

自由自励系の摩擦による振動\*  
(第1報, 平均法による解析とその評価)高野英資\*<sup>1</sup>, 原利昭\*<sup>1</sup>, 張祥永\*<sup>2</sup>Free Oscillations in a Self-Sustained System with Solid Friction  
(1st Report, Approximation Analysis by Average Method  
and Evaluation of Solution)

Eisuke TAKANO, Toshiaki HARA, and Xiang Yong ZHANG

In the present paper, the frictional vibrations in a mechanical system are studied theoretically using an average method when the friction-velocity characteristic curves are given by several types of function. The steady-state vibrations, or limit cycles, obtained from the average method are compared with the corresponding approximate motions regarded as the positively exact solutions, which are obtained from the piecewise linear system with the friction-velocity characteristic curves approximated by a polygon having numerous segments. Moreover, the effectiveness of the use of the average method in the theoretical analysis of frictional vibrations is shown in three types of friction-velocity functions when the nonlinearities in the system are not too large. Lastly, an easily revisable method is offered in which almost exact solutions can be obtained by modifying the solved curves estimated from the average method.

**Key Words:** Frictional Vibration, Nonlinear Vibration, Solid Friction, Mechanical Driving System, Self-excited Oscillation, Limit Cycle, Piecewise Linear System, Sliding Surface, Average Method

## 1. 緒言

一定速度で走行する移動面上を, ばね力と非線形摩擦力をうけながら, すべり運動する物体の運動については理論的にも, 実験的にもかなりの研究が進み, 工学上有益な多くの知見が提供されているが, まだ十分とはいえないようである<sup>(1)-(3)</sup>. 特に運動摩擦係数特性曲線が性質の異なる二つの部分から成るため, 付着運動とすべり運動の両方から成る運動の場合には解のつなぎ合わせという困難な問題が生ずる. 本報では解析的な取扱いの一つとして, 付着運動とすべり運動を区別しないで行く平均法による定常振動解が両者を考慮した精度の高い断片線形近似解-ほとんど厳密解とみなすことができる-と比べて, 振幅・移動面速度曲線などにおいてかなりのよい一致をしめすことから, 摩擦振動の解析において非線形性があまり大きくない場合には平均法の適用がかなり有効であること, および平均法から得られる結果に簡単な修正を加えることにより厳密解のもつ振幅を推定できることなどを検討したので報告する. なお本報では最大静止摩擦力が孤立

点とならない場合を扱う.

## 2. 運動摩擦係数速度特性曲線と運動方程式

図1に示めされた一自由度の質量ばね系を考える. 質量  $m$  の物体に取付いているばねのばね定数を  $k$ , 粘性減衰係数を  $h$ , 移動面速度を  $v_0$  として, ばねが変形をうけない位置に原点をとり,  $t$  時間後の物体の位置を  $\xi$  であらわすと, 物体の運動方程式は

$$m\ddot{\xi} + h\dot{\xi} + \varphi(\xi - v_0) + k\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる. ここで  $\varphi(\xi - v_0)$  は非線形摩擦力で,  $s = \dot{\xi} - v_0$  とおくと本報では図2ならびに式(2)~(4)のように  $s=0$  において不連続点を有する  $s$  の三次関数, 五次関数および直線と双曲線の合成関数で表される場合を考える. ここでは便宜的にそれぞれの摩擦特性を [A], [B], [C] 形摩擦特性と呼ぶことにする.  $V$  は運動摩擦力の大きさが最小となる相対速度,  $\varphi_s$  は最大静止摩擦力で  $s \rightarrow 0$  のときの運動摩擦

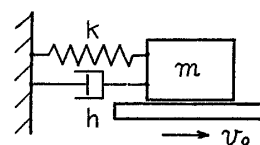


図1

\* 昭和62年10月2日 北陸信越支部信越地方新潟講演会において講演, 原稿受付 昭和62年4月6日.

<sup>1</sup> 正員, 新潟大学工学部 (〒950-21 新潟市五十嵐2の町8050).

<sup>2</sup> 正員, 重慶大学機械工学部 (中華人民共和国四川省).

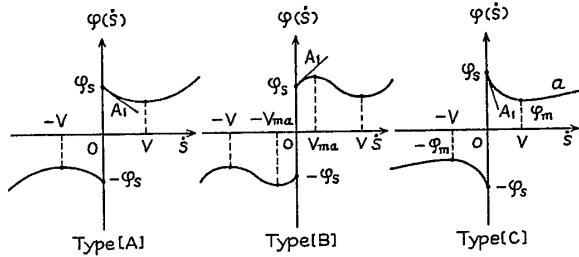


図 2

力と一致するものとする。  $\dot{s}=0$  で特性曲線に引いた接線の傾き  $A_1$  と  $\varphi(\dot{s})$  が極大値を与える  $\dot{s}$  の値  $V_{ma}$ ,  $r_{ma}=(V/V_{ma})^2$  を用いると

$$\varphi(\dot{s}) = \varphi_s \dot{s} / |\dot{s}| + A_1 \dot{s} (1 - \dot{s}^2 / 3V^2) \dots (2)$$

$$\varphi(\dot{s}) = \varphi_s \dot{s} / |\dot{s}| + A_1 \dot{s} [1 - (1 + r_{ma})(\dot{s}/V)^2 \div 3 + (r_{ma}/5)(\dot{s}/V)^4] \dots (3)$$

$$\varphi(\dot{s}) = a\dot{s} + b\dot{s}/|\dot{s}| + d/(\dot{s} + c\dot{s}/|\dot{s}|) \dots (4)$$

となる。また [C] 形摩擦特性が図 2 のように下に凸形となる場合は  $a, c, d$  のいずれもが正なる必要があり、 $\varphi_s, V$  のほかに最小値  $\varphi_m$  および  $\dot{s} \rightarrow \infty$  における特性曲線の傾斜  $a$  を用いると式 (4) 中の  $b, c, d$  ならびに  $A_1$  は次の式 (5) で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} b &= \varphi_m - 2aV - a^2 V^2 / (\varphi_s - \varphi_m) \\ c &= aV^2 / (\varphi_s - \varphi_m) \\ d &= aV^2 / \{1 + aV / (\varphi_s - \varphi_m)\}^2 \\ A_1 &= a - d/c^2 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

式 (2), (3) と式 (5) の係数を有する式 (4) では  $\varphi(V) \geq 0$  となることはいうまでもない。

つぎに  $\tau = t\sqrt{k/m}$ ,  $\eta = \xi\sqrt{k/m}/V$  とおき、後述する式 (11) の各係数を用いると式 (1) は次式のように変換される。ここで ' は  $\tau$  による微分をしめす。

$$\eta'' + 2H\eta' + F(\eta' - Y_0/Y) + \eta = 0 \dots (6)$$

また式 (2) ~ (4) は  $\dot{s}/V = s' = \eta' - Y_0/Y$  を用い、順に次式のように変換される。

$$F(s') = (X/2Y)(s'/|s'|) + 2B_1 s' (1 - s'^2/3) \dots (7)$$

$$F(s') = (X/2Y)(s'/|s'|) + 2B_1 s' \times [1 - (1 + r_{ma})s'^2/3 + r_{ma}s'^4/5] \dots (8)$$

$$F(s') = As' + Bs'/|s'| + D/(s' + Cs'/|s'|) \dots (9)$$

ここで [C] 形摩擦特性が下に凸形の曲線の場合には

$$\left. \begin{aligned} B &= X_m/2Y - 2A - A^2 / \{(X - X_m)/2Y\} \\ C &= A / \{(X - X_m)/2Y\} \\ D &= A[1 + A / \{(X - X_m)/2Y\}]^2 \\ B_1 &= A - D/C^2 \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

となる。式 (6) ~ (10) 中の各係数は次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} X &= 2\varphi_s/k, \quad X_m = 2\varphi_m/k, \quad Y = V/\sqrt{k/m} \\ Y_{ma} &= V_{ma}/\sqrt{k/m}, \quad Y_0 = v_0/\sqrt{k/m}, \quad H = h \\ &\div 2\sqrt{k/m}, \quad B_1 = A_1/2\sqrt{k/m}, \quad A = a/\sqrt{k/m}, \\ B &= b/\sqrt{k/m}V, \quad C = c/V, \quad D = d/\sqrt{k/m}V^2 \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

### 3. 平均方程式と第 1 近似解

#### 3.1 平均方程式 つぎに運動方程式 (6) の解を

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \alpha + R \sin(\tau + \epsilon) \\ \zeta &= \eta' = R \cos(\tau + \epsilon) \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

とおき、Kryloff-Bogoliuboff の平均法を用いて求めよう<sup>(3)(4)</sup>。ここで  $\alpha, R, \epsilon$  は  $\tau$  の未知関数であり、これらと  $\alpha', R', \epsilon'$  がともに  $\tau$  に対しゆるやかに変化するものとすれば、次の式 (13), (14) ならびに各種摩擦特性に対応して式 (15) ~ (20) の平均方程式がえられる。

$$\epsilon' = 0 \dots (13)$$

$$\alpha' = 0 \dots (14)$$

#### (1) [A] 形摩擦特性

$$\left. \begin{aligned} R' &= -HR - B_1 R \{1 - (Y_0/Y)^2 - R^2/4\} \\ &\quad (0 \leq R \leq Y_0/Y) \\ R' &= (\text{同上}) - (X/Y)\sqrt{R^2 - (Y_0/Y)^2} \\ &\quad \div \pi R \quad (R > Y_0/Y) \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= X/2Y + 2B_1(Y_0/Y)\{1 - (Y_0/Y)^2/3 \\ &\quad - R^2/2\} \quad (0 \leq R \leq Y_0/Y) \\ \alpha &= (\text{同上}) - (X/Y) \cos^{-1} \{(Y_0/Y)/R\} \\ &\quad \div \pi \quad (R > Y_0/Y) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

#### (2) [B] 形摩擦特性

$$\left. \begin{aligned} R' &= -HR - B_1 R \{1 - (1 + r_{ma})(Y_0/Y)^2 \\ &\quad + r_{ma}(Y_0/Y)^4 - \{1 + r_{ma} - 6r_{ma}(Y_0/Y)^2\} \\ &\quad \times R^2/4 + r_{ma}R^4/8\} \quad (0 \leq R \leq Y_0/Y) \\ R' &= (\text{同上}) - (X/Y)\sqrt{R^2 - (Y_0/Y)^2} \\ &\quad \div \pi R \quad (R > Y_0/Y) \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= X/2Y + 2B_1(Y_0/Y)\{1 - (1 + r_{ma})(Y_0/Y)^2 \\ &\quad \div Y^2/3 + r_{ma}(Y_0/Y)^4/5 - \{(1 + r_{ma}) \\ &\quad \div 2 - r_{ma}(Y_0/Y)^2\}R^2 + 3r_{ma}(Y_0/Y)^2 \\ &\quad \times R^4/8\} \quad (0 \leq R \leq Y_0/Y) \\ \alpha &= (\text{同上}) - (X/Y) \cos^{-1} \{(Y_0/Y)/R\} \\ &\quad \div \pi \quad (R > Y_0/Y) \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

#### (3) [C] 形摩擦特性

$$\left. \begin{aligned}
 R' &= -HR - R\{A/2 + D(1 - S_2/Q_1)/R^2\} & [I] & \quad 0 \leq R \leq Y_0/Y \\
 R' &= -HR - R\{A/2 + (D + 2BP_0/\pi)/R^2\} & [II-1] & \quad 0 < Y_0/Y \text{ かつ } Y_0/Y + C < R \\
 &+ (D/\pi R)\{(S_1/P_1) \log |\lambda_1| & [II-2] & \quad C/2 < Y_0/Y \text{ かつ} \\
 &- (S_2/P_2) \log |\lambda_2|\} & & \quad Y_0/Y < R < Y_0/Y + C \\
 R' &= -HR - R\{A/2 + (D + 2BP_0/\pi)/R^2\} & [II-3] & \quad 0 < Y_0/Y < C/2 \text{ かつ} \\
 &+ (D/\pi R)\{(S_1/P_1) \log |\lambda_1| & & \quad -Y_0/Y + C < R < Y_0/Y + C \\
 &+ (S_2/Q_2)(\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2)\} & [II-4] & \quad 0 < Y_0/Y < C/2 \text{ かつ} \\
 & & & \quad Y_0/Y < R < -Y_0/Y + C
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

3.2 第1近似解 つぎに式(6)の第1近似解を

$$\eta_0 = a_0 + R_0 \sin(\tau + \epsilon_0) \dots\dots\dots (23)$$

とおくと未知定数  $a_0, R_0$  は前述の平均方程式から求めることができる ( $\epsilon_0$  は不定). 初めに簡単なため  $H = 0$  とする.  $R_0$  は  $R'$  式の右辺を零とおくことにより,  $a_0$  は  $\alpha$  の式に  $R_0$  を代入してえられる. 各種摩擦特性における  $R_0$  と  $Y_0/Y$  の大小関係および式(22)の関係を考慮して求めた  $Y_0/Y$  の各変域に対する  $R_0$  式を次に示す.

(1) [A] 形摩擦特性

(i) 任意の  $Y_0/Y$  に対して

$$R_0 = 0 \dots\dots\dots (24)$$

(ii)  $4/5 \leq (Y_0/Y)^2 \leq 1$  のとき

$$R_0^2 = 4\{1 - (Y_0/Y)^2\} \dots\dots\dots (25)$$

(iii)  $0 < (Y_0/Y)^2 < 4/5$  のとき

$$R_0\{1 - (Y_0/Y)^2 - R_0^2/4 + (X/Y) \times \sqrt{R_0^2 - (Y_0/Y)^2}/\pi B_1 R_0^2\} = 0 \dots\dots\dots (26)$$

(2) [B] 形摩擦特性

(i) 任意の  $Y_0/Y$  に対して

$$R_0 = 0 \dots\dots\dots (27)$$

(ii)  $r_{ma} = (Y/Y_{ma})^2 > r_L$  の場合  $y_A < (Y_0/Y)^2 \leq y_C$

および  $y_B < (Y_0/Y)^2 \leq y_D$  に対して, さらに  $r_{ma} < r_s$  の

場合  $y_C \leq (Y_0/Y)^2 \leq y_D$  に対して, また  $r_s < r_{ma} < r_L$  の

場合  $y_C \leq (Y_0/Y)^2 < y_A$  および  $y_B < (Y_0/Y)^2 \leq y_D$  に対

して  $0 \leq R_0 \leq Y_0/Y$  の範囲で次式をうる.

$$R_0[1 - (1 + r_{ma})(Y_0/Y)^2 + r_{ma}(Y_0/Y)^4 - \{1 + r_{ma} - 6r_{ma}(Y_0/Y)^2\}R_0^2/4 + r_{ma}R_0^4/8] = 0 \dots\dots\dots (28)$$

(iii)  $r_{ma} > r_L$  の場合  $y_A < (Y_0/Y)^2 < y_B$  に対して,

また  $r_s < r_{ma} < r_L$  の場合  $y_A < (Y_0/Y)^2 < y_B$  に対して

$R_0 > Y_0/Y$  の範囲で式(29)がえられ,  $r_{ma} < r_s$  の場合

には  $R_0 > Y_0/Y$  なる解は存在しない.

$$R_0[1 - (1 + r_{ma})(Y_0/Y)^2 + r_{ma}(Y_0/Y)^4 - \{1 + r_{ma} - 6r_{ma}(Y_0/Y)^2\}R_0^2/4 + r_{ma}R_0^4 \div 8 + (X/Y)\sqrt{R_0^2 - (Y_0/Y)^2}/\pi B_1 R_0^2] = 0 \dots\dots\dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha &= A(Y_0/Y) + B + D/Q_2 & [I] & \\
 \alpha &= A(Y_0/Y) + B\{1 + 2 \cos^{-1}\{(Y_0/Y) & [II-1] & \\
 &\div R\}/\pi\} + (D/\pi)\{(1/P_1) \log |\lambda_1| & & \\
 &- (1/P_2) \log |\lambda_2|\} & & \\
 \alpha &= A(Y_0/Y) + B\{1 + 2 \cos^{-1}\{(Y_0/Y) & [II-2] \text{ および } [II-3] & \\
 &\div R\}/\pi\} + (D/\pi)\{(1/P_1) \log |\lambda_1| & & \\
 &+ (1/Q_2)(\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2)\} & & \\
 \alpha &= A(Y_0/Y) + B\{1 + 2 \cos^{-1}\{(Y_0/Y) & [II-4] & \\
 &\div R\}/\pi\} + (D/\pi)\{(1/Q_1) & & \\
 &\times (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_1) + (1/Q_2) & & \\
 &\times (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_2)\} & &
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
 P_0 &= \sqrt{R^2 - (Y_0/Y)^2}, \\
 P_1 &= \sqrt{R^2 - (Y_0/Y - C)^2}, \\
 P_2 &= \sqrt{R^2 - (Y_0/Y + C)^2}, \\
 W &= \sqrt{(R - Y_0/Y)(R + Y_0/Y)}, \\
 Q_1 &= \sqrt{(Y_0/Y - C)^2 - R^2}, \\
 Q_2 &= \sqrt{(Y_0/Y + C)^2 - R^2}, \\
 S_1 &= Y_0/Y - C \quad S_2 = Y_0/Y + C \\
 \lambda_i &= (P_i W - R + S_i)/(P_i W + R - S_i) \\
 \mu_i &= Q_i W/(S_i - R) \quad (i=1, 2)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

であり, また [I], [II-1], ...などは次式でしめされる  $R, Y_0/Y$  の変域をしめす.

ここで  $y_A, y_B$  は式(28)または式(29)の右辺の [ ]内を零とおいた式の  $R_0$  を  $Y_0/Y$  としたときの  $(Y_0/Y)^2$  に関する二次方程式の2根をしめし,  $y_A < y_B$  である. また  $y_c, y_D$  は式(28)の右辺の [ ]=0 の式で同様に  $R_0=0$  とおいたときの  $(Y_0/Y)^2$  の値である ( $y_c < y_D$ ).

$$\left. \begin{matrix} y_A \\ y_B \end{matrix} \right\} = \frac{5(1+r_{ma}) \mp \sqrt{25(1+r_{ma})^2 - 168r_{ma}}}{\div 21r_{ma}} \dots\dots\dots (30)$$

$$y_c = 1/r_{ma}, \quad y_D = 1 \dots\dots\dots (31)$$

また  $r_s$  は式(30)右辺の根号内が零となるときの  $r_{ma}$  の値 (>1) であり,  $r_L$  は  $y_A = y_c$  となる  $r_{ma}$  の値で, それぞれ式(32)で与えられる.

$$r_s \cong 4.498, \quad r_L = 5.500 \dots\dots\dots (32)$$

(3) [C] 形摩擦特性

(i) 任意の  $Y_0/Y$  に対して

$$R_0 = 0 \dots\dots\dots (33)$$

(ii)  $y_D \leq (Y_0/Y)^2 \leq y_E$  に対して

$$(A/2)R_0^2 + D(1 - S_2/Q_{10}) = 0 \dots\dots\dots (34)$$

(iii)  $0 \leq (Y_0/Y)^2 < y_E$  に対して式(22)の [II-1] の

範囲では

$$\begin{aligned} & (A/2)R_0^2 + D + 2BP_{00}/\pi - (D/\pi) \\ & \times \{(S_1/P_{10}) \log |\lambda_{10}| - (S_2/P_{20}) \log |\lambda_{20}|\} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (35)$$

[II-2] および [II-3] の領域では

$$\begin{aligned} & (A/2)R_0^2 + D + 2BP_{00}/\pi - (D/\pi) \\ & \times \{(S_1/P_{10}) \log |\lambda_{10}| + (S_2/Q_{20}) \\ & \times (\pi - 2 \tan^{-1} \mu_{20})\} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (36)$$

[II-4] の領域では

$$\begin{aligned} & (A/2)R_0^2 + D + 2BP_{00}/\pi - (D/\pi) \{(S_1/Q_{10}) \\ & \times 2 \tan^{-1} \mu_{10} + (S_2/Q_{20})(\pi - 2 \tan^{-1} \mu_{20})\} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (37)$$

なお式(34)~(37)中の  $P_{10}, Q_{10}, \dots$ などは式(21)中の  $P_1, Q_1, \dots$ などにおいて  $R$  を  $R_0$  とおいたものである. ここで  $y_D = 1$  であり,  $y_E$  は同じく式(3)において  $R_0$

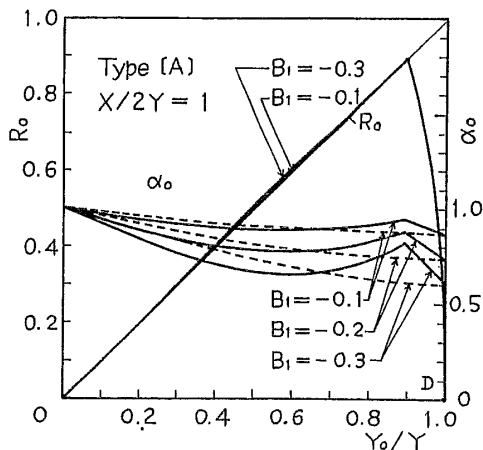


図 3

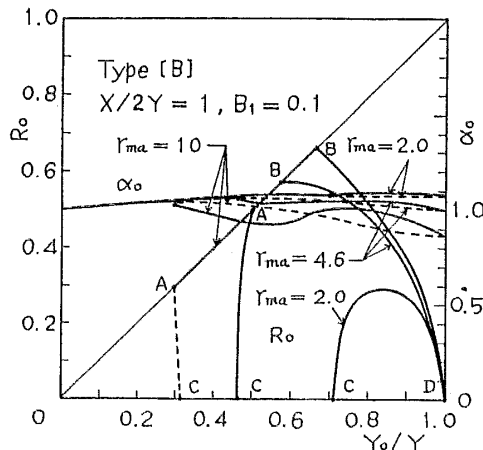


図 4

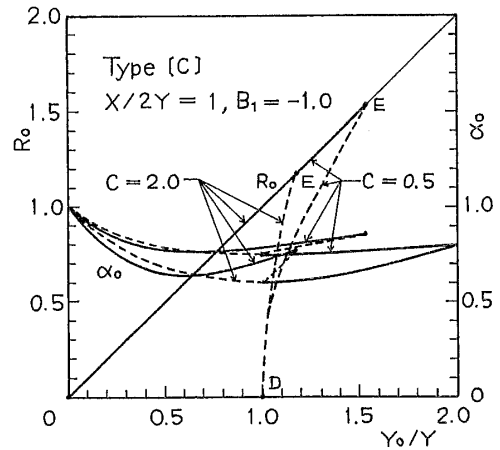


図 5

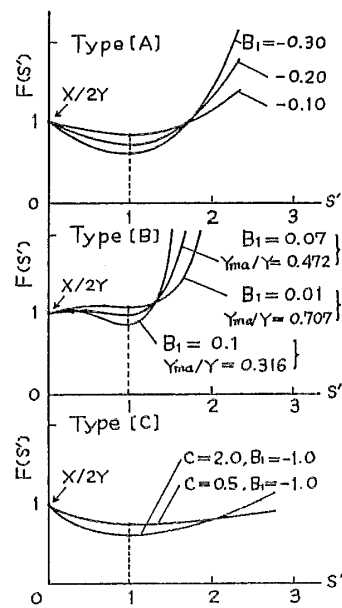


図 6

=  $Y_0/Y$  とおいた次式

$$(A/2)(Y_0/Y)^2 + D[1 - (Y_0/Y + C)] \div \sqrt{(Y_0/Y + C)^2 - (Y_0/Y)^2} = 0 \dots\dots\dots (38)$$

から求まり、 $D = A(1+C)^2$  を考慮すると  $y_E (> 1)$  は  $C$  のみによりただ一つ定まることがわかる。

**3.3 解の一例** 図3~5は順に[A], [B], [C]形摩擦特性に対し、このようにして平均法によってえられた各種摩擦特性における定常振動解の振幅  $R_0$  ならびに  $a_0$  を  $Y_0/Y$  を横軸にとって示したものである。それぞれ横軸上の  $R_0 = 0$  の振動曲線を除き、 $R_0, a_0$  曲線とも安定な定常振動解に対するものを実線で、不安定な定常振動解に対するものを点線で表現してある。図6は以上の  $R_0, a_0$  曲線を求めるのに用いた運動摩擦係数速度特性曲線の形状をしめす。

4. 平均法による解の安定性

つぎに平均法によりえられた第1近似解の安定性について考察しておこう。第1近似解  $\eta_0 = a_0 + R_0 \sin(\tau + \epsilon_0)$  に極めて近い任意の解を  $\eta = a + R \sin(\tau + \epsilon)$  とおく。各種摩擦特性の式  $R'$  を用い、 $R = R_0 + \delta R$  とおいて得られる  $\delta R$  に関する変分方程式から第1近似解

の安定条件を  $H = 0$  の場合について求めた式をつぎにしめす。

(1) [A] 形摩擦特性

$$\left. \begin{aligned} 1 - (Y_0/Y)^2 - 3R_0^2/4 &\leq 0 && (0 \leq R_0 \leq Y_0/Y) \\ (同上) + (X/Y)(Y_0/Y)^2 &&& \dots\dots\dots (39) \\ \div \pi B_1 R_0^2 \sqrt{R_0^2 - (Y_0/Y)^2} &\leq 0 && (R_0 > Y_0/Y) \end{aligned} \right\}$$

(2) [B] 形摩擦特性

$$\left. \begin{aligned} 1 - (1 + r_{ma})(Y_0/Y)^2 + r_{ma}(Y_0/Y)^4 &&& \\ - 3\{1 + r_{ma} - 6r_{ma}(Y_0/Y)^2\}R_0^2 &&& \\ - 5r_{ma}R_0^4/8 \geq 0 &&& (0 \leq R_0 \leq Y_0/Y) \\ (同上) + (X/Y)(Y_0/Y)^2/\pi B_1 R_0^2 &&& \\ \times \sqrt{R_0^2 - (Y_0/Y)^2} \geq 0 &&& (R_0 > Y_0/Y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

(3) [C] 形摩擦特性

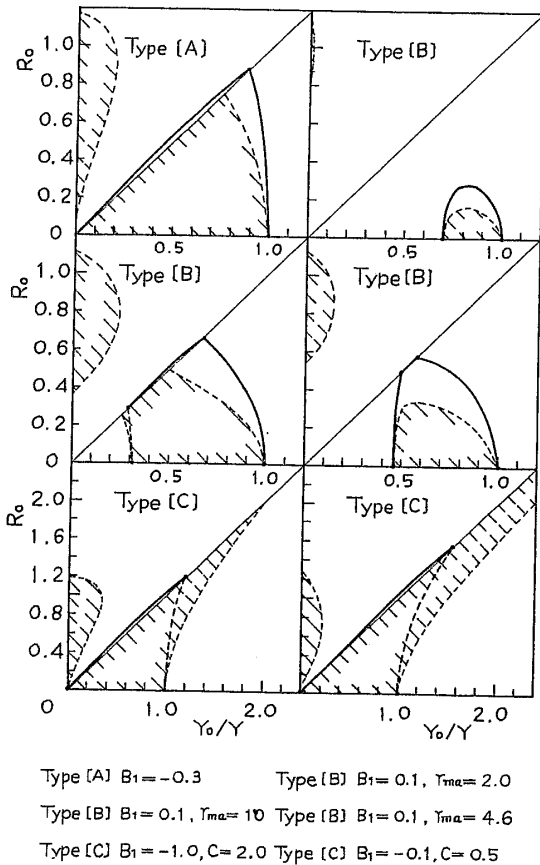


図 7

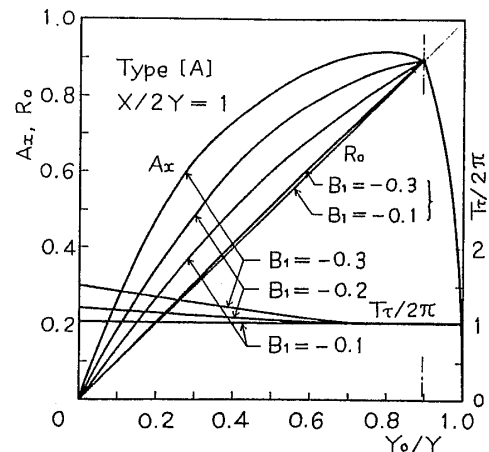


図 8

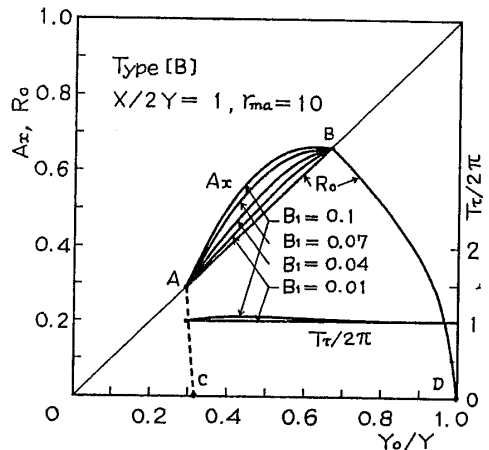


図 9

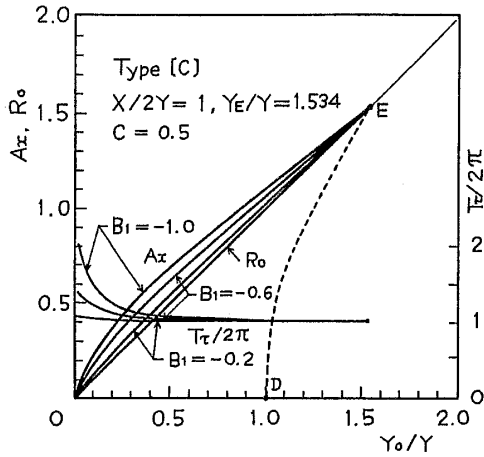


図 10

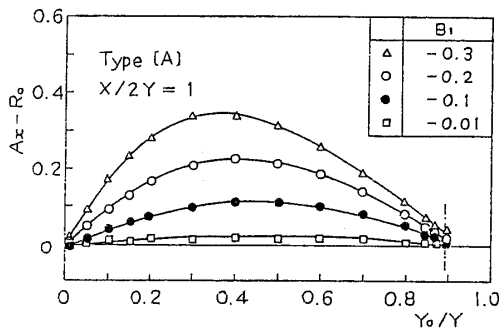


図 11

$$\begin{aligned}
 & A/2 - D/R_0^2 - D(S_2/Q_{20})(1/Q_{20}^2 - 1) \\
 & \div R_0^2 \geq 0 \quad \text{[ I ]} \\
 & A/2 - D/R_0^2 + 2B(Y_0/Y)/\pi P_{00} R_0^2 \\
 & - Z_1 + Z_2 \geq 0 \quad \text{[ II-1 ]} \\
 & A/2 - D/R_0^2 + 2B(Y_0/Y)/\pi P_{00} R_0^2 \\
 & - Z_1 - Z_3 \geq 0 \quad \text{[ II-2 ] および [ II-3 ]} \\
 & A/2 - D/R_0^2 + 2B(Y_0/Y)/\pi P_{00} R_0^2 \\
 & - Z_3 - Z_4 \geq 0 \quad \text{[ II-4 ]}
 \end{aligned} \quad \dots\dots (41)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 Z_i &= (DS_i/\pi P_{i0}) [ -(1/R_0^2 + 1/P_{i0}^2) \\
 & \times \log |\lambda_{i0}| + 2\lambda_{i0} P_{i0} W_0 \{ (R_0/P_{i0}^2 + Y_0 \\
 & \div Y P_{i0}^2)(R_0 - S_i) - 1 \} / R_0 (P_{i0} W_0 - R_0 \\
 & + S_i)^2 ] \quad (i=1, 2) \\
 Z_3 &= (2DS_2/\pi Q_{20}) [ (1/Q_{20}^2 - 1/R_0^2) \\
 & \times (\pi/2 - \tan^{-1} \mu_{20}) - W_0 Q_{20} \{ (-R_0/Q_{20}^2 \\
 & + Y_0/Y P_{00}^2)(S_2 - R_0) + 1 \} / R_0 \{ (S_2^2 \\
 & - R_0)^2 + (W_0 Q_{10})^2 \} ] \\
 Z_4 &= (2DS_1/\pi Q_{10}) [ (1/Q_{10}^2 - 1/R_0^2) \\
 & \times \tan^{-1} \mu_{10} + W_0 Q_{10} \{ (-R_0/Q_{10}^2 + Y_0 \\
 & \div Y P_{00}^2)(S_1 - R_0) + 1 \} / R_0 \{ (S_1 \\
 & - P_0)^2 + (W_0 Q_{10})^2 \} ]
 \end{aligned} \quad \dots\dots (42)$$

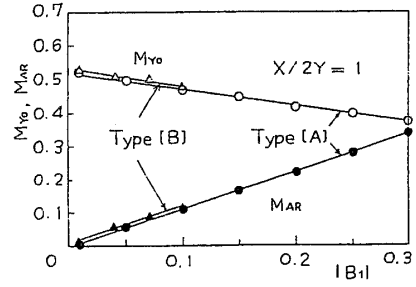


図 12

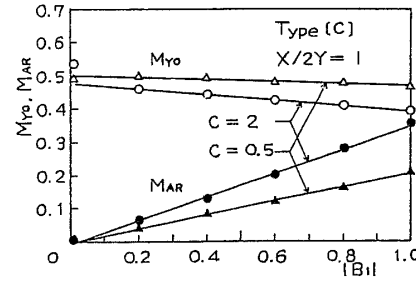


図 13

図 7 はこれらの緒式を用いて求めた第 1 近似解の不安定領域 (斜線部) を図示したもので、図 3~5 における条件下の例である。

5. 平均法による解の評価と補正

5.1 断片線形近似解 つぎに付着運動を考慮せず、すべり運動時の運動方程式のみを用いて平均法によって求めた解が、どの程度付着運動とすべり運動の両運動を考慮して求めた厳密解を近似するかについて眺めてみよう。精度の高い断片線形近似解法の説明は紙面の関係で次報で詳述する。図 8~10 は  $F(s')$  曲線をいくつかの折れ線 ( $n=40$  本以上) で近似してえられた断片線形近似解の振幅  $A_x = (x_{\max} - x_{\min})/2$  ならびに周期比  $T_r/2\pi$  と、平均法により求めた  $R_0, T_r/2\pi (=1)$  とを比較したものである。これらによれば平均法による解のうち  $R_0 > Y_0/Y$  の解は付着運動とすべり運動を交互に繰返す解に、また  $R_0 < Y_0/Y$  の解はすべり運動のみからなる運動に対応しており、前者の場合  $|B_1|$  の大きいほど平均法との間の振幅差が大きくなる事がわかる。

5.2 平均法による解と厳密解の比較 図 11 は最大静止摩擦力が孤立点とならない場合の [A] 形摩擦特性における  $A_x - R_0$  の値 (O, Δ印など) をプロットしたもので、横軸に  $Y_0/Y$ , 副変数に  $B_1$  をとってしめしてある。これらの各点は付着運動の発生する速度領域に対してしめされており、他の摩擦特性の場合もこの例のように付着運動の発生速度境界付近で  $A_x - R_0$

$\cong 0$  となる  $Y_0/Y$  の三次曲線にほぼ存在することがわかった。図 11 中の曲線はこれらの各点を近似する三次曲線を最小二乗法によって求め、えがいたものである。この近似された三次曲線はさらにその極大値の座標を  $(M_{Y_0}, M_{AR})$  とするとき、これら両座標の値がともに  $|B_i|$  に対してほぼ直線的な関係を有し、図 12, 13 のように表される。したがって厳密解のもつ振幅  $A_x$  は平均法による解  $R_0$  に次式のような補正を与えることにより求めることができることになる。

$$A_x = R_0 + \{C_3(Y_0/Y)^3 + C_2(Y_0/Y)^2 + C_1(Y_0/Y) + C_0\} \dots \dots \dots (43)$$

ここで式中の係数  $C_0$  などは式(44)で与えられ、 $\Delta = (M_{Y_0} - M_A)^2(M_{Y_0} - M_B)^2$  である。また  $M_A, M_B$  は図 11 などで三次曲線が横軸を切る点の  $Y_0/Y$  の値であり、[A] 形摩擦特性では  $M_A = 0, M_B \cong 0.894$ , [B] 形では式(30)から  $M_A \cong \sqrt{y_A}, M_B \cong \sqrt{y_B}$ , [C] 形では式(38)を考慮し、 $M_A = 0, M_B \cong \sqrt{y_E}$  を採るものとする。

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= M_A M_B \{1 - 2(M_A + M_B)M_{Y_0} \\ &\quad + 3M_{Y_0}^2\} M_{AR} / \Delta \\ C_1 &= M_{Y_0} \{2(M_A^2 + M_A M_B + M_B^2) - 3(M_A \\ &\quad + M_B)M_{Y_0}\} M_{AR} / \Delta \\ C_2 &= -(M_A^2 + M_A M_B + M_B^2 - 3M_{Y_0}^2) M_{AR} / \Delta \\ C_3 &= (M_A + M_B - 2M_{Y_0}) M_{AR} / \Delta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

## 6. 結 言

以上、機械駆動系に発生する摩擦による定常振動解を、運動摩擦力速度特性曲線が移動面速度の三次関数、五次関数、双曲線と直線の合成関数となる場合について平均法を用いて求め、それらの緒特性についてしめすとともに、精度の高い断片線形近似法からえられる厳密解と比較して、平均法からえられる解が付着運動を考慮している場合の厳密解の特性をかなりよく説明するものであることをしめた。また平均法からえられた  $R_0$  曲線に簡単な修正を加えることにより、付着時の厳密解のもつ振幅  $A_x$  を推定する簡便式を提案した。なお、ここでは最大静止摩擦力が孤立点となる場合や、運動摩擦力速度特性曲線のもつ非線形性が強い場合には平均法の適用の主旨からはずれることになるので解析の対象とはしなかったが、これらについては次報以降で述べることにする。

## 文 献

- (1) 例えば、亙理・杉本、機論, 29-200 (昭38), 769.
- (2) 高野、機論, 33-253 (昭42), 1352, 1363, 高野・石橋、機論, 38-316 (昭47), 3148, 3158.
- (3) 富樫、応講論 (第21回), (昭46), 327.
- (4) ポゴリユーブ・ミトロポリスキー (益子訳)、非線形振動論, (昭36), 467, 共立出版.