

ボロノイ多面体要素法を用いた不定形固体混合物の  
平均熱伝導率の計算\*小林 睦夫\*<sup>1</sup>, 前川 博\*<sup>1</sup>  
中村 寿\*<sup>2</sup>, 近藤 泰平\*<sup>3</sup>Calculation of the Mean Thermal Conductivity of Heterogeneous  
Solid Mixture with the Voronoi-Polyhedron Element MethodMutsuo KOBAYASHI, Hiroshi MAEKAWA,  
Hisashi NAKAMURA and Yasuhira KONDOU

A method of discretizing a three-dimensional closed space into the Voronoi-polyhedron elements was applied to the numerical analysis of heat-conduction problems in heterogeneous solid mixtures. The computation was done for various mixtures of two randomly distributed components. Thermal conductivity of the two-component mixture is more strongly affected by the arrangement of components with respect to the mean heat flow direction than by the shape of components. The statistical mean of thermal conductivity can be roughly approximated by the geometrical average. Empirical formulae were obtained from the results. In order to accurately predict the thermal conductivity of a mixture of three or more components, the numerical calculating method devised in this study can be employed successfully.

**Key Words:** Voronoi, Thermal Conductivity, Solid Mixture, Random, Finite Element, Automatic Discretizing, Numerical Analysis

## 1. ま え が き

熱伝導率が異なる固体の混合物の平均熱伝導率については、最初に Maxwell や Rayleigh が 2 成分混合物の電気伝導度の研究を行って以来、多くの研究がなされている。混合物要素の形状と配置をさまざまに仮定したり<sup>(1)~(3)</sup>、統計的な取扱いを行って<sup>(4)(5)</sup>多くの予測式が提案されている<sup>(6)(7)</sup>。しかし、場合によっては、それらの予測式による計算値は数倍も異なる。したがって、不定形混合物に対する予測をどのようにすべきかはまだ明確な結論を得るに至っていない。

本報では、異なる熱伝導率を持つ 2 種の固体成分が境界面上で接触熱抵抗を持たずに三次元(または二次元)的に無作意に混合された不定形混合物の熱伝導率を、別報<sup>(8)</sup>に示したボロノイ多面体(または多角形)要素を用いる数値解法を使って直接計算した。無作意の混合を多数回試行することにより平均熱伝導率を求め、平均熱伝導率の特性を明らかにするとともに、その簡便な推定式を提案する。

## 主 な 記 号

$t$ : 時間  
 $(x, y, z)$ : 直角座標系(図 1)  
 $T$ : 温度  
 $\rho, C, \alpha$ : 物質の密度, 比熱, 熱伝導率  
 $S, V$ : ボロノイ多面体の表面積, 体積  
 $n$ : 多面体表面に垂直な単位ベクトル  
 $(x_i, y_i, z_i)$ : 要素点  $i$  の位置座標  
 $(X_k, Y_k, Z_k)$ : ボロノイ多面体の頂点  $K$  の座標  
 $d_{ij}$ : 要素点  $i$  と  $j$  の間の距離  
 $S_{ij}$ : 要素点  $i$  と  $j$  の境界面の面積  
 $V_{ij}$ :  $S_{ij}$  を底面とする多角垂体の体積  
 $p$ : 異種物質の体積混合比  
 $\lambda$ : 異種物質の熱伝導率(標準物質に対する比)  
 $\lambda_m$ : 混合物の熱伝導率(比)  
 $\bar{\lambda}_m$ : 混合物の平均熱伝導率(比)  
 $\lambda_p$ : 熱伝導率(比)の算術平均値〔式(9)〕  
 $\lambda_s$ : 熱伝導率(比)の調和平均値〔式(10)〕  
 $\lambda_g$ : 熱伝導率(比)の幾何平均値〔式(11)〕  
 $a_n, \bar{a}_n$ : 二進小数小数点以下  $n$  のけたための数字

\* 原稿受付 平成 2 年 9 月 19 日。

\*<sup>1</sup> 正員, 新潟大学工学部 (〒950-21 新潟市五十嵐 2 の丁 8050)。\*<sup>2</sup> 正員, (株)東芝那須工場 (〒329-26 大田原市下石上 1385)。\*<sup>3</sup> 学生員, 新潟大学大学院。

2. 数値解法

平均熱伝導率の計算は次の手順で行う。

- (1) 微小要素分割 混合物全体の形状を定めた後、無作為に分布させた要素点を囲むポロノイ多面体(または多角形)要素に混合物の内部を自動分割する。
- (2) 配置形態指定 各要素の熱伝導率  $\alpha$  を体積混合比  $p$  に従って無作為に指定する。
- (3) 熱伝導率計算 一定の温度境界条件の下に定常熱伝導の解析を行い、伝熱量から混合物の熱伝導率  $\lambda_m$  を求める。
- (4) 平均値計算 (1)から(3)までの多数の試行から求めた  $\lambda_m$  の平均値として、平均熱伝導率  $\bar{\lambda}_m$  を求める。

混合が二次元の場合については既報<sup>(4)</sup>で概要を明らかにしたので、三次元の場合について詳細に述べる。ただし、ポロノイ多面体への自動分割の方法の詳細については、紙面の都合で別報<sup>(5)</sup>に譲る。

直角座標系  $(x, y, z)$  中の要素点  $i$  を囲むポロノイ多面体(以下、単に多面体と呼ぶ)  $i$  とそれに隣接する要素点の一例を図1に示す。

一つの多面体  $i$  の熱伝導率を  $\alpha_i$ 、比熱を  $C_i$ 、密度を  $\rho_i$  とするとき、熱伝導方程式は式(1)で表される。

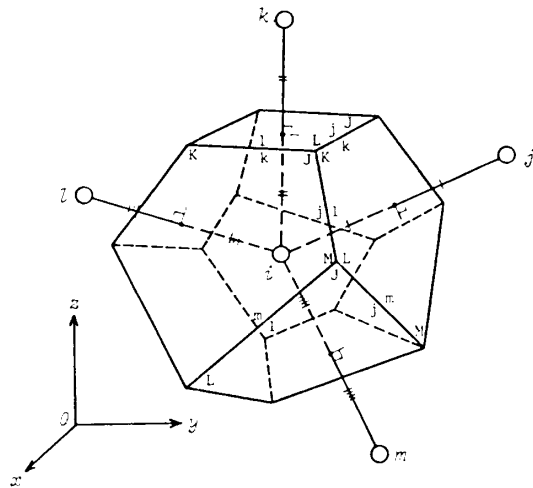


図1 ポロノイ多面体

$$\rho_i C_i \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_i \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (1)$$

式(1)を多面体について体積分し、右辺についてガウスの発散定理を用いると式(2)を得る。

$$\rho_i C_i \frac{\partial}{\partial t} \int T dV = \alpha_i \int \frac{\partial T}{\partial n} dS \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $V$  は多面体の体積、 $S$  は多面体の表面積、 $n$  は表面に垂直で外側を向く単位ベクトルである。

さらに、多面体  $i$  の表面のうち、隣接する要素点との境界面  $j$  の面積を  $S_{ij}$  とする。この境界面を底面とし要素点  $i$  を頂点とする多角錐の体積を  $V_{ij}$ 、要素点  $i$  と  $j$  の距離を  $d_{ij}$  で表す。また、要素点  $i, j$  上の温度をそれぞれ  $T_i, T_j$ 、多面体の熱伝導率をそれぞれ  $\alpha_i, \alpha_j$  とすれば、式(2)は次式で近似できる。

$$\rho_i C_i \frac{\partial}{\partial t} \sum_j \frac{V_{ij} [(4\alpha_i + \alpha_j) T_i + 3\alpha_j T_j]}{4(\alpha_i + \alpha_j)} = \sum_j \frac{2S_{ij}}{d_{ij}} \times \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j} (T_i - T_j) \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\sum_j$  は隣接要素全体にわたる和を表す。

別報<sup>(5)</sup>に示した方法により、要素点  $i$  を囲む多面体の要素表は表1のように求められている。したがって、 $d_{ij}, S_{ij}, V_{ij}$  は次のようにして求められる。

いま境界面  $j$  が図2のような多角形であるとする。ポロノイ多面体の性質により、頂点  $K$  は要素点  $i$  と  $j$  およびその頂点を挟むりょう辺名  $k$  と  $l$  で示される要素点  $k$  と  $l$  の4点から等距離の点である。したがって、頂点  $K$  の座標  $(X_k, Y_k, Z_k)$  は式(4)で与えられる。

$$X_k = \frac{[(y_i - y_l)(z_i - z_l)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2) + (y_i - y_k)(z_i - z_l)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2) + (y_i - y_l)(z_i - z_k)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_l^2 - y_l^2 - z_l^2) - (y_i - y_l)(z_i - z_k)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2) - (y_i - y_l)(z_i - z_l)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2) - (y_i - y_k)(z_i - z_j)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_l^2 - y_l^2 - z_l^2)] / D} \dots\dots\dots (4a)$$

$$Y_k = \frac{[(z_i - z_l)(x_i - x_l)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2) + (z_i - z_k)(x_i - x_l)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2) + (z_i - z_l)(x_i - x_k)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_l^2 - y_l^2 - z_l^2) + (z_i - z_j)(x_i - x_k)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_l^2 - y_l^2 - z_l^2)] / D} \dots\dots\dots (4b)$$

表1 ポロノイ多面体要素表

Element Name = i	Element Coordinates $x(i), y(i), z(i)$			Number of Faces $FC(i)=10$		
Starting Face Address	FI(i)=84	→ J		Starting Side Address	EI(i)=645 + K	
Face Address	J	84		85	86	-
Face Name	F(J)	j		k	m	-
Number of Sides	EC(i)	5		4	4	-
Side Address	K	645, 646, 647, 648, 649	650, 651, 652, 653	654, 655, 656, 657	-	-
Side Name	E(K)	k, l, m, -, -	-, l, j, -	l, -, -, j	-	-

$$\begin{aligned} &-(z_i - z_l)(x_i - x_k)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2) \\ &-(z_i - z_j)(x_i - x_l)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2) \\ &-(z_i - z_k)(x_i - x_j)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_l^2 - y_l^2 \\ &- z_l^2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4\cdot b)$$

$$\begin{aligned} Z'_k = &[(x_i - x_l)(y_i - y_j)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2) \\ &+(x_i - x_k)(y_i - y_l)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2) \\ &+(x_i - x_j)(y_i - y_k)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_l^2 - y_l^2 - z_l^2) \\ &-(x_i - x_l)(y_i - y_k)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2) \\ &-(x_i - x_j)(y_i - y_l)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2) \\ &-(x_i - x_k)(y_i - y_j)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_l^2 - y_l^2 \\ &- z_l^2)]/D \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4\cdot c)$$

ここに、

$$\begin{aligned} D = &2[(x_i - x_j)(y_i - y_k)(z_i - z_l) + (x_i - x_l)(y_i - y_j) \\ &(z_i - z_k) + (x_i - x_k)(y_i - y_l)(z_i - z_j) - (x_i - x_k) \\ &(y_i - y_j)(z_i - z_l) - (x_i - x_l)(y_i - y_k)(z_i - z_j) \\ &- (x_i - x_j)(y_i - y_l)(z_i - z_k)] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4\cdot d)$$

また、このようにして得られた頂点  $L \sim K$  の座標を用いて、 $d_{ij}$ ,  $V_{ij}$  と  $S_{ij}$  は式(5)~(8)で与えられる。

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad \dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} V_{ij} = &[(x_j - x_i)s_{xj} + (y_j - y_i)s_{yj} \\ &+ (z_j - z_i)s_{zj}]/12 \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$S_{ij} = 6V_{ij}/d_{ij} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$\begin{aligned} s_{xj} = &(Y'_i Z'_m - Y'_m Z'_i) + (Y'_m Z'_n - Y'_n Z'_m) + \dots \\ &\dots + (Y'_i Z'_k - Y'_k Z'_i) + (Y'_k Z'_l - Y'_l Z'_k) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8\cdot a)$$

$$\begin{aligned} s_{yj} = &(Z'_i X'_m - Z'_m X'_i) + (Z'_m X'_n - Z'_n X'_m) + \dots \\ &\dots + (Z'_i X'_k - Z'_k X'_i) + (Z'_k X'_l - Z'_l X'_k) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8\cdot b)$$

$$\begin{aligned} s_{zj} = &(X'_i Y'_m - X'_m Y'_i) + (X'_m Y'_n - X'_n Y'_m) + \dots \\ &\dots + (X'_i Y'_k - X'_k Y'_i) + (X'_k Y'_l - X'_l Y'_k) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8\cdot c)$$

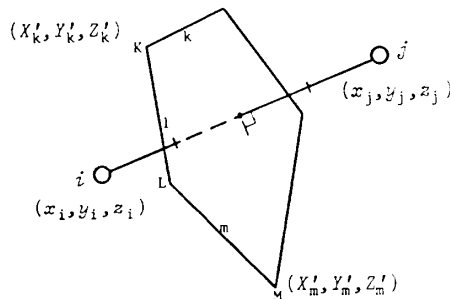


図2 ポロノイ多面体表面多角形

定常熱伝導の数値解は、式(3)の左辺を零と置き、最大繰返し収束誤差を  $10^{-3}$ 、加速係数を 1.1~1.4 とした加速緩和法(SOR法)により求めた。

### 3. 計算結果と考察

ポロノイ多角形要素を用いる方法の有用性を調べるため、1成分( $p=0$ )で半径比が0.3の同心二重円筒について定常熱伝導の計算を行った。厳密解と比較したときの誤差の平均と標準偏差を図3に示す。図3によれば、本計算方法は要素点が多く無作為に与えられているにもかかわらず、少ない要素数で高精度の解が得られることがわかる。

混合物の形状(計算領域)を二次元的に長方形(アスペクト比1, 2, 4)や二重円筒(半径比0.3)に変えたとき、要素分割数が200以上では平均熱伝導率の間に有為な違いは見いだせなかった。そこで、二次元の場合、計算領域は半径比0.3の同心二重円筒とし、分割要素数は1600とした。三次元の場合には、計算に使用したマイクロコンピュータのメモリ容量の制約から、計算領域は側面を断熱した立方体とし、分割要素数は1200とした。このときのポロノイ多面体要素への分割の一例を図4に示す。

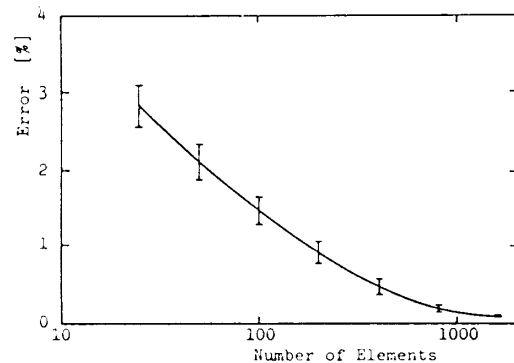


図3 要素分割数と計算誤差の関係

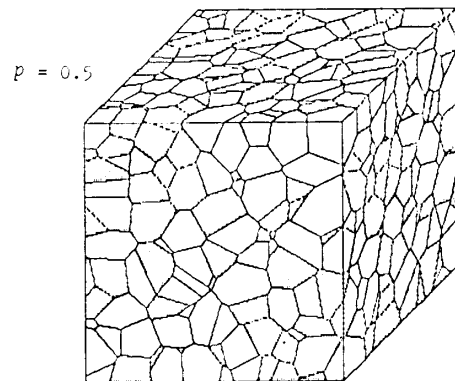


図4 要素分割と配置形態の一例

標準物質の熱伝導率を1とし異種物質の熱伝導率 $\lambda$ を $2^{-7}$ から $2^7$ まで変え、異種物質の体積率 $p$ を0.05から0.95まで変えて計算した。

要素点の位置を二次元的かつ無作為に与えるとポロノイ多角形の平均頂点数は5.94、形状係数( $4\pi \times$ 要素面積/要素周長 $^2$ )の平均 $Z_2$ は0.73であった。また、三次元的かつ無作為に要素点の位置を与えると、ポロノイ多面体の平均面数は14.9、面の平均角数は5.1、形状係数( $36\pi \times$ 要素体積 $^2$ /要素面積 $^3$ )の平均値 $Z_3$ は0.86であった。

要素分割が二次元の場合、要素点をその要素多角形の重心位置に移動させて再分割を繰返すと、その要素多角形は次第に大ききのそろった正六角形になる。これを利用して微小要素形状が平均熱伝導率 $\bar{\lambda}_m$ にどのように影響するかを調べた。しかし、要素数が1600では、微小要素形状が変わるときの熱伝導率 $\lambda_m$ の変化量よりも、配置形態指定の試行ごとの $\lambda_m$ の変化量のほうが一般に大きかった。このことは、たとえ微小要素の形状が指向性を有しても、有意な方向にそろって配置されない限り、混合物の平均熱伝導率 $\bar{\lambda}_m$ を決定する最大の要因は、異種物質がどのように連なって平均熱流ベクトルの方向に配置されているかにあること

を意味する。したがって、諸家の研究に見られるように、異種物質の配置を変えるとそれに応じてさまざまな予測式が得られるのは当然のことである。また、混合物の平均熱伝導率の上限と下限は次の二つの極端な配置形態の場合の熱伝導率であると推定できる。

(1) 平均熱流ベクトルに平行に異種物質が連なって並ぶ場合 この場合、平均熱伝導率は式(9)で示されるような2成分の熱伝導率の算術平均値である。

$$\lambda_p = p \times \lambda + 1 - p \quad \dots\dots\dots (9)$$

(2) 平均熱流ベクトルに垂直に異種物質が連なって並ぶ場合 この場合、平均熱伝導率は式(10)で示されるような二成分の熱伝導率の調和平均値である。

$$\lambda_s = \lambda / [(1-p) \times \lambda + p] \quad \dots\dots\dots (10)$$

異種物質の体積率 $p$ または熱伝導率 $\lambda$ をパラメータにして、二次元の場合の計算結果を図5, 6に示し、三次元の場合の計算結果を図7, 8に示す。

図6と図8を比較してみると、異種物質の熱伝導率が小さいとき、三次元より二次元のほうが体積率の増大に対して急激に混合物の平均熱伝導率が低下する。二次元より三次元の場合のほうが異種物質の配列の自由度が増すので、異種物質の体積率が小さいとき、熱の伝導経路は異種物質により切断されにくくなり、一

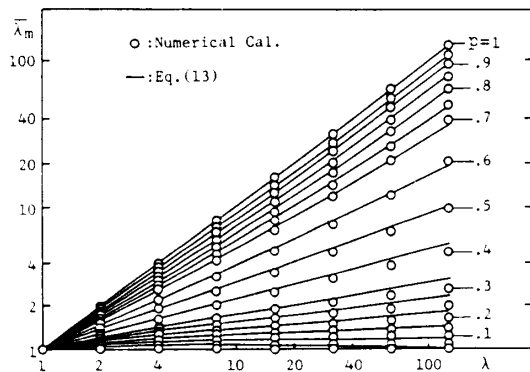


図5 平均熱伝導率(二次元  $\lambda \geq 1$ )

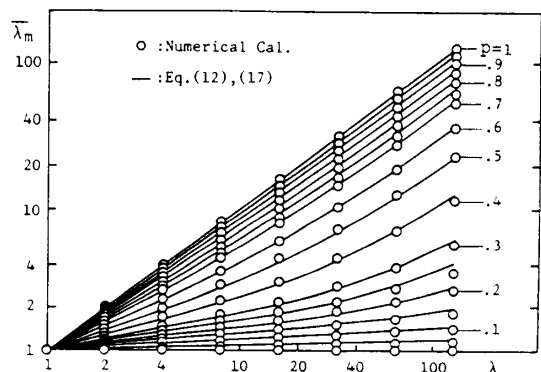


図7 平均熱伝導率(三次元  $\lambda \geq 1$ )

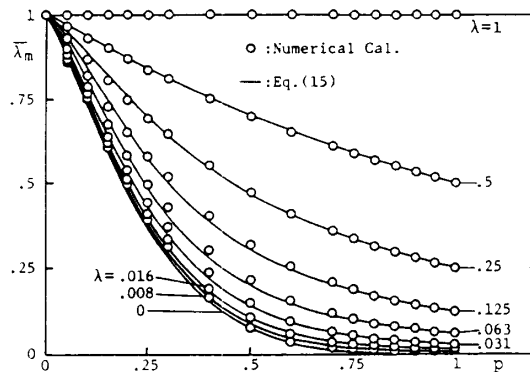


図6 平均熱伝導率(二次元  $\lambda \leq 1$ )

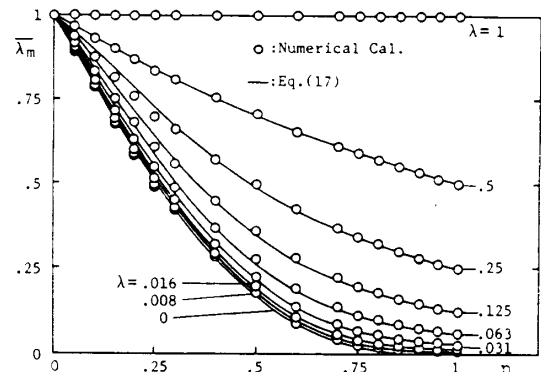


図8 平均熱伝導率(三次元  $\lambda \leq 1$ )

方の伝熱面から他方の伝熱面まで標準物質が連なりやすい。したがって、三次元の場合の平均熱伝導率は調和平均よりも算術平均に近くなる。このことが、異種物質の熱伝導率と体積率が小さいとき、三次元の平均熱伝導率が二次元のそれよりも大きくなる原因であると考えられる。

図5, 7を参照すると、体積率を一定とすると、平均熱伝導率と異種物質の熱伝導率の対数グラフ上の関係がほぼ直線的であることから、平均熱伝導率は式(11)で示されるような2成分の熱伝導率の幾何平均値に近いことがわかる(付録参照)。

$$\lambda_g = \lambda^p \dots\dots\dots (11)$$

本計算条件の場合には、標準物質と異種物質の体積率と熱伝導率を互いに交換しても平均熱伝導率は変わらないから、式(12)(対称条件)を満足しなければならない。

$$\bar{\lambda}_m(p, \lambda) = \lambda \times \bar{\lambda}_m(1-p, 1/\lambda) \dots\dots\dots (12)$$

二次元の場合、本計算範囲 ( $2^{-7} \leq \lambda \leq 2^7, 0.05 \leq p \leq 0.95$ ) では、この条件を満足し計算結果を近似する式(13)により、最大誤差5%で平均熱伝導率を表せることが、図5からわかる。

$$\bar{\lambda}_m = \frac{[(\lambda_s/\lambda_p)G + 10]F\lambda_g + \lambda_s}{(G+10)F + 1} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$F = \log[(1/\lambda + \lambda)/2] \dots\dots\dots (14\cdot a)$$

$$G = 5 \times (1-2p)[(1-p)p]^{.75} \log \lambda + 1 \dots\dots\dots (14\cdot b)$$

式(13)の場合、異種物質の熱伝導率  $\lambda$  が零に漸近すると、体積率が零付近の小さい値において平均熱伝導率が急激に零になり、誤差が増大する。そこで、 $\lambda \leq 1$  の場合には、対称条件(式(12))を満足しないけれども、3種類の平均値の重み付き平均である式(15)、または計算結果を近似する式(17)で、平均熱伝導率を表すの

がよいことを図6~8は示している。

二次元の場合

$$\bar{\lambda}_m = \frac{C_s\lambda_s + C_p\lambda_p + C_g\lambda_g}{C_s + C_p + C_g} \dots\dots\dots (15)$$

ただし、

$$C_s = F \times p^{1.25} \dots\dots\dots (16\cdot a)$$

$$C_p = .3 \times F \times (1-p)^2 \dots\dots\dots (16\cdot b)$$

$$C_g = p \times \lambda^{(2-3p)/5} \dots\dots\dots (16\cdot c)$$

三次元の場合

$$\bar{\lambda}_m = \frac{C_1\lambda_s + C_2\lambda_x + C_3\lambda_g}{C_1 + C_2 + C_3} \dots\dots\dots (17)$$

ただし、

$$\lambda_x = p \times \lambda^{.75} + (1-p)^{1.25} \dots\dots\dots (18\cdot a)$$

$$C_1 = F \times p^{1.1} \dots\dots\dots (18\cdot b)$$

$$C_2 = .9 \times F \times (1-p)^{1.5} \dots\dots\dots (18\cdot c)$$

$$C_3 = p \times \lambda^{(2-3p)/2} \dots\dots\dots (18\cdot d)$$

体積率が0.5の場合について、これらと既存の主な推定式(表2)<sup>(1)~(7)</sup>を図9で比較する。熱伝導率比が1より大きく離れるとともに平均熱伝導率の上限と下限の幅は急激に増大し、諸家の推定式による予測値もこの範囲内に散乱している。本計算結果と推定式(17)による予測値は、Yuge<sup>(4)</sup>の取扱ったような微小立方体要素の場合の結果に近い。すでに述べたように、混合物の平均熱伝導率は微小要素の形状よりも異種物質がどのように連なって平均熱流ベクトルの方向に配置されるかに依存することをこれは示している。

ガラス球をシリコンラバー中に混合した林ら<sup>(10)</sup>の実験を2成分物質の混合の実例として取り上げ、彼らの実験値と式(17)による予測値の比較をして図10に

表2 平均熱伝導率の主な推定式

Author	Equation
Maxwell	$\bar{\lambda}_m = [\lambda + 2 - 2p(1-\lambda)] / [\lambda + 2 + p(1-\lambda)]$
Russell	$\bar{\lambda}_m = [\lambda p^{2/3} + (1-p^{2/3})] / [\lambda(p^{2/3}-p) + (1-p^{2/3}+p)]$
Woodside	$\frac{1}{\bar{\lambda}_m} = [(\frac{a^2-1}{2a}) \log(\frac{a+1}{a-1}) - 1]R + 1$ $R = (bp/\pi)^{1/3}$ $a = \sqrt{4/[\pi(\lambda-1)R^2] + 1}$
Cheng & Vachon	$\frac{1}{\bar{\lambda}_m} = \frac{1}{\alpha\beta} \log(\frac{2\alpha+\beta\beta}{2\alpha-\beta\beta}) + 1 - \beta$ : $\lambda > 1$ $B = \sqrt{3\pi/2}$ $\frac{1}{\bar{\lambda}_m} = \frac{2}{\alpha\beta} \tan^{-1}(\frac{\beta\beta}{2\alpha}) + 1 - \beta$ : $\lambda < 1$ $\alpha = \sqrt{(\lambda-1)B+1}$ $\beta = \sqrt{4 \lambda-1 /B}$
Yuge	$\bar{\lambda}_m = [\lambda_x + \sqrt{\lambda_x^2 + 8\lambda_1\lambda_2}] / 4$ $\lambda_0 = 2\lambda / (\lambda+1)$ $\lambda_1 = (1-p) + p\lambda_0$ $\lambda_2 = p\lambda + (1-p)\lambda_0$ $\lambda_x = (2-3p)\lambda_1 + (3p-1)\lambda_2$

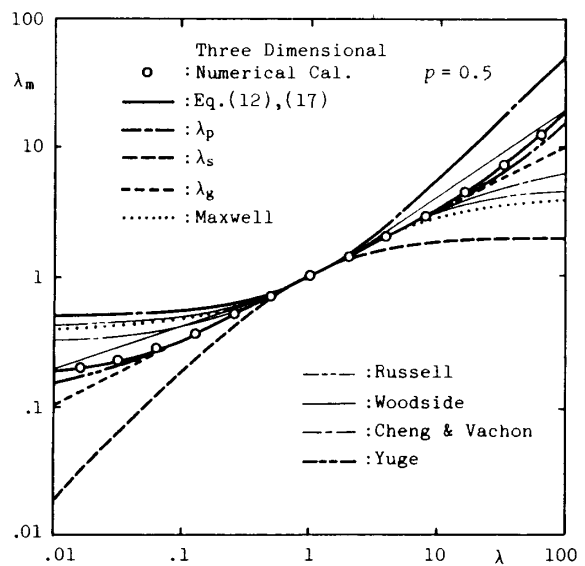


図9 主な推定式の比較

示す。図 10 中に併記した式(9)と式(10)による予測値は平均熱伝導率の上限と下限を示す。式(17)は実験値を良く再現し、本計算方法によって混合物の平均熱伝導率を数%の誤差で予測できることがわかる。

多成分を混合したエポキシコンクリートに対する田辺ら<sup>(11)</sup>の実験結果に予測式(17)を適用した結果を図 11 に示す。3成分以上の多成分を混合する場合、まず2成分を混合し、次にそれを他の成分と混合することにより計算を行える。このような計算法によるとき、混合の順序によって算出される平均熱伝導率は異なる。平均熱流ベクトルに対して異種物質がどのように連なって並ぶかが混合物の平均熱伝導率を決定する最

大の要因であることがこの原因であると推定される。そこで、全成分を体積率に従って無作為に配置指定して直接に計算した結果も併せて図 11 に示す。この結果は、総じて良好でありこのような計算方法による予測が適切であることを示している。

4. 結 論

無作為に分布させた要素点の周りのポロノイ多面体(または多角形)要素に計算領域を分割し、混合物体積比に従って各要素の熱伝導率を指定して、混合物の平均熱伝導率を直接数値計算した。得られた成果は次のように要約できる。

(1) 熱伝導率が異なる成分の混合物の平均熱伝導率は、平均熱流ベクトルに対して各成分がどのように連なり方向をそろえて配置されるかに強く依存するが、微小要素おのおのの配置される向きが無作為であれば微小要素の形状にはほとんど依存しないと考えられる。

(2) 2成分混合物の平均熱伝導率は各成分の熱伝導率の算術平均値と調和平均値の間にあり、各成分の幾何平均値に近い。また、その平均熱伝導率を求める簡便な近似式を提案した。

(3) 異種物質の体積率と熱伝導率が小さいとき、二次元の計算領域から求められた混合物の平均熱伝導率の計算値は三次元のそれよりも小さく、それらの差は異種物質の体積率と熱伝導率が小さくなるに従って大きくなる。

(4) 多成分混合物の平均熱伝導率の概算値は2成分混合を繰返して求められるが、精度の良い予測値を得るためには、実際に近い混合状態を本報のような手法を使って再現し、直接数値計算する必要がある。

[付 録]

図 12(a) に示すように熱伝導率が1で体積が1-pの物質(標準物質)と熱伝導率がλで体積がpの物質(異種物質)を混合した場合、幾何平均熱伝導率がλ<sup>p</sup>であることは次のようにして証明される。

pを二進小数で表すとき、

$$p = a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + a_3 2^{-3} + \dots + a_n 2^{-n} \dots \dots (19)$$

であるとする。ただし、

$$a_i = 0 \text{ or } 1 \quad (i=1 \text{ to } n-1), \quad a_n = 1 \dots \dots (20)$$

そこで、図 12(a) に示した両物質のおのおのを1/2, 1/4, 1/8, ..., 1/2<sup>n</sup>の大きさになるように切断して、小さい順に並べると図 12(b) のようになる。

また、1-pを二進小数で

$$1-p = \bar{a}_1 2^{-1} + \bar{a}_2 2^{-2} + \bar{a}_3 2^{-3} + \dots + \bar{a}_n 2^{-n} \dots (21)$$

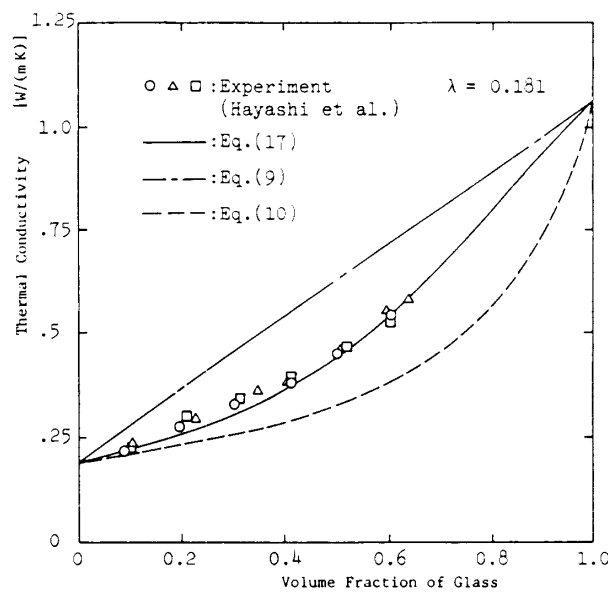


図 10 2成分混合物実験への適用

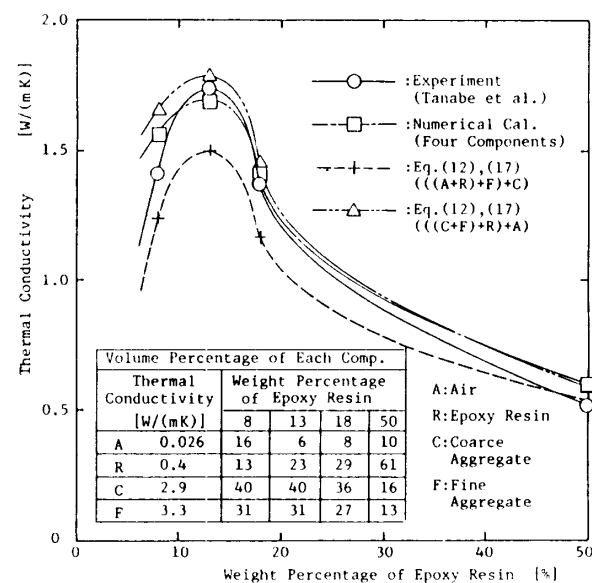


図 11 多成分混合物実験への適用

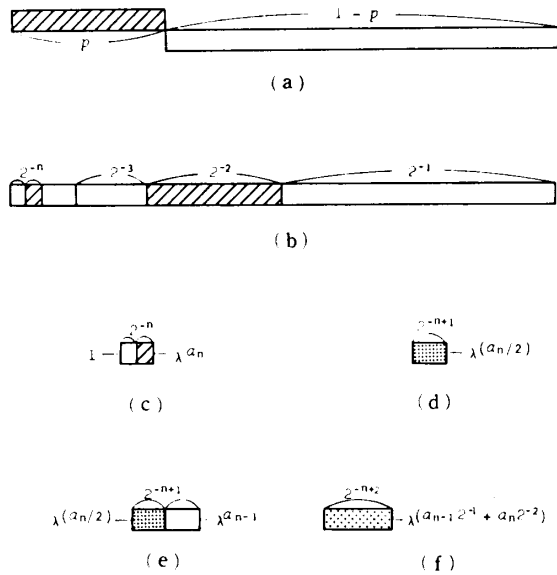


図 12 混合物の幾何平均熱伝導率

と表せば,

$$\bar{a}_i = 1 - a_i (i=1 \text{ to } n-1), \bar{a}_n = 1 \dots\dots\dots (22)$$

となるから、大きさ  $2^{-i}$  の断片の熱伝導率は  $\lambda^{a_i}$  で与えられる。これらの断片の最小片は図 12(c) のようであり、この等量  $2^{-n}$  どうし士の幾何平均は、

$$\sqrt{1 \times \lambda^{a_n}} = \lambda^{(a_n/2)} \dots\dots\dots (23)$$

と示すことができるので、混合した結果は図 12(d) の

ようになる。そして、この混合した熱伝導率が  $\lambda^{(a_n/2)}$  の断片は図 12(e) の右の熱伝導率が  $\lambda^{a_{n-1}}$  で同じ大きさの断片と混合され図 12(f) となる。この等量どうしの幾何平均は

$$\sqrt{\lambda^{a_{n-1}} \times \lambda^{(a_n/2)}} = \lambda^{(a_{n-1}2^{-1} + a_n2^{-2})} \dots\dots\dots (24)$$

である。したがって、順次より大きな等量どうしの幾何平均を求めてゆけば、熱伝導率が  $\lambda$  で体積が  $p$  の異種物質と熱伝導率が 1 で体積が  $1-p$  の標準物質の幾何平均した熱伝導率は

$$\lambda^{(a_12^{-1} + a_22^{-2} + a_32^{-3} + \dots + a_n2^{-n})} \dots\dots\dots (25)$$

となる。ここで、式(19)から式(25)の  $\lambda$  の指数は  $p$  に等しいから式(11)が証明された。

文 献

- (1) Russell, H. W., *J. Am. Ceram. Soc.*, **18**(1935), 1.
- (2) Woodside, W., *Can. J. Phys.*, **36**(1958), 815.
- (3) Cheng, S. C. and Vachon, R. L., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **12**(1969), 249.
- (4) Yuge, Y., *J. Stat. Phys.*, **16**(1977), 339.
- (5) 長谷, 機論, **45**-395(1979), 1003.
- (6) Laubitz, M. J., *Can. J. Phys.*, **37**(1959), 798.
- (7) Zehner, P. und Schlunder, E. U., *Chem. Ing. Tech.*, **42**(1970), 933.
- (8) 小林・ほか 2 名, 機論, **57**-537, B (1991), 1681.
- (9) 小林・ほか 2 名, 第 25 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, **1**(1988), 328.
- (10) 林・ほか 2 名, 窯業協会誌, **82**(1974), 318.
- (11) 田辺・ほか 2 名, 機論, **56**-525, ABC(1990), 1314.