

鼓形ウォームの検査法に関する研究*

大 矢 誠^{*1}, 吉村和幸^{*2}, 田村久司^{*1}

A New Method of Inspecting an Hourglass Worm

Makoto OYA, Kazuyuki YOSHIMURA and Hisashi TAMURA

A method of inspecting an hourglass worm is newly proposed. The equation expressing the worm tooth surface involves some constants corresponding to the machine setting of the grinding wheel on a worm grinding machine. The constants differ from the design values because of machine setting error. The purpose of this method is to find these deviations. The machine setting error will be compensated and regrinding will be carried out. The coordinates of a point on the tooth surface is measured with a three-dimensional coordinate measuring machine. The observation equation is obtained from the measured coordinate. The constants can be determined from the equation by the method of least squares. This method was practically applied to worms and the deviations were found. The propriety of the method will be confirmed by regrinding.

Key Words: Measurement, Gear, Worm Gear, Method of Least Squares, Inspection of Worm Tooth Surface, Machine Setting Error, Three-Dimensional Coordinate Measuring Machine

1. 緒 言

鼓形ウォームの歯面は、曲がり歯傘歯車やハイボイドギョニオンの歯面と同様に、三次元の複雑な創成面である。すなわち歯面の曲率とねじり率は歯面上のいたるところで異なり、一様でない。しかし、歯面がいかに複雑であっても歯面創成時の各種誤差の影響は、程度の差はあるにしても、歯面に現れているはずである。実際には歯面の複雑さがそれらの影響をわかりにくくしているだけである。

本研究は鼓形ウォーム歯面の検査法に関する研究で、ウォーム歯面上の点の座標測定によって、歯面を創成歯切りする際の工具取付け位置の誤差を検出しようと試みたものである。工具取付け位置の誤差を知り、これをウォーム創成歯切り作業にフィード・バックし、目的とする歯面を得ることが本研究の最終目標である。

本研究では、媒介歯車歯面に円すい面をもつ鼓形ウォーム⁽¹⁾のうち、現在実用に供されている媒介歯車軸

傾角⁽¹⁾ $\alpha=0$ のウォームを測定対象とする。その理由は、このウォームの歯面が理論的に解析されているにもかかわらず、検査法がいまだに確立されていないからである。

本検査法の基本的な考え方は著者らの一人による既報の曲がり歯傘歯車の検査法⁽²⁾と同じである。この考え方の概要を以下に示す。一般に歯車歯面を創成歯切りするとき、工具をある位置に取付けるが、その取付け位置には誤差がある。この工具で歯面を創成歯切りすると、その工具取付け位置に対応して理論的(幾何学的)にも実際にもただ一つの歯面が決定する。実際に得た歯車の歯面を被測定歯面とし、その歯面上の多数の点を三次元測定機によって座標測定する。そして、それらの測定値と最もよく適合する幾何学的歯面を工具取付け位置の関数として最小二乗法により決定する。このように決定した幾何学的歯面が被測定歯面を表していると考え、この幾何学的歯面に対応する工具取付け位置が創成歯切り時のそれである。こうして求めた工具取付け位置と設計上のそれとの差を工具取付け位置の誤差とする。この誤差を補正して修正歯切りを行えば、目的とする歯面を得ることができるであろう。以上が本検査法の概略である。

* 平成3年11月24日 Int. Conf. on Motion and Power Transmission において講演, 原稿受付 平成3年8月14日.

^{*1} 正員, 新潟大学工学部 (〒950-21 新潟市五十嵐2の町8050).

^{*2} 新潟大学大学院.

2. ウォーム歯面

図1にウォーム創成歯切り時の座標系を示す。ここに、図1を参照して

e : 媒介歯車軸とウォーム軸の軸間距離

ω_1 : 媒介歯車の角速度ベクトル

ω_w : ウォームの角速度ベクトル

i : 減速比 $i = |\omega_w|/|\omega_1|$

$O-xyz$ はホブ盤すなわち鼓形ウォーム歯切り盤に固着した静止座標系である。 z 軸はホブ盤テーブル回転軸で、これは媒介歯車軸すなわち工具歯車軸に一致している。 x 軸はホブ軸すなわちウォーム軸と平行である。 $O_1-x_1y_1z_1$, $O_w-x_wy_wz_w$ はそれぞれ媒介歯車、ウォームに固着して回転する座標系であり、 z_1 軸、 x_w 軸はそれぞれ媒介歯車軸、ウォーム軸である。また O_1 は O と一致し、 O_w は y 軸上にある。

いま、静止座標系 $O-xyz$ に対する媒介歯車の回転角を ϕ/i とすると、ウォームの回転角は ϕ となる。た

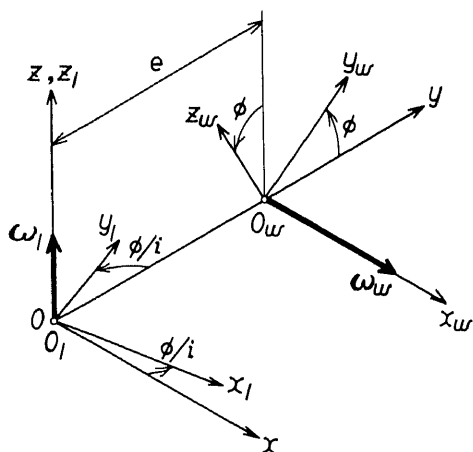


図1 座標系

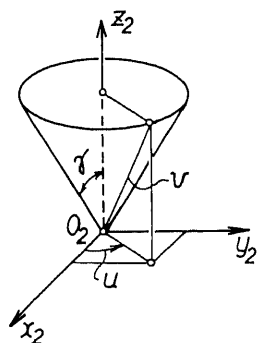


図2 円すい面

だし $\phi=0$ のとき y_1 軸と y_w 軸は y 軸に一致するものとする。

ウォームは円すい面を歯面(刃面)とする媒介歯車で創成歯切りされる。図2に示す座標系 $O_2-x_2y_2z_2$ で、 u, v をパラメータとして半頂角 γ の円すい面 X_{c2} とその単位法線 N_{c2} を表示すると

$$\begin{aligned} X_{c2}(u, v) &= \begin{Bmatrix} v \sin(\gamma) \cos(u) \\ v \sin(\gamma) \sin(u) \\ v \cos(\gamma) \end{Bmatrix} \\ N_{c2}(u) &= \begin{Bmatrix} \cos(\gamma) \cos(u) \\ \cos(\gamma) \sin(u) \\ -\sin(\gamma) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

この円すい面 X_{c2} を座標系 $O_1-x_1y_1z_1$ に取付けて媒介歯車歯面とする(図3)。このとき y_1 軸と y_2 軸は平行となるようにする。また a, b は円すい面の取付け位置を示し、 δ は z_2 軸と x_1 軸のなす角である。

さて、媒介歯車歯面とその単位法線を座標系 $O_1-x_1y_1z_1$ で表し X_{c1}, N_{c1} とすれば

$$\begin{aligned} X_{c1}(u, v) &= BX_{c2} + L \\ N_{c1}(u) &= BN_{c2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 B は y_1 軸回りの回転に関する座標変換行列、 L は列ベクトルであり、それぞれ次の内容をもっている。

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} \cos(-\pi/2-\delta) & 0 & \sin(-\pi/2-\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\pi/2-\delta) & 0 & \cos(-\pi/2-\delta) \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} b \cos(\delta) \\ a \\ b \sin(\delta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

静止座標系 $O-xyz$ に対する座標系 $O_1-x_1y_1z_1$ の回転角が ϕ/i のとき、そのときの媒介歯車歯面 X_{c1} とそ

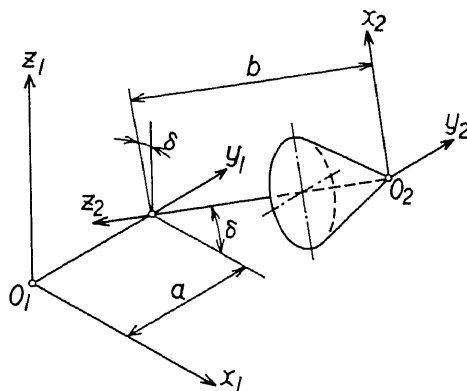


図3 円すい面取付け位置

の単位法線 N_{c1} を静止座標系 $O-xyz$ で表し、それぞれ X_c, N_c とおくと

$$\left. \begin{aligned} X_c(u, v, \phi) &= C(\phi/i) X_{c1} \\ N_c(u, \phi) &= C(\phi/i) N_{c1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 C は z 軸回りの回転に関する座標変換行列であり次の内容をもつ。

$$C(\phi/i) = \begin{bmatrix} \cos(\phi/i) & -\sin(\phi/i) & 0 \\ \sin(\phi/i) & \cos(\phi/i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

静止座標系 $O-xyz$ における媒介歯車とウォームの相対速度を $W(X_c)$ とすると、図1を参照して

$$\left. \begin{aligned} W(X_c) &= \omega_1 \times X_c - \omega_w \times (X_c - D) \\ D &= (0, e, 0)^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

媒介歯車歯面によるウォーム歯面創成条件は

$$N_c \cdot W(X_c) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

この条件を満たす X_c 上の曲線が、ウォームの回転角が ϕ の瞬間のウォーム歯面創成線である。すなわち式(7)より $v = v(u; \phi)$ を求め、これを式(4)に代入すれば、ウォーム歯面創成線 $X_c(u; \phi)$ を導くことができる。この創成線 $X_c(u; \phi)$ をウォームに固着した座標系 $O_w-x_wy_wz_w$ で見る。そして u, ϕ をパラメータとすると、これはウォーム歯面 X_w を示す式になる。 X_w の単位法線を N_w とすると

$$\left. \begin{aligned} X_w(u, \phi) &= A(-\phi)(X_c(u, \phi) - D) \\ N_w(u, \phi) &= -A(-\phi)N_c(u, \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 A は x_w 軸回りの回転に関する座標変換行列であり、次の内容をもつ。

$$A(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

3. ウォーム検査法

本法は創成歯切り時の工具取付け位置を検査するものであるが、ウォーム歯面 X_w を表す式に含まれる工具の位置・姿勢 a, b, δ 、形状 γ 、鼓形ウォーム歯切り盤の状態 e などの定数も原理的にはすべて検査可能である。

まず、これらの定数のうち検査対象とするものをいくつか選び、それらを C_1, C_2, \dots, C_k で表すことにすると、ウォーム歯面の式(8)は形式的には次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} X_w &= X_w(u, \phi; C_1, C_2, \dots, C_k) \\ N_w &= N_w(u, \phi; C_1, C_2, \dots, C_k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

次に、式(10)で示されるウォーム歯面 X_w を三次元測定機上に置き、点 O_w と点 O_m および x_w 軸と x_m 軸が一致するように測定座標系 $O_m-x_my_mz_m$ を設定する

(図4)。この設定は容易であるが、 y_m 軸と y_w 軸を正確に一致させることができない。したがって両軸のなす角 Φ (定数) も検査対象に含めなければならない。

ウォーム歯面 X_w とその単位法線 N_w を測定座標系 $O_m-x_my_mz_m$ で表し、これらをそれぞれ X_m, N_m とすると

$$\left. \begin{aligned} X_m &= A(\Phi)X_w \\ N_m &= A(\Phi)N_w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

図5に、ウォーム歯面 X_m と半径 r_0 の球状測子とが点 Q で接触している状態を示す。測定座標系 $O_m-x_my_mz_m$ での球状測子の中心 P の座標 (P_x, P_y, P_z) を表す位置ベクトル P は式(11)の X_m, N_m を用いて次式で表現できる。

$$P = X_m + r_0 N_m \dots\dots\dots (12)$$

ここに P は列ベクトルであり

$$P = (P_x, P_y, P_z)^T \dots\dots\dots (13)$$

一方、式(12)とは無関係に、歯面上にある球状測子の中心 P の座標 (M_x, M_y, M_z) が三次元測定機で測定される。この測定値を列ベクトル M で表すことにする。

$$M = (M_x, M_y, M_z)^T \dots\dots\dots (14)$$

ここで直角座標系で表示された P と M を、 yz 面を

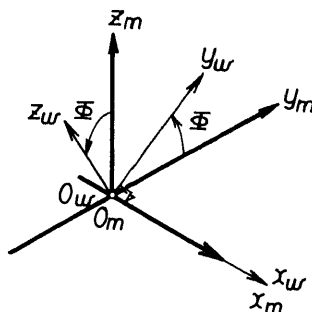


図4 測定座標系とウォーム座標系

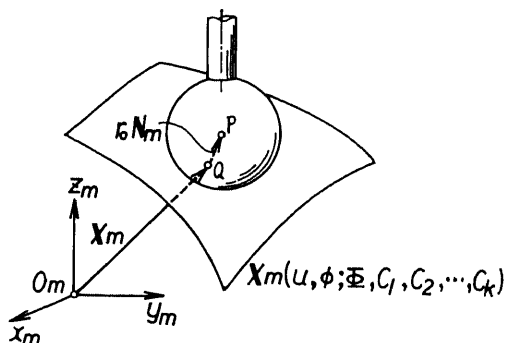


図5 測定状態

$r\theta$ 面とする円筒座標系 (x_m, r_m, θ_m) で表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (P_x, P_r, P_\theta)^T \\ \mathbf{M} &= (M_x, M_r, M_\theta)^T \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに

$$\begin{aligned} P_r &= \sqrt{P_y^2 + P_z^2} \\ P_\theta &= \tan^{-1}(P_z/P_y) \\ M_r &= \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \\ M_\theta &= \tan^{-1}(M_z/M_y) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

このように変換すると、 \mathbf{P} の各成分のうち P_x, P_r には ϕ が含まれず、 P_θ に次式の形で含まれるようになる。

$$P_\theta = S_\theta(u, \phi; C_1, C_2, \dots, C_k) + \phi \quad \dots\dots\dots (17)$$

さて、 P_x と M_x および P_r と M_r をそれぞれ等しくおき

$$\begin{aligned} M_x - P_x(u, \phi; C_1, C_2, \dots, C_k) &= 0 \\ M_r - P_r(u, \phi; C_1, C_2, \dots, C_k) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(18)より、 ϕ を含まない形で u と ϕ を求めることができる。これが円筒座標系を導入した効果である。また式(18)から求められる u, ϕ には、 C_1, C_2, \dots, C_k が含まれるから、

$$\begin{aligned} u &= u(C_1, C_2, \dots, C_k) \\ \phi &= \phi(C_1, C_2, \dots, C_k) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

この u, ϕ を式(16)の P_θ に代入し、 M_θ と比較する。もしウォーム歯面 X_w が正確に製作されており、 ϕ の値もわかっていれば、 P_θ と M_θ は一致するはずである。

$$M_\theta - P_\theta(\phi, C_1, C_2, \dots, C_k) = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

ところが、 ϕ は未知であり、ウォーム歯面 X_w には製作誤差があるので、式(20)の右辺は零にはならず残差 E を生じる。

$$E = M_\theta - P_\theta(\phi, C_1, C_2, \dots, C_k) \quad \dots\dots\dots (21)$$

この残差 E は M_θ と P_θ の差、すなわち x_m 軸回りの偏角の差である。

いま、ウォーム歯面上で任意の n 個の点を座標測定したとする。 i 番目の測定値 $M_i (i=1, 2, \dots, n)$ に対応する残差を式(21)より求め、これを E_i とする。この E_i をすべて零にするような $\phi, C_1, C_2, \dots, C_k$ は一般にはない。そこで E_i の二乗和を最小にする $\phi, C_1, C_2, \dots, C_k$ を求めることにする。残差 E_i の二乗和を F とすると

$$F = \sum_{i=1}^n E_i^2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

F を最小にする条件は

$$\left. \begin{aligned} \partial F / \partial \phi &= 0 \\ \partial F / \partial C_1 &= 0 \\ \partial F / \partial C_2 &= 0 \\ &\vdots \\ \partial F / \partial C_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(23)は ϕ および C_1, C_2, \dots, C_k を未知数とする $(k+1)$ 元の連立方程式であり、これを解くことによって未知数の値を知ることができる。このときこれらの未知定数は互いに独立でなければならないのは当然である。ところがウォーム歯面 X_m は複雑な創成面であるため、また、実際に測定する歯面は全創成歯面のごく一部であるため、さらに工具の位置・姿勢などの誤差は小さいために、各定数がウォーム歯面 X_m に対して同じような影響を与えることもある。つまり工具の位置・姿勢などを表す定数間の独立性が低下したり、あるいは失われやすい傾向にある。よって未知とする定数は十分に注意して選定しなければならない。

4. 未知定数の選定

ウォーム歯面 X_m を表す式には定数 $a, b, \gamma, e, \delta, \phi$ などが関与している。ここで、 ϕ 以外は設計値として与えられるものであるが、実際の歯切りにおいてこれらは設計値どおりになっているわけではなく、それぞれわずかなではあるが誤差があると考えられる。この誤差を含めて未知定数として検出し設計値と比較すれば、それぞれの誤差が求められる。しかしこれらすべてを未知定数とすることは、3章の終わりで述べた定数の独立性の問題があり適切ではない。このことは逆に、各定数間の独立性が保たれるように未知とする定数を選定し、その他の定数には誤差がないと考えてもよいことを意味している。

そこで歯面 X_m に対して同じような影響を与える定数が複数存在する場合、歯面に最も大きな影響を与えるものを未知定数として選定することにする。また、修正歯切りを行うことを考えて、できるだけ調整しやすいものを未知定数とするのが実用的であろう。このような方針で未知定数を選定し、その他は設計値どおりであり、誤差はないものとする。

γ は媒介歯車歯面を示す円すい面の半頂角を表す定数であり、これは調整が困難であるから未知定数とはしない。また、 e はウォーム軸と工具歯車軸の軸間距離を表す定数である。これはウォームとホイールのかみあいにも影響を与えるため、ウォーム製作時には他の定数に比べ非常に正確に定められている。そこで、 e にも誤差はないものとする。

測定座標系に対するウォームの置かれる角度 ϕ は

必ず未知定数としなければならない。

次に、調整が容易な a, b, δ が歯面 X_m に対して ϕ と独立であるかどうかについて考察する。 ϕ は測定座標系における創成線の「位置」を表している。一方、 a, b, δ のうち a, b は創成線の「位置」に影響を与え、 δ はウォーム歯面 X_w 上の創成線の「位置」と「形状」に影響を与える。つまり a, b が歯面 X_m に及ぼす影響は ϕ とほぼ同じである。よって a, b の誤差は ϕ に含めることができる。 δ は創成線の「位置」と「形状」の両方に影響を与えるから、歯面 X_m に対して δ は ϕ とは独立であるとみてよい。

以上より、未知定数を δ と ϕ に限定する。

5. 数値計算法

δ, ϕ を未知定数とし u, ϕ をパラメータとするウォーム歯面 X_m とその法線 N_m は超越関数になる。そのため、 X_m, N_m に関係する式(18)および式(23)の解を解析的に求めることは困難であるから、逐次近似により数値解を求めることにする。以下に計算手順について若干の説明を付け加えておく。

球状測子の中心 P を表す位置ベクトル P は式(12)より

$$P = X_m(u, \phi; \phi, \delta) + r_0 N_m(u, \phi; \phi, \delta) \quad (24)$$

3章で示した手順に従い P と測定値 M から u, ϕ が求められ残差 E が計算できる。 n 個の測定値 $M_i (i=1, 2, \dots, n)$ について残差 E_i を計算し、その二乗和を F とすると

$$F(\phi, \delta) = \sum_{i=1}^n \{E_i(\phi, \delta)\}^2 \quad (25)$$

F を最小にする条件は

$$\left. \begin{aligned} \partial F(\phi, \delta) / \partial \phi &= 0 \\ \partial F(\phi, \delta) / \partial \delta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式(17), (21)を考慮すれば ϕ, δ に関する連立方程式(26)の第1式から次式が導ける。

$$\phi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{M_{\theta i} - S_{\theta i}(\delta)\} \quad (27)$$

ここに $M_{\theta i}, S_{\theta i}$ は i 番めの測定値に対する M_{θ}, S_{θ} である。 ϕ を式(26)の第2式に代入し、これを解けば δ が求められる。こうして求めた ϕ と δ は残差の二乗和 F を最小にする。

6. 検査結果

本検査法の有効性を確認する目的で、これを2種類のウォームに適用してみた。2種類のウォームを記号 W1, W2 で表し、その主な諸元を表1に示す。

W1ウォームは3条のウォームであるが、そのうち

の1条の歯面は研削工程で砥石軸（カック軸）傾角 δ を角度で $10'$ だけ余計に傾け、 $\delta = 18^\circ 10'$ として研削してある。 δ 以外の諸元はすべて同じである。各ウォームの歯面測定には半径 $r_0 = 2 \text{ mm}$ の球状測子を使用した。座標測定の様子を図6に示す。

検査結果を表2に示す。表中の n は測定点の数である。測定点の数は、原理的には未知定数の数以上であれば良い。本実験では測定誤差の影響を避けるために n を約20点とした。残差 $E_i (i=1, 2, \dots, n)$ の二乗和 F は非常に小さくなっているが、これは式(16), (21)から明らかなように radian を単位とする角度についての残差であることによる。したがって F が小さいからという理由で δ と ϕ が測定値 M_i に対する最確値であるとしてよいかどうかの判断は直ちにはできない。一つの判断の方法として残差 E_i の標準偏差 σ_E を用いることができる。表2に次式で計算した σ_E が示してある。

$$\sigma_E = \sqrt{F/n} \quad (28)$$

標準偏差 σ_E が小さければ、 δ (と ϕ) でウォーム歯面製作誤差を表すことができること、すなわち未知定数の選定が正しく行われたことを意味する。そして得ら

表1 ウォーム諸元

| worm | W1 | W2 |
|----------------------------|----------|--------------|
| tooth surface | grinding | |
| module | 4.7 | |
| distance between gear axes | e | 100 |
| reduction ratio | i | 31/3 |
| incline-angle | δ | 18' (18°10') |
| number of threads | 3 | 1 |

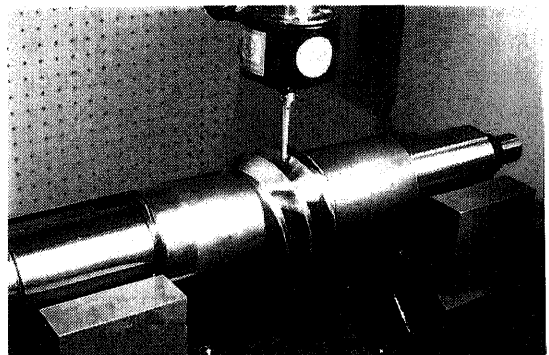


図6 三次元測定機による検査実験

表 2 検査結果

| worm | n | design value | result | | | | |
|------|----|--------------|----------|----------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| | | δ | δ | Φ | F | σ_E (rad) | Δt (μ m) |
| W 1 | 24 | 18° 00' | 17° 29' | -19° 28' | 4.8×10^{-5} | 1.4×10^{-3} | 10 |
| | 24 | 18° 10' | 17° 39' | -24° 31' | 3.3×10^{-5} | 1.2×10^{-3} | 10 |
| W 2 | 22 | 7° 00' | 7° 06' | 168° 01' | 3.4×10^{-4} | 3.9×10^{-3} | 6 |

れた δ と Φ を M_i に対する最確値とすることができ
る。

さて、残差は各測定値と幾何学的に定められたウォ
ーム歯面との差をウォーム軸回りの角度に換算したも
のであるから、ばらつきの目安となる標準偏差もやは
りウォーム軸回りの角度に関係したものになる。この
ウォーム軸回りの角度をウォーム半径とねじの進み角
を用いてウォーム軸方向に換算し、それを Δt として
表 2 に示してある。これより「測定値 M_i に対する幾何
学的ウォーム歯面のあてはめ精度はウォーム軸方向距
離に換算して Δt である」ということができる。あては
め精度が $10 \mu\text{m}$ 程度以下であるという結果から、 δ と
 Φ は M_i に対する最確値としてよいと考えている。

次に、W 1 ウォームの δ の検出であるが、表 2 に示
されているように δ の差異 (10') が明確に検出されて
いる。これより W 1 ウォームは砥石軸傾角 $\delta=18^\circ$ で
研削すべきところ $\delta=17^\circ 30'$ で行われたことがわか
る。よって δ を $30'$ 増加させて再研削すればよいこと
になる。W 2 ウォームの研削はほぼ正確な砥石軸傾角
度で行われている。

7. 結 言

本研究は、歯面が複雑な創成面である鼓形ウォーム

の検査法について述べたものである。鼓形ウォーム歯
面はその曲率とねじり率がいたるところで異なってお
り一様でないため、歯面形状検査のための基準点（線
面）が定め難い。本研究で提案した検査法はこのよう
な場合の歯面形状検査法で、一つの基準面を最小二乗
法によって歯面測定値群の中に求め、歯面を作るとき
の工具位置の正確さによって歯面の正確さを評価しよ
うとしたものである。そして、検出した工具位置の誤
差をウォーム製作工程へフィード・バックし、より正
しい歯面を得ることを目的としている。よって、製作
されたウォームそのものの精度・等級などに関連づけ
ることにしては、いまのところ考えていない。

本法の妥当性、有効性は、実際のウォームについて
の測定・検査実験によって確認できた。

おわりに、測定実験に対してご協力いただいた住友
重機械工業(株) 堀内昭世氏および上加世田恒二氏に
お礼申し上げる。

文 献

- (1) 田村・酒井・牧, 機論, 46-402, C(1980), 179.
- (2) 田村, 機論, 52-478, C(1986), 1798.
- (3) WYLIE, C. R. Jr. (Japanese edition), *ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS*, (1964), 188, プレイン図書出版.