

## スパン方向に一定温度こう配を有する平板乱流境界層 に関する実験的研究\*

小林 睦 夫\*<sup>1</sup>, 松原 幸 治\*<sup>2</sup>  
大木 聡\*<sup>3</sup>, 前川 博\*<sup>1</sup>

### Experimental Study on a Turbulent Boundary Layer with a Constant Temperature Gradient for a Spanwise Direction

Mutsuo KOBAYASHI, Koji MATSUBARA,  
Satoshi OHKI and Hiroshi MAEKAWA

Following the previous works by Maekawa et al. (1991) and Kawada et al. (1991), some turbulence statistics including the triple velocity-temperature correlations were measured in a turbulent boundary layer with a constant temperature for a spanwise direction. Examination was given to the turbulent heat flux budget and also to the reliability of some existing turbulence models. It was revealed that there are remarkable discrepancy between the predicted triple velocity-temperature correlations by the gradient-type model (Launder (1978)) and the experimental result. However, the examination for the turbulent heat flux budget clarified that the budget lies in near local equilibrium except for the near-wall region. Thus, the reliability of the pressure-temperature gradient correlation model is found to be rather important for the prediction of the spanwise turbulent heat flux. The prediction performance of the pressure-temperature gradient correlation model was investigated using two kinds of the models (Launder (1975), Maekawa et al. (1979)). It was found that predicted values by these models show good agreement with the experimental result.

**Key Words:** Turbulent Boundary Layer, Spanwise Temperature Gradient, Turbulent Heat Flux Budget, Turbulence Model

#### 1. 緒 言

壁乱流におけるスパン方向あるいは周方向の熱伝達は、工学的な重要性が小さくないことから、これまでにいくつかの研究<sup>(1)~(4)</sup>により取り上げられている。例えば、Black-Sparrow<sup>(1)</sup>およびQuarmby-Quirk<sup>(2)</sup>は、周方向に非一様な加熱を受ける円管内乱流について実験を行い、壁近傍における周方向の渦熱拡散係数が壁垂直方向のそれと大きく異なることを示した。また近年、Maekawaら<sup>(3)</sup>は、スパン方向に一定温度こう配を有する平板乱流境界層を取り上げ、乱流熱流束などの統計量を回転熱線法により測定し、スパン方向の渦熱拡散係数と壁垂直方向の渦動粘性係数の比が特徴的な分布を示すことを見いだした。さらに、河田ら<sup>(4)</sup>は、Maekawaらと同じ実験装置を用いて主流部乱れの影響を検討した。これらの研究によりスパン方向あるいは周方向の乱流熱伝達についてある程度の知見が得られたが、研究例が少ないためにいまだ不明な点も多い。

本報では、Maekawaらおよび河田らに続く一連の研究として、同じ流れ系において速度-温度三重相関を含む諸量の測定を行い、スパン方向乱流熱流束の収支について検討する。さらに、測定により得られた結果を用いて、速度-温度三重相関および圧力-温度こう配相関それぞれに関する既存の乱流モデルを検証する。

#### 2. 記 号

$A$ : 瞬間速度ベクトル  
 $a$ : 温度伝導率  
 $B$ : 熱線の方向ベクトル  
 $E$ : 電圧の直流成分  
 $e$ : 電圧の交流成分  
 $S_u, S_v, \dots, S_{w\theta}$ : 熱線の感度  
 $U$ : 流れ方向の時間平均速度  
 $u$ : 流れ方向の速度変動  
 $u_\tau$ : 摩擦速度  
 $V$ : 壁垂直方向の時間平均速度  
 $v$ : 壁垂直方向の速度変動  
 $w$ : スパン方向の速度変動  
 $x$ : 流れ方向座標  
 $y$ : 壁垂直方向座標

\* 原稿受付 1997年4月18日。

<sup>1</sup> 正員, 新潟大学工学部 (☎ 950-2181 新潟市五十嵐2の町8050)。

<sup>2</sup> 正員, 新潟大学大学院自然科学研究科。

<sup>3</sup> 学生員, 新潟大学大学院。

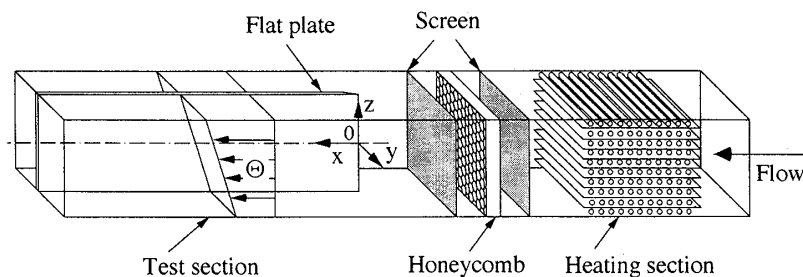


Fig. 1 Principal part of the experimental setup

- z: スパン方向座標
- $\alpha$ : 熱線の仰角
- $\beta$ : 熱線の方位角
- $\delta$ : 境界層厚さ
- $\varepsilon$ : 乱流エネルギーの散逸率
- $\Theta$ : 時間平均温度
- $\theta$ : 温度変動
- $\Phi$ : 時間平均速度ベクトルが熱線となす角度
- $\phi$ : 速度変動ベクトルが熱線となす角度
- $\bar{\quad}$ : 時間平均

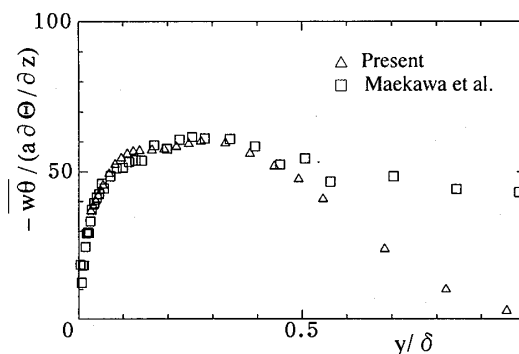


Fig. 2 Distribution of spanwise turbulent heat flux

### 3. 実験方法

**3.1 実験装置** 本研究で用いる実験装置は、Maekawaら<sup>(3)</sup>および河田ら<sup>(4)</sup>が使用した装置に若干の変更を加えたものである。以下では実験装置を解説するが、論文<sup>(3)(4)</sup>と重複する部分については概略を述べるにとどめる。

実験装置の主要部を、座標系とともに図1に示す。絞りと予熱部を通過した動作流体の空気は、一辺300mmの正方形断面を有する加熱部において鉛直上方に向かって正の一定こう配をもつ温度分布を与えられる。これまでの研究<sup>(3)(4)</sup>では、加熱部で生じた乱れを減衰させるため、加熱部の下流に2枚のステンレス鋼製スクリーン(メッシュ40)が置かれていた。しかしながら、それによる乱れの減衰は不十分であったので、2枚のスクリーン間にアルミニウムはく製ハニカム(メッシュ4、長さ40mm)を追加した。図2には、スパン方向の乱流熱流束 $\overline{w\theta}$ の測定結果をMaekawaらの実験結果と比較して示す。図2から、ハニカムを追加することにより主流部の乱れが十分に減衰し、境界層外縁における $\overline{w\theta}$ の値がかなり小さくなったことが確認できる。測定部に設置される平板は、のみ形前縁をもつ、厚さ5mm、高さ300mm、長さ2100mmの亚克力樹脂板である。その両側の壁面上に発達する境界層内の温度分布が平板に関してほぼ対称であることから、平板上ではそれと垂直方向に断熱と考えてよい。なお、実験に先立ち、流れ方向の圧力こう配が

ほとんど消滅するように測定部の幅を調節した。

座標系として、平板前縁の中央に原点を置き、流れ方向にx軸を、壁垂直方向にy軸を、スパン方向にz軸をとる。これまでの研究<sup>(3)(4)</sup>と同様に、主流部の時間平均速度を9.1m/sに、平板中央断面における時間平均温度を314.2Kに、スパン方向の温度こう配を150K/mに保ちつつ、 $x=1500$ mmの断面で各種統計量のy方向分布を測定した。この断面における摩擦速度 $u_\tau$ と運動量厚さに基づくレイノルズ数は、2000である。

流れ方向の時間平均速度 $U$ 、時間平均温度 $\Theta$ 、乱流応力 $\overline{u^2}$ 、 $\overline{v^2}$ 、 $\overline{w^2}$ 、 $\overline{uv}$ 、スパン方向乱流熱流束 $\overline{w\theta}$ および温度分布 $\overline{\theta^2}$ について、これまでと同様な測定を行ったほか、乱流エネルギー $k$ および乱流熱流束 $\overline{w\theta}$ の輸送に関する特定の一点三重相関 $\overline{u^2v}$ 、 $\overline{v^3}$ 、 $\overline{vw^2}$ 、 $\overline{vw\theta}$ について新たな測定を行った。

**3.2 速度-温度三重相関の測定** 速度-温度三重相関 $\overline{vw\theta}$ を測定するため、以下に述べる手法を考案した。 $\overline{uvw}$ は $\overline{w\theta}$ の輸送と関係はないが、この手法で同時に測定できる。熱線が壁面および流れの両方に対して傾斜する一般の場合を想定し、熱線の仰角 $\alpha$ と方位角 $\beta$ を図3のように定義する。また、瞬間の速度ベクトル $\mathbf{A}$ が熱線の方向ベクトル $\mathbf{B}$ に対してなす角度の時間平均と変動を、それぞれ $\Phi$ と $\phi$ で表す。このとき、熱線流速計からの出力電圧の時間平均(直流成分) $E$ は $U \cos \Phi$ 、 $\Theta$ の関数だから、出力電圧の変

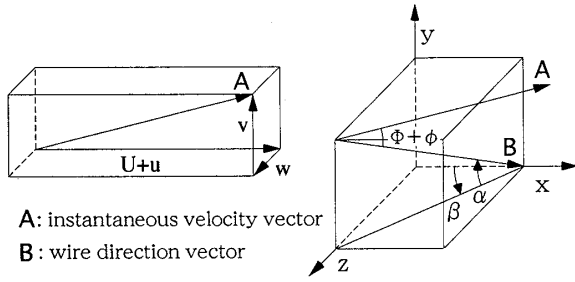


Fig. 3 Posture of the hot wire

動(交流成分) $e$ について、 $U$ ,  $\cos \Phi$ ,  $\theta$ の変動  $u$ ,  $\Delta \cos \Phi$ ,  $\theta$ の二次の項まで考慮すると次式が成り立つ。

$$e = \frac{\partial E}{\partial U} + \frac{\partial E}{\partial \cos \Phi} \Delta \cos \Phi + \frac{\partial E}{\partial \theta} \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial U^2} u^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial (\cos \Phi)^2} (\Delta \cos \Phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} \theta^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial U \partial \cos \Phi} u \Delta \cos \Phi + \frac{\partial^2 E}{\partial \cos \Phi \partial \theta} \theta \Delta \cos \Phi + \frac{\partial^2 E}{\partial \theta \partial U} \theta u \dots (1)$$

一方、図3に示した幾何学的関係から

$$\Delta \cos \Phi = -\frac{v}{U} \sin \alpha - \frac{w}{U} \cos \alpha \sin \beta + \frac{uw}{U^2} \sin \alpha + \frac{uw}{U^2} \cos \alpha \sin \beta - \frac{v^2 + w^2}{2U^2} \cos \alpha \sin \beta \dots (2)$$

が導かれる(付録参照)。これを式(1)に代入して、速度と温度の変動について二次の微小量まで考慮すると次式を得る。

$$e = s_u u + s_v v + s_w w + s_\theta \theta + s_{uu} u^2 + s_{vv} v^2 + s_{ww} w^2 + s_{\theta\theta} \theta^2 + s_{uv} uv + s_{uw} uw + s_{u\theta} u\theta + s_{vw} vw + s_{v\theta} v\theta + s_{w\theta} w\theta \dots (3)$$

ここで、 $s_u, s_v \dots s_{w\theta}$ は熱線の感度を表す。ただし、それらの定義式は容易に導かれるので省略する。なお、温度に関連する感度は、プローブのプローグやめっき部の熱慣性の影響を強く受け、動的感度が静的な検定結果よりもかなり低下することが知られている。このため、前川ら<sup>(6)</sup>が導いた伝達関数を使用して補正係数を推定し、これを検定結果に乗じた値を  $s_\theta, s_{\theta\theta}, s_{u\theta}, s_{v\theta}, s_{w\theta}$ として用いた。

リニヤライザを用いたので、 $E$ に対して次の近似式を用いる必要があった。

$$E = \{C_0 + C_1 \theta + (C_2 + C_3 \theta)g(\Phi)\sqrt{U}\}^2 \dots (4)$$

$$g(\Phi) = \sqrt{\sin \Phi \sqrt{1 + \xi^2 \cot^2 \Phi}} \dots (5)$$

ただし、 $C_0 \sim C_3, \xi$ は検定により定める定数である。具体的な検定は、 $\beta$ を測定時と同じ八とおりの値に保ちつつ、 $U$ と $\theta$ を三とおりずつ変え、そのときどき

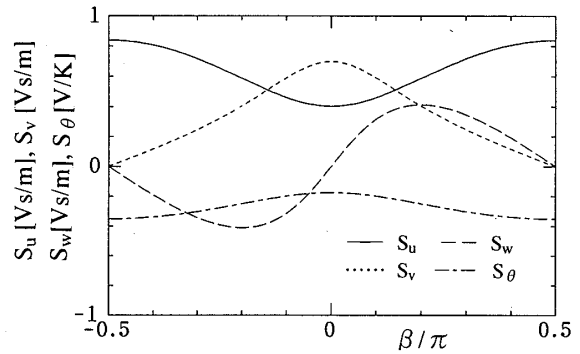


Fig. 4 Sensitivities of the hot wire

の  $E$ を測定することにより行った。こうして得た  $E, U, \theta, \beta$ の72組の値から、 $C_0 \sim C_3, \xi$ の最適値を定めた。

本実験で用いたプローブは、熱線受感部中心がプローブ軸と同一直線上に位置し、熱線が軸と  $\pi/2 - \alpha$ の角度をなすように製作されている。このプローブ軸を壁面に垂直にし、熱線の壁からの位置を一定に保ったまま軸回りに回転させることにより、熱線の仰角を一定にして方位角のみを変化させた。ただし、熱線には直径  $3.1 \mu\text{m}$ 、受感部長さ  $0.7 \text{ mm}$ のタングステン線を用いた。このプローブに対する検定結果の一例として、 $s_u, s_v, s_w, s_\theta$ の  $\beta$ に対する依存性を図4に示す。図4に示されるように、 $\beta$ の符号を反転させても  $s_u, s_v, s_w, s_\theta$ の絶対値は変わらないが、このとき  $s_w$ だけの符号が反転する。なお、ここでは図示しないが、 $s_{uw}, s_{vw}, s_{w\theta}$ も  $s_w$ と同様の特性を示す。

$uw\theta$ と $vw\theta$ の測定では、 $\beta$ を  $\pm\pi/12, \pm\pi/6, \pm\pi/4, \pm\pi/3$ の八とおりに変化させ、そのときどきの電圧の三次モーメント  $e_4^3, e_3^3$ を測定した。ただし、 $e_4^3$ と $e_3^3$ は、それぞれ  $\beta$ が正および負の場合の測定値を表す。絶対値が等しい  $\beta$ に対する  $e_4^3$ と $e_3^3$ の差を式(3)から計算すると、その差には  $w$ の奇数次を含む7種類の三重相関項と13種類の四重相関項が残る。このうち、理論上零となる項を除けば、

$$e_4^3 - e_3^3 = 12s_u s_w s_\theta \overline{uw\theta} + 12s_v s_w s_\theta \overline{vw\theta} + (6s_u^2 s_w \theta + 12s_{uu} s_w s_\theta + 12s_{uw} s_u s_\theta + 12s_{u\theta} s_u s_w) \overline{u^2 w \theta} + (6s_v^2 s_w \theta + 12s_{vv} s_w s_\theta + 12s_{vw} s_v s_\theta + 12s_{v\theta} s_v s_w) \overline{v^2 w \theta} + (6s_w^2 s_\theta \theta + 12s_w s_\theta s_{\theta\theta}) \overline{w \theta^3} + (6s_w^2 s_\theta \theta + 12s_w s_\theta s_{w\theta}) \overline{w^3 \theta} + (12s_{uv} s_u s_\theta + 12s_{uv} s_v s_\theta + 12s_{u\theta} s_v s_w + 12s_{vw} s_u s_\theta + 12s_{v\theta} s_u s_w + 12s_{w\theta} s_u s_v) \overline{uvw \theta} \dots (6)$$

が成立する。式(6)に含まれる四重相関は、乱れの多

次元正規分布を仮定して得られる

$$\overline{u_i u_j u_k \theta} = \overline{u_i u_j} \cdot \overline{u_k \theta} + \overline{u_i u_k} \cdot \overline{u_j \theta} + \overline{u_i \theta} \cdot \overline{u_j u_k} \dots\dots\dots (7)$$

等に基づいて、あらかじめ測定した二重相関から見積もった。著者らの経験によると、この手法により四重相関の値をかなり精度よく知ることができる<sup>(6)</sup>。推定した四重相関の値と  $\overline{e_1^2}$ ,  $\overline{e_2^2}$  の4種類の測定値を式(6)に代入し、最小二乗法を用いて  $\overline{uw\theta}$  および  $\overline{vw\theta}$  の各値を定めた。本測定方法の場合にも、一般の測定の場合と同様に感度特性に非線形性を有するので、式(6)の三重相関の項と四重相関の項の大きさはほぼ同程度となり、変動の二次の項を無視すると結果に大きな誤差を含むことになることが判明した。

4. 結果および考察

4.1 速度-温度三重相関 測定により得られた  $\overline{uw\theta}$  と  $\overline{vw\theta}$  の分布を、図5と図6にそれぞれ示す。図5, 6には、測定値の標準偏差を誤差棒として表示している。  $y/d < 0.1$  では標準偏差が大きいので測定値の信頼性は低い、それ以外の領域では測定値はある程度まで信頼できる。図5に注目すると、 $-\overline{uw\theta}$  は

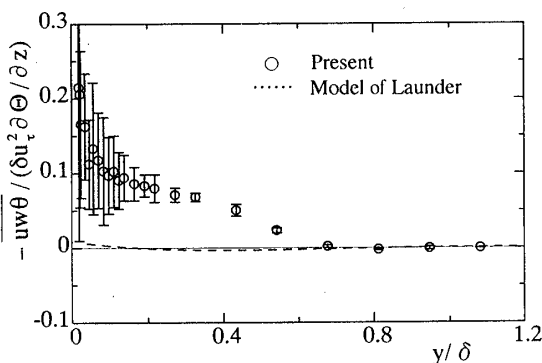


Fig. 5 Distribution of the triple velocity-temperature correlation,  $\overline{uw\theta}$

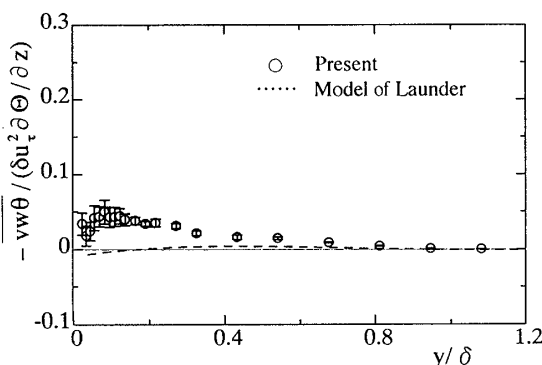


Fig. 6 Distribution of the triple velocity-temperature correlation,  $\overline{vw\theta}$

壁面に近い領域で正の大きな値を示すことが認められる。図6では、 $-\overline{vw\theta}$  は  $-\overline{uw\theta}$  が比較的大きな値をとる領域でもさほど大きくないこと、 $-\overline{vw\theta}$  の符号は測定された領域内では正であることが認められる。  $y/\delta < 0.4$  の領域では  $-\overline{uw\theta}$  と  $-\overline{vw\theta}$  の符号がともに正であるが、このことは、その領域においてこれらの三重相関が4象限分析における第1象限運動 ( $u > 0, v > 0$  の運動) と関連していることを示唆しているが、現時点でその詳細は不明である。

速度-温度三重相関に関する乱流モデルの一つに、Launder<sup>(7)</sup> によるこう配形拡散モデルがある。このモデルを本実験の場合に適用し、推奨されるモデル定数を用いると

$$-\overline{uw\theta} = 0.1 \frac{k}{\epsilon} \overline{uv} \frac{\partial w\theta}{\partial y} \dots\dots\dots (8)$$

$$-\overline{vw\theta} = 0.1 \frac{k}{\epsilon} v^2 \frac{\partial w\theta}{\partial y} \dots\dots\dots (9)$$

が得られる。ここで、 $\epsilon$  は乱流エネルギーの散逸率を表す。図5と図6には、これらの式に本実験の測定結果を代入して得た  $-\overline{uw\theta}$ ,  $-\overline{vw\theta}$  の値を記入してある。ただし、 $\epsilon$  については、 $k$  の輸送方程式に含まれる  $\epsilon$  以外の各項を測定値から評価し、それらの収支より求めた値を使用した。ただし、その際には圧力拡散を省略した。図5と図6から、 $\overline{uw\theta}$  と  $\overline{vw\theta}$  の予測値は測定を行った領域全体で測定値よりもかなり小さいことが見て取れる。

4.2 スパン方向乱流熱流束の収支 本実験の場合におけるスパン方向乱流熱流束  $\overline{w\theta}$  の輸送方程式は、次式のようなになる。

$$\begin{aligned} & U \frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial y} \\ & \text{対流} \\ & = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \overline{vw\theta} - \frac{1+1/Pr}{2} \frac{\partial w\theta}{\partial y} \right) \\ & \text{拡散} \\ & - \overline{w^2} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

生成率 圧力-温度こう配相関

ただし、上式では分子拡散を表す項を簡略化し、流れ方向の拡散を無視している。また、本実験の範囲内では浮力による生成率は最大でも速度変動と温度こう配による生成率の1%未満であったので無視し、さらに局所等方性の仮定に基づき散逸項を無視した。したがって、本実験では上式の収支から圧力-温度こう配相関の値を評価するが、その値には散逸率などが含まれることに注意を要する。

スパン方向乱流熱流束の収支として、上式の各項を主流部の時間平均速度と  $\partial\theta/\partial z$  で無次元化した値を

図7に示す。ただし、対流の第1項については境界層厚さと摩擦速度の  $x$  方向変化から推定し、その第2項に含まれる  $V$  については連続の式から推定した。なお、壁面の近傍では  $\overline{vw\theta}$  の分布が大きくなばつきを示すため、この領域では乱流拡散の妥当な値を得ることができなかつた。したがって、乱流拡散と分子拡散の和である拡散および圧力-温度こう配相関については、壁面近傍において精度が不良であると考えられたので、図7では  $y/\delta \leq 0.1$  におけるそれらの値を省いてある。

図7を見ると、対流と拡散がその他の項よりもかなり小さく、収支がほぼ局所平衡状態にあることが認められる。したがって、本実験により測定した速度-温度三重相関の値は収支に大きくは寄与しておらず、スパン方向乱流熱流束の予測には圧力-温度こう配相関モデルの予測精度が重要であると考えられる。

4.3 圧力-温度こう配相関モデルの検証

Launder<sup>(8)</sup> および前川<sup>(9)</sup> の圧力-温度こう配相関モデルを取り上げて、それらの検証を行う。それらを本実験の場合に適用し、推奨されるモデル定数を用いるとそれぞれ以下ようになる。

$$\frac{\overline{p\delta\theta}}{\rho\delta z} = -3.2 \frac{\epsilon}{k} \overline{w\theta} \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\overline{p\delta\theta}}{\rho\delta z} = -2.9 \frac{\epsilon}{k} \overline{w\theta} + 3.1 \frac{\epsilon}{k} \left( \frac{\overline{w^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) \overline{w\theta} \dots (12)$$

これらの式に示されるように、Launder のモデル式(11)では乱れの非等方性が考慮されていないが、前川らのモデル式(12)ではこの点が考慮されている。

図7には、本実験による測定値を用いて式(11)、(12)から得られた圧力-温度こう配相関の値を示してある。両モデルによる予測値は大差ないが、このことは図示した領域では乱れの非等方性がさほど強くないことを反映している。図7に示した範囲では両モデルによる予測値は実験値とよく一致しており、これらのモデルが壁乱流のスパン方向伝熱に対して有効である

ことが認められる。

ただし、壁の近傍においては圧力-温度こう配相関の妥当な測定値が得られなかつたため、この領域で上記のモデルがどの程度有効であるかは不明である。また、その領域では前川らの考慮した乱れの非等方性の影響が顕著になるため、上記の二つのモデルの予測精度は大きく異なる可能性があるが、この点についても明らかでない。これらのことに関連して、現在のところ本報と類似の系に対して直接数値シミュレーションによる検討を行っており、壁の近傍における各種乱流統計量の詳細な分布を別途に検討する予定である。

5. 結 言

本研究では、スパン方向に一定の温度こう配を有する乱流境界層を取り上げ、速度-温度三重相関を含む諸量の測定を行い、その結果以下の知見を得た。

(1) Launder のこう配形拡散モデルによる  $\overline{uw\theta}$  と  $\overline{vw\theta}$  の予測値は、本測定が行われた領域において測定値よりもかなり小さい。

(2) スパン方向乱流熱流束の収支は、壁面のごく近傍を除いてほぼ局所平衡状態にある。したがって、速度-温度三重相関の収支に対する寄与は大きくなく、スパン方向乱流熱流束の予測には圧力-温度こう配相関モデルの予測精度が重要となる。

(3) Launder と前川らによるモデルを使用して圧力-温度こう配相関の値を予測したところ、それらの予測値は本実験の結果をよく再現した。ただし、壁近傍の妥当な実験値が得られなかつたため、その領域におけるこれらのモデルの妥当性は不明である。この点については、別途に行っている直接シミュレーションの結果を用いた今後の検討に待ちたい。

本研究の一部は、文部省重点領域研究(2)(課題番号 05240209)の助成を得て行った。ここに記して感謝の意を表す。

[付録 式(2)の誘導]

図2中に示した瞬間速度ベクトル  $A = (U+u, v, w)$  の方向余弦は

$$\left( \frac{U+u}{|A|}, \frac{v}{|A|}, \frac{w}{|A|} \right)$$

により表される<sup>(10)</sup>。一方、熱線の方向ベクトル  $B$  のそれは

$$(\cos \alpha \cos \beta, -\sin \alpha, -\cos \alpha \sin \beta)$$

である。したがって、 $A$  と  $B$  のなす角度である  $\Phi + \phi$  の余弦は内積の公式より

$$\cos(\Phi + \phi)$$

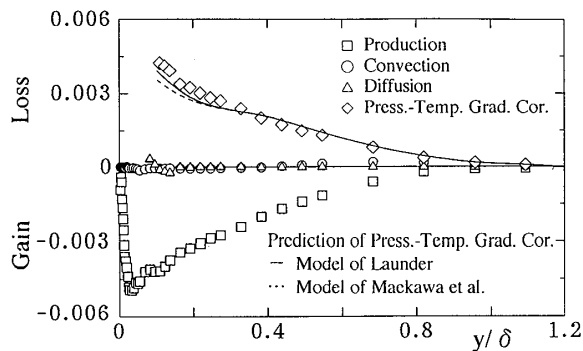


Fig. 7 Budget of the spanwise turbulent heat flux

$$= \frac{(U+u)\cos\alpha\cos\beta - v\sin\alpha - w\cos\alpha\sin\beta}{\sqrt{(U+u)^2 + v^2 + w^2}} \dots\dots\dots (13)$$

速度変動の二次の微小項まで考慮するとき、 $\cos\Phi$  の変動  $\Delta\cos\Phi$  は次のように近似される。

$$\Delta\cos\Phi = -\frac{v}{U}\sin\alpha - \frac{w}{U}\cos\alpha\sin\beta + \frac{uw}{U^2}\sin\alpha + \frac{uw}{U^2}\cos\alpha\sin\beta + \left(1 - \frac{v^2 + w^2}{2U^2}\right)\cos\alpha\sin\beta - \cos\Phi \dots\dots\dots (14)$$

さらに幾何学的関係

$$\cos\Phi = \cos\alpha\cos\beta \dots\dots\dots (15)$$

を式(14)に用いると、式(2)が得られる。

### 文 献

(1) Black, A. W. and Sparrow, E. M., *Trans. ASME, J. Heat Transf.*, **89** (1967), 258-268.

(2) Quarmby, A. and Quirk, R., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **15** (1972), 2309-2327.  
 (3) Maekawa, H., Kawada, Y., Kobayashi, M. and Yamaguchi, H., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **34-8** (1991), 1991-1998.  
 (4) 河田剛毅・前川博・小林睦夫・斉藤北, 機論, **57-540**, B (1991), 2812-2817.  
 (5) 前川博・小林睦夫・矢代一男, 機論, **53-492**, B (1987), 2560-2566.  
 (6) 小林睦夫・前川博・高野剛・内山則之・窪田正博・小林良充, 機論, **54-508**, B (1988), 3354-3360.  
 (7) Launder, B. E., (Bradshaw, P., ed.), *Topics in Applied Physics*, (1978), 231-287, Springer-Verlag.  
 (8) Launder, B. E., *J. Fluid Mech.*, **67** (1975), 569-581.  
 (9) 前川博・小林睦夫・沢井清・佐藤俊, 機論, **45-393**, B (1979), 694-701.  
 (10) Hinze, J. O., *Turbulence*, 2nd ed., (1975), 73-141, McGraw-Hill.