

三次元多指ロボットハンド把握系の安定性解析*

山田 貴孝^{*1}, 小石倉 太郎^{*2}, 水野 雄 登^{*2}
三村 宣 治^{*3}, 舟橋 康 行^{*1}

Stability Analysis of 3D Grasps by a Multifingered Robot Hand

Takayoshi YAMADA^{*4}, Tarou KOISHIKURA, Yuto MIZUNO,
Nobuharu MIMURA and Yasuyuki FUNAHASHI^{*4} Nagoya Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering,
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 466-8555 Japan

In this paper, we discuss stability of 3D grasps by using a three-dimensional spring model (3D spring model). Many works described stability of frictionless grasp. These works used a one-dimensional spring model (1D spring model) for representation of frictionless contact as a matter of course. However, 1D spring model involves the following two problems. (i) Displacement of finger is restricted to one dimension along the initial normal at contact point. (ii) It is not clearly considered that a finger generates contact force to the object along the normal direction only. To overcome the problems and provide accurate grasp stability, we introduce 3D spring model. Then finger's displacement is relaxed and finger's contact force is precisely formulated. We analyze grasp stability from the viewpoint of the potential energy method. From numerical examples, we show that there exists an optimum contact force for stable grasp. Moreover, we also analyze frictional grasp by using contact kinematics of twist-rolling. By comparing frictional grasp stability with frictionless one, we prove that friction enhances stability of grasp.

Key Words: Grasp Stability, 3D Spring Model, Frictionless Grasp, Frictional Grasp

1. 緒 論

人間の手に似た多関節型の多指ロボットハンドは、器用な把握や操りを行う潜在能力を有している。このハンドで物体を把握する場合、把握系の安定性が問題となる。すなわち、物体に外乱が加わり力学的平衡状態から変位しても、再び元の位置・姿勢に戻るかどうか問題となる。この把握の安定性を評価するため、把握系をばね系に置き換え、ポテンシャルエネルギーや復元力の観点から解析する方法が提案されている⁽¹⁾⁽¹³⁾。図1に示すように、摩擦の有無により指の運動が異なるため、把握の安定性は摩擦の有無に依存する。

Nguyen⁽¹⁾, Kaneko ら⁽²⁾は、指先と対象物との間に摩擦が有る場合について考察した。指を直交仮想ばねモデルに置き換え、把握系に蓄えられるポテンシャルエネルギーの二階微分、すなわちヘッシアンの正定性により把握の安定性を評価した。Howard ら⁽³⁾, Funahashi ら⁽⁴⁾, 山田 ら⁽⁵⁾, Choi ら⁽⁶⁾は接触点での曲率の効果を含めた。Svinin⁽⁷⁾は回転安定性のための接触力の範囲を導

いた。Cutkosky ら⁽⁸⁾, Maekawa ら⁽⁹⁾は指関節の柔軟性を考慮している。Howard ら⁽¹⁰⁾は包み込み把握の安定性を研究している。Shimoga⁽¹¹⁾, Xiong ら⁽¹²⁾は動的安定性を扱っている。

水や石鹸など滑りやすい物を把握した場合には摩擦は小さい。このため、摩擦が無い場合の把握の安定性を解析することは重要である。摩擦が無い場合、指先力の接線成分は生じない。文献(1),(3),(4)は摩擦なしの把握の安定性も研究している。Rimon ら⁽¹³⁾, Lin ら⁽¹⁴⁾は Configuration Space を用いて解析している。これらは、摩擦なしを表現するために初期接触点の法線に沿う次元ばねモデルを用いている(図2(a))。しかし、(i)指先位置の変位が次元に拘束される、(ii)変位後の接触力について言及していない、などの問題点があ

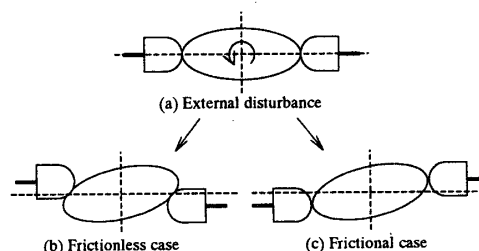


Fig. 1 Difference of finger's displacement between frictionless and frictional contact for 2D grasp

* 原稿受付 2002年4月19日.

^{*1} 正員, 名古屋工業大学工学部(☎466-8555 名古屋市昭和区御器所町).

^{*2} 名古屋工業大学大学院工学研究科.

^{*3} 正員, 新潟大学工学部(☎950-2182 新潟市五十嵐2の町8050).

E-mail: yamat@eine.mech.nitech.ac.jp

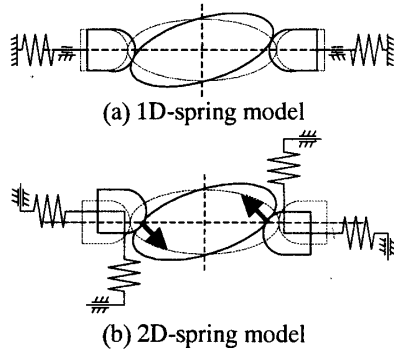


Fig. 2 Difference of finger's displacement between 1D and 2D spring models for frictionless 2D grasp

る．文献(10)は指関節に剛性を設定することで指先変位を考慮しているが，変位後の接触力については言及していない．また，文献(6)は初期把握力の影響を考慮していない．

そこで，Saha ら⁽¹⁵⁾は，摩擦が無い場合の二次元把握に対して，摩擦がある場合と同様に，二次元直交仮想ばねモデルを導入した(図 2(b))．そして，指先位置の変位を緩和し，接触力の接線成分が生じないという摩擦無し条件を明確に定式化した．すなわち，摩擦の有無をばねの次元ではなく接触点での拘束で表現した．文献(5)では対象物の形状を球形および円筒形に限定していた．

本論文では，文献(15)の手法を三次元把握に拡張する．三次元ばねモデルを導入し，摩擦無し接触力を明確に定式化する．把握の安定性はポテンシャルエネルギーの観点から解析する．そして，数値例を用いて，把握の安定性の観点から最適な指先力が存在することを示す．摩擦が有る場合の把握の安定性は転がり接触の運動学を用いて導出する．そして，摩擦が無い場合と有る場合を比較し，摩擦が把握の安定性を高めることを理論的に示す．

2. 定式化

図 3 に示すように，多指ロボットハンドにより対象物が把握されているとする．このときの把握の安定性を解析する．

2.1. 仮定

議論を明確にするため次の仮定をおく．

(A1) 各指は対象物と指先の一点で接触している．

(A2) 指先と対象物は剛体であり，形状は既知である．指先は曲率 κ_{fi} を有する半球である．接触点での対象物の局所形状は二次モデルで近似され，主曲率は κ_{ai} ， κ_{bi} であり，その方向はそれぞれ r_{zi} ， r_{yi} である．

(A3) 初期把握状態は既知であり，平衡状態にある．

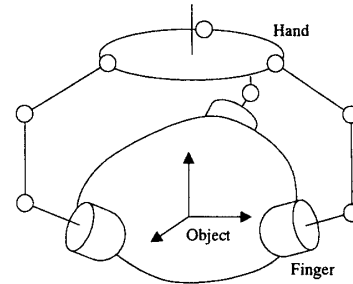


Fig. 3 3D grasp system

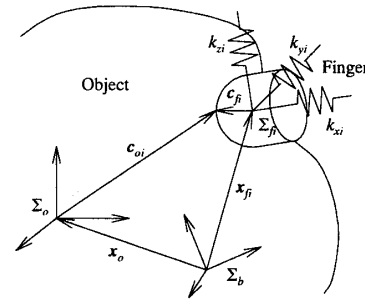


Fig. 4 Coordinate frame

(A4) 外乱による対象物の位置・姿勢変位は微小である．その変位を $\varepsilon = [x, y, z, \xi, \eta, \zeta]^T$ と表記する．

(A5) 各指先の位置変位は微小であり，変位と反力の関係は三次元の直交仮想ばねで置き換えられる．法線成分は $k_{xi} (> 0)$ ，接線成分は $k_{yi} (> 0)$ ， $k_{zi} (> 0)$ とし，図 4 のように指先の曲率中心に設定されている． k_{yi} ， k_{zi} はそれぞれ r_{zi} ， r_{yi} に沿う．

仮定(A5)は指先の回転ばねの効果は並進ばねの効果に比べ十分小さいこと，指先の回転変位は並進変位に比べ微小であり無視できることを意味している．この場合，接触点とばねモデルの位置オフセットは安定性に影響しない．本論文では摩擦が有る場合の接触点の自由度を 3 としており，接触点ではモーメントを伝達できない．指のコンプライアンスは指の機構により決まるが，物体に作用する接触点での等価剛性は 3 次元分に減少する．ロボットハンドの場合，この等価剛性は様々に設定でき，本論文では直交ばねの特性を有する場合を扱う．具体例には，(i)各指の自由度が十分に多いハンドを用いて指先が回転しないように制御した場合，(ii)各指が直交の 3 自由度を有するハンドを用いた場合がある．指先が回転する一般的な場合については今後の研究課題とする．

2.2. 主な記号 基準座標系を Σ_b ，第 i 指の指先座標系を Σ_{fi} とおく． Σ_{fi} を指先の仮想ばねに沿って設定する． x 軸は指先の内向き法線方向に一致させる． Σ_b から見た Σ_{fi} の位置と姿勢を x_{fi} ， $R_{fi} := [r_{xi}, r_{yi}, r_{zi}]$ と表す．指先側の接触点を

$$\mathbf{c}_{\bar{f}_i}(\mathbf{u}_{\bar{f}_i}) := \kappa_{\bar{f}_i}^{-1} [\cos u_{\bar{f}_i} \cos v_{\bar{f}_i} \quad \cos u_{\bar{f}_i} \sin v_{\bar{f}_i} \quad \sin u_{\bar{f}_i}]^T \quad (1)$$

と表す。ここで $\mathbf{u}_{\bar{f}_i} = [u_{\bar{f}_i}, v_{\bar{f}_i}]^T$ は指側の接触点位置のパラメータである。接触点 $\mathbf{c}_{\bar{f}_i}$ における内向き単位法線ベクトルは

$$\mathbf{n}_{\bar{f}_i}(\mathbf{u}_{\bar{f}_i}) := -\kappa_{\bar{f}_i} \mathbf{c}_{\bar{f}_i}(\mathbf{u}_{\bar{f}_i}) \quad (2)$$

で与えられる。対象物座標系を Σ_o と表記する。 Σ_b は Σ_o の初期位置姿勢に一致させる。外乱により対象物の変位したとき、 Σ_o の位置と姿勢は次のように表される。

$$\mathbf{x}_o = [x, y, z]^T, \quad \mathbf{R}_o = \text{Rot}(\xi, \eta, \zeta) \quad (3)$$

ここで $\text{Rot}(\bullet)$ は三次元の回転行列である。接触点での対象物局所座標系を Σ_{oi} 、対象物側の接触点を \mathbf{c}_{oi} 、 Σ_o に対する Σ_{oi} の位置と姿勢を \mathbf{c}_i 、 \mathbf{R}_{ci} と表記する。接触点近傍の局所形状を主曲率 κ_{ai} 、 κ_{bi} で近似する。

$$\mathbf{c}_{oi}(\mathbf{u}_{ci}) := \mathbf{c}_i + \mathbf{R}_{ci} \mathbf{d}_i(\mathbf{u}_{ci}), \quad (4)$$

$$\mathbf{d}_i(\mathbf{u}_{ci}) := [u_{ci}, v_{ci}, (\kappa_{ai} u_{ci}^2 + \kappa_{bi} v_{ci}^2) / 2]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{R}_{ci} := [r_{zi}, r_{yi}, -r_{xi}] \quad (6)$$

ここで $\mathbf{u}_{ci} = [u_{ci}, v_{ci}]^T$ は把握対象物上の接触点位置パラメータである。内向き単位法線ベクトルを \mathbf{n}_{oi} と表記する。

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{oi}(\mathbf{u}_{ci}) &= (\mathbf{d}_{iu} \otimes \mathbf{d}_{iv}) / \|\mathbf{d}_{iu} \otimes \mathbf{d}_{iv}\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_{ai}^2 u_{ci}^2 + \kappa_{bi}^2 v_{ci}^2 + 1}} \begin{bmatrix} -\kappa_{ai} u_{ci} \\ -\kappa_{bi} v_{ci} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\mathbf{d}_{iu} := \partial \mathbf{d}_i / \partial u_{ci}$ 、 $\mathbf{d}_{iv} := \partial \mathbf{d}_i / \partial v_{ci}$ であり、 \otimes は外積を表す。

2.3. ばねの圧縮量 接触の運動学より、次の二つの方程式を得る。一つは対象物上と指先上の接触点位置が一致する条件である。

$$\mathbf{x}_o + \mathbf{R}_o \mathbf{c}_{oi} = \mathbf{x}_{\bar{f}_i} + \mathbf{R}_{\bar{f}_i} \mathbf{c}_{\bar{f}_i} \quad (8)$$

もう一つは法線ベクトルが対向する条件である。

$$\mathbf{R}_o \mathbf{n}_{oi} = -\mathbf{R}_{\bar{f}_i} \mathbf{n}_{\bar{f}_i} \quad (9)$$

対象物変位 $\boldsymbol{\varepsilon}$ が生ずると、仮想ばねは次の量だけ圧縮される。

$$\begin{aligned} \delta_i &:= \mathbf{R}_{\bar{f}_i}^T \{ \mathbf{x}_{\bar{f}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{x}_{\bar{f}_i}(0) \} \\ &= \mathbf{R}_{\bar{f}_i}^T \{ \mathbf{x}_o + \mathbf{R}_o \mathbf{c}_{oi} + \kappa_{\bar{f}_i}^{-1} \mathbf{R}_o \mathbf{n}_{oi} - \mathbf{x}_{\bar{f}_i}(0) \} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 \mathbf{c}_{oi} と \mathbf{n}_{oi} が \mathbf{u}_{ci} の関数であるため、 $\delta_i = \delta_i(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}_{ci})$ であることに注意する。 $\boldsymbol{\varepsilon}$ と \mathbf{u}_{ci} の関係は摩擦の有無に依存する。3.1節と3.2節において、この関係を述べる。

2.4. ポテンシャルエネルギー $\Sigma_{\bar{f}_i}$ で見た初期接触力を $\mathbf{f}_i := [f_{xi}, f_{yi}, f_{zi}]^T$ 、接触力 \mathbf{f}_i が生じるときのばねの初期圧縮量を $\delta_{oi} = [\delta_{xoi}, \delta_{yoi}, \delta_{zoi}]^T$ と表記する。

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{K}_i \delta_{oi}, \quad \mathbf{K}_i := \text{diag}[k_{xi}, k_{yi}, k_{zi}] \quad (11)$$

把握系に蓄えられるポテンシャルエネルギーは次の式で与えられる。

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\delta_{oi} + \delta_i)^T \mathbf{K}_i (\delta_{oi} + \delta_i) \quad (12)$$

初期把握状態の近傍でテイラー展開すると、関数 $U(\boldsymbol{\varepsilon})$ は次のように表される。

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}) = U(0) + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{G} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} + \dots, \quad (13)$$

ここで \mathbf{G} と \mathbf{H} は Gradient と Hessian である。なお、 \mathbf{H} は剛性行列とも呼ばれている。

把握系が初期把握状態において安定であるための必要十分条件はポテンシャルエネルギーが局所最小となることである。次の二つの条件を満たすならば関数 $U(\boldsymbol{\varepsilon})$ は局所最小となる。

(i) $\mathbf{G} = 0$

(ii) \mathbf{H} が正定

条件(i)は仮定(A3)により満たされている。それゆえ、把握の安定性はヘッシアン固有値により評価できる。ここで、 $\nabla := \partial / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ と定義すると、 \mathbf{G} と \mathbf{H} は次のように表記できる。

$$\mathbf{G} = \nabla U|_0, \quad \mathbf{H} = \nabla \nabla^T U|_0$$

式(12)より、ヘッシアン \mathbf{H} は次の式で与えられる。

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i \quad (14)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i &:= k_{xi} (\nabla \delta_{xi}|_0)(\nabla \delta_{xi}|_0)^T + f_{xi} (\nabla \nabla^T \delta_{xi}|_0) \\ &\quad + k_{yi} (\nabla \delta_{yi}|_0)(\nabla \delta_{yi}|_0)^T + f_{yi} (\nabla \nabla^T \delta_{yi}|_0) \\ &\quad + k_{zi} (\nabla \delta_{zi}|_0)(\nabla \delta_{zi}|_0)^T + f_{zi} (\nabla \nabla^T \delta_{zi}|_0) \end{aligned}$$

ここで、式(10)より

$$\nabla \delta_{xi}|_0 = \begin{bmatrix} r_{xi} \\ \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{r}_{xi} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \delta_{yi}|_0 = \begin{bmatrix} r_{yi} \\ \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{r}_{yi} + \kappa_{\bar{f}_i}^{-1} \mathbf{r}_{zi} \end{bmatrix} + \frac{\kappa_{\bar{f}_i} + \kappa_{bi}}{\kappa_{\bar{f}_i}} (\nabla v_{ci}|_0)$$

$$\nabla \delta_{zi}|_0 = \begin{bmatrix} r_{zi} \\ \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{r}_{zi} + \kappa_{\bar{f}_i}^{-1} \mathbf{r}_{yi} \end{bmatrix} + \frac{\kappa_{\bar{f}_i} + \kappa_{ai}}{\kappa_{\bar{f}_i}} (\nabla u_{ci}|_0)$$

$\nabla \nabla^T \delta_{xi}|_0$ 、 $\nabla \nabla^T \delta_{yi}|_0$ 、 $\nabla \nabla^T \delta_{zi}|_0$ は式が長いので省略する。

したがって、ヘッシアンを導出するためには、 $\nabla u_{ci}|_0$ 、 $\nabla v_{ci}|_0$ を導出しなければならない。これらの導出は摩擦の有無に依存する。

3. 把握の安定性

3.1. 摩擦の無い場合 摩擦なしの場合、接線力が発生しないため $f_{yi} = f_{zi} = 0$ である。指先の変位によ

って生じる接触力は $f_i' = f_i + K_i \delta_i$ で与えられる。摩擦が無い場合、接触力 f_i' の方向は変位後の接触点の法線方向に沿う。したがって、接触力についての次の条件式を得る。

$R_{fi}(f_i + K_i \delta_i) \perp R_o c_{oiu}$, $R_{fi}(f_i + K_i \delta_i) \perp R_o c_{oiv}$
ここで $c_{oiu} := \partial c_{oi} / \partial u_{ci}$ と $c_{oiv} := \partial c_{oi} / \partial v_{ci}$ は接触点での接線ベクトルである。それゆえ、次の式を得る。

$$\begin{aligned} h_{ui}(\varepsilon, u_{ci}) &:= (R_o c_{oiu})^T \{R_{fi}(f_i + K_i \delta_i)\} = 0, \\ h_{vi}(\varepsilon, u_{ci}) &:= (R_o c_{oiv})^T \{R_{fi}(f_i + K_i \delta_i)\} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

付録 A の導出から、ヘッシアン H は次の式で与えられる。

$$H^s = \sum_{i=1}^n (H_{fi}^s + H_{ci}^s + H_{kxi}^s + H_{kzi}^s) \quad (16)$$

ここで、上添え字"s"は摩擦なしを意味する。 H_{fi}^s は初期接触力 f_{xi} の効果を表す。

$$H_{fi}^s = f_{xi} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & [r_{xi} \otimes]^T \\ [r_{xi} \otimes] & \frac{1}{2}([c_i \otimes][r_{xi} \otimes]^T + [r_{xi} \otimes][c_i \otimes]^T) \end{bmatrix} \quad (17)$$

H_{ci}^s は接触点での曲率 κ_{ai} , κ_{bi} , κ_{fi} の効果を意味する。 $\kappa_{ai} \rightarrow 0$, $\kappa_{bi} \rightarrow 0$, $\kappa_{fi} \rightarrow \infty$ のとき $H_c \rightarrow 0$ である。

$$\begin{aligned} H_{ci}^s &= -f_{xi} \tilde{\kappa}_{bi} \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} + \kappa_{fi}^{-1} r_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} + \kappa_{fi}^{-1} r_{zi} \end{bmatrix}^T \\ &\quad - f_{xi} \tilde{\kappa}_{ai} \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} - \kappa_{fi}^{-1} r_{yi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} - \kappa_{fi}^{-1} r_{yi} \end{bmatrix}^T \\ &\quad + \frac{f_{xi}}{\kappa_{fi}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r_{yi} r_{yi}^T + r_{zi} r_{zi}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、

$$\tilde{\kappa}_{ai} = \frac{\kappa_{ai} \kappa_{fi}}{\kappa_{ai} + \kappa_{fi}}, \quad \tilde{\kappa}_{bi} = \frac{\kappa_{bi} \kappa_{fi}}{\kappa_{bi} + \kappa_{fi}}$$

H_{kxi}^s はばね剛性 k_{xi} の効果である。

$$H_{kxi}^s = k_{xi} \begin{bmatrix} r_{xi} \\ c_i \otimes r_{xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{xi} \\ c_i \otimes r_{xi} \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

H_{kzi}^s は接平面に沿うばね剛性 k_{yi} , k_{zi} の効果である。 $k_{yi} \rightarrow \infty$ かつ $k_{zi} \rightarrow \infty$ のとき、 $H_{kzi}^s \rightarrow 0$ となる。

$$\begin{aligned} H_{kzi}^s &= -\frac{(f_{xi} \tilde{\kappa}_{bi})^2}{k_{yi} - f_{xi} \tilde{\kappa}_{bi}} \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} - \kappa_{bi}^{-1} r_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} - \kappa_{bi}^{-1} r_{zi} \end{bmatrix}^T \\ &\quad - \frac{(f_{xi} \tilde{\kappa}_{ai})^2}{k_{zi} - f_{xi} \tilde{\kappa}_{ai}} \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} + \kappa_{ai}^{-1} r_{yi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} + \kappa_{ai}^{-1} r_{yi} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (20)$$

付録 B より、安定な把握を実現するためには k_{yi} , k_{zi} , f_{xi} を次の範囲で設定することが必要である。

$$k_{yi} - f_{xi} \tilde{\kappa}_{bi} > 0, \quad k_{zi} - f_{xi} \tilde{\kappa}_{ai} > 0 \quad (21)$$

$k_{yi} > 0$, $k_{zi} > 0$, $f_{xi} > 0$, $\kappa_{ai} + \kappa_{fi} > 0$, $\kappa_{bi} + \kappa_{fi} > 0$ より、凹形状 ($\kappa_i > 0$) と凸形状 ($\kappa_i < 0$) が接触していれば式(21)は常に満たされる。もし式(21)が満たされて

いれば、 H_{kzi}^s は準負定 ($H_{kzi}^s \leq 0$) である。それゆえ、 H_{kzi}^s は不安定な効果を生ずる。しかしながら、もしばね剛性 k_{yi} , k_{zi} が高ければ、 $H_{kzi}^s \rightarrow 0$ であるため不安定さは小さくなる。

本稿の結果と従来法との関係を示す。Nguyen⁽¹⁾ は次の場合に相当する。 $\kappa_{fi} \rightarrow \infty$, $\kappa_{ai} \rightarrow 0$, $\kappa_{bi} \rightarrow 0$, $k_{yi} \rightarrow \infty$, $k_{zi} \rightarrow \infty$ 。それゆえ、文献(1)の結果は次のように表現できる。

$$H_f^s + H_{kc}^s$$

Rimon and Burdick⁽¹³⁾, Howard and Kumar⁽⁹⁾, Funahashi ら⁽⁴⁾ は $k_{yi} \rightarrow \infty$, $k_{zi} \rightarrow \infty$ の場合を扱った。したがって、それらは次のように表記できる。

$$H_f^s + H_c^s + H_{kc}^s$$

3.2. 摩擦がある場合 各指先と対象物との間で摩擦が有るために滑りを生じない場合、次の転がり接触の条件式を得る。

$$R_o \dot{c}_{oi} = R_{fi} \dot{c}_{fi} \quad (22)$$

式(9), (22)を考慮すると摩擦が有るときの把握の安定性、すなわちヘッシアン H' は次のように与えられる(付録 C 参照)。

$$H' = \sum_{i=1}^n (H_{fi}' + H_{ci}' + H_{kxi}' + H_{kzi}') \quad (23)$$

ここで

$$\begin{aligned} H_{fi}' &= f_{xi} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \frac{1}{2}(c_i r_{xi}^T + r_{xi} c_i^T) - (c_i^T r_{xi}) I_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + f_{yi} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \frac{1}{2}(c_i r_{yi}^T + r_{yi} c_i^T) - (c_i^T r_{yi}) I_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + f_{zi} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \frac{1}{2}(c_i r_{zi}^T + r_{zi} c_i^T) - (c_i^T r_{zi}) I_3 \end{bmatrix} \\ H_{ci}' &= f_{xi} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \frac{1}{\kappa_{ai} + \kappa_{fi}} r_{yi} r_{yi}^T + \frac{1}{\kappa_{bi} + \kappa_{fi}} r_{zi} r_{zi}^T \end{bmatrix} \\ &\quad + f_{yi} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & -\frac{1}{2(\kappa_{ai} + \kappa_{fi})} (r_{xi} r_{yi}^T + r_{yi} r_{xi}^T) \end{bmatrix} \\ &\quad + f_{zi} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & -\frac{1}{2(\kappa_{bi} + \kappa_{fi})} (r_{xi} r_{zi}^T + r_{zi} r_{xi}^T) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$H_{kxi}' = k_{xi} \begin{bmatrix} r_{xi} \\ c_i \otimes r_{xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{xi} \\ c_i \otimes r_{xi} \end{bmatrix}^T$$

$$H_{kzi}' = k_{yi} \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} \end{bmatrix}^T + k_{zi} \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} \end{bmatrix}^T$$

3.3. 摩擦の効果 同じ条件のもとで摩擦がある場合と無い場合を比較し、摩擦の効果をはっきりさせる。このため $f_{yi} = f_{zi} = 0$ とおく。摩擦ありと摩擦なしの差は次の式で与えられる。

$$H^d := H^r - H^s \quad (24)$$

ここで

$$H_{ci}^s = \frac{k_{yi}^2}{k_{yi} - f_{xi}\tilde{\kappa}_{bi}} \left[\begin{array}{c} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} - \frac{\kappa_f f_{xi}}{k_{yi}(\kappa_{bi} + \kappa_f)} r_{zi} \end{array} \right] \\ \times \left[\begin{array}{c} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} - \frac{\kappa_f f_{xi}}{k_{yi}(\kappa_{bi} + \kappa_f)} r_{zi} \end{array} \right]^T \\ + \frac{k_{zi}^2}{k_{zi} - f_{xi}\tilde{\kappa}_{ai}} \left[\begin{array}{c} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} + \frac{\kappa_f f_{xi}}{k_{zi}(\kappa_{ai} + \kappa_f)} r_{yi} \end{array} \right] \\ \times \left[\begin{array}{c} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} + \frac{\kappa_f f_{xi}}{k_{zi}(\kappa_{ai} + \kappa_f)} r_{yi} \end{array} \right]^T \quad (25)$$

式(21)を満たせば H_i^d は準正定である。満たさなければ $\lambda(H^s) = -\infty$ である。ここで $\lambda(\cdot)$ は \cdot の固有値を意味する。したがって、摩擦が有る場合の方が無い場合よりも安定性が高い。このことから、摩擦は安定性を高めることがわかる。

4. 数値例

ばね剛性と接触力の把握の安定性への効果を数値例を用いて示す。簡単な例として、3本指の対称な把握を考える。

$$k_{xi} = k_x, k_{yi} = k_y, k_{zi} = k_z, f_{xi} = f_x, \\ \kappa_{ai} = \kappa_a, \kappa_{bi} = \kappa_b, \kappa_f = \kappa_f, i = 1, \dots, n \\ c_1 = l_c [1, 0, 0]^T, c_2 = l_c [\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3), 0]^T, \\ c_3 = l_c [\cos(4\pi/3), \sin(4\pi/3), 0]^T \\ R_{f1} = [r_{x1}, r_{y1}, r_{z1}] = R_z(0) \\ R_{f2} = R_z(2\pi/3), R_{f3} = R_z(4\pi/3) \\ R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

摩擦が無い場合、ヘッシアン H^s は次のように与えられる。

$$H^s = \text{diag}[H_{11}^s, H_{22}^s, H_{33}^s, H_{44}^s, H_{55}^s, H_{66}^s] \quad (26)$$

$$H_{11}^s = H_{22}^s = \frac{3}{2} \left(k_x - \frac{k_y f_x \tilde{\kappa}_b}{k_y - f_x \tilde{\kappa}_b} \right)$$

$$H_{33}^s = -3k_z f_x \tilde{\kappa}_a / (k_z - f_x \tilde{\kappa}_a)$$

$$H_{44}^s = H_{55}^s$$

$$= -\left(\frac{3}{2} \right) \frac{(l_c - \kappa_a^{-1}) \{ k_z (l_c + \kappa_f^{-1}) - f_x \} f_x \tilde{\kappa}_a}{k_z - f_x \tilde{\kappa}_a}$$

$$H_{66}^s = -3 \frac{(l_c - \kappa_b^{-1}) \{ k_y (l_c + \kappa_f^{-1}) - f_x \} f_x \tilde{\kappa}_b}{k_y - f_x \tilde{\kappa}_b}$$

摩擦が有る場合、 H^r は次のように得られる。

$$H^r = \text{diag}[H_{11}^r, H_{22}^r, H_{33}^r, H_{44}^r, H_{55}^r, H_{66}^r] \quad (27)$$

$$H_{11}^r = H_{22}^r = 3(k_x + k_y)/2, H_{33}^r = 3k_z$$

$$H_{44}^r = H_{55}^r = 3\{k_z l_c^2 - f_x l_c + f_x / (\kappa_a + k_f)\} / 2$$

$$H_{66}^r = 3\{k_y l_c^2 - f_x l_c + f_x / (\kappa_b + k_f)\}$$

この例において、 k_y は H_{11} , H_{22} , H_{66} に含まれ、 k_z は H_{33} , H_{44} , H_{55} に含まれることに注意する。

4.1 ばね剛性 k_y および k_z の効果 図5は、ばね剛性 k_y , k_z の H_{11} , H_{22} , H_{66} への効果を示す。実線は H^s 、破線は H^r 、点線は摩擦なしの一次元ばねモデルを表している。ただし

$$\text{Grasp (I)} \quad \kappa_a = \kappa_b = 1/0.01 [\text{m}^{-1}], \quad \kappa_f = 1/0.01 [\text{m}^{-1}]$$

$$\text{Grasp (II)} \quad \kappa_a = \kappa_b = -1/0.02 [\text{m}^{-1}], \quad \kappa_f = 1/0.01 [\text{m}^{-1}]$$

$$\text{Grasp (III)} \quad \kappa_a = \kappa_b = 1/0.01 [\text{m}^{-1}], \quad \kappa_f = -1/0.02 [\text{m}^{-1}]$$

および $k_x = 500 [\text{N/m}]$, $f_x = 5 [\text{N}]$, $l_c = 0.05 [\text{m}^{-1}]$ と設定している。 H_{33} , H_{44} , H_{55} は図5と同様であるため省略する。

Grasp (I)から(III)のいずれの場合も k_y を大きくすると、摩擦が無い場合は一次元ばねモデルの安定性に漸近し、摩擦が有る場合は直線的に安定性が増加している。摩擦無しと有りの安定性の差は大きくなっている。Grasp (I)の場合、 $k_y \leq 250 [\text{N/m}]$ あるいは $k_z \leq 250 [\text{N/m}]$ の範囲では式(21)を満たさない。指と対象物が共に凸であるため、すべての k_y , k_z に対して不安定

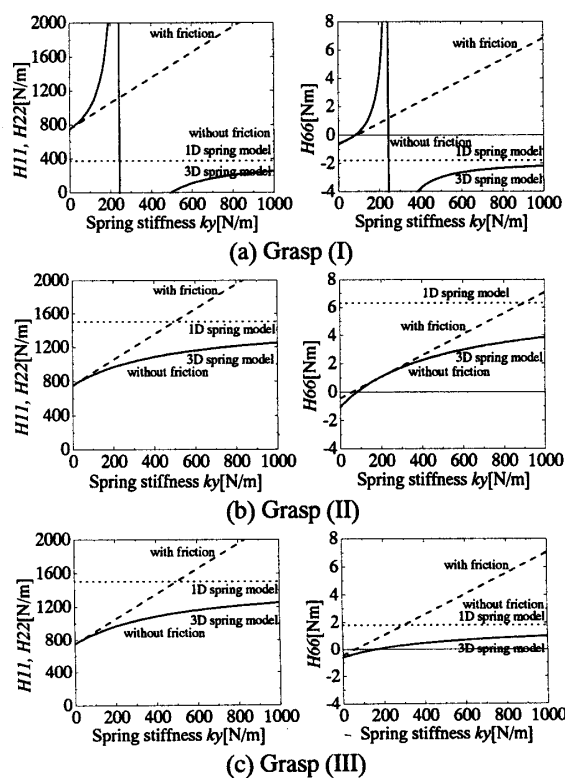


Fig. 5 Effect of spring stiffness k_y

である。Grasp (II)と(III)は、ばね剛性が小さい場合、摩擦無しと有りの安定性は同じような特性を示している。ばね剛性が小さいと回転方向が不安定になる。ヘッシアンを正定にし、把握系を安定にするばね剛性の範囲を求める必要がある。この範囲は摩擦の有無に依存する。摩擦が無い場合、 k_y と k_z の許容範囲は

$$k_y^s > f_x / (l_c + \kappa_f^{-1}), k_z^s > f_x / (l_c + \kappa_f^{-1})$$

摩擦が有る場合には

$$k_y^r > f_x \frac{l_c(\kappa_b + \kappa_f) - 1}{l_c^2(\kappa_b + \kappa_f)}, k_z^r > f_x \frac{l_c(\kappa_a + \kappa_f) - 1}{l_c^2(\kappa_a + \kappa_f)}$$

である。

4.2 初期接触力 f_x の効果 図 6 は Grasp (II)の H_{11}, H_{22}, H_{66} への接触力 f_x の効果を示している。摩擦が無い場合の安定性は、接触力が小さいところでは一次元ばねモデルの特性を示し、大きいところでは摩擦が有る場合の特性に近い。摩擦がある場合の安定性は、直線的に変化している。

摩擦の有無に拘わらず、回転方向を不安定にする接触力が存在することがわかる。このため、把握系を安定にする領域を得なければならない。摩擦の無い場合、初期接触力の許容範囲は

$$0 < f_x^s < \min\{k_y(l_c + \kappa_f^{-1}), k_z(l_c + \kappa_f^{-1})\} \quad (28)$$

摩擦の有る場合、

$$0 < f_x^r < \min\left\{\frac{k_z l_c^2 (\kappa_a + \kappa_f)}{l_c (\kappa_a + \kappa_f) - 1}, \frac{k_y l_c^2 (\kappa_b + \kappa_f)}{l_c (\kappa_b + \kappa_f) - 1}\right\} \quad (29)$$

である。

また、摩擦が無い場合には回転方向の安定性を最大にする接触力が存在する。 $\partial H_{44}^s / \partial f_x = 0$ および $\partial H_{66}^s / \partial f_x = 0$ より

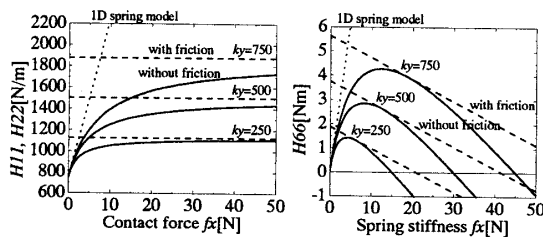


Fig. 6 Effect of contact force f_x for Grasp (II)

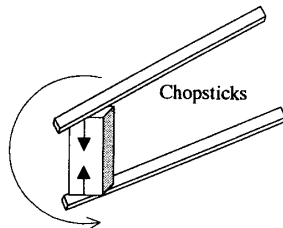


Fig. 7 Grasp by chopsticks

$$f_x^s = k_z(\kappa_a^{-1} + \kappa_f^{-1}) + \left| \kappa_a^{-1} \sqrt{\kappa_f^{-1}(\kappa_a + \kappa_f)(1 - l_c \kappa_a)} \right|$$

$$f_x^s = k_y(\kappa_b^{-1} + \kappa_f^{-1}) + \left| \kappa_b^{-1} \sqrt{\kappa_f^{-1}(\kappa_b + \kappa_f)(1 - l_c \kappa_b)} \right|$$

の時である。

4.3 把握系を不安定にする接触力とばね剛性

4.1 節と 4.2 節で把握系を不安定にする接触力とばね剛性が存在することを示した。この物理的意味を考える。外乱により物体が微小に回転した場合、初期接触力は回転変位を助長するモーメントを物体に与える。指に設定したばね剛性は回転変位に抗する復元モーメントを発生する。初期接触力が大きい場合、回転を助長するモーメントが復元モーメントに打ち勝ち、把握系が不安定になる。把握系を不安定にするこのような現象は、箸で物を挟む場合に見られる(図 7)。箸は人間の手により固定され、操られるが、箸の先端ではばね剛性は小さくなる。このばね剛性に比較し、強い力で挟もうとすると物体が回転してしまう現象である。人間が直接手で把握する場合にはこのようなことは発生しない。人間は強く握るときに無意識のうちにばね剛性を高くしているのではないかと考えられる。ロボットハンドの場合は、ばね剛性を任意に設定できるため、不安定にならないように注意しなければならない。

次に、摩擦が無い場合に回転方向剛性 H_{66}^s が接触力の増加に伴い一旦増加したあとに減少する理由について考える。これは、変位後の接触点位置が接触力の大きさに依存するため生じている。これに対し、摩擦が有る場合は接触力の大きさに依存しない。図 8 は外乱により対象物が z 軸周りに微小に回転変位したときの指先位置と接触力との関係を示している。(a)は Grasp (II)の初期把握状態である。(b)から(d)は第 1 指の指先位置を実線で表わしている。滑りの程度を表わ

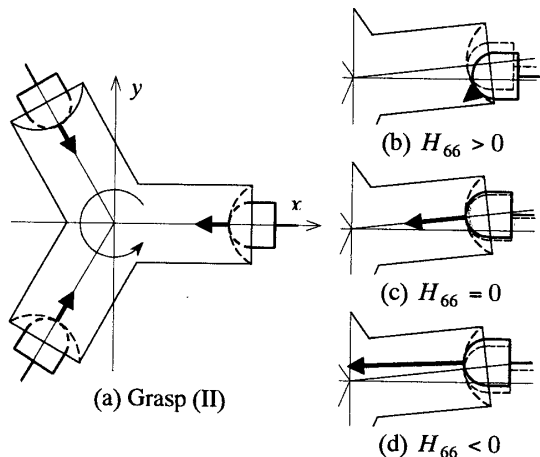


Fig. 8 Physical meaning of stability of Grasp (II)

すため、摩擦が有るときの指先位置を破線で表わす。初期接触力が非常に小さい場合には、復元モーメントの効果のみである。しかし、物体上を指が滑るため(b)のように指先位置は初期位置からほとんど変位せず、 H_{66}^s は零に近い値となる。接触力を徐々に大きくしていくと、指先位置の変位が大きくなる。そして、摩擦が無い場合と有る場合の指先位置が同じになるときに $H_{66}^s = H_{66}^r$ となる。さらに接触力を大きくすると(c)のように合力が回転中心方向を向き $H_{66}^s = 0$ となる。接触力が非常に大きい場合、回転を助長するモーメントが主要因となり、把握系は不安定になる。このときの指先位置の変位は(d)のように摩擦の有る場合に比較し大きいため、回転変位を助長するモーメントをさらに増大させる。

5. 結 言

本論文では、ポテンシャルエネルギーの観点から三次元把握の安定性を解析した。本手法の特徴および得られた結果は以下である。

(1) 摩擦なしの三次元把握に対し、三次元の直交仮想ばねモデルを導入した。これにより、指先位置の変位後でも指先力が法線方向を向き、接線成分が生じない条件を明確に定式化した。そして、ヘッシアン H^s を導出し、その固有値により摩擦なしの把握の安定性を評価した。把握を安定にするためのパラメータ k_{yi} , k_{zi} , f_{xi} の条件を明らかにした。回転方向の安定性の観点から最適な接触力が存在すること、接触力の大きさには把握系を安定にする範囲が存在すること、大きくしすぎると不安定になることを数値例により示した。

(2) 摩擦がある場合のヘッシアン H^r を転がり接触の運動学を用いて導出した。

(3) 摩擦がある場合と無い場合を比較し、摩擦が把握の安定性を高めることを理論的に示した。

(1)の摩擦が無い場合の解析結果から、次のことがわかる。(a)実際の把握の安定性は、従来の評価よりも低いことが明らかとなった。このことに注意し、把握パラメータを設計することが必要である。(b)最適な指先力を決定する際に線形計画法等に帰着する従来の方法^{(16),(17)}とは異なる決定法が導かれたことを意味している。

(3)の結果は次のことを意味している。実際の作業においては、視覚等で形状を認識できても把握前であれば指先と対象物との摩擦係数はわからない。このような場合には、摩擦なしと仮定し、 H^s の固有値を使って把握系を安定にしておけば、摩擦の有無に関わらず把握系は安定であることが保証される。

文 献

- (1) V. D. Nguyen, Constructing stable grasps, *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 7, No. 3, pp. 3-16, (1988).
- (2) M. Kaneko, N. Imamura, K. Yokoi, and K. Tanie, A realization of stable grasp based on virtual stiffness model, by robot fingers, *Proc. of IEEE Int. Workshop on Advanced Motion Control*, pp. 156-163, (1990).
- (3) W. S. Howard and V. Kumar, On the Stability of Grasped Objects, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 6, pp. 904-917, (1996).
- (4) Y. Funahashi, T. Yamada, M. Tate, and Y. Suzuki, Grasps stability analysis considering the curvatures at contact points, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 3040-3046, (1996).
- (5) 山田, 桜山, S. K. SAHA, 三村, 山田, 転がり接触を考慮した三次元把握の安定性解析, *日本機械学会論文集 C 編*, 65-631, C(1999), 1736-1742
- (6) K. K. Choi, S. L. Jiang, and Z. Li, Grasping with Elastic Finger Tips, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 920-925, (1999).
- (7) M. M. Svinin, K. Ueda, and M. Kaneko, Analytical Conditions for the Rotational Stability of an Object in Multi-Finger Grasping, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Vol. 1, pp. 257-262, (1999).
- (8) M. R. Cutkosky and I. Kao, Computing and Controlling the Compliance of a Robotic Hand, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 5, No. 2, pp. 151-165, (1989).
- (9) H. Maekawa, K. Tanie, and K. Komoriya, Kinematics, Statics and Stiffness Effect of 3D Grasp by multifingered hand with rolling contact at the fingertip, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 78-85, (1997).
- (10) W. S. Howard and V. Kumar, Modeling and Analysis of the Compliance and Stability of Enveloping Grasps, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1367-1372, (1995).
- (11) Shimoga, K. B. Shimoga, Robot grasp synthesis algorithms: A survey. *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 15, No. 3, pp. 230-266, (1996).
- (12) C. H. Xiong, Y. F. Li, H. Ding, and Y. L. Xiong, On the Dynamic Stability of Grasping, *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 18, No. 9, pp. 951-958, (1999).
- (13) E. Rimon and J. W. Burdick, Mobility of bodies in contact - Part II: How Forces are Generated by Curvature Effects, *IEEE Trans. of Robotics and Automation*, pp. 709-717, (1998).
- (14) Q. Lin, J. Burdick, and E. Rimon, Computation and Analysis of Compliance in Grasping and Fixturing, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Vol. 1, pp. 93-99, (1997).
- (15) S. K. Saha, T. Yamada, N. Mimura, and Y. Funahashi, Stability analysis of frictionless planar grasps with 2D spring model, *Int. Journal of JSME, Series C*, Vol. 42, No. 4, pp. 974-981, (1999).
- (16) J. Kerr and B. Roth, Analysis of multifingered hands, *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 4, No. 4, pp. 3-17, (1986).
- (17) Y. Nakamura, K. Nagai, and T. Yoshikawa, Dynamics and Stability in Coordination of Multiple Robotic Mechanisms, *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 8, No. 2, pp. 44-61, (1989).

付録 A: 摩擦なしの把握

式(15)より、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \nabla h_{ui} + (\partial h_{ui} / \partial u_{ci}) \nabla u_{ci} + (\partial h_{ui} / \partial v_{ci}) \nabla v_{ci} &= 0 \\ \nabla h_{vi} + (\partial h_{vi} / \partial u_{ci}) \nabla u_{ci} + (\partial h_{vi} / \partial v_{ci}) \nabla v_{ci} &= 0 \end{aligned}$$

したがって、 ∇u_{ci} と ∇v_{ci} は

$$[\nabla u_{ci}, \nabla v_{ci}] = -[\nabla h_{ui}, \nabla h_{vi}] \begin{bmatrix} \partial h_{ui} / \partial u_{ci} & \partial h_{vi} / \partial u_{ci} \\ \partial h_{ui} / \partial v_{ci} & \partial h_{vi} / \partial v_{ci} \end{bmatrix}^{-1}$$

を用いて求められる。初期条件を考慮すると

$$\nabla u_{ci} |_0 = \frac{1}{\kappa_{ai} \kappa_{fi} f_{xi} - k_{zi} (\kappa_{ai} + \kappa_{fi})} \times \left[\kappa_{fi} k_{zi} \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} \end{bmatrix} + (\kappa_{fi} f_{xi} - k_{zi}) \begin{bmatrix} 0 \\ r_{yi} \end{bmatrix} \right]$$

$$\nabla v_{ci} |_0 = \frac{1}{\kappa_{bi} \kappa_{fi} f_{xi} - k_{yi} (\kappa_{bi} + \kappa_{fi})} \times \left[\kappa_{fi} k_{yi} \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} \end{bmatrix} - (\kappa_{fi} f_{xi} - k_{yi}) \begin{bmatrix} 0 \\ r_{zi} \end{bmatrix} \right]$$

これらの式を $\nabla \delta_{yi} |_0$ および $\nabla \delta_{zi} |_0$ に代入すると

$$\nabla \delta_{yi} |_0 = -\frac{f_{xi} \tilde{k}_{bi}}{k_{yi} - f_{xi} \tilde{k}_{bi}} \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} - \kappa_{bi}^{-1} r_{zi} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \delta_{zi} |_0 = -\frac{f_{xi} \tilde{k}_{ai}}{k_{zi} - f_{xi} \tilde{k}_{ai}} \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} + \kappa_{ai}^{-1} r_{yi} \end{bmatrix}$$

同様にして、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \nabla \nabla^T \delta_{xi} |_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} [(c_i \otimes [r_{xi} \otimes]^T + [r_{xi} \otimes] [c_i \otimes]^T) \end{bmatrix} \\ &+ \kappa_{bi}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r_{zi} \end{bmatrix}^T + \kappa_{ai}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r_{yi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r_{yi} \end{bmatrix}^T \\ &- \frac{k_{yi}^2 \tilde{k}_{bi}}{(k_{yi} - f_{xi} \tilde{k}_{bi})^2} \\ &\times \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} - \kappa_{bi}^{-1} r_{zi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} - \kappa_{bi}^{-1} r_{zi} \end{bmatrix}^T \\ &- \frac{k_{zi}^2 \tilde{k}_{ai}}{(k_{zi} - f_{xi} \tilde{k}_{ai})^2} \\ &\times \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} + \kappa_{ai}^{-1} r_{yi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} + \kappa_{ai}^{-1} r_{yi} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

付録 B: Eq. (21)

$\partial h_{ui} / \partial u_{ci}$ の項において、 u_{ci} は対象物上の接触点位置、 h_{ui} はその接触点位置に指先が変位するための接触力の接線成分の向きを表している。このため、対象物と指先の形状の関係から、図9の三つに分類できる。したがって、次の三つの条件を得る。

- (a) $\kappa_a > 0$ かつ $\kappa_f > 0$ のとき $\partial h_{ui} / \partial u_{ci} |_0 > 0$
- (b) $\kappa_a < 0$ かつ $\kappa_f > 0$ のとき $\partial h_{ui} / \partial u_{ci} |_0 > 0$
- (c) $\kappa_a > 0$ かつ $\kappa_f < 0$ のとき $\partial h_{ui} / \partial u_{ci} |_0 < 0$

ここで、 $\kappa_{ai} + \kappa_{fi} > 0$ および

$$\partial h_{ui} / \partial u_{ci} |_0 = \kappa_{fi} (\kappa_{ai} + \kappa_{fi}) (k_{zi} - f_{xi} \tilde{k}_{ai})$$

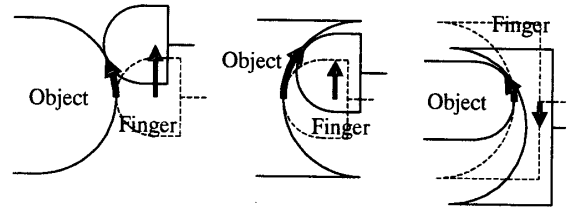
より、 k_{zi} と f_{xi} は次の式に拘束される。

$$k_{zi} - f_{xi} \tilde{k}_{ai} > 0 \tag{30}$$

同様に、 $\partial h_{vi} / \partial v_{ci}$ より k_{yi} と f_{xi} は次の式で拘束される。

$$k_{yi} - f_{xi} \tilde{k}_{bi} > 0 \tag{31}$$

もし式(30)あるいは(31)が満たされなければ、把握は不安定であり、ヘッシアン H_{kii}^s の固有値は負の無限大である ($\lambda(H_{kii}^s) = -\infty$)。



(a) $\kappa_a > 0, \kappa_f > 0$ (b) $\kappa_a < 0, \kappa_f > 0$ (c) $\kappa_a > 0, \kappa_f < 0$

Fig. 9 Relationship between finger's motion and contact force

付録 C: 摩擦のある把握

摩擦が無い場合、 u_{ci} 、 v_{ci} の一階、二階微分は次の式で与えられる。

$$\nabla u_{ci} |_0 = \frac{1}{\kappa_{ai} + \kappa_{fi}} \begin{bmatrix} 0 \\ r_{yi} \end{bmatrix}, \quad \nabla v_{ci} |_0 = -\frac{1}{\kappa_{bi} + \kappa_{fi}} \begin{bmatrix} 0 \\ r_{zi} \end{bmatrix},$$

$$\nabla \nabla^T u_{ci} |_0 = \frac{\kappa_{bi}}{2(\kappa_{ai} + \kappa_{fi})(\kappa_{bi} + \kappa_{fi})} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (r_{xi} r_{zi}^T + r_{zi} r_{xi}^T) \end{bmatrix},$$

$$\nabla \nabla^T v_{ci} |_0 = \frac{\kappa_{ai}}{2(\kappa_{ai} + \kappa_{fi})(\kappa_{bi} + \kappa_{fi})} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (r_{xi} r_{yi}^T + r_{yi} r_{xi}^T) \end{bmatrix}.$$

そのとき、 δ_{xi} 、 δ_{yi} 、 δ_{zi} の偏微分は次のように導出される。

$$\nabla^T \delta_{yi} |_0 = \begin{bmatrix} r_{yi} \\ c_i \otimes r_{yi} \end{bmatrix}, \quad \nabla^T \delta_{zi} |_0 = \begin{bmatrix} r_{zi} \\ c_i \otimes r_{zi} \end{bmatrix},$$

$$\nabla \nabla^T \delta_{xi} |_0 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \nabla_{\xi} \nabla_{\xi}^T \delta_{xi} |_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi} \nabla_{\xi}^T \delta_{xi} |_0 &= \frac{r_{yi} r_{yi}^T}{\kappa_{ai} + \kappa_{fi}} + \frac{r_{zi} r_{zi}^T}{\kappa_{bi} + \kappa_{fi}} + \frac{c_i r_{xi}^T + r_{xi} c_i^T}{2} \\ &- (c_i^T r_{xi}) I_3 \end{aligned}$$

$$\nabla_{\xi} \nabla_{\xi}^T \delta_{yi} |_0 = \frac{r_{xi} r_{yi}^T + r_{yi} r_{xi}^T}{2(\kappa_{ai} + \kappa_{fi})} + \frac{c_i r_{yi}^T + r_{yi} c_i^T}{2} - (c_i^T r_{yi}) I_3$$

$$\nabla_{\xi} \nabla_{\xi}^T \delta_{zi} |_0 = \frac{r_{xi} r_{zi}^T + r_{zi} r_{xi}^T}{2(\kappa_{bi} + \kappa_{fi})} + \frac{c_i r_{zi}^T + r_{zi} c_i^T}{2} - (c_i^T r_{zi}) I_3$$