

## 二次元平面内の任意形状物体の把握の安定性\*

山田 貴孝<sup>\*1</sup>, Sushanta Kumar SAHA<sup>\*2</sup>  
三村 宣治<sup>\*3</sup>, 舟橋 康行<sup>\*1</sup>

## Stability analysis of grasping an arbitrary shaped planar object

Takayoshi YAMADA, Sushanta Kumar SAHA,  
Nobuharu MIMURA and Yasuyuki FUNAHASHI

This paper addresses a new concept of constructing stable grasps of arbitrary planar object. We consider the manipulation of arbitrary objects by a multifingered hand, where the contact type is object rolls without finger slipping on the object surface. The synthesis of stable grasps is constructed by virtual springs at the frictional contact point. Each finger has a two directional virtual spring whose stiffness is known but compression is unknown. We explore the positive definiteness of the stiffness matrix of the grasp system from the view point of potential energy. It is shown that the stability is greatly influenced by spring stiffness, position and curvature of fingers, object curvature, and initial grasping forces.

**Key Words:** Grasp Stability, Arbitrary Shaped Object, Curvature, Virtual Stiffness, Potential Energy

## 1. 緒 言

多指ロボットハンドで物体を把持する場合、把握系の安定性が問題となる。つまり、把持している物体に外乱が加わった場合でも、物体を落とすことなく把持し続けられるか否かが問題となる。

この安定性を評価するために、ポテンシャルエネルギーあるいは復元力の観点から解析する方法が提案されている<sup>(1)~(7)</sup>。これは、外乱による把持物体の微小変位を許し、外乱の消失後に把握が元の状態に戻るかどうかを評価するものである。このため、各指先にはばね剛性を設定し、把持物体の微小変位を利用して、把握系の剛性行列を導出し、その正定性から把握系の安定性を評価するものである。

Hanafusa ら<sup>(1)</sup>は指先が物体上を滑る場合について解析している。把握系に蓄えられるポテンシャルエネルギーの総和が最小となる位置で把握系は安定になることを示した。そして、一次元のばね剛性を実際に有

するハンドで物体を把持するときの最適な指先位置を明らかにした。Nguyen<sup>(2)</sup>は、指先のばね剛性がコンピュータで制御できることを示し、仮想ばねで置き換えて解析することを提案した。そして、平衡状態にある把持が安定であるための必要十分条件はポテンシャルエネルギーが平衡状態において局所最小となることを示した。さらに物体を接触点近傍の曲率半径で近似し、物体の曲率が安定性に影響することを示した。Howard は<sup>(3)</sup>は物体と指の両方を曲率で近似し、復元力の観点から解析した。そして、物体および指先の曲率が安定性に影響を与えることを示した。しかし、接触点間に働く力の力学的解析が複雑であった。このため楯ら<sup>(4)</sup>は、物体および指形状を接触点での曲率円で近似し、簡単な幾何学的関係からポテンシャルエネルギーおよび剛性行列を導出した。

金子ら<sup>(5)</sup>は、接触点での滑りの有無により、把握系の安定性が大きく変わることを示した。そして、指先に二次元直交仮想ばねを設定することで、滑りのない場合の把握系の安定性が解析できることを示した。さらに、把握系を安定にするための剛性条件も導出している。三村ら<sup>(6)</sup>は三次元把持に拡張し、同様の解析を行っている。文献(5)、(6)の解析は、物体および指先表面上で接触点が移動しない、すなわち物体あるい

\* 原稿受付 1997年6月23日。

\*<sup>1</sup> 正員, 名古屋工業大学工学部(☎466-8555 名古屋市昭和区御器所町)。\*<sup>2</sup> 名古屋工業大学大学院。\*<sup>3</sup> 正員, 新潟大学工学部(☎950-2181 新潟市五十嵐二の町8050)。

は指先がとがっている場合を考えているため、接触点の位置のみが問題となっていた。しかし、物体と指先がともに丸い場合には、把持物体の変位に伴い、接触点が実際に移動する。このため接触点近傍の形状が把握系の安定性に影響を与える。Funahashi ら<sup>(7)</sup>は、物体の形状を接触点近傍の曲率半径で近似し、簡単な幾何学的関係から物体位置の変位と指先位置の変位との関係を導出し、剛性行列を求めた。そして、曲率が把握系の安定性に影響を与えることを具体的に示した。これらの研究は接触点での物体の形状を曲率で近似し、曲率と安定性との関係を導出していた。

本論文では、物体形状を接触点近傍の曲率で近似せずに、任意形状物体を把持したときの把握の安定性を解析する。その際、転がり接触の運動学<sup>(8)</sup>を基に剛性行列を導出する。そして、安定性に影響を与えるパラメータを明らかにする。

## 2. 問題の設定

図1に示すように、多指ハンドで任意形状物体を把持している状態を考える。ばね剛性が各指先に設定されている時に、ポテンシャルエネルギーの観点から把握系の安定性を解析する。

**2.1 仮定** 議論を簡単化するため、以下の仮定を設ける。

- (A1) 把握系の運動は準静的である。
- (A2) 各指は十分な自由度をもち、基準座標系に対する指先の回転は発生しない。
- (A3) 対象物の形状は任意であるが、既知である。また、指先の形状は半径  $\rho_{fi}$  の円弧である。対象物と指は剛体である。
- (A4) 摩擦係数は十分に大きく指先は滑らず、転がりのみが発生する。
- (A5) 初期把握状態は既知であり、把握系は力学的平衡状態にある。

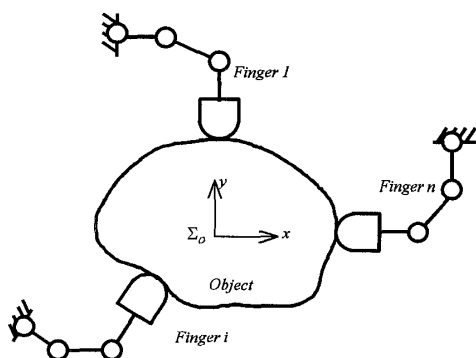


Fig. 1 A planar object grasped by a multifingered hand

(A6) 各指のばね剛性は、図2のように二次元の直交仮想ばねに置き換えることができる。一方は接触点の法線に平行に、他方はそれに垂直に設定できる。

仮想ばねが設定された位置には接触点に対してオフセットが存在するが、仮定(A2)より指先の回転がないため、本解析ではオフセットの影響はない。

### 2.2 安定性の評価

各指の剛性を、図2のように2本の仮想ばねで置き換えて考える。一方のばね剛性を  $k_{xi}$ 、他方のそれを  $k_{yi}$  とおく。初期内力  $f_{xi}$ ,  $f_{yi}$  を発生させるため、 $k_{xi}$ ,  $k_{yi}$  をあらかじめ  $\delta_{xoi}$ ,  $\delta_{yoi}$  だけ圧縮させておく。

$$f_{xi} = k_{xi}\delta_{xoi}, \quad f_{yi} = k_{yi}\delta_{yoi}. \quad \dots\dots\dots(1)$$

把持物体が並進  $x, y$ , 回転  $\zeta$  だけ微小変位したときの仮想ばねの圧縮量を  $\delta_{xi}$ ,  $\delta_{yi}$  と表す。

$$\delta_{xi} = \delta_{xi}(\epsilon), \quad \delta_{yi} = \delta_{yi}(\epsilon) \quad \dots\dots\dots(2)$$

ただし

$$\epsilon = [x \quad y \quad \zeta]^T \quad \dots\dots\dots(3)$$

とおいた。このとき、把握系に蓄えられるポテンシャルエネルギーは次の式で与えられる。

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{k_{xi}(\delta_{xi} + \delta_{xoi})^2 + k_{yi}(\delta_{yi} + \delta_{yoi})^2\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

もし、ポテンシャルエネルギー  $U$  が初期把握状態において局所最小ならば、その把握系は安定である。そこで、式(4)のポテンシャルエネルギーを  $\epsilon=0$  の近傍でテイラー展開する。

$$U(\epsilon) = U(0) + \epsilon^T \nabla U|_{(0)} + \frac{1}{2} \epsilon^T H|_{(0)} \epsilon + \dots, \quad \dots\dots\dots(5)$$

ただし、

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \zeta} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \zeta} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \end{bmatrix}$$

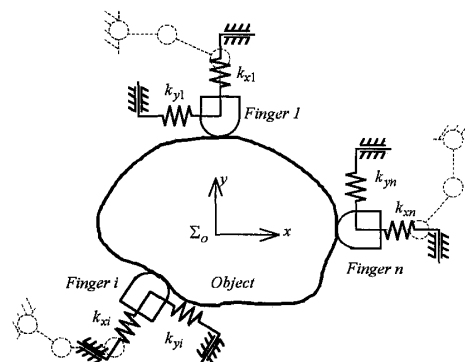


Fig. 2 Stiffness of fingers

$$= \nabla \nabla^T U$$

式(5)より、把握系が安定であるための必要十分条件は次の二つの条件が満たされることである。

- (i)  $\nabla U|_{(0)} = 0$
- (ii)  $H|_{(0)}$  が正定

仮定(A5)より条件(i)は常に満たされるため、条件(ii)の剛性行列  $H|_{(0)}$  の正定性が把握系の安定性の指標となる。

剛性行列を求めると

$$H|_{(0)} = \sum_{i=1}^n \{ k_{xi} (\nabla \delta_{xi}|_{(0)}) (\nabla \delta_{xi}|_{(0)})^T + k_{yi} (\nabla \delta_{yi}|_{(0)}) (\nabla \delta_{yi}|_{(0)})^T + \{ f_{xi} (\nabla \nabla^T \delta_{xi}|_{(0)}) + f_{yi} (\nabla \nabla^T \delta_{yi}|_{(0)}) \} \dots (6)$$

となる。ここで  $k_{xi}, k_{yi}, f_{xi}, f_{yi}$  は既知であるため、次の四つの項が求めれば剛性行列が決まる。

$$\nabla \delta_{xi}, \nabla \delta_{yi}, \nabla \nabla^T \delta_{xi}, \nabla \nabla^T \delta_{yi}$$

3章では、これらの項を導出する。

### 3. 定式化

**3.1 座標系の設定** 3種類の座標系を図3のように設定する。基準となる座標系を  $\Sigma_b$ 、物体上に設定された座標系を  $\Sigma_o$ 、第  $i$  指の指先の円弧の中心に設定された座標系を  $\Sigma_{fi}$  と表記する。

$\Sigma_b$  は変位前の  $\Sigma_o$  に一致させる。 $\Sigma_b$  から見た微小変位後の  $\Sigma_o$  の原点位置を  $\mathbf{x}_o$ 、姿勢を  $R_o$  とする。 $\mathbf{x}_o, R_o$  は  $x, y, \zeta$  を用いて次のように表すことができる。

$$\mathbf{x}_o = [x \ y]^T, \quad R_o = \text{Rot}(\zeta), \dots (7)$$

ただし、

$$\text{Rot}(\bullet) = \begin{bmatrix} \cos(\bullet) & -\sin(\bullet) \\ \sin(\bullet) & \cos(\bullet) \end{bmatrix} \dots (8)$$

$\Sigma_o$  から見た物体側の第  $i$  番めの接触点位置を  $\mathbf{c}_{oi}$ 、接触点での外向き単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}_{oi}$ 、接触点までの角度を  $\xi_{oi}$  とおくと、 $\mathbf{c}_{oi}, \mathbf{n}_{oi}$  は  $\xi_{oi}$  の関数として表すことができる ( $\mathbf{n}_{oi}$  の導出は付録1参照)。

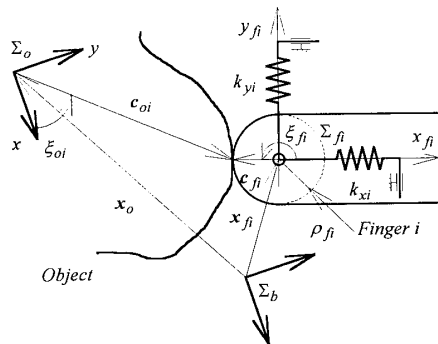


Fig. 3 Coordinates

$$\mathbf{c}_{oi} = r_o(\xi_{oi}) \begin{bmatrix} \cos \xi_{oi} \\ \sin \xi_{oi} \end{bmatrix}, \dots (9)$$

$$\mathbf{n}_{oi} = (r_{oi}^2 + r_{oi}'^2)^{-1/2} \text{Rot}(\xi_{oi}) \begin{bmatrix} r_{oi} \\ -r_{oi}' \end{bmatrix} \dots (10)$$

ただし、

$$r_{oi} = r_o(\xi_{oi}), \quad r_{oi}' = \frac{\partial}{\partial \xi_{oi}} r_o(\xi_{oi})$$

とおいた。なお、 $r_o(\xi_{oi})$  が物体の形状を表していることに注意する。

$\Sigma_{fi}$  は二次元直交仮想ばねに沿って設定する。すなわち、 $\Sigma_{fi}$  の  $x_{fi}$  軸は指側接触点での内向き法線ベクトルに平行に、 $y_{fi}$  軸は接線ベクトルに平行に設定する。 $\Sigma_b$  から見た  $\Sigma_{fi}$  の原点位置を  $\mathbf{x}_{fi}$ 、姿勢を  $R_{fi}$  とする。

$$R_{fi} = \text{Rot}(\theta_i) \dots (11)$$

ここで、 $\theta_i$  は  $\Sigma_b$  から見た  $\Sigma_{fi}$  の角度を表している。指先は回転しないという仮定(A2)より、 $\theta_i$  は一定値である。 $\Sigma_{fi}$  から見た指側の接触点位置を  $\mathbf{c}_{fi}$ 、接触点での外向き単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}_{fi}$ 、接触点への角度を  $\xi_{fi}$  とする。指先の形状が半径  $\rho_{fi}$  の円弧であることに注意すると  $\mathbf{c}_{fi}, \mathbf{n}_{fi}$  は次のように与えられる。

$$\mathbf{c}_{fi} = \rho_{fi} \begin{bmatrix} \cos \xi_{fi} \\ \sin \xi_{fi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_{fi} = \begin{bmatrix} \cos \xi_{fi} \\ \sin \xi_{fi} \end{bmatrix} \dots (12)$$

**3.2 仮想ばねの圧縮量** 指は対象物と図3のように接触しているため次の関係を得る。

$$\mathbf{x}_o + R_o \mathbf{c}_{oi} = \mathbf{x}_{fi} + R_{fi} \mathbf{c}_{fi} \dots (13)$$

対象物が  $\epsilon$  だけ微小変位したときの指先位置を  $\mathbf{x}_{fi}(\epsilon)$  とおくと、仮想ばねの圧縮量は次の式で求められる。

$$\begin{bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \end{bmatrix} = R_{fi}^T (\mathbf{x}_{fi}(\epsilon) - \mathbf{x}_{fi}(0)) \dots (14)$$

式(13)を式(14)へ代入すると

$$\begin{bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \end{bmatrix} = R_{fi}^T \mathbf{x}_o + R_{fi}^T R_o \mathbf{c}_{oi} - \mathbf{c}_{fi} - R_{fi}^T \mathbf{x}_{fi}(0) \dots (15)$$

を得る。 $\xi_{oi}, \xi_{fi}$  は  $\zeta$  のみに依存するため、 $R_o, \mathbf{c}_{oi}, \mathbf{c}_{fi}$  は  $\zeta$  に関する項となり、 $\mathbf{x}_o$  は  $x, y$  に関する項となる。したがって、式(15)は二つの部分に分けて考えることができる。

$$\begin{bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i(x, y) \\ h_i(x, y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_i(\zeta) \\ w_i(\zeta) \end{bmatrix} \dots (16)$$

ただし、

$$\begin{bmatrix} g_i \\ h_i \end{bmatrix} = R_{fi}^T \mathbf{x}_o - R_{fi}^T \mathbf{x}_{fi}(0) \dots (17)$$

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = R_{fi}^T R_o \mathbf{c}_{oi} - \mathbf{c}_{fi} \dots (18)$$

である。ここで、 $g_i, h_i$  は  $x, y$  について線形、 $v_i, w_i$

はらについて非線形であることを考慮すると

$$\nabla \delta_{xi} = \begin{bmatrix} g_{ix} \\ g_{iy} \\ v_{ix} \end{bmatrix}, \quad \nabla \nabla^T \delta_{xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{ixx} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

を得る。ここで  $g_{ix}$  は  $x$  による  $g_i$  の偏微分を表している。同様に、

$$\nabla \delta_{yi} = \begin{bmatrix} h_{ix} \\ h_{iy} \\ w_{ix} \end{bmatrix}, \quad \nabla \nabla^T \delta_{yi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{ixx} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

を得る。 $g_{ix}$  から  $w_{ixx}$  までの偏微分は、式(17)、(18)より、次で与えられる。

$$\begin{bmatrix} g_{ix} \\ h_{ix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ -\sin \theta_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_{iy} \\ h_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_i \\ \cos \theta_i \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{bmatrix} v_{ix} \\ w_{ix} \end{bmatrix} = R_{fi}^T \frac{dR_o}{d\zeta} \mathbf{c}_{oi} + R_{fi}^T R_o \frac{\partial \mathbf{c}_{oi}}{\partial \xi_{oi}} \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} - \frac{\partial \mathbf{c}_{fi}}{\partial \xi_{fi}} \frac{d\xi_{fi}}{d\zeta} \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{bmatrix} v_{ixx} \\ w_{ixx} \end{bmatrix} = R_{fi}^T \frac{d^2 R_o}{d\zeta^2} \mathbf{c}_{oi} + 2R_{fi}^T \frac{dR_o}{d\zeta} \frac{\partial \mathbf{c}_{oi}}{\partial \xi_{oi}} \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} + R_{fi}^T R_o \frac{\partial^2 \mathbf{c}_{oi}}{\partial \xi_{oi}^2} \left( \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \right)^2 + R_{fi}^T R_o \frac{\partial \mathbf{c}_{oi}}{\partial \xi_{oi}} \frac{d^2 \xi_{oi}}{d\zeta^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{c}_{fi}}{\partial \xi_{fi}^2} \left( \frac{d\xi_{fi}}{d\zeta} \right)^2 - \frac{\partial \mathbf{c}_{fi}}{\partial \xi_{fi}} \frac{d^2 \xi_{fi}}{d\zeta^2} \dots\dots\dots (23)$$

この中で、次の四つの項以外は式(7)、(9)、(12)を用いて求めることができる。

$$\frac{d\xi_{oi}}{d\zeta}, \frac{d\xi_{fi}}{d\zeta}, \frac{d^2 \xi_{oi}}{d\zeta^2}, \frac{d^2 \xi_{fi}}{d\zeta^2}$$

これらは接触点の移動により発生する項である。次節では、転がり接触の方程式を基にして、これらを導出する。

**3・3 転がり接触の運動学** 式(13)を時間微分し、整理すると

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{x}}_{fi} + \boldsymbol{\omega}_{fi} \times R_{fi} \mathbf{c}_{fi}) - (\dot{\mathbf{x}}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times R_o \mathbf{c}_{oi}) \\ & = R_o \dot{\mathbf{c}}_{oi} - R_{fi} \dot{\mathbf{c}}_{fi} \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

を得る。転がり接触の場合、初期接触点の移動速度は二物体間で同じになるため右辺は零になり、次式を得る。

$$R_o \frac{\partial \mathbf{c}_{oi}}{\partial \xi_{oi}} \dot{\xi}_{oi} - R_{fi} \frac{\partial \mathbf{c}_{fi}}{\partial \xi_{fi}} \dot{\xi}_{fi} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

接触点での法線ベクトルは反対方向を向くため

$$R_o \mathbf{n}_{oi} = -R_{fi} \mathbf{n}_{fi} \dots\dots\dots (26)$$

となり、時間微分すると

$$\boldsymbol{\omega}_o \times R_o \mathbf{n}_{oi} + R_o \frac{\partial \mathbf{n}_{oi}}{\partial \xi_{oi}} \dot{\xi}_{oi}$$

$$+ \boldsymbol{\omega}_{fi} \times R_{fi} \mathbf{n}_{fi} + R_{fi} \frac{\partial \mathbf{n}_{fi}}{\partial \xi_{fi}} \dot{\xi}_{fi} = 0 \dots\dots\dots (27)$$

を得る。仮定(A2)より、指先は回転しないため  $\boldsymbol{\omega}_{fi} = 0$  であるから、次の関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} R_o \frac{\partial \mathbf{c}_{oi}}{\partial \xi_{oi}} & -R_{fi} \frac{\partial \mathbf{c}_{fi}}{\partial \xi_{fi}} \\ R_o \frac{\partial \mathbf{n}_{oi}}{\partial \xi_{oi}} & R_{fi} \frac{\partial \mathbf{n}_{fi}}{\partial \xi_{fi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{oi} \\ \dot{\xi}_{fi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\boldsymbol{\omega}_o \times R_o \mathbf{n}_{oi} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

これが、転がり接触の方程式である。

式(28)において

$$[\boldsymbol{\omega}_o \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\zeta} \\ \dot{\zeta} & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

を用いると

$$\begin{bmatrix} A_i & -\rho_{fi} C_i \\ B_i & -\rho_{fi} D_i \\ E_i^{-3/2} F_i A_i & C_i \\ E_i^{-3/2} F_i B_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{oi} \\ \dot{\xi}_{fi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_i^{-1/2} A_i \\ -E_i^{-1/2} B_i \end{bmatrix} \dot{\zeta} \dots\dots\dots (30)$$

を得る。ただし

$$\begin{aligned} A_i &:= r'_{oi} \cos(\xi_{oi} + \zeta) - r_{oi} \sin(\xi_{oi} + \zeta) \\ B_i &:= r'_{oi} \sin(\xi_{oi} + \zeta) + r_{oi} \cos(\xi_{oi} + \zeta) \\ C_i &:= -\sin(\xi_{fi} + \theta_i), D_i := \cos(\xi_{fi} + \theta_i) \\ E_i &:= r_{oi}^2 + r_{fi}^2, F_i := 2r_{oi} r_{fi} - r_{oi} r_{fi}'' \dots (31) \end{aligned}$$

これより、

$$\dot{\xi}_{oi} = -\frac{\rho_{fi} E_i}{E_i^{3/2} + \rho_{fi} F_i} \dot{\zeta} \dots\dots\dots (32)$$

$$\dot{\xi}_{fi} = -\frac{E_i A_i}{(E_i^{3/2} + \rho_{fi} F_i) C_i} \dot{\zeta} \dots\dots\dots (33)$$

ここで

$$\dot{\xi}_{oi} = \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \dot{\zeta}, \quad \dot{\xi}_{fi} = \frac{d\xi_{fi}}{d\zeta} \dot{\zeta} \dots\dots\dots (34)$$

との係数比較により

$$\frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} = -\frac{\rho_{fi} E_i}{E_i^{3/2} + \rho_{fi} F_i} \dots\dots\dots (35)$$

$$\frac{d\xi_{fi}}{d\zeta} = -\frac{A_i E_i}{(E_i^{3/2} + \rho_{fi} F_i) C_i} \dots\dots\dots (36)$$

となる。

仮定(A1)の  $\ddot{\zeta} = 0$  を考慮して、式(32)を時間微分すると

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{oi} &= -\frac{1}{E_i^{3/2} + \rho_{fi} F_i} \left( \frac{3}{2} E_i^{1/2} \frac{dE_i}{d\xi_{oi}} + \rho_{fi} \frac{dF_i}{d\xi_{oi}} \right) \dot{\xi}_{oi}^2 \\ & - \frac{\rho_{fi}}{E_i^{3/2} + \rho_{fi} F_i} \frac{dE_i}{d\xi_{oi}} \dot{\xi}_{oi} \dot{\zeta} \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

を得る。さらに、 $\dot{\xi}_{oi}$  に式(32)を代入し、

$$\ddot{\xi}_{oi} = \frac{d^2 \xi_{oi}}{d\zeta^2} \dot{\zeta}^2 \dots\dots\dots (38)$$

と係数比較すると

$$\frac{d^2 \xi_{oi}}{d\zeta^2} = -\frac{1}{E_i^{3/2} + \rho_{fi} F_i} \left( \frac{3}{2} E_i^{1/2} \frac{dE_i}{d\xi_{oi}} + \rho_{fi} \frac{dF_i}{d\xi_{oi}} \right) \times \left( \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \right)^2 - \frac{\rho_{fi}}{E_i^{3/2} + \rho_{fi} F_i} \frac{dE_i}{d\xi_{oi}} \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \dots (39)$$

となる。同様にして

$$\frac{d^2 \xi_{fi}}{d\zeta^2} = \frac{G_i - B_i}{\rho_{fi} C_i} \left( \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \right)^2 - \frac{B_i}{\rho_{fi} C_i} \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} + \frac{A_i}{\rho_{fi} C_i} \frac{d^2 \xi_{oi}}{d\zeta^2} + \frac{D_i}{C_i} \left( \frac{d\xi_{fi}}{d\zeta} \right)^2 \dots (40)$$

を得る(導出は付録2参照)。ただし、

$$G_i := r_{oi}'' \cos(\xi_{oi} + \zeta) - r_{oi}' \sin(\xi_{oi} + \zeta)$$

とおいた。ここで

$$\begin{bmatrix} l_{xi} \\ l_{yi} \end{bmatrix} := R_{fi}^T c_{oi}|_{(0)}$$

$$\phi_i := \xi_{oi}|_{(0)}, \xi_{fi}|_{(0)} = -\pi$$

とおくと、式(22), (23), (35), (36), (39), (40)より

$$v_{ix}|_{(0)} = -l_{yi}, w_{ix}|_{(0)} = l_{xi} \dots (41)$$

$$v_{iy}|_{(0)} = -l_{xi} + \frac{\rho_{fi} E_{i0}^{3/2}}{E_{i0}^{3/2} + \rho_{fi} F_{i0}} \dots (42)$$

$$w_{iy}|_{(0)} = -l_{yi} \dots (43)$$

となる(導出は付録3, 4を参照)。\$E\_{i0}^{3/2} F\_{i0}^{-1}\$ は対象物側の接触点での曲率半径を表しているため

$$\rho_{oi} := E_{i0}^{3/2} F_{i0}^{-1} \dots (44)$$

とおくと、

$$v_{ix}|_{(0)} = -l_{xi} + \frac{\rho_{oi} \rho_{fi}}{\rho_{oi} + \rho_{fi}} \dots (45)$$

以上より、剛性行列は次で与えられる。

$$H|_{(0)} = \sum_{i=1}^n \left\{ k_{xi} \begin{bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \\ -l_{yi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & -l_{yi} \end{bmatrix} + k_{yi} \begin{bmatrix} -\sin \theta_i \\ \cos \theta_i \\ l_{xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & \cos \theta_i & l_{xi} \end{bmatrix} - \left\{ f_{xi} \left( l_{xi} - \frac{\rho_{oi} \rho_{fi}}{\rho_{oi} + \rho_{fi}} \right) + f_{yi} l_{yi} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \dots (46)$$

第1項は接触点での法線方向の仮想ばねの剛性により発生し、第2項は接線方向の仮想ばねの剛性により生じる。第3項は、接触力と曲率が回転方向剛性のみに影響を与えることを示している。式(46)より、把握の安定性は接触点位置、接触力、接触点での曲率、仮想ばねの剛性に依存し、それ以外は必要としないことが明らかになった。

本定式化の特徴は、物体形状を接触点近傍の曲率で近似せずに、剛性行列を導出したことである。ところで、式(46)の剛性行列は接触点近傍の物体形状を円弧

で近似した文献(7)の結果と同じである。これは、式(6)の安定性の評価式が一階微分と二階微分を必要としており、二階微分は曲率に対応するためである。

#### 4. 結 言

任意形状物体を把持したときの把握の安定性を解析した。そして以下の成果を得た。

- (1) 物体の形状を曲率で近似せずに把握系の安定性を解析した。
- (2) 転がり接触の運動学を基に剛性行列を導出した。
- (3) 把握系の安定性は、接触点位置、接触点での曲率、初期把握力、仮想ばねの剛性に依存し、それ以外は必要としないことを明らかにした。

最後に、本研究の発端となる研究を行った本学大学院生 榎将博氏 [現、三菱重工業(株)]、鈴木泰充氏 [現、日本特殊陶業(株)] に感謝の意を表す。また、本学大学院生 毛利哲也氏には有益なコメントをいただいた。

#### 付録1 \$n\_{oi}\$ の導出

接触点での単位接線ベクトルを \$t\_{oi}\$ とおく。

$$t_{oi} = \frac{dc_{oi}}{d\xi_{oi}} / \left\| \frac{dc_{oi}}{d\xi_{oi}} \right\|$$

ここで

$$\frac{dc_{oi}}{d\xi_{oi}} = r_{oi}' \begin{bmatrix} \cos \xi_{oi} \\ \sin \xi_{oi} \end{bmatrix} + r_{oi} \begin{bmatrix} -\sin \xi_{oi} \\ \cos \xi_{oi} \end{bmatrix} = \text{Rot}(\xi_{oi}) \begin{bmatrix} r_{oi}' \\ r_{oi} \end{bmatrix}$$

となるため、

$$t_{oi} = (r_{oi}'^2 + r_{oi}^2)^{-1/2} \text{Rot}(\xi_{oi}) \begin{bmatrix} r_{oi}' \\ r_{oi} \end{bmatrix}$$

を得る。\$n\_{oi}\$ は \$t\_{oi}\$ に直交する外向き単位法線ベクトルであるため

$$n_{oi} = \text{Rot}\left(-\frac{\pi}{2}\right) t_{oi}$$

より

$$n_{oi} = (r_{oi}'^2 + r_{oi}^2)^{-1/2} \text{Rot}(\xi_{oi}) \begin{bmatrix} r_{oi} \\ -r_{oi}' \end{bmatrix} \dots (47)$$

である。

#### 付録2 式(40)の導出

式(32), (33)より

$$\rho_{fi} C_i \dot{\xi}_{fi} = A_i \dot{\xi}_{oi}$$

の関係が得られる。これを時間 \$t\$ で微分すると

$$\rho_{fi} C_i \ddot{\xi}_{fi} = A_i \dot{\xi}_{oi} + A_i \ddot{\xi}_{oi} - \rho_{fi} \frac{dC_i}{d\xi_{fi}} \dot{\xi}_{fi}^2$$

を得る.

$$\frac{dC_i}{d\xi_{fi}} = -D_i$$

を考慮すると

$$\ddot{\xi}_{fi} = \frac{G_i - B_i}{\rho_{fi} C_i} \dot{\xi}_{oi}^2 - \frac{B_i}{\rho_{fi} C_i} \dot{\xi}_{oi} \dot{\xi}_{fi} + \frac{A_i}{\rho_{fi} C_i} \ddot{\xi}_{oi} + \frac{D_i}{C_i} \dot{\xi}_{fi}^2$$

式(34), (38)を代入し,

$$\ddot{\xi}_{fi} = \frac{d^2 \xi_{fi}}{d\zeta^2} \zeta^2$$

と係数を比較すると, 式(40)を得る.

### 付録3 回転行列 $R_{fi}$ の導出

回転行列  $R_{fi}$  は  $\mathbf{n}_{oi}$ ,  $\mathbf{t}_{oi}$  を用いて次のように表すことができる.

$$R_{fi} := [\mathbf{n}_{oi}|_{(0)} \quad \mathbf{t}_{oi}|_{(0)}]$$

したがって,

$$R_{fi} := E_{i0}^{-1/2} \text{Rot}(\phi_i) \begin{bmatrix} r_{oi} & r'_{oi} \\ -r'_{oi} & r_{oi} \end{bmatrix}$$

これより,

$$\sin \theta_i = E_{i0}^{-1/2} (r_{oi} \sin \phi_i - r'_{oi} \cos \phi_i)$$

$$\cos \theta_i = E_{i0}^{-1/2} (r_{oi} \cos \phi_i + r'_{oi} \sin \phi_i)$$

すなわち,

$$C_{i0} = -E_{i0}^{-1/2} A_{i0} \dots\dots\dots (48)$$

$$D_{i0} = -E_{i0}^{-1/2} B_{i0} \dots\dots\dots (49)$$

の関係を得る.

### 付録4 式(41)~(43)の導出

$$R_{fi}^T \frac{\partial \mathbf{c}_{oi}}{\partial \xi_{oi}} = \left\{ E_{i0}^{-1/2} \begin{bmatrix} r_{oi} & -r'_{oi} \\ r'_{oi} & r_{oi} \end{bmatrix} \text{Rot}(-\phi_i) \right\} \times \text{Rot}(\phi_i) \begin{bmatrix} r'_{oi} \\ r_{oi} \end{bmatrix} = E_{i0}^{1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を用いると

$$\begin{bmatrix} v_{iz} \\ w_{iz} \end{bmatrix}_{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{xi} \\ l_{yi} \end{bmatrix} + E_{i0}^{1/2} \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \rho_{fi} \frac{d\xi_{fi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を得る. ここで,

$$E_{i0}^{1/2} \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} + \rho_{fi} \frac{d\xi_{fi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} = \frac{\rho_{fi} E_{i0} (A_{i0} + C_{i0} E_{i0}^{1/2})}{C_{i0} (E_{i0}^{3/2} + \rho_{fi} F_{i0})}$$

および式(48)より, 式(41)を得る.

$$R_{fi}^T \frac{\partial^2 \mathbf{c}_{oi}}{\partial \xi_{oi}^2} \Big|_{(0)} = E_{i0}^{-1/2} \begin{bmatrix} -F_{i0} \\ r'_{oi} r''_{oi} + r_{oi} r'_{oi} \end{bmatrix}$$

を用いると

$$\begin{bmatrix} v_{iz} \\ w_{iz} \end{bmatrix}_{(0)} = - \begin{bmatrix} l_{xi} \\ l_{yi} \end{bmatrix} + 2E_{i0}^{1/2} \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + E_{i0}^{1/2} \frac{d^2 \xi_{oi}}{d\zeta^2} \Big|_{(0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + E_{i0}^{-1/2} \left( \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \right)^2 \begin{bmatrix} -F_{i0} \\ r'_{oi} r''_{oi} + r_{oi} r'_{oi} \end{bmatrix} - \rho_{fi} \left( \frac{d\xi_{fi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \rho_{fi} \frac{d^2 \xi_{fi}}{d\zeta^2} \Big|_{(0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって

$$v_{iz}|_{(0)} = -l_{xi} - 2E_{i0}^{1/2} \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} - \frac{\rho_{fi} F_{i0} + E_{i0}^{3/2}}{\rho_{fi} E_{i0}^{1/2}} \left( \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \right)^2$$

であるから式(42)を得る. また,

$$\begin{aligned} w_{iz}|_{(0)} &= -l_{yi} - \frac{B_{i0}}{C_{i0}} \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} + \frac{D_{i0} A_{i0}^2}{\rho_{fi} C_{i0}^3} \left( \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{E_{i0} C_{i0}} (r'_{oi} (r_{oi} + r''_{oi}) C_{i0} E_{i0}^{1/2}) \\ &+ (G_{i0} - B_{i0}) E_{i0} \left( \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \right)^2 \\ &= -l_{yi} - \frac{B_{i0}}{C_{i0}} \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} + \frac{D_{i0} A_{i0}^2}{\rho_{fi} C_{i0}^3} \left( \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \right)^2 \\ &- \frac{F_{i0} B_{i0}}{E_{i0} C_{i0}} \left( \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \right)^2 \\ &= -l_{yi} - \frac{E_{i0}^{3/2}}{(E_{i0}^{3/2} + \rho_{fi} F_{i0}) C_{i0}} (B_{i0} \\ &+ D_{i0} E_{i0}^{1/2}) \frac{d\xi_{oi}}{d\zeta} \Big|_{(0)} \end{aligned}$$

ここで, 式(49)を用いると, 式(43)を得る.

### 付録5 式(44)の導出

曲率半径  $\rho_{oi}$  は次式で与えられる.

$$\frac{1}{\rho_{oi}} \mathbf{t}_{oi} = \lim_{\Delta \xi_{oi} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}_{oi}(\xi_{oi} + \Delta \xi_{oi}) - \mathbf{n}_{oi}(\xi_{oi})}{\|\mathbf{c}_{oi}(\xi_{oi} + \Delta \xi_{oi}) - \mathbf{c}_{oi}(\xi_{oi})\|} = \frac{d\mathbf{n}_{oi}}{d\xi_{oi}} \Big/ \left\| \frac{d\mathbf{c}_{oi}}{d\xi_{oi}} \right\|$$

ここで

$$\frac{d\mathbf{c}_{oi}}{d\xi_{oi}} = \text{Rot}(\xi_{oi}) \begin{bmatrix} r'_{oi} \\ r_{oi} \end{bmatrix} \quad \frac{d\mathbf{n}_{oi}}{d\xi_{oi}} = E_i^{-3/2} F_i \text{Rot}(\xi_{oi}) \begin{bmatrix} r'_{oi} \\ r_{oi} \end{bmatrix}$$

であることから, 式(44)を得る.

## 文 献

- (1) Hanafusa, H. and Asada, H., Stable prehension by a robot hand with elastic fingers, *Proc. of 7th Int. Symp. on Industrial Robots, Tokyo*, (1977), 361.
- (2) Nguyen, V. C., Constructing stable grasps, *Int. J. Robotics Research*, 7-3(1988), 3-16.
- (3) Howard, W. H. and Kumar, V., Stability of planar grasps, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Autom.*,

- (1994), 2822-2827.
- (4) 橋将博・舟橋康行, 接触点形状による把握の安定性, 機論, **62**-593, C(1996), 175-180.
- (5) 金子真・今村信昭・横井一仁・谷江和雄, 摩擦を考慮した多指ハンドの剛性モデルによる安定把握解析, 日本ロボット学会誌, **7**-3(1989), 161-171.
- (6) 三村宣治・舟橋康行, 剛性を有する3本指ハンドによる三次元物体の安定把握解析, 機論, **57**-537, C(1991), 1631-1638.
- (7) Funahashi, Y., Yamada, T., Tate, M. and Suzuki, Y., Grasp stability analysis considering the curvatures at contact points, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Autom.*, (1996), 3040-3046.
- (8) Kerr and Roth, Analysis of Multifingered Hands, *Int. J. Robotics Research*, **4**-4(1986), 3-17.
-