．$t=0$において速度境界$v=V_2$上の任意の一点Qから出発した解曲線が時間の経過に対して$t=t_Q(>0)$において再び$v=V_2$に達する点をRとし，このときのp_mの値をp_{mR}とする．一方同じQ点から出発する解曲線が，時間を負方向にさかのぼるとき$t=-t_p(t_p>0)$において再び$v=V_2$に達する点をPとし，このときのp_mの値をp_{mP}とすると，$p_{mP}=p_{mR}$なる条件を満足するQ点をとおる閉曲線が求めるリミットサイクルを与える．したがって任意のQ点におけるp_mの値p_{mQ}を横軸にとり，種々のp_{mQ}の値を与えて式(18)，(19)から計算されるp_{mP}, p_{mR}を縦軸にとってえがいたp_{mP}, p_{mR}両曲線の交点の横座標から所要のp_{mQ}の値を定めることができる．この計算にあたりt_p, t_Qは初期値v_0, p_{m0}にV_2, p_{mQ}を代入した式(18)の第1式において左辺を$v=V_2$とおいた超越方程式から求めることができるが，式(18)中のi, jの値については表1に従うことはいうまでもない．さらに(ii)-(δ)形では$\pi\leqq\omega_1 t_p\leqq 2\pi$であり，(iii)-(α)形の不安定なリミットサイクルの場合$\pi\leqq\omega_2 t_Q\leqq 2\pi$である．

以上各種リミットサイクルのうち，すべりと停止を繰返す(α)形や(β)形ならびにすべり運動のみから成る(δ)形などについてリミットサイクルの軌道を表す式を与えてきたが，前述した諸式は軌道を規定する因子として数多くの変数をふくんでいた．すなわち圧力シリンダや四方弁をふくむ圧力駆動回路のもつ特性値や摩擦特性を示す因子として，A_p, m, c, k_P, k_x, x_0, b_1, b_2, V_2, $F_s(=F_d)$をふくんでいる．したがってこれら10個の因子がリミットサイクルの発生にどのようなかかわりを有するかにはあまりにも因子の個数が多すぎるので，次式のような変数の整理を行うことを考えよう（本報では$\varphi_s=\varphi_d$である）．

$$\left.\begin{aligned}&k=\sqrt{m/c}\,k_P/A_p,\quad B_1=(b_1/A_p)/\sqrt{m/c}\\&B_2=(b_2/A_p)/\sqrt{m/c},\quad \varphi_s=(F_s/A_p)/\sqrt{m/c}\,V_2\\&\varphi_d=(F_d/A_p)/\sqrt{m/c}\,V_2,\quad K=\sqrt{m/c}\,V_2/\\&\quad(k_x x_0/k_P-F_d/A_p)\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$\tau=\omega_{n1}t$とおき式(22)を用いると，前述の式(18)，(21)のv, p_m, yは無次元化されて，それぞれ式(23)，(26)のように書き表される．$u=v/V_2$, $\rho_m=p_m/\sqrt{m/c}\,V_2$, $\eta=A_p y/\sqrt{mc}\,V_2$とおくと

$$\left.\begin{aligned}&u=u_{sc}+\exp(\varepsilon_i N_i\tau/N_1)\{C_{1i}\cos(\sqrt{1-\varepsilon_i^2}\\&\quad\times N_i\tau/N_1)+C_{2i}\sin(\sqrt{1-\varepsilon_i^2}N_i\tau/N_1)\}\\&\rho_m=\rho_{msc}+\exp(\varepsilon_i N_i\tau/N_1)\{C_{3i}\cos(\sqrt{1-\varepsilon_i^2}\\&\quad\times N_i\tau/N_1)+C_{4i}\sin(\sqrt{1-\varepsilon_i^2}N_i\tau/N_1)\}\\&\eta=\eta_0+u_{sc}\tau/N_1+\exp(\varepsilon_i N_i\tau/N_1)\\&\quad\times\{\varepsilon_i\cos(\sqrt{1-\varepsilon_i^2}N_i\tau/N_1)+\sqrt{1-\varepsilon_i^2}\sin\\&\quad\times(\sqrt{1-\varepsilon_i^2}N_i\tau/N_1)\}(C_{1i}/N_i)+\exp(\varepsilon_i N_i\tau/\\&\quad N_1)\{\varepsilon_i\sin(\sqrt{1-\varepsilon_i^2}N_i\tau/N_1)-\sqrt{1-\varepsilon_i^2}\\&\quad\times\cos(\sqrt{1-\varepsilon_i^2}N_i\tau/N_1)\}(C_{2i}/N_i)-C_{1i}\varepsilon_i/\\&\quad N_i+C_{2i}\sqrt{1-\varepsilon_i^2}/N_i\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_i=-(B_i+k)/2N_i,\quad N_i=\sqrt{1+B_ik},\\&C_{1i}=(v_0-v_{sc})/V_2,\quad C_{3i}=(p_{m0}-p_{msc})/\\&\sqrt{m/c}\,V_2,\\&C_{2i}=\{C_{3i}/N_i-(\varepsilon_i+B_i/N_i)C_{1i}\},/\sqrt{1-\varepsilon_i^2}\\&C_{4i}=(N_i\varepsilon_i+B_i)C_{2i}-N_i\sqrt{(1-\varepsilon_i^2}\,C_{1i}\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$\left.\begin{aligned}&u_s=v_s/V_2=(1+B_jk),\quad \rho_{ms}=p_{ms}/\\&\sqrt{m/c}\,V_2=\varphi_{dj}+B_ju_s\\&u_{sc}=u_s+k\{\varphi_{dj}-\varphi_{di}+(B_j-B_i)u_s\}/(1+B_ik)\\&\rho_{msc}=\rho_{ms}-\{\varphi_{dj}-\varphi_{di}+(B_j-B_i)u_s\}/(1+B_ik)\\&\quad(V_i/V_2\leqq u\leqq V_{i+1}/V_2)\\&u_{sc}=\text{同上}+2k\varphi_{di}/(1+B_ik)\\&\rho_{msc}=\text{同上}-2\varphi_{di}/(1+B_ik)\\&\quad(-V_{i+1}/V_2\leqq u\leqq -V_i/V_2)\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

式(25)中のφ_{dj}, φ_{di}はそれぞれ$\varphi_{dj}=(F_{dj}/A_p)/\sqrt{m/c}\,V_2$, $\varphi_{di}=(F_{di}/A_p)/\sqrt{m/c}\,V_2$を表しており，$\varphi_{d2}=\varphi_{d1}-(B_2-B_1)$, $\varphi_{d1}=\varphi_d=\varphi_s$なる関係がある．また停止時の時間的変化などは次式で与えられる．

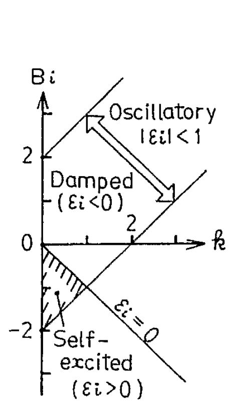


図 6

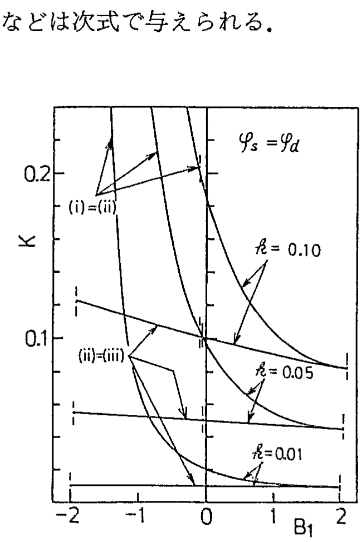


図 7

$$\left.\begin{array}{l} u=0,\quad \eta=\eta_0 \\ \rho_m=(1/K+\varphi_d)-(1/K+\varphi_d-\rho_{m0}) \\ \quad\times\exp(-k\tau/N_1) \end{array}\right\} \quad\cdots\cdots(26)$$

ここで $\eta_0=A_p y_0/\sqrt{mc}\,V_2$, $\rho_{m0}=p_{m0}/\sqrt{m/c}\,V_2$ である．

6. リミットサイクルの成立範囲

つぎに以上述べた各種リミットサイクルがいかなる条件のもとで発生するかを考察しよう．初めに $\omega_i^2=\omega_{ni}^2-\alpha_i^2>0$ となる範囲，すなわち $|\varepsilon_i|<1(i=1,2)$ となる範囲を B_i-k 平面に図示してみよう．図6は $B_i=k\pm2$ の両直線にはさまれた矢印⟺の領域がその領域となることを示しており，この領域内の B_i, k の値を有する場合には，v, p_m ともに時間の経過に対してその変化が振動的になる領域である．さらに $\varepsilon_i=0$，すなわち $B_i=-k$ を境界として上側が減衰的，下側の斜線部が発散的になる領域である．本報では $|\varepsilon_i|<1$ かつ $B_1<0$, $B_2\geqq0$ の場合を対象としており，$i=1$ とおいた図6から B_1 の値が負であっても運動が減衰的になる場合がありうること，さらに $i=2$ とおいた図6から $B_2\geqq0$ の場合には第2の特性折れ線に支配される速度領域の運動はすべて減衰的であることがわかる．

さて，前述したようにスプール変位 x_0 が小さな値から順に大きくなると，v-p_m 位相面上に定まる特異点 (v_s, p_{ms}) はやがて第1の特性折れ線上から第2の特性折れ線上に移行し，一方I点を出発したリミットサイクルの軌道が有する最大速度 $v_{\max}$ も折れ点IIに対応する速度 V_2 をこえてしまう．表2で示したリミットサイクルのうち(i)形，(ii)形，(iii)形が発生するスプール変位 x_0 の範囲，したがって K の値の範囲は前述した式(22)の変数を用いて表すと次式のように与えられる．

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i)形}：k\{1+\exp(\varepsilon_1\pi/\sqrt{1-\varepsilon_1^2})\}/ \\ \quad(1+B_1k)\leqq K \\ \text{(ii)形}：k/(1+B_1k)\leqq K<k\{1+\exp \\ \quad\times(\varepsilon_1\pi/\sqrt{1-\varepsilon_1^2})\} \\ \text{(iii)形}：0<K<k/(1+B_1k) \end{array}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

ここで $\varepsilon_1=-(B_1+k)/2\sqrt{1+B_1k}$ であり，図7はこれらリミットサイクルの発生する式(27)の範囲を K を縦軸，B_1 を横軸にとり k を副変数として図示したものである．図7は特徴がわかるように(i)，(ii)，(iii)形の境界曲線をおよそ $-2\leqq B_1\leqq2$ の範囲で表しているが，(i)，(ii)，(iii)形のリミットサイクルが得られる場合の B_1 は負の値をもち，k の値に対して図6から定まる B_1 の値の範囲（図7の縦軸に平行な左側と中央の一点鎖線に挟まれた範囲）であることはいうまでもない．

次に(α)形，(β)形，…，(ε)形はどのようにしてその発生範囲を考えればよいのだろうか．本報では v-p_m 位相面において主としてI点を出発するリミットサイクルによってその形状・種類を分類しており，再び $v=0$ となるA点，A′点，A″点（図5）（これらを $A^{(i)}$ 点と記すことにする）が特性折れ線のI-IV線分上で生ずる場合を(α)形，IV点より下側で $v=0$ となった後，引き続いて逆方向の摩擦力をうけながらすべり運動し，再び $v=0$ となるB点がI-IV線分上で生ずる場合を(β)形，I点より上側で生ずる場合を(γ)形などとしている．したがって(α)形と(β)形の境界は $p_{mA}^{(i)}=p_{m\mathrm{IV}}$ であり，また(β)形と(γ)形の境界は $p_{m\mathrm{I}}=p_{mB}$ となる．いま $P_m=p_{m\mathrm{I}}-p_{m\mathrm{IV}}=2p_{m\mathrm{I}}$, $P_{mA}=p_{m\mathrm{I}}-p_{mA}^{(i)}$, $P_{mB}=p_{m\mathrm{I}}+p_{mB}$ とおくと $P_m=P_{mA}$ が(α)形と(β)形の境界を，また $P_m=P_{mB}$ が(β)形と(γ)形の境界を与えることになる．一方(δ)形と(ε)形は，I点を出発するリミットサイクルが再び $v=0$ となることがない場合であり，本報では特異点位置が第1の特性折れ線上にある場合に(δ)形が，第2の特性折れ線上に

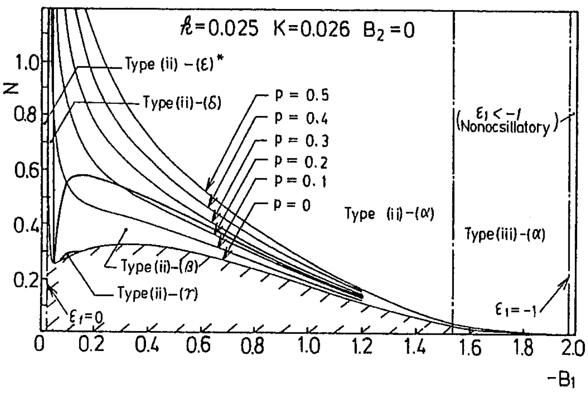


図 8

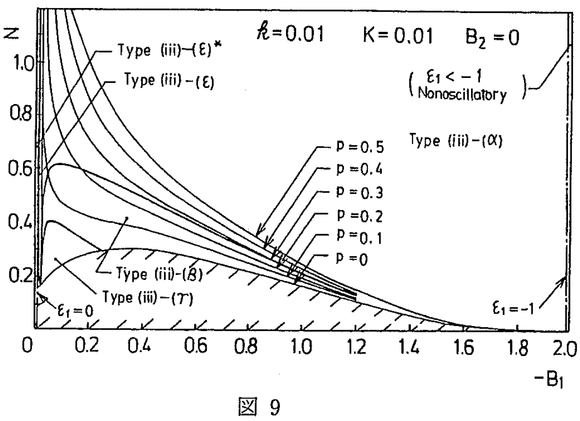


図 9

ある場合に(ε)形が発生している．

いまB_2, kおよびKが一定の平面を用いて横軸に$-B_1$を，縦軸に$N=P_m/P_{mA0}$をとり，pを副変数としてこれらリミットサイクルの発生範囲を図示することを考えよう．ここでP_{mA0}はⅠ点から出発した定常振動解が十分に大きいF_d, V_2のもとで再び$v=0$となる点A_0とⅠ点との圧力差，すなわち$P_{mA0}=p_{mI}-p_{mA0}$を示し，Nはk, B_1のみの関数$f(k, B_1)$を含む式(28)で与えられる．またpは高摩擦特性か低摩擦特性かを示す因子であり，図3に付記したように摩擦特性折れ線を一点鎖線の位置まで縦軸方向に平行移動したとき，折れ点Ⅱが横軸に接する場合を$p=0$としてそれよりどの程度高摩擦側にあるかを示す量で式(29)で与えられる．

$$N=P_m/P_{mA0}=2\varphi_s K/f(k, B_1) \quad \cdots\cdots(28)$$

$$p=(F_d-F_{d0})/A_p\sqrt{m/c}\,V_2=\varphi_d-\varphi_{d0} \quad \cdots\cdots(29)$$

ここで$f(k, B_1)$は式(30)で与えられ，$\tau_{A0}(\pi\leqq\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\times\tau_{A0}\leqq 2\pi)$は式(31)の根である．

$$f(k, B_1)=-k[B_1-e^{\varepsilon_1\tau_{A0}}\{B_1\cos\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\,\tau_{A0}-(\sqrt{1-B_1k}+\varepsilon_1 B_1)\sin\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\,\tau_{A0}/\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\}]/(1+B_1k) \quad \cdots\cdots(30)$$

$$e^{\varepsilon_1\tau_{A0}}\{\cos\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\,\tau_{A0}-\varepsilon_1\sin\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\,\tau_{A0}/\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\}=1 \quad \cdots\cdots(31)$$

図8，9は$K=$一定の平面における各種リミットサイクルの発生範囲を示した一例で，図8，9には前述した(α)形と(β)形の境界ならびに(β)形と(γ)形の境界が太い実線の曲線でえがかれている．図8，9から(β)形や(γ)形は低摩擦特性のときに発生しやすく，(γ)形はNおよび$|B_1|$の値が小さい範囲でわずかに生ずること，その範囲はkが大きくなるほど狭くなり，やがて消滅することなどがわかる．図8は(ⅰ)形と(ⅱ)形が存在する場合の例であり，図9は$-1.99<B_1\leqq-0.01$の全範囲で(ⅲ)形のみが発生する場合の例である．また$p=0$の曲線は$B_1=0$に近い部分ではKが大きい値をもつほどNの値の大きいほうに現れ，これより下側の斜線部はリミットサイクルの発生に無関係な領域をしめす．

7. スプール変位とリミットサイクル

つぎに運動摩擦力がテーブル速度の関数として一義的に定まるとした場合，一定の摩擦力速度特性曲線に対してスプール変位x_0を変位させたときに発生するリミットサイクルはどのような形状変位をするだろうか．いま特性曲線の第2の折れ線の傾斜に相当する$B_2=(b_2/A_p)/\sqrt{m/c}$の各値に対し，それぞれB_1, K, Nを直交3軸とする三次元空間（図15）において$B_1=$一定とする平面，すなわちK-N平面を考えてみよう．図10, 11はそれぞれ$k=0.01$および$k=0.05$におけるこれらの場合の例であり，発生する各種リミットサ

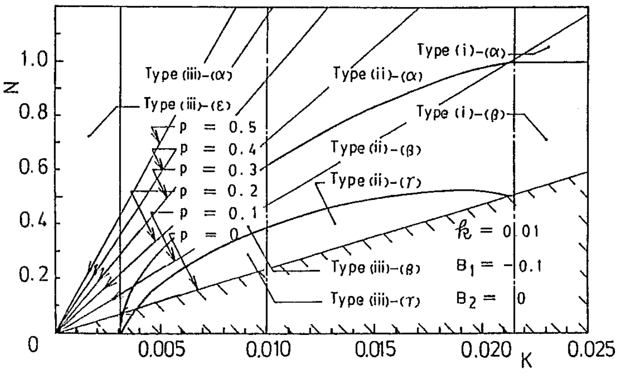


図 10

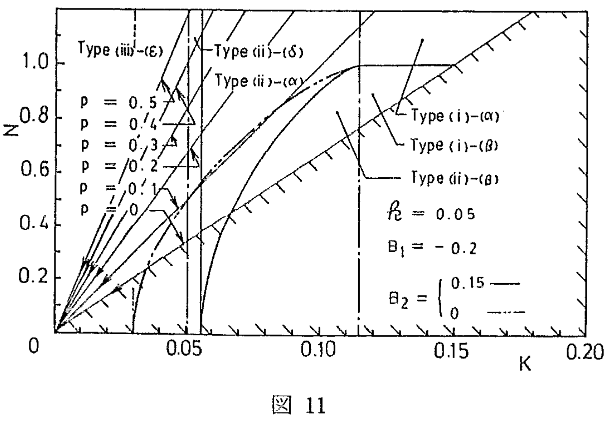


図 11

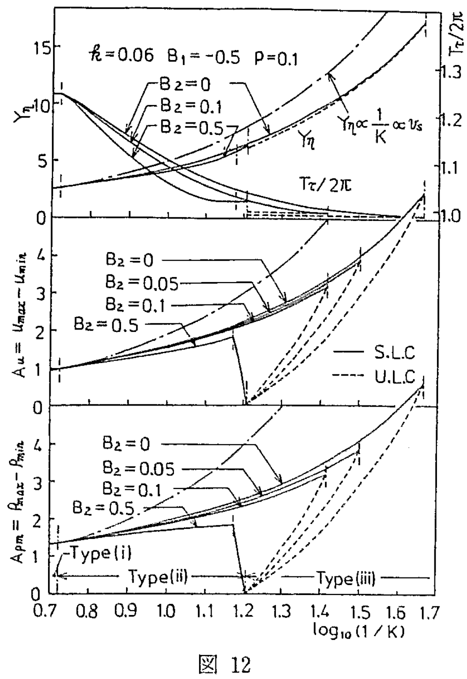


図 12

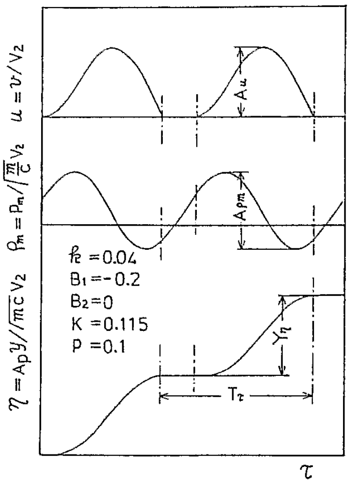


図 13

表 4

Friction-velocity characteristic curve ($\varphi_s = \varphi_d$)	Region of velocity at the singular point: Singular point is on segment I-II ($v_s < V_2$), v_s slow: Singular point	Limit cycle	v_s fast: Singular point	Limit cycle	On segument II-III ($v_s > V_2$): Singular point	Limit cycle
$\varepsilon_1 < 0,\ \varepsilon_2 < 0$ ($B_1 < 0, B_2 \geqq 0$)	S.F.P.	—	S.F.P.	—	S.F.P.	—
$\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 < 0$ ($B_1 < 0, B_2 \geqq 0$)	V.P.	S.L.C. (Sp.)	V.P.	S.L.C. (Sp.)	S.F.P.	—
$\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 < 0$ ($B_1 < 0, B_2 \geqq 0$)	U.F.P.	S.L.C.	U.F.P.	S.L.C.	S.F.P. or	S.L.C. U.L.C. or —

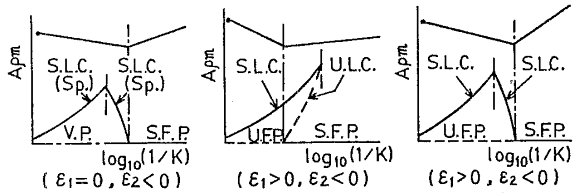


図 14

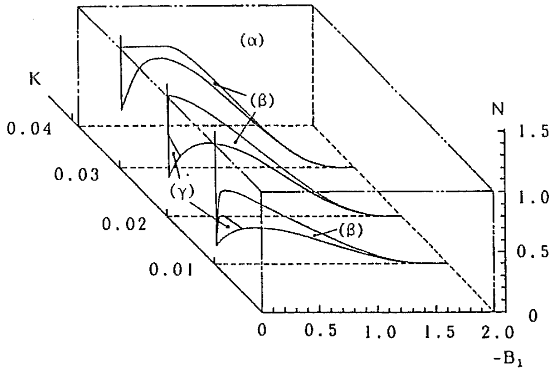


図 15

イクルの存在領域が前出の図 8，9 と異なった形で示されている．図 10 は $B_1 = -0.1$ において第 2 の特性折れ線が傾斜を有しない $B_2 = 0$ の場合であり，(α) 形，(β) 形，(γ) 形の発生がありうること，図 11 は $B_1 = -0.2$ で，第 2 の特性折れ線が正の傾斜をもつ $B_2 = 0.15$ の場合で (γ) 形の発生がないことを示している．図 10，11 中には $B_2 = 0$ の場合の (α) 形と (β) 形の境界が二点鎖線で付記されている．また K-N 平面の座標原点をとおる放射状の直線は $p=$ 一定の直線をしめす．

いま式(28)から N と K の比をとると次の式(32)がえられ，これは式(23)の φ_s, k, B_1 に対する定義から四方弁や圧力回路のもつ特性値 k_p, m, c, A_p ならびに摩擦特性を示す因子 b_1, b_2, F_s, F_d, V_2 が与えられると決まる定数である．

$$N/K = 2\varphi_s/f(k, B_1) = \text{一定} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

しかるに K および N はいずれもスプール変位 x_0 を変化させたとき $(k_x x_0/K_p - F_d/A_p)$ に逆比例して変化するので，x_0 を小さな値から順次大きくすると，発生するリミットサイクルも K-N 平面において座標原点を通る傾斜した直線，すなわち与えられた摩擦特性に対応する前述の $p=$ 一定の直線上を，座標原点に向かう図 10，11 中の矢印の方向に順次形状を変化していくことになる．

図 12 は最大静止摩擦力が孤立点とならない場合，すなわち $\varphi_s = \varphi_d$ の場合に，k, B_1, p を一定としてスプール変位 x_0，したがって $1/K$ の値 $(\propto v_s)$ を変化したときに得られる定常振動解のもつ無次元振幅などについて示した一例であり，上から順にリミットサイクルの 1 周期当たりのテーブルの無次元変位 Y_η（これはスティック運動とスリップ運動を繰返す定常振動解の場合にはステップ高さ Y の無次元量 $A_p Y/\sqrt{mc}\,V_2$ に一致する），周期比 $T_\tau/2\pi$，速度振幅 A_u，圧力振幅 A_{pm} を表す（図 13）．図 12 は B_2 を副変数にとっているが，Y_η は B_2 の値が小さい図示の範囲では図 12 上での区別ができないので $B_2 = 0$ の場合のみを記した．図 12 の各図における破線および $B_2 = 0.5$ の場合の図 12 中ほぼ中央の 2 本の一点鎖線に挟まれた実線の曲線部分はそれぞれすべり運動のみから成る不安定および安定なリミットサイクルに対応するものである．図 14 は圧力振幅 A_{pm} の $1/K$ に対する変化と特異点の性質を付記したもので，S. L. C. ならびに U. L. C. はそれぞれ有限振幅の安定なリミットサイクルおよび不安定なリミットサイクルを表し，Sp. は分離枝を示す．また S. F. P.，U. F. P.，V. P. は特異点がそれぞれ安定，不安定な焦点ならびに渦心点であることを表す．図 14 の A_{pm} 曲線の横軸は対数目盛で表現されているが，上側には運動摩擦力特性がその特徴を失わないよう折れ点位置のみを A_{pm} 曲線の横軸の値に一致させて横軸を等間隔目盛りで示している．ここで図 14 中第 2 の特性

折れ線はいずれも正の傾斜の場合を示したが，$B_2=0$ の場合でも同様な圧力振幅曲線が得られる．また $B_1 \geqq 0$ の場合については表4中にも記されているようにリミットサイクルが発生しないので図14中には加えなかった．図15は $k=0.01$, $B_2=0$ のとき最大静止摩擦力が孤立点とならない場合のリミットサイクルの発生範囲を $K, N, -B_1$ を3軸に選んだ三次元空間として図示したもので(β)形や(γ)形の範囲が K の値の大きいほど，また $|B_1|$ の値が小さいほど狭くなり，あるいは消滅する様子がわかる．また表4は各種摩擦力速度特性曲線において生ずるリミットサイクルをまとめて表に示したものである．

8. 結　　言

以上運動摩擦力特性曲線を2本の折れ線で近似し，最大静止摩擦力が孤立点とならない場合について油圧駆動系に発生するリミットサイクルを分類，それらの発生範囲を無次元化した変数を用いていくつかの線図に示した．またスプール変位，したがって特異点速度を変えた場合の変位波形のもつステップ高さや圧力，速度振幅の変化のようすが求められた．これらによればリミットサイクルの発生のしかたはかなり機械駆動系のそれと類似しているものの，油圧駆動系の場合には特性折れ線の傾斜が負の場合でも必ずしもその折れ線上にある特異点が不安定にならない場合があり，油圧シリンダや四方弁をふくむ油圧駆動系の特性値によって影響をうけることなどが明らかにされた．

最後に本研究にあたり本学　宮島雅博技官や昭和59, 60年度卒業研究生　角田　稔，高崎博雄，大海毅，磯部尚夫の4君の協力をえたことを記して感謝する．

文　　献

（1）松崎・橋本，機論，**28**-197（昭37），1394.
（2）松崎，機論，**29**-206（昭38），1615.
（3）中川・ほか2名，機論，**45**-390 C（昭54），195.
（4）高野，機論，**33**-253（昭42），1352, 1363.
（5）高野・石橋，機論，**38**-316（昭47），3148, 3158.

討　　論

〔質問〕　松崎　淳
〔(株)日立製作所生産技術研究所〕

摩擦を伴う振動解析では，実験結果との対比が極めて重要であると考える．貴報の場合，実験結果とどの程度一致するのか．

また貴報の結論を実際に適用するには，どうしたらよいか，その場合の効果はどの程度か，ご教示いただければ，企業側として大変有難いと思う．

〔回答〕　当研究室でも実験をやっており，摩擦特性については一般に下に凸形の曲線で，高速側で摩擦力がほとんど一定か，速度とともに漸増，漸減する曲線が得られている．しかし本論文で取扱っているような摩擦特性が完全に2本の折れ線で表されるような特性が得られることがないため，発生するリミットサイクルのもつ諸特性について精確な比較はできないが，定性的には本論文で得られた特色を表す結果を得ている．それらは次報以降で発表する予定だが，ただ著者らの実験から得られる摩擦特性は貴論文(付1)にあるような1本の直線近似で説明できるような場合は極めて少なく，特に v-p_m 平面において特異点を囲むスティックスリップ運動がかなり大きな速度振幅，圧力振幅を有しており，第2の折れ線速度領域の摩擦特性も考慮せねばならないことが多く，これらの視点からまず理論的にどのような性質を有するリミットサイクルが発生しうるのかを調べることが先であると判断し，このような目的から2本の折れ線近似の場合の報告を行った次第である．次報では最大静止摩擦力が孤立点となる場合の影響をのべ，ページが許せばスティックスリップの発生限界に関連して，貴質問の後段の期待に沿いたいと考えている．

〔質問〕　渡辺　武〔山梨大学教育学部〕

油圧駆動系の摩擦振動について詳細にご検討され，興味深く拝見した．以下の点をお伺いする．

2本の折れ線で近似した摩擦特性の場合，機械駆動系と油圧駆動系ではリミットサイクル発生やその諸特性にどのような差異があるか比較検討されたと思うがその違いは主にどのような因子によるとお考えか．

また最大静止摩擦力が孤立点の場合について検討しておられるならばその大略をご教示願いたい．

〔回答〕　油圧駆動系の場合は機械駆動系と異なり，運動方程式の成り立ちが全く異なり，単純な比較はできない．リミットサイクルの発生に関与するのは，それぞれ摩擦特性を表す因子のほかに，後者の場合可動部分の質量 m，駆動ばねの定数 k，駆動点または移

(付1)　松崎・橋本，機論，**29**-194（昭37），1394.

動面速度 v_0 などであるのに対し，前者の場合には可動部分の質量 m，シリンダ，配管の容量変化や作動油の圧縮率 c，四方弁の特性定数 k_x，k_p およびスプール変位 x など多くの因子が関与する．本論文ではこれらの因子を B_1，B_2，φ_s，φ_d，k，K の6個の無次元因子に整理してリミットサイクルの発生およびその特性に与える影響を調べているが，油圧駆動系の場合でも，スプール変位 x のほかに摩擦特性がリミットサイクルの発生にもっとも支配的な因子であると考えている．そしてこれらに機械駆動系と異なる特性を与える因子として，c，k_p，A_p，m が関与して，例えば特異点が第1の折れ線上にあるとき，$B_1<0$ 場合でも $\varepsilon_1<0$ となるときには特異点が安定な焦点となるなどの場合が生ずることになる．

最大静止摩擦力が孤立点となる場合については次報で報告する予定である．