

## 軸方向弾性拘束を受ける座屈後補強はりのカオス振動の実験\*

永井健一<sup>\*1</sup>, 春日邦夫<sup>\*2</sup>, 鎌田昌樹<sup>\*3</sup>  
山口誉夫<sup>\*4</sup>, 谷藤克也<sup>\*5</sup>Experiment on Chaotic Oscillations of a Post-Buckled Reinforced Beam  
Constrained by an Axial SpringKen-ichi NAGAI, Kunio KASUGA, Masaki KAMADA,  
Takao YAMAGUCHI and Katsuya TANIFUJI

Experimental results are presented on chaotic oscillations of a reinforced beam subjected to lateral excitations. The beam is partially reinforced with boxed-type stringers. The beam is clamped at both ends on a base frame. One end of the beam is arranged to move to an axial displacement by attachment to an elastic spring. The beam is deformed to a post-buckled configuration by the axial constraint. Under the post-buckled condition of the beam, chaotic responses are generated in specified regions of exciting frequency. A response is expected from a system with a lower degree of freedom. The chaotic responses are analyzed by the Fourier spectrum, the Poincaré section and the maximum Lyapunov exponent. It is found that the chaos of the beam is generated with the fundamental mode of vibration. Chaotic response includes the resonance modes both of a higher lateral vibration and of an axial vibration. The Poincaré projections of the chaos show clearly the stretching-and-folding mechanism of the chaos attractor. The instability boundary of the chaos is obtained in the plane of exciting frequency and amplitudes of excitation.

**Key Words:** Chaos, Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Beam, Buckling Poincaré Section, Lyapunov Exponent, Instability Boundary

## 1. 緒 言

薄肉はりは軽量構造要素として各種の輸送機械に用いられている。特に宇宙構造物の要素として考えた場合、極めて軽量であることと高剛性を保つ必要がある。一般に、はり曲げ剛性が小さいため、補強材を付加した補強はりが用いられる。さらに、これらのはりを接合して構造物が構成される。これらの系に軸圧縮荷重が作用し、接合部が低剛性であると、座屈現象が生じやすい。さらに、これらに周期荷重が作用すると補強はりの曲げ変形と軸方向の運動が互いに連成して、動的飛び移りを伴うカオス振動が誘起されやすい。一般にカオス振動は不規則振動に近く、多くの振動数成分を含む。そのため系の固有振動モードが誘起されやすく、系の安定性や振動低減の障害となる。それゆえ、補強はりのカオス振動に及ぼす振動モードの影響などを解明することは工学上重要な課題であると

言える。座屈後はりの動特性やカオス振動の研究は著者らのものも含めいくつかある<sup>(1)-(12)</sup>。

本報は、はりの二部分を剛性の高い部材で補強し、軸方向の弾性拘束力を与えて座屈後変形状態にした後、周期横荷重を与えた場合のカオス振動の実験を行った。まず静的変形特性、微小振幅の固有振動数と周波数応答曲線を求めた。ついでカオス振動の時間波形とポアンカレ写像図の記録ならびに周波数分析を行った。これより、主要なカオス振動が第一次主共振応答の近傍に存在し、その応答の最大リアプノフ指数が正值で2の値を示すカオス振動であることを確定した。あわせて高次の曲げ変形が規制された補強はりでも支持系の共振等を誘起してほぼ3個の振動モードが誘起されることを明らかにした。さらにカオス振動の発生する領域を詳細に求めた。

## 2. 補強はりと支持装置

補強はりの概要を図1に示す。はりは厚さ  $h=0.198$  mm, 幅  $b=12.7$  mm で全長 133 mm の薄肉鋼材(ヤング率  $E=194$  GPa, 密度  $\rho=7.75 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>)を用いた。このはりの両面にアルミニウムの溝形チャネル( $h'=0.348$  mm,  $b'=10.8$  mm,  $E'=67.0$  GPa,  $\rho'=2.75 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>)を接合し、はり断面がH形をな

\* 原稿受付 1997年2月25日。

\*<sup>1</sup> 正員, 群馬大学工学部 (☎ 376 桐生市天神町1-5-1)。\*<sup>2</sup> 前田製作所 (☎ 388 長野市篠ノ井御幣川1095)。\*<sup>3</sup> (株)日立エンジニアリングサービス (☎ 317 日立市幸町3-2-2)。\*<sup>4</sup> スバル研究所 (☎ 373 大田市東本町10-1)。\*<sup>5</sup> 正員, 新潟大学工学部 (☎ 950-21 新潟市五十嵐2の町8050)。

すようにした。これより、はりは部分的に高い剛性をもつ。このはりを補強はりと呼び、中心部のはりを軸心はりと呼ぶこととする。軸心はりの断面積  $A=bh$  と断面二次モーメント  $I=bh^3/12$  に対し、補強部の断面積は約 9.8 倍で、断面二次モーメントは約  $4.9 \times 10^4$  倍の大きさとなる。

補強はりの境界条件はたわみに関し固定条件とし、軸方向変位の境界条件は一端固定で他端弾性支持とする。はりの支持装置の概要を図 2 に示す。はり境界の一端は基盤に取付けた固定用ブロックよりなる。他端は 2 枚の板ばねで、 $x$  軸方向に弾性支持が可能な固定端を構成する。補強はりの両端を固定用ブロックを介して固定端にボルトで締めつける。これより、はりのたわみが両端固定となる条件を得る。固定部間の長さは  $L=106$  mm であり、全質量は  $m=6.35 \times 10^{-3}$  kg となる。

一方、 $x$  軸方向変位に関し、 $x=0$  では固定の条件を満たし、 $x=L$  では軸方向弾性拘束の条件を満たす。さらに、弾性支持端の下のブロックを移動し固定することにより、はりに軸圧縮力を加え、座屈後変形状態を保つことができる。なお、弾性支持端は軸方向に移動する質量が付加されたこととなる。これを端部質量と呼ぶ。はりを固定しない際の弾性支持端のばね定数は  $K=51.8 \times 10^3$  N/m、端部質量の換算質量は  $M=28.4 \times 10^{-3}$  kg で、はり全質量に対し約 4.4 倍の大きさとなる。なお、端部質量の最低固有振動数は 215 Hz である。

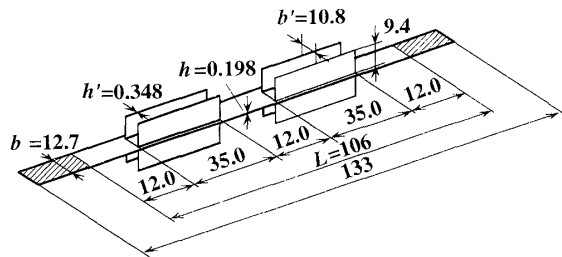


Fig. 1 Test specimen of the reinforced beam

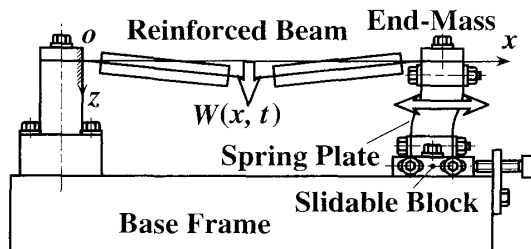


Fig. 2 Fixture of the beam and the axial elastic-constraint

### 3. 実験装置

振動実験装置の概要を図 3 に示す。図 3 で、1 から 4 は電磁式的加振実験装置である。はりに加速度振幅が一定で周期横方向加速度を与えた周波数掃引振動実験が可能となる。また周波数掃引幅は 1 mHz 単位で制御でき、最低加振振動数は約 25 Hz である。5 は補強はりである。6 から 9 ははりの振動応答を検出するレーザ変位計である。10 から 17 までは、振動応答の記録装置と分析装置である。10 の電圧計で、はり変位応答の振幅を実効値に変換し、11 の周波数計測器で、加振振動数を計測する。これより、周波数応答曲線が 12 のコンピュータに記録される。13 は FFT 分析器で、応答の時系列波形の記録と周波数分析を行う。実験で得られた時系列波形データはコンピュータ 14 に転送され、最大リアプノフ指数が計算される。ポアンカレ写像図は次の装置で記録される。まず、レーザ変位計 8 からの振動応答を 15 の微分器で速度に変換する。16 は位相計で加振周期ごとにパルス信号を発生させ、17 の遅延発振器で位相角を変える。このパルスごとに変位と速度のデータを分析器に記録し、14 の計算機に転送のうえポアンカレ写像図が表示される。

### 4. 実験要領

実験結果を整理するため、軸心はりの物理量を基準に、次の諸量を導入する。

$$\begin{aligned} \xi &= x/L, \quad w = W/h, \quad \beta = M/m, \quad n = N_c/N_{cr} \\ r &= \sqrt{I/A}, \quad p_a = \rho A a_d L^4 / EI r, \quad q = QL^3 / EI r, \\ \tau &= \Omega_0 t, \quad \omega = 2\pi f / \Omega_0, \quad \Omega_0 = L^{-2} \sqrt{EI / \rho A} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

上式で  $\xi$  は無次元座標、 $w$  は無次元たわみ、 $\beta$  は補

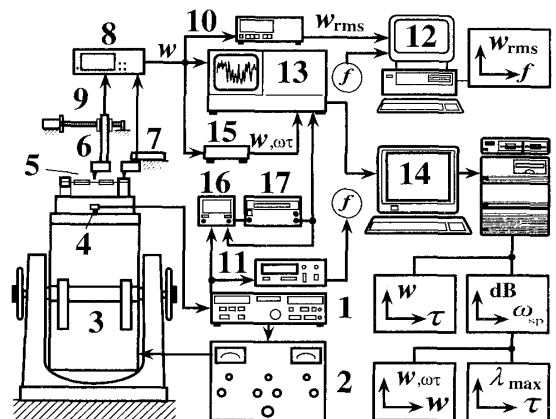


Fig. 3 Test-setup of chaotic vibration

強はりの全質量  $m$  に対する端部質量  $M$  の比で質量比と呼ぶ。  $n$  は座屈荷重  $N_{cr}$  に対する軸圧縮力  $N_c$  の比で、圧縮荷重比とする。  $p_d$  ははりに与える無次元の周期荷重振幅である。なお  $a_d$  は周期加速度を  $a = a_d \cos 2\pi ft$  とした場合の加速度振幅であり、  $f$  は加振振動数である。  $q$  ははりに集中横荷重  $Q$  を作用させた場合の無次元荷重である。  $r$  は軸心はりの断面二次半径である。  $\tau$  は時間  $t$  での無次元時間、  $\omega$  は無次元加振振動数である。  $\Omega$  ははりの振動に関する量である。

実験は以下の順序で行う。まず、補強はりに軸圧縮力を逐次加える。その際の固有振動数の変化を記録する。次に、はりの座屈荷重  $N_{cr}$  を求め、座屈荷重より大きな圧縮力  $N_c$  を与え座屈後変形状態を得る。さらに、集中横荷重を加えて、はりの復元力特性を求める。なお集中荷重はばね材と端子よりなる荷重計を用いた。ばね材に接着したひずみゲージの値からはりに加えた荷重の大きさがわかる。この後、周期横方向加速度を加えた振動実験を行ない、周波数応答曲線ならびにカオス振動時における時系列波形、ポアンカレ写像図の記録と分析を行う。

補強はりの振動実験はおもに次の諸量の下で行った。

$$\beta = 4.47, n = 1.18, p_d = 1.367, \text{計測位置: } \xi = 0.5$$

## 5. 実験結果および検討

**5.1 補強はりの微小振幅固有振動数** 軸圧縮力を変化させ、はりの微小振幅での最低次固有振動数  $f_1$  を求めた。結果を図4に示す。縦軸は圧縮荷重比  $n$ 、横軸は固有振動数  $f_1$  を示す。軸圧縮力を増加させると、固有振動数はほぼ直線的に減少する。座屈荷重  $N_{cr}$  に近づくと、振動数は極小値を示す。なお、補強はりの初期たわみの影響により固有振動数は完全に零

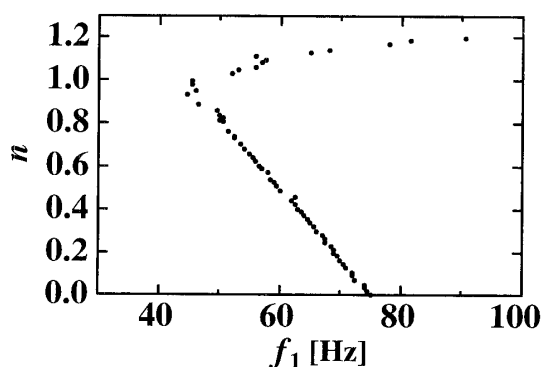


Fig. 4 Natural frequencies of the reinforced beam under axial compression

とならない。軸圧縮力がはりの座屈荷重を越えると振動数は急激に増加する。これは座屈後変形状態により、はりの剛性が相対的に高くなるためである。圧縮荷重比  $n = 1.18$  の下で、はりに軽い打撃を与え、固有振動数を求めた。結果を図5に示す。座屈後圧縮力を受けた補強はりの最低次の固有曲げ振動数  $f_1$  ならびに高次曲げ振動数  $f_2$  と弾性拘束部の軸振動の振動数  $f_3$  が存在する。

**5.2 集中荷重による静たわみ特性**  $n = 1.18$  の下で、はりの自重の影響を含め、はり中央で座屈後の横たわみ  $W_{st} = 2.78$  mm を得た。この位置を原点に定め、はり中央に集中荷重  $q$  を  $z$  軸方向と逆方向に加えて無次元たわみ  $w$  を求めた。結果を図6に示す。点  $C_1$  の安定な釣合い位置から、荷重を逐次増加させるとはりは漸軟形のばね特性を示し、  $w = -7.11$  近傍で極値をもつ。さらに荷重を調節し、はりに変形を与えると、たわみの増加とともに荷重  $q$  の大きさは減少する。たわみが  $w = -18.3$  に達すると、はりは不安定な釣合い位置  $S$  に至り、急激に飛び移り現象を起こし、他の安定な平衡点  $C_2$  に移る。さらに漸硬形のばね特性に沿って、荷重とたわみが変化する。荷重を正方向に加えると、先と同様に飛び移りを伴い  $C_1$  の位置に戻る。すなわち、系は負の復元力を含む漸軟-

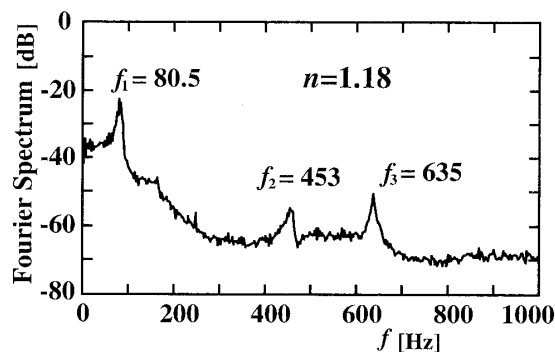


Fig. 5 Natural frequencies of the post-buckled reinforced beam

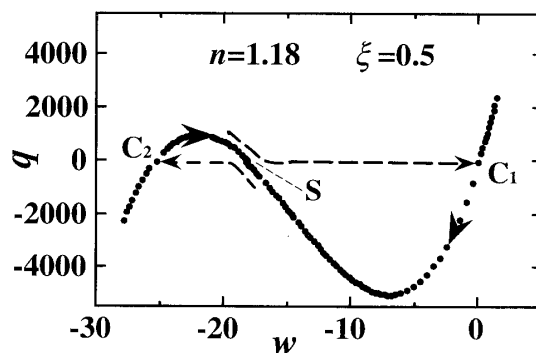


Fig. 6 Deflection of the beam under concentrated load

漸硬形のばね特性を示す。

**5.3 非線形応答曲線** 軸圧縮比  $n=1.18$  のもとで周波数掃引実験を行った。加振振幅を  $p_a=1367$  とした場合の補強はりの周波数応答曲線を図7に示す。縦軸ははり中央での無次元振動振幅の実効値  $w_{rms}$  を示し、横軸は加振振動数  $f$  である。対応する無次元加振振動数  $\omega$  をあわせ示す。主要な非線形共振応答の種類をかつこ内の  $(i, j)$  で示す。  $i$  は誘起される振動形の次数で、  $j$  は共振応答の種類である。例えば、  $j=1$  は主共振応答で、  $j=1/3$  は  $1/3$  次の分数次調波共振を示す。 Chaos  $C_{1,1/2}$  の記号で示す領域では、補強はりが第1次の振動形を伴い  $1/2$  次の分数次調波共振が支配的であるカオス状振動応答を示す<sup>(11)</sup>。図より以下のことが明らかになった。

- (1) 補強はりの最低次の振動形の主共振応答はいずれも漸軟-漸硬ばね特性に起因する応答曲線となる。
- (2) 加振振動数を高次側から減少させると非共振応答から跳躍現象を伴いカオス振動に至る。
- (3) カオス振動が持続したまま加振振動数を減少させると、カオス応答は再び跳躍を伴い低次側非共振部の定常応答に移行する。また加振振動数を増加させると応答は跳躍をとめない再びカオス領域に至る。

上記の結果は、補強のないはりの場合の実験結果<sup>(10)</sup> とほぼ同様な傾向をもつことがわかった。

**5.4 カオス状振動の時間波形と周波数分析** カオス領域内におけるはり応答の時間波形と周波数分析結果を図8に示す。加振振幅は  $p_a=1367$  で無次元加振振動数は  $\omega=15.65$  (加振振動数  $f=63.4$  Hz) の場合である。時間波形の図で横軸は加振周期  $T_e$  を基準とした周期数、縦軸は  $\xi=0.5$  でのはりの無次元振幅を示す。なお、はり中央部のたわみ  $w$  の最大値が40で

は、実際のたわみに4mmとなる。これに伴う  $x$  軸方向のずれは0.2mm以内で、たわみ測定におよぼす  $x$  軸方向のずれの影響は省略できる。図8より不規則な飛び移りを伴う複雑な振動応答を示すことがわかる。さらに周波数分析結果において、横軸は無次元分析振動数  $\omega_{sp}$  で対数表示し、縦軸は振幅スペクトラム  $A(\omega_{sp})$  をデシベル値で示してある。広範囲にわたり顕著な周波数成分をもつ振動応答を示し、カオス振動となっている。低周波数で振幅スペクトラムが高くなることからわかる。特に無次元加振振動数  $\omega=15.65$  でのピークに対し、主要な応答成分のスペクトラムが  $\omega=8$  近傍に分布する。これより、この応答が  $1/2$  次の分数次調波共振応答から派生しているカオスであることがわかる<sup>(10)(11)</sup>。

**5.5 ポアンカレ写像図** カオス領域のポアンカレ写像図を図9に示す。縦軸は速度  $w_{,\omega t}$ 、横軸は無次元振幅  $w$  である。ポアンカレ写像の記録総数は約6000で、サンプリング位相角  $\theta$  は加振力の最大振幅を  $0^\circ$  とした値である。写像図は補強はりの飛び移り形の座屈現象に伴う顕著なカオスアトラクタを構成する。補強はりのない場合<sup>(10)</sup> と比べ、フラクタル構造がよく確認できる。これはカオス振動に寄与する振動モードが少ないことによるものである<sup>(9)(12)</sup>。また、図9の中の丸と三角の記号で示すように、位相角が変化するに従い、カオスアトラクタは二つの平衡位置を中心として時計周りに折畳みと引き伸ばし構造を含むフラクタル構造であることがわかる。

**5.6 最大リアプノフ指数** 図8の時間波形のデータをもとに、Wolf<sup>(13)</sup> の方法により最大リアプノフ指数を自作プログラムにて計算した。その計算結果を図10に示す。縦軸は最大リアプノフ指数  $\lambda_{max}$  を示

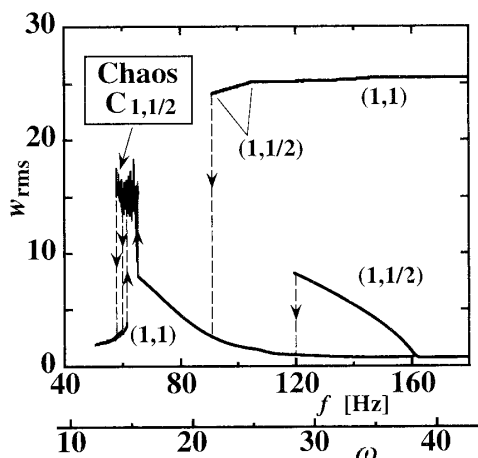


Fig. 7 Frequency response curve of the post-buckled reinforced beam.  $p_a=1367$ ,  $n=1.18$ ,  $\xi=0.5$

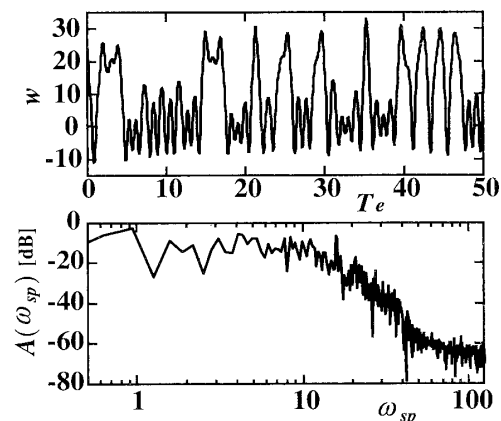


Fig. 8 Time history and Fourier spectrum of the chaotic motion.  $p_a=1367$ ,  $n=1.18$ ,  $\omega=15.65$ ,  $\xi=0.5$

し、横軸は埋め込み次元  $e$  である。図より  $e=6$  に対して最大リアプノフ指数  $\lambda_{\max}$  が正值で2の比較的高い値を示す。これよりカオス振動であることが確認できる<sup>(13)</sup>。これは補強のないはりの動的飛び移り座屈現象を伴うカオス振動応答での値と同程度の値<sup>(10)(11)</sup>に収束する。また  $\lambda_{\max}$  が相空間内の  $e=6$  でほぼ一定となるため、カオス振動におよぼす自由度は三次元と

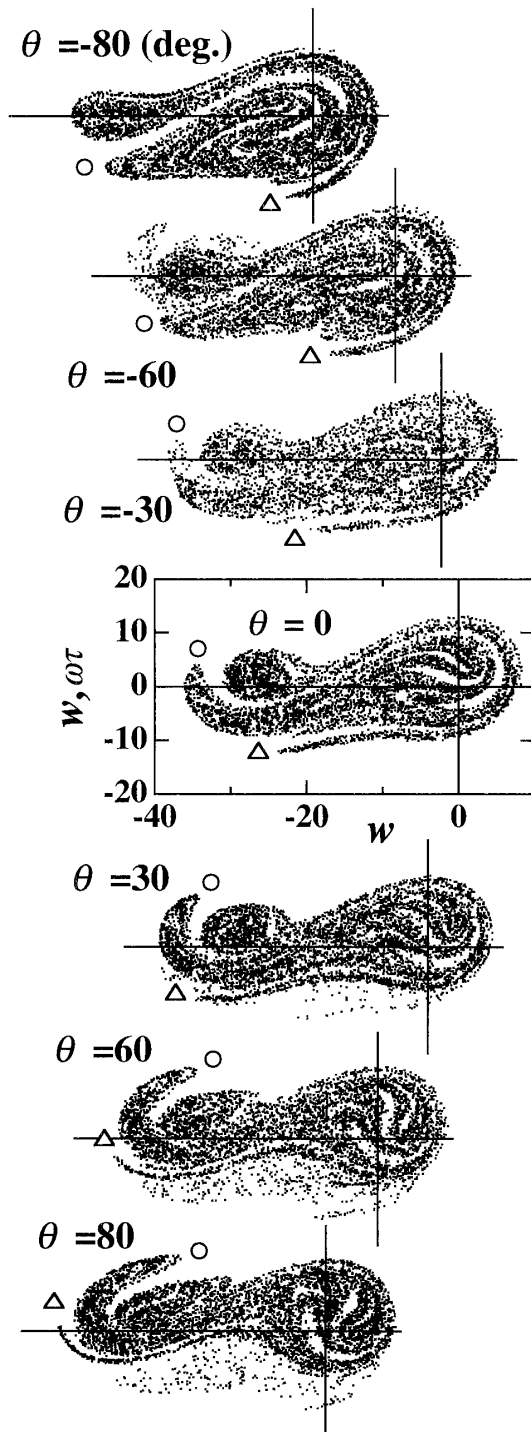


Fig. 9 Chaotic attractors of the post-buckled reinforced beam.  $p_d=1367$ ,  $n=1.18$ ,  $\omega=15.65$ ,  $\xi=0.5$

なる<sup>(7)</sup>。

**5・7 カオス振動の不安定領域** 加振振幅を変化し、カオス振動の生ずる不安定領域を求めた。結果を図11に示す。縦軸は無次元荷重振幅  $p_d$ 、横軸は無次元加振振動数  $\omega$  である。荷重振幅が小さいと、カオスは生じない。 $p_d$  が1150近傍となると、カオス振動  $C_{1,1/2}$  が現れる。荷重振幅の増大とともにカオスの生じる領域は  $p_d=1500$  近傍までほぼ一定に広がる。 $p_d=1500$  の近傍から1/3次の分数次調波共振応答から派生しているカオス領域  $C_{1,1/3}$  が現れる<sup>(10)</sup>。その領域は  $C_{1,1/2}$  の幅よりわずかに狭い。また二つの不安定領域の境界が互いに接近する場合も生ずる。

## 6. 結 言

軸方向の弾性支持力を受ける補強はりに周期横荷重を与えたカオス振動の実験を行った。得られた結果を要約すると次のようになる。

- (1) 主要なカオス応答は最低次の振動モードの主

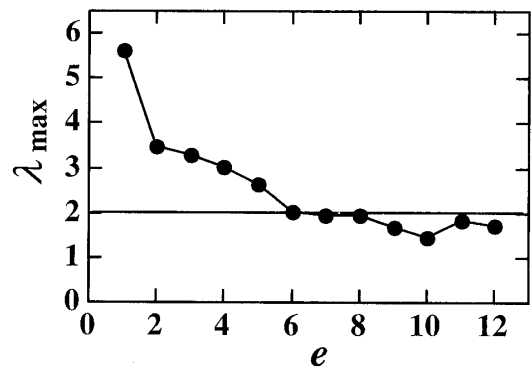


Fig. 10 Maximum Lyapunov exponent of the chaotic motion  $p_d=1367$ ,  $n=1.18$ ,  $\omega=15.65$

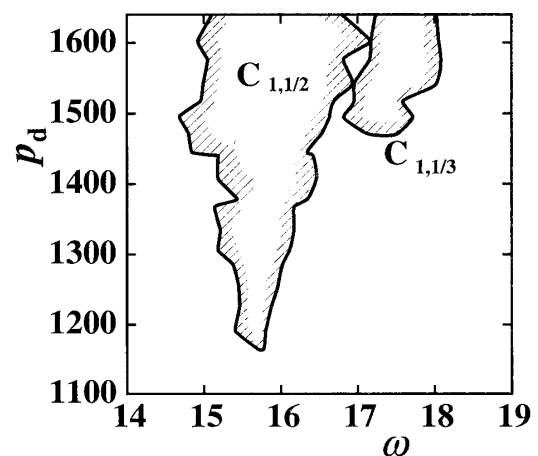


Fig. 11 Instability regions of the chaos of the post-buckled reinforced beam.  $n=1.18$

共振応答近傍に発生し、最大リアプノフ指数は2近傍の値に収束し、カオス振動に及ぼす自由度は三次元となる。

(2) 周期荷重振幅の増大とともにカオス振動は第1次の振動形が支配的で1/2次の分数次調波共振を伴い発生する。さらに振幅が大となると1/3次分数次調波共振を伴うカオスも発生する。

(3) カオス挙動のポアンカレ図は飛び移り座屈現象と低次の振動モードに起因する特徴的な引き延ばしと折り畳み構造を示す。

#### 文 献

- (1) Tseng, W. Y. and Dugundji, J., *Trans ASME, Ser E*, 38 (1971), 467-476.
- (2) Homes, P. J., *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A292, (1979), 419-448.
- (3) Yamaki, N. and Mori, A., *J. Sound Vib.*, 71-3(1980), 347-360.
- (4) Cook, G. R. and Simiu, E., *J. Eng. Mech.*, 117-9(1991), 2049-2064.
- (5) 永井健一, 機論, 51-471, C(1985), 2820-2827.
- (6) 永井健一, 機論, 52-484, C(1986), 3047-3054.
- (7) Pezeshki, C. and Dowell, E. H., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 24-2(1989), 79-97.
- (8) 永井健一, 機論, 56-525, C(1990), 1171-1177.
- (9) 永井健一・山口誉夫・谷藤克也・楊平, 機論, 60-579, C(1994), 3-9.
- (10) 永井健一・山口誉夫, 機論, 60-579, C(1994), 3733-3740.
- (11) 山口誉夫・永井健一, 機論, 60-579, C(1994), 3741-3748.
- (12) 山口誉夫・永井健一, 機論, 61-583, C(1995), 799-807.
- (13) Wolf, A., ほか3名, *Physica 16D*, (1985), 285-317.