

## 準仮想冠歯車を用いたすぐ歯傘歯車の歯切法\*

田村久司\*<sup>1</sup>, 市野之彬\*<sup>2</sup>, 川崎一正\*<sup>1</sup>Method for Cutting Straight Bevel Gears  
Using Quasi-Complementary Crown Gears

Hisashi TAMURA, Koreaki ICHINO and Kazumasa KAWASAKI

In the manufacture of straight bevel gears, there is usually a need for some "trial-and-error" process by which a good tooth bearing is obtained. In this paper, a method for cutting straight bevel gears in which a trial-and-error process is not necessary is proposed. The method can be applied without the necessity of cutter modification or generator alteration. Each gear and pinion is generated by a newly introduced "quasi-complementary crown gear" instead of a conventional complementary crown gear. The quasi-complementary crown gear is a bevel gear whose pitch cone angle is  $90^\circ$  minus the root angle of the workpiece and whose tooth surface is a plane. The pitch cones of the quasi-complementary crown gear and workpiece roll with each other. Therefore, the ratio of roll between the crown gear and workpiece is expressed as a function of the root angle. The quasi-complementary crown gear produces a profile modification of the generated gear tooth. Gears made on an experimental basis showed a good tooth bearing as expected.

**Key Words:** Machine Element, Gear, Design, Gear Cutting Method, Bevel Gear, Straight Bevel Gear, Complementary Crown Gear, Profile Modification, Tooth Bearing

## 1. 緒 言

グリーンソン式すぐ歯傘歯車は良好な歯当たりが得にくく、目的とする歯当たりを得るために普通は数回の試行歯切りを必要とする。良好な歯当たりの得にくい原因はその歯切法にあると思われる<sup>(1)</sup>。すなわちグリーンソン式歯切法では被削歯車ピッチ円すいが仮想冠歯車ピッチ平面上を転がっていないために目的とする歯面と異なる歯面が創成され<sup>(2)</sup>、これが良好な歯当たりを得にくくしていると考えられる。

本研究はグリーンソン式すぐ歯傘歯車歯切法の改善を目的として、仮想冠歯車の代りにピッチ円すい角が  $90^\circ$  より被削歯車歯元角分だけ小さくすぐ歯傘歯車を工具歯車とする歯切法を提案したものである。本研究ではこの工具歯車を準仮想冠歯車<sup>(3)(4)</sup>と名付ける。本歯切法では創成角速比は準仮想冠歯車ピッチ円すいと被削歯車ピッチ円すいとが互いに転がるように決められる。また準仮想冠歯車歯(刃)面は平面でその圧力角は歯当たり位置に関係して理論的に定められる。本法

によれば被削歯車歯面には歯形修整を施したような効果が得られる。したがってこれと従来の方法によるクラウニングとを併用すれば傘歯車歯面に必要不可欠な歯面修整を施すことが可能になる。

このように本歯切法は創成角速比と準仮想冠歯車圧力角とを理論的に定める点で従来の方法と異なるが、それ以外はこれまでと全く同じである。よって本法はグリーンソン式すぐ歯傘歯車歯切盤のような歯切盤でただちに実行でき、かつ試行歯切りを必要としない方法である。

## 2. 準仮想冠歯車

一般にすぐ歯傘歯車はこう配歯である。したがってすぐ歯傘歯車の創成歯切りを考えるときの仮想冠歯車もこう配歯でなければならない。また仮想冠歯車歯面として一般に平面が用いられている。そこで本歯切法でも基礎となる仮想冠歯車は平面を歯面とするこう配歯の歯車とする。

ところですぐ歯傘歯車歯切盤は普通は被削歯車歯底円すいを削り出す工具刃先がクレードル軸に垂直な面、すなわちクレードル面<sup>(5)</sup>上を動く構造になっている。そのためクレードル面をピッチ平面と考えると歯切盤では等高歯の仮想冠歯車が実現されていること

\* 原稿受付 1996年5月10日。

\*<sup>1</sup> 正員, 新潟大学工学部 (〒950-21 新潟市五十嵐二の町8050)。\*<sup>2</sup> 正員, (株)長岡歯車製作所 (〒940-11 長岡市下条町777)。

になる。また創成角速比の関係を調べると被削歯車ピッチ円すいとこのピッチ平面とは転がり関係にない。そこで本研究では傘歯車歯切盤のクレードル面はピッチ平面になり得ないものと考え、同歯切盤でこう配歯の仮想冠歯車を実現することを断念する。その代わりにそれに似た準仮想冠歯車と名付けた工具歯車を実現させ、それで目的とするこう配歯のすぐ歯傘歯車を歯切りする。

さて、歯面が平面である仮想冠歯車でピッチ円すい角が  $\delta_0$ 、歯元角が  $\theta_f$  の傘歯車を創成する場合を想定する。このときピッチ平面をはさんで一方の側に被削歯車が、その反対側に「歯車 I」と称する傘歯車が創成されるものとする。歯車 I のピッチ円すい角は  $90^\circ - \theta_f$  とする(図 1)。仮想冠歯車、被削歯車それに歯車 I の角速比は、ピッチ平面と各ピッチ円すいとが互いに転がるという条件から、 $1 : 1/\sin \delta_0 : 1/\cos \theta_f$  となる。歯車 I に対する被削歯車の角速比  $i$  は

$$i = \cos \theta_f / \sin \delta_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

歯車 I と被削歯車は共役な歯車である。したがって歯車 I で被削歯車を創成することもできる。図 2 は歯車 I 歯面であるオクトイド歯形の歯面  $x_1$  と仮想冠歯車の平面歯面  $x_c$  とが点  $Q$  で接触している状態を示している。 $x_c$  と  $x_1$  の間にすきま  $t$  が生じているが、点  $Q$  近傍のすきまは非常に小さい。よって、その近傍の歯車 I 歯面  $x_1$  を平面で代替できる。歯車 I のピッチ円すい角が  $90^\circ$  に近づくほどすなわち被削歯車歯元角  $\theta_f$  が小さいほどすきまが小さくなり、平面で代替し

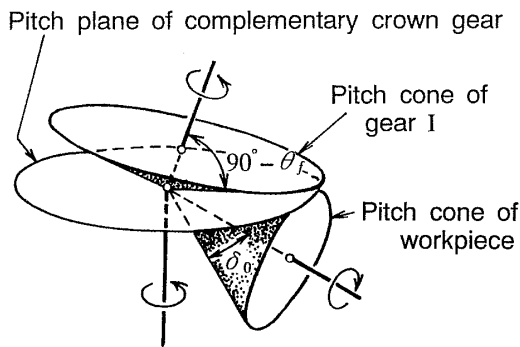


Fig. 1 Relations between three gears

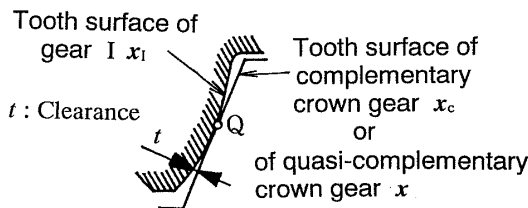


Fig. 2 Clearance between tooth surfaces

ても差支えない歯車 I 歯面の範囲が広がる。

歯元角  $\theta_f$  は一般に小さい角度であるから歯車 I 歯面全体を平面で代替し、その平面を歯(刃)面とする歯車 I を考える。そしてこれを工具歯車として創成角速比  $i$  で被削歯車を歯切りすれば、点  $Q$  近傍の刃面で創成された被削歯車歯面部分は仮想冠歯車で創成されたものとはほぼ等しくなる。点  $Q$  から離れたところの刃面で創成された歯面部分は仮想冠歯車で創成された歯面を少し削り取ったようになっている。本研究ではこれを歯形修整と見なすことにする。すきま  $t$  で与えられるこの歯形修整量は  $\theta_f$  によって決まる性質のものである。

歯車 I のピッチ円すい角は被削歯車歯元角  $\theta_f$  を用いて決めた。その結果、図 3 に示すように歯車 I のピッチ円すい頂点を通り歯車 I 軸に垂直な平面  $S$  が被削歯車歯底円すいに接するようになる。そこで工具歯車となる歯車 I において平面  $S$  上を工具刃先が動くようにすれば、工具刃先は所定の被削歯車歯底円すいを削り出す。ところですぐ歯傘歯車歯切盤では工具横切れ刃が直線で、その刃先がクレードル面上をクレードル軸心に向かって真直に動くから、クレードル面を平面  $S$  と考えればこの歯切盤で本研究の工具歯車を実現させることができる。すなわち従来この歯切盤で実現していた工具歯車をそのまま平面歯車をもつ歯車 I とすることができる。そして被削歯車を従来どおりの方法で歯切盤に取付け、創成角速比  $i$  を式(1)によって定めれば歯形修整されたこう配歯のすぐ歯傘歯車の創成歯切りが理論的に可能になる。このことは、傘歯車の歯切りにおける試行歯切りが不要になるとともに創成歯面の理論的取扱いが可能になることを意味する。

ピッチ円すい角が  $90^\circ - \theta_f$  の平面歯面の歯車 I はその形状および役割が仮想冠歯車によく似ていることから

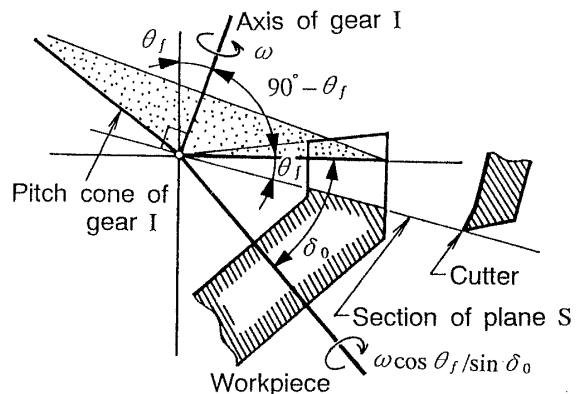


Fig. 3 Gear I and gear to be cut

ら、これを準仮想冠歯車ということにする。既報<sup>(3)(4)</sup>では曲がり歯傘歯車の歯切法に関して円すい面を歯面とする歯車 I を準仮想冠歯車と称したが、本研究もそれにならった。

3. 歯当たり位置と圧力角

準仮想冠歯車刃面のうち図2の点 Q 近傍の刃面で創成された被削歯車歯面部分は仮想冠歯車で創成された歯面とほぼ等しいから、それとかみあう相手歯車歯面部分も仮想冠歯車で創成された歯面にほぼ等しくなるようにすれば、歯車対を構成したとき点 Q を中心とする歯当たりが必ず現れる。点 Q の位置の指定を仮想冠歯車歯面上で行う。

まず仮想冠歯車と一對の傘歯車のかみあいを平歯車のそれに近似して考える。そのためにピッチ母線 (pitch surface generator)<sup>(6)</sup> 上の平均円すい距離  $R_m$  の位置でピッチ母線に垂直な平面を考え、その平面上で各歯形のかみあいを示すと図4のようになる。図4で点 P を通り紙面に垂直な線がピッチ母線であり、 $S'$  がピッチ平面の断面である。仮想冠歯車軸ならびに傘歯車軸を紙面に垂直投影したものが直線  $\overline{AA}$  である。

図4に示すように歯当たり中心 Q の位置をピッチ平面  $S'$  からの距離  $H$  で指定する。そのようにすると被削歯車歯面上の点 Q の創成は仮想冠歯車の歯面が基準の位置 P から距離  $L$  移動して点 R の位置に到達したときに行われる。これより距離  $H, L$  および仮想冠歯車の圧力角  $\alpha_0$  の間の関係式として次式を得る。

$$H = -L \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \dots\dots\dots (2)$$

歯面移動距離  $L$  を仮想冠歯車の回転角  $\phi$  で表せば、近似的であるが十分の精度で

$$L = R_m \phi \dots\dots\dots (3)$$

これより

$$\phi = -H / (R_m \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) \dots\dots\dots (4)$$

さて、 $\overline{QR}$  の位置にある平面歯面を基準位置から角

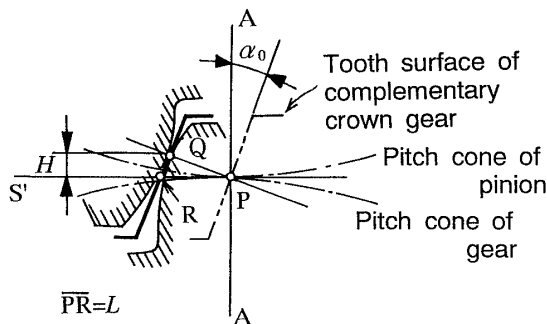


Fig. 4 Engagement of teeth

度  $\phi$  まわっている歯車 I に取付け、準仮想冠歯車にする。

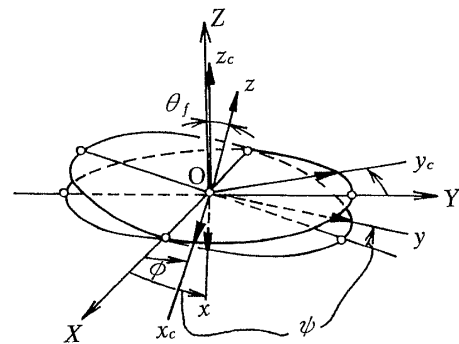
準仮想冠歯車の圧力角  $\alpha$  は次のようにして求められる。

まず図5に示すように静止座標系 O-XYZ を定める。そしてピッチ母線を Y 軸に、仮想冠歯車軸である  $z_c$  軸を Z 軸にそれぞれ一致させる。仮想冠歯車固着の座標系 O- $x_c y_c z_c$  はその回転角  $\phi$  が零のとき、O-XYZ に一致しているものとする。また歯車 I に固着した座標系 O-xyz において歯車 I 軸である z 軸は YZ 面内で Z 軸に対して角度  $\theta_f$  傾いている。そして歯車 I の回転角  $\phi$  が零のとき、x 軸は X 軸に一致しているものとする。O- $x_c y_c z_c$  で仮想冠歯車歯面とその単位面法線を列ベクトル  $x_c, n_c$  で表し、図6に示すパラメータ  $u, v$  を用いて数式表示すれば、 $T$  を転置行列記号として

$$x_c(u, v) = u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -\sin \alpha_0 \\ 0 \\ \cos \alpha_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

$$n_c = (\cos \alpha_0, 0, \sin \alpha_0)^T$$

仮想冠歯車が角度  $\phi$  まわった瞬間の  $x_c, n_c$  を O-XYZ で表し、 $X_c, N_c$  とすると



$z_c$  : Axis of complementary crown gear  
 $z$  : Axis of gear I (Axis of quasi-complementary crown gear)

Fig. 5 Coordinate systems of each gear

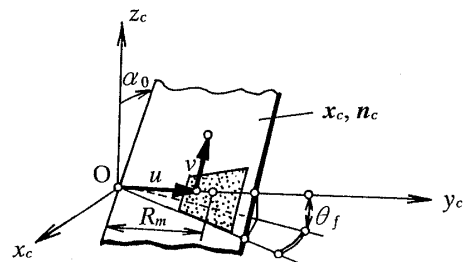


Fig. 6 Tooth surface of complementary crown gear

$$\left. \begin{aligned} X_c(u, v, \phi) &= C(\phi)x_c(u, v) \\ N_c(\phi) &= C(\phi)n_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに  $C$  は  $Z$  軸まわりの回転に関する座標変換行列で

$$C(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

一方、歯車 I と座標系を共有する準仮想冠歯車においてその歯面と歯面法線(単位)を  $O-xyz$  で列ベクトル  $x, n$  で表す(図 7)。 $n$  は次のように表される。

$$n = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)^T \dots\dots\dots (8)$$

歯面  $x$  は刃面となるもので、その存在範囲は  $z \geq 0$  である。

さて、前述のごとく仮想冠歯車が角度  $\phi$  まわったときの歯面  $X_c$  を角度  $\phi$  まわっている歯車 I に取付ける。それが  $O-xyz$  で  $x$  になる。

これより  $\theta_f, \phi, a_0$  を既知、 $\alpha, \psi$  を未知、 $u, v$  をパラメータとする次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A(-\theta_f)C(\phi)x &= X_c(u, v, \phi) \\ A(-\theta_f)C(\phi)n(\alpha) &= N_c(a_0, \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに  $A$  は  $X$  軸まわりの回転に関する座標変換行列で

$$A(\theta_f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_f & -\sin \theta_f \\ 0 & \sin \theta_f & \cos \theta_f \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

式(9)第二式より

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sin^{-1}(\sin \phi \cos a_0 \sin \theta_f + \sin a_0 \cos \theta_f) \\ \psi &= \tan^{-1} \left[ \frac{\sin \phi \cos a_0 \cos \theta_f - \sin a_0 \sin \theta_f}{\cos \phi \cos a_0} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

相手傘歯車の歯元角を  $\theta_f'$  とする。それに関する準仮想冠歯車の圧力角  $\alpha'$  も同様にして求められる。

$$\alpha' = \sin^{-1}(-\sin \phi \cos a_0 \sin \theta_f' + \sin a_0 \cos \theta_f') \dots\dots\dots (12)$$

さて、式(11)、(12)から  $a_0$  を消去すると、 $\alpha$  と  $\alpha'$  の関係式として次式を得る。

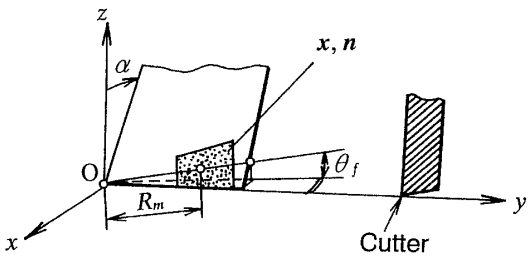


Fig. 7 Tooth surface of quasi-complementary crown gear

$$\left. \begin{aligned} a\chi^2 + b\chi + c &= 0 \\ \text{ここに} \\ \chi &= \sin \alpha', \\ a &= -\sin \theta_f \cos \theta_f, \quad b = \sin(\theta_f - \theta_f') \sin \alpha, \\ c &= \sin \theta_f' \cos \theta_f' \sin^2 \alpha + H \sin^2(\theta_f + \theta_f')/R_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

式(13)は、設計条件として  $\theta_f, \theta_f', R_m, H$  を与えると、任意の  $\alpha$  に対応する  $\alpha'$  が決まることを意味している。

特に、マイタ歯車を含め歯元角の等しい傘歯車の場合には歯当たり中心をピッチ円すい上に定めるから、そのときには  $H=0(\phi=0)$ 、 $\theta_f = \theta_f'$  より  $\alpha = \alpha'$  となり、圧力角の値が単に等しければよいことになる。したがって歯当たりは必ずピッチ円すい上に現れる。

4. 歯形修整量

2章で述べたように歯車 I 歯面  $x_I$  とその代替歯面  $x$  との間のすきまが歯形修整量になる。ところで  $x_I$  と  $x$  はともに仮想冠歯車歯面  $x_c(u, v)$  に関係して決まるから  $x_I$  と  $x$  の曲面表示パラメータは同じになる。そこでそれらを区別するために  $x_I$  については  $u, v$  および仮想冠歯車回転角  $\phi$  を大文字  $U, V$  および  $\Phi$  で表す。すなわち  $x_I(U, \Phi), x_c(U, V)$  などと表す。

歯形修整量の求め方は基本的には既報<sup>(3)(4)</sup>と同じである。しかし、ここでは計算式誘導の労を省くためと本歯切法の活用の便を図るために、その具体的計算式を示しておく。

図 2 より準仮想冠歯車歯面上の点  $x(u, v)$  における法線が歯車 I 歯面  $x_I(U, \Phi)$  と交わるとき、点  $x$  から交点までの距離が歯形修整量  $t$  になる。パラメータ  $u, v$  を与えて点  $x$  を定めると、その点における修整量  $t$  は  $U, \Phi$  とともに次式で求められる。

$$x(u, v) + tn(\alpha) = x_I(U, \Phi) \dots\dots\dots (14)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} x_I(U, \Phi) &\equiv (A_1, B_1, C_1)^T \times U \\ A_1 &= A_2 \cos \Psi + B_2 \sin \Psi \cos \theta_f - C_2 \sin \Psi \sin \theta_f \\ B_1 &= -A_2 \sin \Psi + B_2 \cos \Psi \cos \theta_f - C_2 \cos \Psi \sin \theta_f \\ C_1 &= B_2 \sin \theta_f + C_2 \cos \theta_f \\ A_2 &= \sin \Phi \sin^2 a_0 - \sin \Phi \\ B_2 &= \sin \Phi \tan \Phi \sin^2 a_0 + \cos \Phi \\ C_2 &= -\tan \Phi \sin a_0 \cos a_0 \\ \Psi &= \Phi / \cos \theta_f + \phi - \phi / \cos \theta_f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$



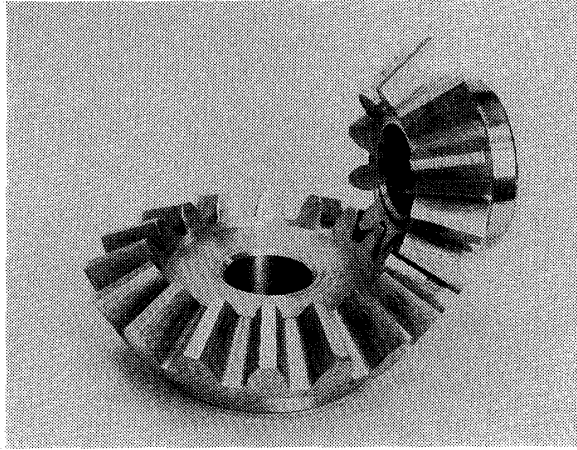


Fig. 10 Tooth bearing on gear tooth surface  
(Gear  $H = -1$  mm, Pinion  $H = -1$  mm)

## 6. キックアウト

本歯切法の場合、キックアウトは歯当たり中心の位置と歯形修整量とから、あらかじめ計算できる。具体例について説明する。すなわち図8を参照すれば、図9に示す歯面上の点A, Bにおける歯形修整量がわかる。平均円すい距離にある点Aの修整量は④ $\mu\text{m}$ 、点Bのそれは⑥ $\mu\text{m}$ である。これより $C_{n1} = (4+6) \times 2 = 20 \mu\text{m}$ 、点A', B'の修整量 $C_{n2}$ も同じである。よってその差であるキックアウトは零である。測定値もそのようになっている。

一方、 $H = +1$  mmの小歯車と $H = -1$  mmの大歯車では点A, Bの修整量はそれぞれ⑭ $\mu\text{m}$ 、⑳ $\mu\text{m}$ 、点A', B'のそれはともに① $\mu\text{m}$ である。これより $C_{n1} = (14+24) \times 2 = 76 \mu\text{m}$ 、 $C_{n2} = 0 \mu\text{m}$ 。よってキックアウトは76 $\mu\text{m}$ になる。この値も測定値とほぼ一致する。

以上のことよりキックアウトとは、歯形修整量が零の点(図2の点Q)のピッチ円すいからのずれ量 $H$ と修整量 $t$ とに関係した値であると考えることができる。

表1に示した傘歯車でキックアウトが小さく、かつ歯当たりが歯だけ中央部に現れるようにするためには大歯車、小歯車とも $H = -1$  mmとして歯切りする方

法が考えられる。その場合のキックアウトは、図8を参照し、 $C_{n1} = ① + ⑳$ 、 $C_{n2} = ⑭ + ①$ より $C_{n1} - C_{n2} = (24 - 14) \times 2 = 20 \mu\text{m}$ になる。測定値は0.01 mmであった。図10にこの歯車の歯当たり模様を示す。曲率半径2500 mmのクラウニングを施している。図より設計どおり歯だけ中央部に歯当たりの現れていることがわかる。試行歯切りはしていない。

## 7. 結 言

本研究はすぐ歯傘歯車の歯切法に関し、準仮想冠歯車を用いた歯切法を提案したものである。そしてその歯切設計法を示すとともに歯切実験によって本法の有効性を確かめた。

準仮想冠歯車はピッチ円すい角が $90^\circ$ より被削歯車歯元角分だけ小さいこう配歯の傘歯車で、その歯(刃)面が平面で工具歯車となるものである。準仮想冠歯車ピッチ円すいと被削歯車ピッチ円すいとはころがり関係にあるから被削歯車の創成に関しては機構学的厳密性を保っている。また準仮想冠歯車歯面を平面にしたことで被削歯車対同士の共役性がわずかに損なわれるが、それが傘歯車に必要な歯形修整効果を生じている。これと従来のクラウニングを併用すれば目的とする歯面修整が実現できる。

本歯切法は、普通のすぐ歯傘歯車歯切盤を用いてただちに実行でき、かつ試行歯切りをせずに指定した位置に歯当たりを得ることができるから、実用的歯切法と考える。

## 文 献

- (1) 和栗明, 歯車の設計・製作とその耐久力, (1982), 77-81, 養賢堂。
- (2) 仙波正荘, 歯車第1巻(新版), (1985), 78-80, 日刊工業新聞社。
- (3) 田村久司・田中謙吾, 機論, 58-547, C(1992), 876-882。
- (4) 田村久司・ほか2名, 機論, 61-589, C(1995), 3709-3715。
- (5) Dudley, D. W., *Dudley's Gear Handbook*, (1962), 20-15, McGraw-Hill, New York。
- (6) Merritt, H. E., *Gears (3rd ed.)*, (1954), 40, Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., London。