

同心円筒間の乱流テラー渦流れに関する研究*
(k - ϵ モデルによる予測)小林 睦夫^{*1}, 前 川 博^{*1}
高橋 武雄^{*2}, 吉 川 実^{*3}An Analytical Study on the Turbulent Taylor Vortex Flow
between Concentric Cylinders
(Prediction of the Flow Field by using the k - ϵ Model)Mutsuo KOBAYASHI, Hiroshi MAEKAWA,
Takeo TAKAHASHI and Minoru YOSHIKAWA

The flow accompanied with turbulent Taylor vortices between inner-rotating and outer-stationary cylinders is analytically treated by using two kinds of k - ϵ models. The results obtained with both models are generally in good agreement with the existing experimental results. No marked tendency for the secondary flow to disappear with increasing rotating speed is found within the range of the calculation. For a fixed value of Reynolds number, there exists a certain radius ratio which makes the intensity of the vortex maximum. The more this intensity decreases, the more the turbulence energy increases. As the radius ratio approaches unity, the intensity of the vortex decreases monotonously. Conversely, the intensity of the circumferential component of the secondary flow continues to increase until a radius ratio very close to unity. The hypothesis that the vortex determines its shape so that the total amount of the dissipation rate becomes maximum is substantially consistent with the experimental evidence.

Key Words: Taylor Vortex, Concentric Cylinders, Turbulent Flow, Secondary Flow, Turbulent Model, Calculation

1. ま え が き

外筒が静止し内筒が回転する同心円筒間の流れは、流体力学の基礎的な問題としても実用上からも重要な研究課題であるため、多くの研究者により古くから追求され続けている。しかし、それらの研究の大半は低回転数の狭い範囲におけるフローパターンの変遷に眼を向けており、高回転数の広い範囲に現れ、実際上の流れの大半を占める乱流テラー渦を伴う流れの解明は全く不十分である。

既報⁽¹⁾においては、円筒半径比(r_i/r_o)が0.92の装置で実験を行って得られた時間平均速度や乱流応力などについての詳細な測定結果を提示し、この流れの特性について述べた。本報ではこれにひきつづいて、 k - ϵ モデルによる数値解析を本問題に適用して、時間平均速度や乱流エネルギーなどを計算した。2章に示される方法による計算値を層流の厳密解や既存の実験値と比較して、その方法の妥当性について検討したのち、この流れの特性が回転数や半径比に対してどのように

変化するかについて調べた。

2. 計 算 方 法

流体は物性値が一定の非圧縮性粘性流体であり、流れは周方向に十分に発達しているとする。既報⁽¹⁾と同様に、円柱座標系(ϕ, r, z)を用いて示される速度の瞬時値(u, v, w)を時間平均成分と変動成分(u', v', w')に分解し、さらに時間平均成分を同一の半径上で軸方向に平均した主流成分($U, 0, 0$)とその残差である二次流れ成分($\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$)に分解する。二次流れ成分(\bar{v}, \bar{w})の流れ関数 ψ と時間平均渦度の周方向成分 Ω を導入すれば、時間平均速度を決定するための次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= -\Omega \cdots \cdots (1) \\ \frac{\partial}{\partial r} \{ r^2 (U + \bar{u}) \bar{v} \} + \frac{\partial}{\partial z} \{ r^2 (U + \bar{u}) \bar{w} \} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left\{ \nu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U + \bar{u}}{r} \right) - \overline{u'v'} \right\} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[r^2 \left\{ \nu \frac{\partial (U + \bar{u})}{\partial z} - \overline{u'w'} \right\} \right] \\ &\cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\bar{v} \Omega) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w} \Omega) = \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega) \right\} \right]$$

* 平成元年9月29日 日立地方講演会において講演、原稿受付 平成元年10月25日。

^{*1} 正員、新潟大学工学部 (〒950-21 新潟市五十嵐2-8050)。

^{*2} 正員、(株)東芝京浜事業所 (〒230 横浜市鶴見区末広町2-4)。

^{*3} 学生員、新潟大学大学院 (〒950-21 新潟市五十嵐2-8050)。

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \Big] + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{(U + \bar{u})^2 + \bar{u}^2}{r} \right\} \\
& - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v}^2) \right\} \\
& + \frac{\partial^2 \bar{w}^2}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v} \bar{w}') \right\} - \frac{\partial^2 \bar{v}' \bar{w}'}{\partial z^2} \\
& \dots\dots\dots (3)
\end{aligned}$$

ただし、 ν は動粘性係数であり、 \bar{f} は f の時間平均値である。レイノルズせん断応力は渦動粘性仮説を使って求め、レイノルズ法線応力は等方的であると仮定した。そして、渦動粘性係数 ν_t は乱流エネルギー k とその散逸率 ε を用いて

$$\nu_t = C_\nu f_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots (4)$$

と表される。もし乱流レイノルズ数 $R_t (= k^2/\nu\varepsilon)$ が大きいならば、良く知られたモデル化された k と ε の輸送方程式は次のように示される。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v} k) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w} k) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right\} + \text{Prod} - \varepsilon \\
& \dots\dots\dots (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w} \varepsilon) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right\} + \frac{\varepsilon}{k} \left\{ C_{\varepsilon 1} f_1 \text{Prod} - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon \right\} \\
& \dots\dots\dots (6)
\end{aligned}$$

ただし、生産項 Prod は次式で示される。

$$\begin{aligned}
\text{Prod} = & -\bar{u}' \bar{v}' r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U + \bar{u}}{r} \right) - \bar{u}' \bar{w}' \frac{\partial (U + \bar{u})}{\partial z} \\
& - \bar{v}'^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \bar{u}'^2 \frac{\bar{v}}{r} - \bar{v}' \bar{w}' \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right) \\
& - \bar{w}'^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \dots\dots\dots (7)
\end{aligned}$$

使用したモデル定数や境界条件は、表1に示すように、Launder-Spalding⁽²⁾が推奨した壁関数(W.F.)を用いる基礎モデルと、壁近傍での乱れの漸近的挙動を考慮した長野ら⁽³⁾のモデルである。表1中の y^+ は壁からの距離を y 、摩擦速度を u^* としたときの無次元距離 u^*y/ν である。

計算精度と解の安定性を増すために、壁と渦境界近傍での格子点が密となるような次の変換式を用いて、座標 (r, z) を座標 (η, ξ) に変換した。

$$\eta = \frac{(r - r_i - 0.5b)b}{(r - r_i + \Delta_0 b)(r_i - r + (1 + \Delta_0)b)} \dots\dots (8)$$

$$\xi = \frac{z/L - 0.5}{(z/L + \Delta_0)(1 + \Delta_0 - z/L)} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 b は流路幅 $(r_o - r_i)$ 、 L は渦1個の高さである。また、格子点の粗密を決定するパラメータで、かつ η の変域幅でもある η_{\max} を用いて、 Δ_0 は次式で与

えられる。

$$\Delta_0 = \frac{\sqrt{\eta_{\max}^2 + 2\eta_{\max}} - \eta_{\max}}{2\eta_{\max}} \dots\dots\dots (10)$$

$\eta_{\max} = 8$ で分割数が32のときの格子メッシュを図1に示す。実際の計算では、レイノルズ数 $Re = (U_i b/\nu)$ (U_i は内筒周速度)の大きさに応じて η_{\max} は4~10の適当な値を選んだ。

格子メッシュは (η, ξ) について64点ずつの等間隔のスタッガー格子とし、壁面と渦境界上の格子点に変数 ψ と Ω を配置し、それと食い違う格子点に $U, \bar{u}, k, \varepsilon$ を配置して、境界条件の設定の簡易化と解の精度と安定性の向上を図った。方程式(1)~(7)は各格子点上の値を使って差分化されるが、その際、対流項に対して風上差分を用いた。

解法手順は次のようにした。まず二次流れが存在しない場合の解(以下二次元解とよぶ)を求めた。次に、それからの偏差としての流れ成分が安定した解に収束するまで、流れ成分の修正を繰返した。各段階での連立方程式の解は打ち切り誤差が 10^{-5} としたSOR法により求め、安定した解への収束判定条件は収束が最も悪

表1 モデル定数と境界条件

Model	Basic	Nagano et al.
C_ν	0.09	0.09
$C_{\varepsilon 1}$	1.44	1.45
$C_{\varepsilon 2}$	1.92	1.9
σ_k	1.0	1.4
σ_ε	1.3	1.3
f_ν	1.0	$\{1 - \exp(-y^+/26)\}^2 \{1 + 4.1/R_t^{3/4}\}$
f_1	1.0	1.0
f_2	1.0	$\{1 - 0.3 \exp(-(R_t/6.5)^2)\} \{1 - \exp(-y^+/6)\}^2$
ε_w		$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{k}{\partial r^2}$
B.C.	W.F.	

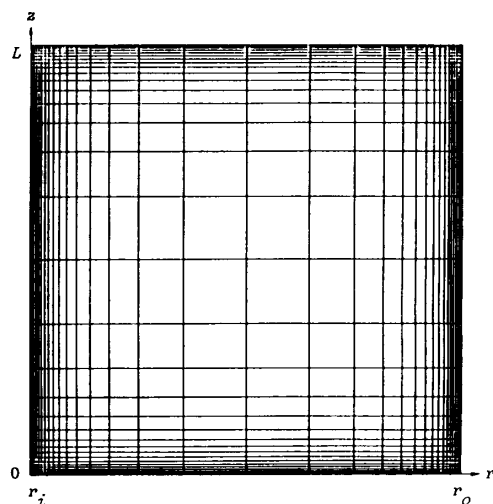


図1 格子メッシュの一例

い ν_i の修正率が 10^{-4} 以下とした。

3. 解析結果

3.1 回転摩擦特性 計算した全摩擦モーメント係数 C_{Mt} を Taylor⁽⁴⁾ の実験値などと比較して図 2 に示す。解法の信頼性の検証もかねて、渦動粘性係数 ν_i が零の場合の層流解も計算した。Stuart⁽⁵⁾ の解と同様に、その結果は層流テラー渦の発生やその直後の摩擦特性の振舞いを良く表している。乱流域の回転レイノルズ数 $R_\omega (= Re(r_i + r_o)/2r_i)$ が低い範囲で、長野らのモデルにより得られた全摩擦モーメント係数はほぼ実験値と一致し、基礎モデルによるそれは実験値より大きく、二次元解によるそれは実験値より小さい。長野らのモデルは基礎モデルを壁近傍で修正したものであるから、回転レイノルズ数が大きくなるにつれ、彼らのモデルの計算値と基礎モデルのそれは当然漸近的に一致する。

使用したこれらのモデルでは層流から乱流へ遷移する領域の計算はできなかった。これは渦の形状が周方向に波動状に変化しないと仮定したことや、これらのモデルでは乱流レイノルズ数の低下による影響が適切に考慮されていないためと考えられる。

3.2 周方向時間平均速度 図 3 に角運動量の軸方向平均値（同一半径上の値を軸方向に平均した値）の分布の計算結果を既報⁽¹⁾ の実験値 ($r_i/r_o = 0.92$, $Ta = 1.85 \times 10^4$; Ta : テラー数 $= \sqrt{b/r_i} Re$) とともに示す。乱流テラー渦が存在しないと仮定して得られる二次元解は、その分布の半径方向こう配が他のものに比べ壁近傍で小さくしかも流路中央部で負となるという誤った予測結果を与える。乱流テラー渦が存在す

るとして得られた計算値は、測定された領域で実験値より少し大きい。しかし、実験結果にみられる正のわずかな半径方向こう配が両壁面側にあることを両モデルとも正確に予測している。両モデルによる計算値の違いは最大でも 3% と小さいので、以後は長野らのモデルによるもののみを示す。

図 4 に渦を軸方向に 4 等分した断面上の周方向時間平均速度分布の計算値と実験値を比較して示す。二次

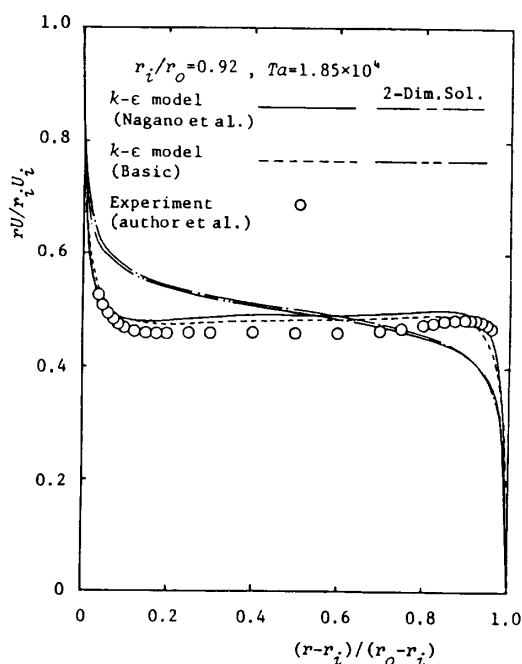


図 3 角運動量軸方向平均値

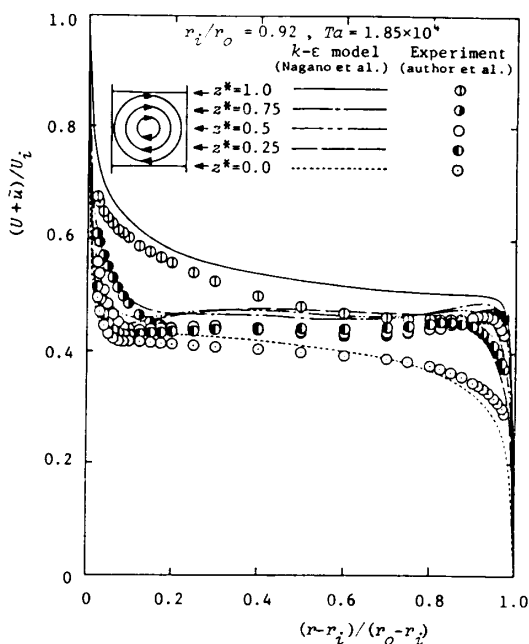


図 4 周方向時間平均速度分布

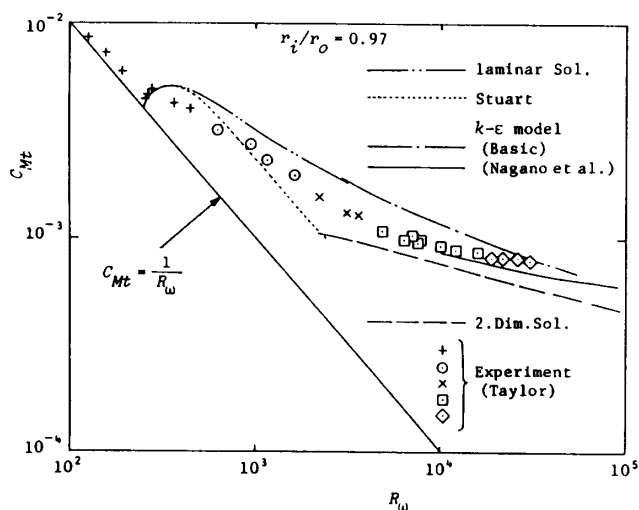


図 2 回転摩擦特性

流れによる運動量輸送効果のため、流速は、二次流れが回転円筒から静止円筒に向かう渦上側境界($z^*=z/L=1$)で高く、逆に向かう下側境界($z^*=0$)で低い、そして渦周辺部以外で平坦となる。これらの様子をモデルは良く予測する。

3・3 二次流れ速度 図5および図6に、前と同じ断面上の二次流れ速度の軸方向成分 \bar{w} および半径方向成分 \bar{v} の計算値と実験値を比較して示す。

乱流テラー渦はその周辺部がストリーク状の強い

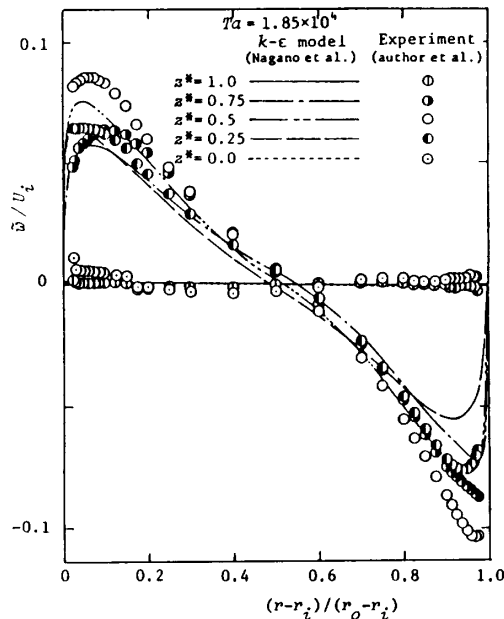


図5 二次流れ軸方向成分 \bar{w} の分布

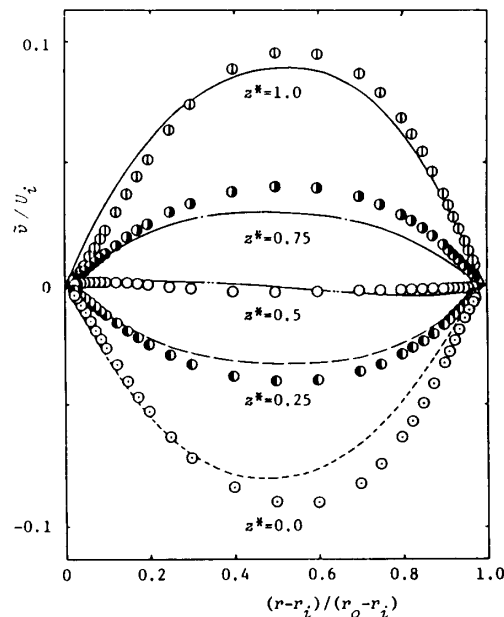


図6 二次流れ半径方向成分 \bar{v} の分布

流れの渦である。したがって、二次流れ発生直後の層流渦の分布と異なり、 \bar{w} はのこ歯状、 \bar{v} は放物線状分布となる。計算は実験より二次流れの強さを数%ほど小さく予測するが、分布の特徴を良く表している。半径比をそのまま($r_i/r_o=0.92$)にして、回転レイノルズ数を変化($R_\omega=1.8\times 10^4\sim 9.0\times 10^4$)させて得られた結果によれば、実験と同様に二次流れの強さがレイノルズ数の増大により10%程増大するだけで、流れの本質的な変化や渦が消失する傾向はみられなかった。

3・4 乱流エネルギーと二次流れエネルギー 図7に前と同じ断面上の乱流エネルギー k の計算値と実験値を比較して示す。ごく壁近傍の値の大きな乱流エネルギーが二次流れにより対流輸送されて、渦上側境界では内側で、渦下側境界では外側で値が大きくなるという、この分布の特徴を計算値は良く表している。しかし、 $z^*=0.75$ の内側や $z^*=0.25$ の外側では、実験値と計算値の違いはかなり大きい。

既報⁽¹⁾と同様の記号 $\langle \rangle$ を用いて、二次流れエネルギー $\bar{k}=(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)/2$ の軸方向平均値を $\langle \bar{k} \rangle$ と示す。乱流エネルギー k の軸方向平均値 $\langle k \rangle$ とこの $\langle \bar{k} \rangle$ の二つについて、計算値と実験値を比較して図8に示す。著者らの実験($r_i/r_o=0.92$, $Ta=1.85\times 10^4$)の場合には、計算値と実験値はほぼ完全に一致する。しかし、Smith-Townsend⁽⁶⁾の実験($r_i/r_o=0.67$, $Ta=3.64\times 10^4$)の場合には、計算値と実験値の一致は良いとは言えない。この原因の一つとして、彼らの実験条件の半径比の近傍において、後述するように $\langle k \rangle$ や $\langle \bar{k} \rangle$ の半径比依存性が強く、モデルの予測精度が劣化していることがあげられる。もう一つは、既報⁽¹⁾でも

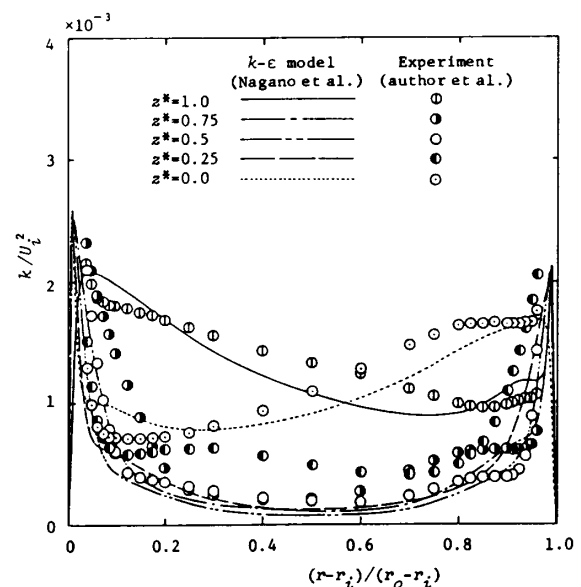


図7 乱流エネルギー k の分布

述べたように、彼らは軸方向に弱い流れを付加し、フィルタにより $\langle k \rangle$ と $\langle \tilde{k} \rangle$ を分離して計測したが、その際の分離が不完全であったことが考えられる。半径比が1から大きく離れるほど、内壁側が外壁側より $\langle k \rangle$ や $\langle \tilde{k} \rangle$ の値が大きいという非対称性がよりいっそう顕著になっている。著者らの実験では測定された領域中のどこでも $\langle \tilde{k} \rangle$ が $\langle k \rangle$ より大きいのに対し、Smith-Townsendの実験では逆になっていることが明確に予測されている。

3.5 半径比の影響 既存の実験値とモデルによる予測値を比較し、両者が良く一致したことから、モデルによる予測はほぼ信頼できる。そこで、レイノルズ数 ($Re = U_i b / \nu$) を一定値 5×10^4 に保ち半径比を変化させるとき、それが流れにどのように影響するかについて、モデルによる定量的な予測を試みた結果を図9に示す。

著者らのうちの二人⁽⁷⁾がすでに報告したように、円筒の半径比が1から大きく離れると二次流れは消失して流れは二次元的になる。また、半径比が1に相当するクエットの流れの場合には、遠心加速度の影響がなくなるので、Reichardt⁽⁸⁾の実験結果にみるように、やはり定常的な二次流れは消失すると考えられる。したがって、これらのことから二次流れの強さを最大にする半径比が存在すると予測される。二次流れの強さを示す指標として、流れ関数の最大値 ψ_{\max} を選択し、この値の半径比に対する依存性が図9中に示されている。二次流れの強さは半径比が0.73で最大であり、半

径比がそれより小さくなると急激に小さくなる。また、半径比が増大して1に近づくとき、強さは比較的ゆっくりと減少した後、半径比が1の近傍で急速に小さくなる。このように、前述の予測が裏付けられた。

図9中にはこのほかに、乱流エネルギー k 、二次流れエネルギー \tilde{k} 、周方向の二次流れ成分の強さ \tilde{u}^2 のそれぞれの全平均値 (渦1個の全体の平均値) $[k]$, $[\tilde{k}]$, $[\tilde{u}^2]$ の半径比に対する変化が示されている。注目したいのは $[\tilde{u}^2]$ の振舞いである。半径比が0.73より小さくなるとき、これは二次流れの強さと同様に小さくなる。しかし、半径比が0.73より大きくなるとき、二次流れが弱くなるにもかかわらず、これは単調に増加し、特に半径比が0.95~0.993の範囲で増加が著しい。そのため、二次流れエネルギー $[\tilde{k}]$ は半径比が0.98より大きくなると ψ_{\max} の減少にもかかわらず増大する。この原因についての詳細は不明だが、半径比がおおよそ0.98を超えると乱流テラー渦が周方向に変化する波動形の渦に変化することを示唆しているのかもしれない。さらに半径比が増大して0.993を超えると、突然 $[\tilde{u}^2]$ は小さくなり、半径比が0.995で ψ_{\max} が零になると同時にこれも零になる。この $[\tilde{u}^2]$ と ψ_{\max} の振舞いから、乱流テラー渦が存在できる半径比の下限と上限があり、その上限はきわめて1に近いことがわかる。

乱流エネルギーの全平均値 $[k]$ は ψ_{\max} と逆の変化を示し、二次流れが弱まると増大する。両円筒間のトルクは分子粘性、乱流レイノルズ応力、二次流れの三つによって伝達される。乱流の場合、分子粘性による

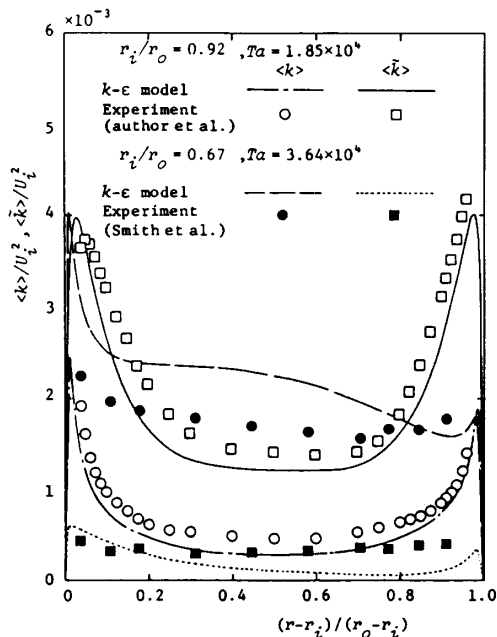


図8 乱流エネルギーと二次流れエネルギー

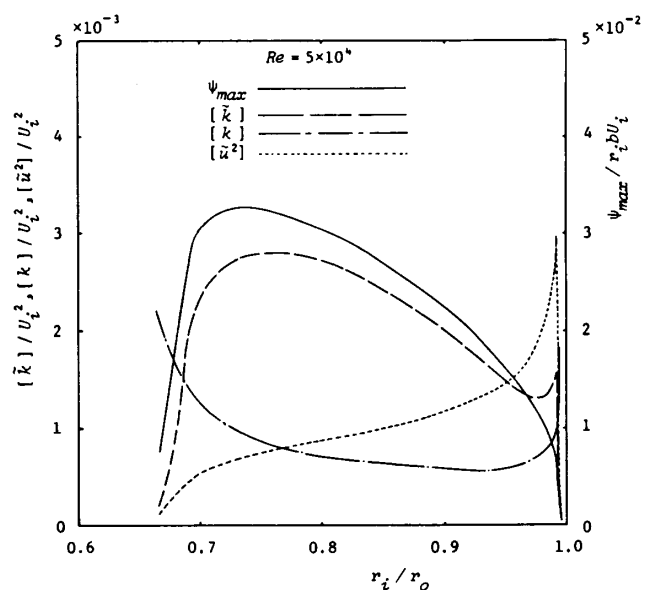


図9 流れ特性値の半径比依存性

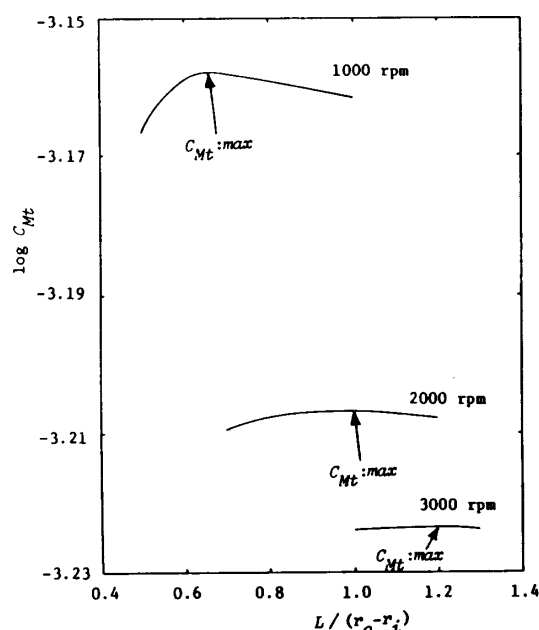


図 10 渦寸法と全摩擦モーメント係数の関係

伝達のごく壁近傍のみに限られているから、二次流れが弱くなれば乱れによってトルクが伝達されなければならない。これが、 ϕ_{\max} と $[k]$ の増減が半径比に対して、互いに逆の変化を示す主な理由であると考えられる。

3.6 渦の軸方向寸法 ここまでの計算において、著者らの実験⁽¹⁾に基づき渦の軸方向寸法 L は流路幅 b の 1.1 倍とした。しかし、この寸法を決定する何らかの物理的基準が存在すると考えられる。そこで、その基準は「渦の軸方向寸法は散逸速度が最大となるように定まる」であると仮定してみる。すなわち、本問題の場合「渦の軸方向寸法は与えられた内筒回転数のもとで全摩擦モーメント係数が最大となるように定まる」と仮定してみる。

既報⁽¹⁾の実験装置 ($r_i/r_o=0.92$, $r_o=250$ mm) における内筒回転数 1 000, 2 000, 3 000 rpm の場合のモデルから得られた全摩擦モーメント係数の計算値と渦の軸方向寸法の関係を図 10 に示す。この図 10 によれば、全摩擦モーメント係数が最大となる渦の軸方向寸法が存在し、その寸法は回転数が高いほど大きくなること、また回転数が高くなると全摩擦モーメント係数の変化は寸法の変化に対して鈍化することがわかる。前述の

三種の回転数における実験から得られた渦の軸方向寸法 L は、流路幅 b のそれぞれ 1.05, 1.1, 1.12 倍であり、厳密には計算結果と一致していない。しかし、渦の軸方向寸法の振舞いに関して、前述の計算結果と同様の振舞いが実験において定性的に認められた。

4. ま と め

回転円筒間の乱流について、乱流モデルによる数値解を求め、既存の実験値と比較した結果、以下のことを知ることができた。

(1) 半径比が 1 に極めて近いまたは大きく離れる場合以外では、二次流れ (乱流テラー渦) が存在しないと仮定する解 (二次元解) は全摩擦モーメント係数などについて実験と大きく異なる予測を与える。

(2) レイノルズ数が 10^4 以上の範囲で、 k - ϵ モデルによる計算結果は既存の実験結果と良く一致した。

(3) 計算した範囲内では、回転数が増大しても定常的な乱流テラー渦が消失する傾向や流れの本質的な変化は見られなかった。

(4) 乱流テラー渦流れの強さを最大にする半径比が存在する。その流れの強さが減少すると、それに応じて乱流エネルギーの大きさは逆に増大する。

(5) 半径比が 1 に近づくと乱流テラー渦流れの強さは減少するが、周方向の二次流れ成分の強さ $[\bar{u}^2]$ は減少せずに逆に増大する。しかし、さらに半径比が 1 にきわめて近くなると、乱流テラー渦が消失すると同時に $[\bar{u}^2]$ も急激に減少し零になる。

(6) 「渦の軸方向寸法は散逸速度が最大となるように定まる」という仮説は、実験事実と実質的に一致した。

文 献

- (1) 小林・ほか 3 名, 機論, 55-517, B(1989), 2581.
- (2) Launder, B. E. and Spalding, D. B., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 3(1974), 269.
- (3) 長野・ほか 2 名, 第 25 回伝熱シンポジウム講演論文集, (1988), 166.
- (4) Taylor, G. I., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 157(1936), 546.
- (5) Stuart, J. T., *J. Fluid Mech.*, 4(1958), 1.
- (6) Smith, G. P. and Townsend, A. A., *J. Fluid Mech.*, 123(1982), 187.
- (7) 小林・前川, 機構論 (関西支部 233 回講演会), (1975), 24.
- (8) Reichardt, H., *Z. Angew. Math. Mech.*, 36(1956), 26.