

磁力支持された移動はりの非線形振動*

永井健一*¹, 渥美全弘*², 杉山晋一*³
長屋幸助*¹, 谷藤克也*⁴, 武田定彦*¹Nonlinear Vibrations of a Traveling Beam Levitated
by Magnetic ForcesKen-ichi NAGAI, Masahiro ATSUMI, Shin-ichi SUGIYAMA,
Kosuke NAGAYA, Katsuya TANIFUJI, and Sadahiko TAKEDA

This paper presents analytical results of non-linear vibrations of a traveling beam levitated by magnetic forces. The problem is modeled as the Euler-Bernoulli beam with a variable cross section supported by non-linear springs. The beam and the springs move on an undulated line. Introducing a new mode shape function which is expressed as the product of the trigonometric function and the power series truncated to the fourth order and utilizing the galerkin procedure, basic equations are reduced to the coupled non-linear equations. The steady state solutions of the beam was obtained using the harmonic balance method. It is found that the non-linear responses show the type of soft-spring, the unsymmetric support of the spring or the unsymmetric cross section to the mid-point of the beam show large amplitude vibrations of a rotating motion and that of a translating motion in relatively large frequency range.

Key Words: Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Railway, Modal Coordinate, Galerkin Method, Beam

1. 緒 言

近年,工業技術の発展に伴う,輸送機械の高速化により,鉄道などの車体構造物はより軽量化している。これらの構造物を構成するはり,板などの要素は一般に曲げ剛性が小さく,駆動源や走行中の支持系の周期変動力が小さくとも,共振により曲げ振動が生じやすい。これより振動疲労や乗り心地の直接的な原因の一つであり,解決すべき問題である。これに関し車体と支持系の連成振動の研究⁽¹⁾⁻⁽³⁾が見うけられる。さらに従来支持系に金属ばねが使用されてきたが,近年では磁気反発力⁽⁴⁾や空気ばねを利用したものが特に注目されている。これらはいわゆる非線形のばね特性を持つことにより,高速走行時において非線形振動現象がおこりやすい。本報では複数の磁気反発力により浮上した,両端自由のはり形状モデルが周期的にうねる軌道上を走行移動する場合の非線形振動問題を理論的に解析した。解法では,まずべき級数と未定係数を含む三

角関数の積で示される形状関数を提案し,まず上下方向の並進運動,回転運動さらに曲げ振動変形を記述できるように三角関数の係数を設定し,ついで両端自由の境界条件を満足するごとくべき級数の係数を定めた。さらに基礎式にガラーキン法を適用し有限多自由度系の非線形振動問題に変換した後,定常解を調和バランス法を用いて求めた。実際の計算を行い広い走行速度範囲にわたり,主要な主共振応答を明らかにした。その際支持ばねの取付位置ならびにはりモデルの断面変化が非線形共振応答におよぼす影響をも明らかにした。

2. 基礎式および境界条件

変断面を有するはりモデルが複数の磁気反発力により支持され,周期的なうねりを持つ軌道上を移動する場合の非線形振動問題を考える。図1のごとく長さ L ,密度 ρ ,ヤング率 E のはりの中央に原点をとり座標系を定める。なおはりの断面は x 軸方向に連続的に変化し,断面積 $\bar{A}(x)$ および断面二次モーメント $\bar{I}(x)$ は次式のごとく与えられるものとする。

* 平成元年6月26日 機械力学シンポジウムにおいて講演,原稿受付 平成元年9月25日。

¹ 正員,群馬大学工学部 (☎376 桐生市天神町1-5-1)。

² 学生員,群馬大学大学院。

³ 学生員,東京工業大学大学院 (☎227 横浜市緑区長津田4259)。

⁴ 正員,新潟大学工学部 (☎950-21 新潟市五十嵐2の町8050)。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}(x) &= A_0 \sum_p \phi_p(x/L)^{p-1} \\ \bar{I}(x) &= I_0 \sum_q \psi_q(x/L)^{q-1} \\ (p, q &= 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし A_0, I_0 はそれぞれ $x=0$ での値で ϕ_p, ψ_q は定数である ($\phi_1 = \psi_1 = 1$).

次に磁気反発力を非線形の集中ばねとみなし, x_d ($d=1, 2, 3, \dots$) の位置で弾性支持する. その支持力は変位の三次までの非線形性を持つものと仮定する. 一方軌道は正弦波状のうねりを持つものとしてその変位 U を次式のごとく仮定する.

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 \sin \frac{2\pi}{l} (x - Vt) \\ \text{ただし } V &= l\Omega/2\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

上式で U_0 はうねりの振幅, l はうねりの波長で V ははりの軌道に対する移動速度である. Ω ははりモデルが軌道のうねりを介してうける振動数である (t は時間). 問題を十分に長いはりの低次の曲げ振動の振動数領域に限定すると, はりの軸方向慣性力, 回転慣性ならびにせん断変形の影響は省略できる. はりのたわみを $W(x, t)$ とし, これを支配する無次元化した基礎式は次のごとくなる.

$$\left. \begin{aligned} L(w) &\equiv A(\xi)w_{,rr} + [I(\xi)w_{,\xi\xi}]_{,\xi\xi} \\ &+ \sum_d \delta(\xi - \xi_d) \sum_{k=1}^3 \gamma_{dk} (w - u)^k - A(\xi)p_s = 0 \\ (d &= 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$u = u_0 \sin(a\xi - \omega\tau), \quad \omega = aV \dots\dots\dots (2')$$

ただし無次元量に関する次の記号を用いてある.

$$\left. \begin{aligned} [\xi, \xi_d] &= [x, x_d]/L, \quad A(\xi) = \bar{A}(x)/A_0 \\ I(\xi) &= \bar{I}(x)/I_0, \quad w = W/r, \quad r = (I_0/A_0)^{1/2} \\ \gamma_{dk} &= \varepsilon_{dk} L^3/EI_0 r, \quad p_s = a_s \rho A_0 L^4/EI_0 r \\ \alpha &= 2\pi l/l, \quad [u, u_0] = [U, U_0]/r, \quad \omega = \Omega/\theta \\ \tau &= \theta t, \quad \theta = L^{-2}(EI_0/\rho A_0)^{1/2}, \quad v = V/L\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

上式で r ははりの原点の断面二次半径, γ_{dk} は無次元のばね定数 (ε_{dk} はばね定数), p_s は横方向静的加速度

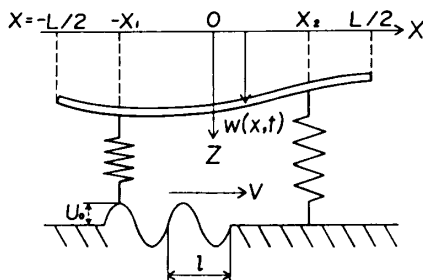


図 1 磁力支持されたはりの緒言と座標系

a_s による分布荷重の無次元量である. α は軌道うねりの波長に対するはりの長さの比(以下, 波長比と定義する). ω, τ, v はそれぞれ無次元の振動数, 時間と移動速度である. なお $\delta(\xi - \xi_d)$ はディラックのデルタ関数, カンマの後の添字はそれに関する偏微分を示す.

はりの境界条件は両端自由とし, w に関して次の条件式を得る.

$$\xi = \pm 1/2; \quad w_{,\xi\xi} = 0, \quad w_{,\xi\xi\xi} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

問題は各諸元が定められた場合, 基礎式(3)と境界条件式(5)を満足するたわみ w の定常解を求めることにある.

3. 解析方法

まず変位 $w(\xi, \tau)$ を次に定義する形状関数 $\zeta_j(\xi)$ を用い次式のごとく仮定する⁽⁵⁾⁽⁶⁾.

$$\left. \begin{aligned} w(\xi, \tau) &= \sum_j b_j(\tau) \zeta_j(\xi), \quad (j=1, 2, 3, \dots) \\ \zeta_j(\xi) &= e_j(\xi) f_j(\xi) \\ e_j(\xi) &= q_{1j} \cos p_{1j} \pi \xi + q_{2j} \sin p_{2j} \pi \xi \\ f_j(\xi) &= \sum_{s=1}^5 c_{js} \xi^{s-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

上式で $b_j(\tau)$ は未知時間関数である. $\zeta_j(\xi)$ は形状関数で, 三角関数 $e_j(\xi)$ と四次までのべき級数 $f_j(\xi)$ との積で示される. $e_j(\xi)$ の係数 p_{nj}, q_{nj} ($n=1, 2$) は各次数 j に対応した係数でその値は予想される振動形に近似して仮定される⁽⁶⁾. ついで上式を境界条件式(5)に代入すると未定係数 c_{js} に関する次の連立方程式を得る.

$$\sum_{s=1}^5 \beta_{is} c_{js} = 0, \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots\dots (7)$$

ここで β_{is} はすべて $p_{1j}, q_{1j}, p_{2j}, q_{2j}$ の関数で与えられる. 上式で $c_{j1}=1$ とおくと c_{j2} から c_{j5} が決定される.

次に $f_j(\xi)$ の $(m-1)$ 階微分を $f_j(\xi)^{(m-1)}$ とすると次のごとくなる.

$$\left. \begin{aligned} f_j(\xi)^{(m-1)} &= \sum_{s=1}^5 d_{mjs} \xi^{s-1} \\ \text{ただし } d_{mjs} &= P_{m+s-2, s-1} c_{j, m+s-1} \\ d_{mjs} &= 0, \quad (s+m > 6 \text{ の場合}) \\ P_{ms} &= m!/s! \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

さらに $\zeta_j(\xi)$ の $(m-1)$ 階微分は次のごとく整理される.

$$\left. \begin{aligned} \zeta_j(\xi)^{(m-1)} &= \sum_{n=1}^2 \sum_{s=1}^5 (g_{mnjs} \xi^{s-1} \cos p_{nj} \pi \xi \\ &+ h_{mnjs} \xi^{s-1} \sin p_{nj} \pi \xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

g_{mnjs}, h_{mnjs} ($m=1 \sim 5$) は d_{mjs} の関数で次に示す.

$$g_{11js} = q_{1j} d_{1js}, \quad h_{11js} = 0$$

$$\begin{aligned}
 g_{12js} &= 0, \quad h_{12js} = q_{2j}d_{1js} \\
 g_{21js} &= q_{1j}d_{2js}, \quad h_{21js} = -q_{1j}p_{1j}\pi d_{1js} \\
 g_{22js} &= q_{2j}p_{2j}\pi d_{1js}, \quad h_{22js} = q_{2j}d_{2js} \\
 g_{31js} &= q_{1j}(d_{3js} - p_{1j}^2\pi^2 d_{1js}) \\
 h_{31js} &= -2q_{1j}p_{1j}\pi d_{2js} \\
 g_{32js} &= 2q_{2j}p_{2j}\pi d_{2js} \\
 h_{32js} &= q_{2j}(d_{3js} - p_{2j}^2\pi^2 d_{1js}) \\
 g_{41js} &= q_{1j}(d_{4js} - 3p_{1j}^2\pi^2 d_{2js}) \\
 h_{41js} &= -q_{1j}(3p_{1j}\pi d_{3js} - p_{1j}^3\pi^3 d_{1js}) \\
 g_{42js} &= q_{2j}(3p_{2j}\pi d_{3js} - p_{2j}^3\pi^3 d_{1js}) \\
 h_{42js} &= q_{2j}(d_{4js} - 3p_{2j}^2\pi^2 d_{2js}) \\
 g_{51js} &= q_{1j}(d_{5js} - 6p_{1j}^2\pi^2 d_{3js} + p_{1j}^4\pi^4 d_{1js}) \\
 h_{51js} &= -4q_{1j}(p_{1j}\pi d_{4js} - p_{1j}^3\pi^3 d_{2js}) \\
 g_{52js} &= 4q_{2j}(p_{2j}\pi d_{4js} - p_{2j}^3\pi^3 d_{2js}) \\
 h_{52js} &= q_{2j}(d_{5js} - 6p_{2j}^2\pi^2 d_{3js} + p_{2j}^4\pi^4 d_{1js})
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

ここで基礎式(3)にガラーキン法を適用すると、 $\zeta_i(\xi)$ に関して次の条件式を得る。

$$\int_{-1/2}^{1/2} L(w)\zeta_i(\xi)d\xi = 0, \quad (j=1, 2, 3, \dots) \tag{11}$$

上式に式(6)を代入し、積分を実行し整理すると $b_j(\tau)$ に関する次の連立非線形常微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 &\sum_j B_{ij}b_{j,\tau\tau} + \sum_j C_{ij}b_j + \sum_j \sum_k D_{ijk}b_j b_k \\
 &+ \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl}b_j b_k b_l + F_i + G_i \\
 &+ \sum_{n=1}^3 (H_{ni} \cos n\omega\tau + I_{ni} \sin n\omega\tau) \\
 &+ \sum_{n=1}^2 \sum_j (J_{nij} \cos n\omega\tau + K_{nij} \sin n\omega\tau)b_j \\
 &+ \sum_j \sum_k (L_{ijk} \cos \omega\tau + M_{ijk} \sin \omega\tau)b_j b_k \\
 &- p_s N_i = 0 \quad (i, j, k, l=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

ここで次の記号を用いてある。

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_p \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s [\phi_p g_{1mjr} g_{1nis} \bar{\nu}_{ijmnp rs}^{(+)} \\
 &+ \phi_p h_{1mjr} h_{1nis} \bar{\nu}_{ijmnp rs}^{(-)} \\
 &- \phi_p g_{1mjr} h_{1nis} \bar{\mu}_{ijmnp rs}^{(-)} \\
 &+ \phi_p h_{1mjr} g_{1nis} \bar{\mu}_{ijmnp rs}^{(+)}] \\
 C_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_q \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s [\psi_q g_{3mjr} g_{3nis} \bar{\nu}_{ijmnp rs}^{(+)} \\
 &+ \psi_q h_{3mjr} h_{3nis} \bar{\nu}_{ijmnp rs}^{(-)} \\
 &- \psi_q g_{3mjr} h_{3nis} \bar{\mu}_{ijmnp rs}^{(-)} \\
 &+ \psi_q h_{3mjr} g_{3nis} \bar{\mu}_{ijmnp rs}^{(+)}] + \sum_d \gamma_{d1} \zeta_{di} \zeta_{di} \\
 D_{ijk} &= \sum_d \gamma_{d2} \zeta_{di} \zeta_{dj} \zeta_{dk} \\
 E_{ijkl} &= \sum_d \gamma_{d3} \zeta_{di} \zeta_{dj} \zeta_{dk} \zeta_{dl} \\
 F_i &= \sum_d \gamma_{d0} \zeta_{di}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_i &= (1/2) \sum_d \gamma_{d2} \zeta_{di} u_0^2 \\
 H_{1i} &= - \sum_d [\gamma_{d1} + (3/4)\gamma_{d3} u_0^2] \zeta_{di} u_0 \sin \alpha \xi_d \\
 H_{2i} &= -(1/2) \sum_d \gamma_{d2} \zeta_{di} u_0^2 \cos 2\alpha \xi_d \\
 H_{3i} &= (1/4) \sum_d \gamma_{d3} \zeta_{di} u_0^3 \sin 3\alpha \xi_d \\
 I_{1i} &= \sum_d [\gamma_{d1} + (3/4)\gamma_{d3} u_0^2] \zeta_{di} u_0 \cos \alpha \xi_d \\
 I_{2i} &= (1/2) \sum_d \gamma_{d2} \zeta_{di} u_0^2 \sin 2\alpha \xi_d \\
 I_{3i} &= -(1/4) \sum_d \gamma_{d3} \zeta_{di} u_0^3 \cos 3\alpha \xi_d \\
 J_{1ij} &= -2 \sum_d \gamma_{d2} \zeta_{di} \zeta_{dj} u_0 \sin \alpha \xi_d \\
 J_{2ij} &= -(3/2) \sum_d \gamma_{d3} \zeta_{di} \zeta_{dj} u_0^2 \cos 2\alpha \xi_d \\
 K_{1ij} &= 2 \sum_d \gamma_{d2} \zeta_{di} \zeta_{dj} u_0 \cos \alpha \xi_d \\
 K_{2ij} &= (3/2) \sum_d \gamma_{d3} \zeta_{di} \zeta_{dj} u_0^2 \sin 2\alpha \xi_d \\
 L_{ijk} &= -3 \sum_d \gamma_{d3} \zeta_{di} \zeta_{dj} \zeta_{dk} u_0 \sin \alpha \xi_d \\
 M_{ijk} &= 3 \sum_d \gamma_{d3} \zeta_{di} \zeta_{dj} \zeta_{dk} u_0 \cos \alpha \xi_d \\
 N_i &= \sum_p \sum_n \sum_s [\phi_p g_{1nis} \nu_{p+s-2, nj} + \phi_p h_{1nis} \mu_{p+s-2, nj}] \\
 &(p, q, d=1, 2, 3, \dots; m, n=1, 2 \\
 &; r, s=1, 2, \dots, 5)
 \end{aligned} \tag{13}$$

ただし次の定積分および関数を用いてある。なお ϕ_p, ψ_p は式(1)で定義されており B_{ij}, C_{ij} は添字 i, j に関して対称であることが確かめられる。

$$\begin{aligned}
 \bar{\nu}_{ijmnp rs}^{(+)} &\equiv \int_{-1/2}^{1/2} \xi^{p+r+s-3} \cos(p_m j - p_n i) \pi \xi d\xi \\
 &\pm \int_{-1/2}^{1/2} \xi^{p+r+s-3} \cos(p_m j + p_n i) \pi \xi d\xi \\
 \bar{\mu}_{ijmnp rs}^{(+)} &\equiv \int_{-1/2}^{1/2} \xi^{p+r+s-3} \sin(p_m j - p_n i) \pi \xi d\xi \\
 &\pm \int_{-1/2}^{1/2} \xi^{p+r+s-3} \sin(p_m j + p_n i) \pi \xi d\xi \\
 \nu_{inj} &\equiv \int_{-1/2}^{1/2} \xi^i \cos p_n j \pi \xi d\xi \\
 \mu_{inj} &\equiv \int_{-1/2}^{1/2} \xi^i \sin p_n j \pi \xi d\xi \\
 \zeta_{di} &\equiv \zeta_i(\xi_d)
 \end{aligned} \tag{14}$$

上式はすべてべき級数と三角関数の積の定積分で示されその値は容易に求まる。

静的変形を求める場合には式(12)において時間項ならびに慣性力項を除き $b_j = b_j^0$ とおくことにより b_j^0 に関する連立の三次方程式を得る。これを解くことにより磁力支持されたはりの静的荷重 p_s によるたわみが定まる。ついで $b_j = b_j^0 + \bar{b}_j(\tau)$ とおいて式(12)に代入して整理すると、静的平衡位置を中心とした方程式を得る。さらに非線形項、周期外力項を省略した場合の微小振幅自由振動に関する式から固有振動数 $\bar{\omega}_i (i=$

1, 2, 3, ...) ならびに固有振動系 $\bar{\omega}_i$ を得る。それに基
づく基準座標 \bar{b}_i を用いて変換すると次の基準系の運
動方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 M(\bar{b}_i) &\equiv \bar{b}_{i,rr} + 2\bar{\varepsilon}_i \bar{\omega}_i \bar{b}_{i,r} + \bar{\omega}_i^2 \bar{b}_i \\
 &+ \sum_j \sum_k \bar{D}_{ijk} \bar{b}_j \bar{b}_k \\
 &+ \sum_j \sum_k \sum_l \bar{E}_{ijkl} \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l + \bar{G}_i \\
 &+ \sum_{n=1}^3 (\bar{H}_{ni} \cos n\omega\tau + \bar{I}_{ni} \sin n\omega\tau) \\
 &+ \sum_{n=1}^2 \sum_j (\bar{J}_{nij} \cos n\omega\tau + \bar{K}_{nij} \sin n\omega\tau) \bar{b}_j \\
 &+ \sum_j \sum_k (\bar{L}_{ijk} \cos \omega\tau + \bar{M}_{ijk} \sin \omega\tau) \bar{b}_j \bar{b}_k = 0 \\
 &(i, j, k, l=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

上式で \bar{D}_{ijk} などは式(13)の係数に基準座標変換した
値である。なおここでモーダルダンピング $\bar{\varepsilon}_i$ を導入
してある。上記振動系において工学的に最も重要な共
振応答として主共振が考えられる。これらの定常解を
求めるに当たり式(15)の定常解を次のごとく仮定す
る。

$$\bar{b}_i = \sum_p [C_{i1p} \cos p\mu\omega\tau + C_{i2p} \sin p\mu\omega\tau]$$

$$(i=1, 2, 3, \dots, p=0, 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (16)$$

ここで C_{i1p}, C_{i2p} は未定係数である。主共振応答を
求めるには $\mu=1$, なお分数次調波共振応答では $\mu=$
 $1/n$ (n : 整数)をとればよい。

式(15)に式(16)を代入し、調和バランス法を適用す
ると次の条件式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\mu S \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu S \omega} M(\bar{b}_i) \cos \mu s \omega \tau d\tau = 0 \\
 \frac{\mu S \omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu S \omega} M(\bar{b}_i) \sin \mu s \omega \tau d\tau = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$(s=0, 1, 2, \dots, \mu=1)$$

これより C_{i1p}, C_{i2p} に関する連立三次方程式を得
る。これを解くことにより、上記共振応答の定常解が
定まる。なお応答の振幅を実効値 w_{rms} にて表示するに
は、次式により与えられる。

$$w_{rms} = \left[\frac{1}{2} \sum_p \left\{ \left(\sum_i C_{i1p} \bar{\omega}_i \right)^2 + \left(\sum_i C_{i2p} \bar{\omega}_i \right)^2 \right\} \right. \\
 \left. + \left(\sum_i C_{i10} \bar{\omega}_i \right)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (18)$$

4. 計算結果および考察

上記解法にもとづき、主に一様断面のはりを同一の
ばね強さを持つ2個の非線形ばねで支持する場合につ
いて計算を行った。まず形状関数を設定し本問題への
適用性を示した。ついでばねの支持位置の変化、さら
に断面が変化した場合の非線形振動応答を求めた。

4.1 形状関数の仮定と線形固有振動数 式(6)

で示される形状関数の未定係数 p_{nj} ($n=1, 2; j=1, 2,$
 $3, \dots$) を支持ばねのない一様断面のはりの固有振動形に
近似する。この場合の係数を表1にまた各次数 j 対
応する形状関数を図2に示す。図2より $j=1$ では並進
運動, $j=2$ でははり中央を中心とする回転運動, $j \geq 3$
では曲げ変形を記述できることがわかる。なおこれら
の関数を用いて両端自由はりの最低次の曲げ振動数を
求めた。この場合 $j=3, 5$ の2項で近似した場合 $\bar{\omega}_3=$
 22.6 を得た。これは厳密解 $\bar{\omega}_3=22.37$ と比較して約1
%の誤差を有し少ない項数でもよい収束をすることが
わかる。以下の計算では最低次から第3次の振動形に
ついて次数 j を最大5とした。また次に示す諸量を仮
定して計算を行った。

非線形ばね定数:

$$\gamma_{d0}=50, \gamma_{d1}=30, \gamma_{d2}=2, \gamma_{d3}=0.1 \quad (d=1, 2)$$

軌道変動の無次元振幅: $u_0=0.1$,

表1 形状関数 $\zeta_i(\xi)$ の係数 p_{ni} の値

j	p_{1j}	q_{1j}	p_{2j}	q_{2j}
1	0	0.5	0	0
2	0	0	0.35	1
3	1.2	0.4	0	0
4	0	0	2.0	0.4
5	3.6	0.4	0	0

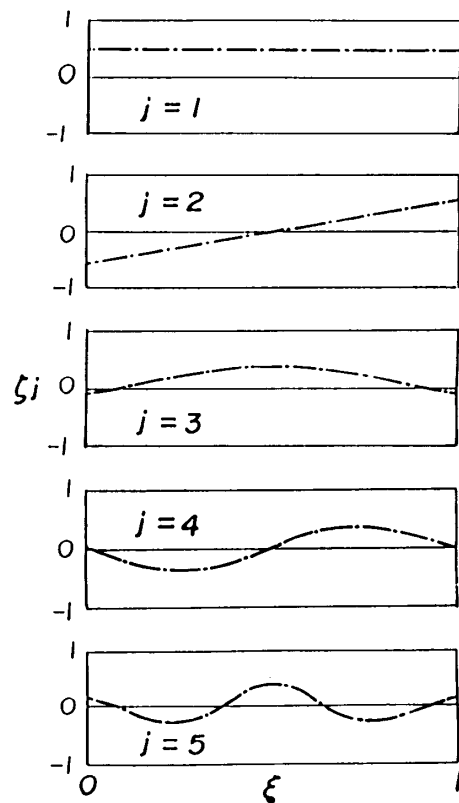


図2 両端自由はりの形状関数近似

波長比: $\alpha=2\pi(L/l)=2\pi(10)$

静荷重: $p_s=100$

モーダルダンピング: $\varepsilon_i=0.003$ ($i=1, 2, 3$)

なお二つの非線形ばねは同一のばね定数を持つものとする。図3に非線形ばね支持力と変位との関係を示す。縦軸が無次元の集中ばね力 $q_s=Q_s L^3/EI_0 r$ (Q_s : ばね力)で、横軸は無次元変位 w である。なお実際の磁気反発力でははりの自重などによって静的に釣り合った後に支持系に復元力特性を持つこととなる。二つのばねの支持位置をはり中央に対して対称に配置し $\xi_1=-0.3$, $\xi_2=0.3$ とした場合、次の値の固有振動数を得た。

$$\bar{\omega}_1=7.70, \bar{\omega}_2=8.02, \bar{\omega}_3=24.8$$

また対応する線形固有振動形を図4に示す。図4中縦軸は振幅の最大値を1にとって示してある。横軸は無次元座標である。図4より第1次の振動形は並進運動と曲げ変形が互いに連成していることがわかる。

4.2 主共振応答曲線 一様断面のはりモデルが中央に対称な位置でばね支持された場合、移動速度の変化による主共振応答を求めた。 $\xi_1=-0.3$, $\xi_2=0.3$ の位置すなわちばね支持間隔は軌道うねりの6倍に選んだ場合の結果を図5に示す。縦軸ははりの自由端 ($\xi=0.5$)における振幅の実効値を示し、横軸は軌道うねりによる無次元加振振動数 ω である。なお移動速度 $v=\omega/\alpha$ である。図5中 ($i, 1$) で示される応答曲線は第 i 次の振動形を有する主共振応答に対応する。また ∇ マークは第 i 次の線形固有振動数の値を示す。非線形ばねの支持位置がはり中央に関して対称の場合、第1次および第3次の振動形が誘起される。この場合、特に並進運動が支配的な第1次の振動形では漸軟形のばね特性を持つ共振応答であることがわかる。はりモデルが停止状態 ($\omega=0$) から逐次速度を増していくと第1次の主共振近傍での応答振幅はいわゆるジャンプ現象により急激に増大する。さらに第3次の共振点近傍では非線形性の影響が小さく線形応答とみなせる。これは非線形ばねの支持位置がはりの曲げ振動の節点近傍にあることによりはりの曲げ変形が支配的となるためである。なお減速時において速度が第1次の共振点をゆっくり通過する場合は応答振幅は共振曲線にそって逐次大きくなる。

次に支持ばねの位置が $\xi_1=-0.45$, $\xi_2=0.45$ とし、ばね支持間隔を増大した場合の共振応答曲線を図6に示す。この場合、第3次の振動形に対応する応答は漸軟形のばね特性を持つ。これは曲げ変形が支配的な応答に支持ばねの非線形性の影響が増加するためである。なおこの応答曲線を図5の結果と比較すると次の

ことがわかる。支持間隔が大となると第1次の線形固有振動数 $\bar{\omega}_1$ は低振動数側に、また第3次の $\bar{\omega}_3$ は高振動数側に移行することがわかる。これに伴い対応する主共振応答も変化することとなる。

さらに支持ばねの位置をはり中央に対して非対称に配置した場合を考える。 $\xi_1=-0.3$, $\xi_2=0.325$ の場合の結果を図7に示す。この場合は並進運動および曲げ変形のほかに回転の運動を伴う共振応答が並進運動の共振点近傍に誘起される。すなわち比較的狭い振動数の範囲内で複雑な応答を行うことがわかる。

今まで一様断面のはりについて共振応答を求めたが、次に断面中央に対して非対称性を有する場合を考える。断面は長方形で高さが一定、幅がテーパ状に変化し $A(\xi)=I(\xi)=1-0.5\xi$ の場合を仮定する。支持位

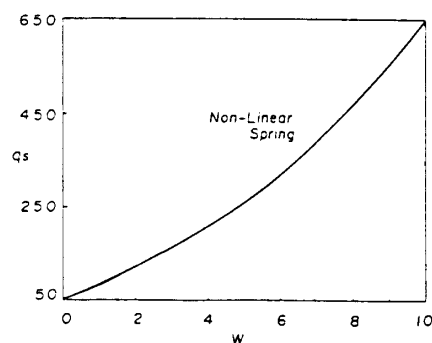


図3 磁気反発力と変位の関係

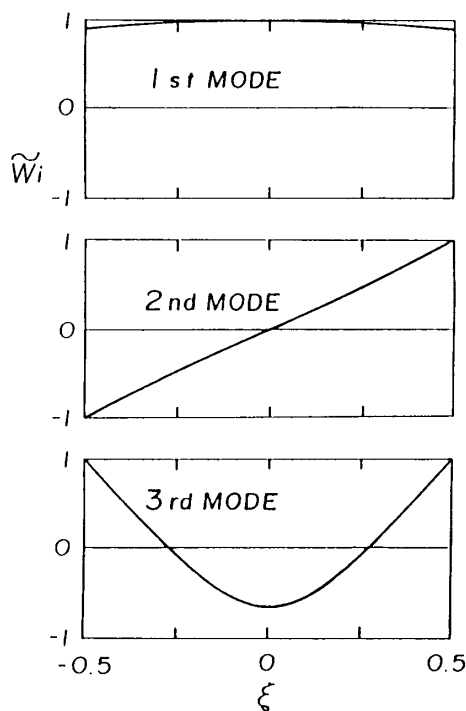
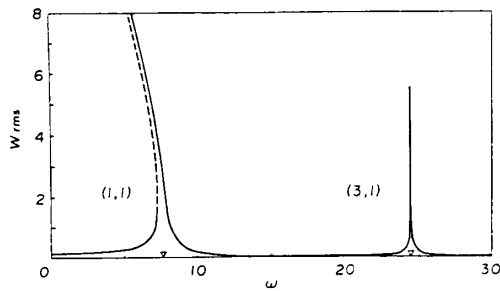
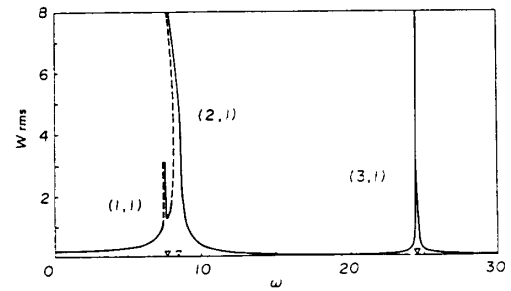


図4 磁力支持されたはりの線形固有振動形



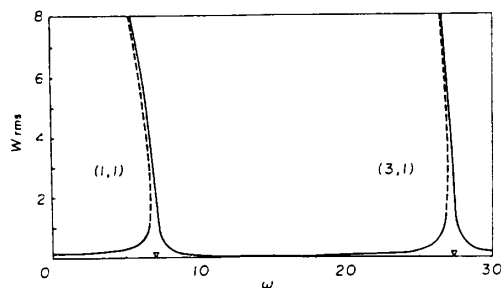
$$(\xi_1 = -0.3, \xi_2 = 0.3)$$

図5 一様断面はりの走行時における主共振応答



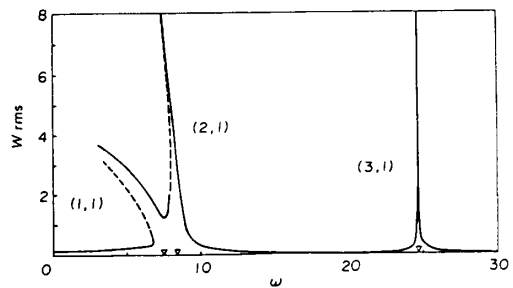
$$(\xi_1 = -0.3, \xi_2 = 0.325)$$

図7 一様断面はりの走行時における主共振応答



$$(\xi_1 = -0.45, \xi_2 = 0.45)$$

図6 一様断面はりの走行時における主共振応答



$$(\xi_1 = -0.3, \xi_2 = 0.3)$$

図8 テーパ形状はりの走行時における主共振応答

置は $\xi_1 = -0.3$, $\xi_2 = 0.3$ とする。結果を図8に示す。図7の場合と同様に並進、回転運動、および曲げ変形を伴う共振応答が誘起される。特に並進運動の振動形が誘起される主共振応答では強い漸軟形の非線形共振応答となり広い振動数範囲にわたり存在することがわかる。また回転に対しては大振幅応答はするが並進運動と比較して狭い振動数範囲での共振応答となることがわかる。

なお実際の計算は行っていないが、ばねの支持間隔が軌道うねりの波長の整数倍でない場合では二つの支持ばねに位相差を持つ加振を与えることとなる。この場合では回転振動が顕著となることが言える。

5. 結 言

磁気反発力により浮上した変断面はりモデルが周期的うねる軌道上を移動する場合の非線形振動問題を理論的に解析した。得られた結果を要約すると次のごとくなる。

(1) 本解析で提案した形状関数は三角関数の係数を変化させることにより、物理的に洞察しやすい並進運動、回転運動ならびに曲げ変形を記述することができ、解析が容易になる。

(2) 磁気反発力により支持されたはりはすべて漸軟形のばね特性を持つ共振応答を示す。

(3) 非線形ばねの支持位置がはり自体の曲げ振動の節点から遠ざかるほど共振応答の非線形性は大きくなる。

(4) 二つの支持ばねが軌道から励振をうけ、支持ばねの位置がはり中央に対し対称性を持つ場合、並進運動と曲げ変形が支配的な非線形共振応答となる。一方支持位置の非対称性また断面の中央に対する非対称性が増すほど回転運動が顕著に現れるとともに並進運動の非線形性が増加する。

最後に図面作成に尽力された内山茂文部技官、本学部学生 森田知成、山越二郎諸君に感謝する。なお数値計算はテクニカルコンピュータ Hp 9816 と Hp 330 を用いた。

文 献

- (1) Rusov, S., *Z. Angew. Math. Mech.*, 66-4(1986), 85.
- (2) Gürgöze, M., *Z. Angew. Math. Mech.*, 68-11(1988), 555.
- (3) 谷藤・ほか3名, 機論, 54-502, A, B, C(1988), 1164.
- (4) 永井, 機論, 54-501, C(1988), 39.
- (5) 永井・ほか3名, 機論, 54-497, C(1988), 39.
- (6) 永井・ほか3名, 機論, 55-516, C(1989), 1941.