

## 有孔剛体床上の二層板のねじり\*

坂本 信\*<sup>1</sup>, 原 利 昭\*<sup>2</sup>  
渋谷 寿 一\*<sup>3</sup>, 小 泉 堯\*<sup>3</sup>

## Torsion of Two Dissimilar Elastic Layers on a Rigid Foundation with an Annular Hole

Makoto SAKAMOTO, Toshiaki HARA,  
Toshikazu SHIBUYA, and Takashi KOIZUMI

A solution is presented for a doubly axisymmetric contact problem of the torsion in two dissimilar elastic layers by an annular rigid punch attached to its surface. The problem is solved under the assumptions that the layers are bonded together, and the other face of the layers is clamped to a rigid foundation weakened by an annular hole which is coaxial to the punch and of the same radius. The problem is reduced to infinite systems of simultaneous equations in which both the displacement on the lower face of the layers and the contact stress under the punch are expressed as an appropriate series. The disturbances due to the presence of the hole are shown in the curves calculated numerically, and the effects of various parameters on the stress field are studied.

**Key Words:** Elasticity, Stress Analysis, Multilayer Medium, Annular Hole, Contact Stress, Mixed Boundary-Value Problem, Annular Punch

## 1. 緒 言

Reissner-Sagoci 問題<sup>(1)-(3)</sup>をはじめとする一連の剛体パンチに関する弾性接触問題は古典弾性問題の一つとして知られ、多くの工学や応用数学関連の研究者によって扱われるとともに種々の解析法が提案されている。この種の問題の中でも特に弾性厚板の問題は各種板材に対して機械や構造物の構成部材としての適合性を判定する基礎資料を得ることに関連した重要な研究と言える。

剛体床上の弾性厚板に関するパンチ問題はこれまでに Gladwell<sup>(4)</sup>, Florence<sup>(5)</sup>, Keer<sup>(6)</sup>らを始めとする多くの研究者によって扱われているが、剛体床に孔が存在する場合の問題は Low<sup>(7)</sup>, Zakorko<sup>(8)</sup>, Dhaliwal<sup>(9)</sup>らによる研究例を含めてあまり扱われていないようである。また、そのほとんどが数値結果を示していない。これに対して、著者らは先に孔とパンチが円環状の場合における押付け<sup>(10)</sup>およびねじり<sup>(11)</sup>の問題を解

析し、厚板両面上の変位や接触圧力分布を示すととも孔による応力場の乱れなどを定量的に明示した。

一方、弾性厚板が二層平板に関するこの種の問題は積層材の力学的挙動の解明と強度評価に関連した基礎的研究として重要であり、例えば剛体床上の二層板が剛体パンチにより押込み<sup>(12)</sup>およびねじり<sup>(13)</sup>を受ける問題を玉手らが解析しているけれども有孔剛体床上の厚板を対象とした解析法はまだまだ十分研究されているとは言えないようである。

そこで、本研究は有孔剛体床上の二層板の表面を円環状剛体パンチでねじる問題を三次元弾性論に基づいて解析する方法を示すととも各層の厚さおよび弾性定数の比が接触応力や変位に及ぼす影響を明示した。さらには、孔のない場合<sup>(14)</sup>の結果と比較して孔が存在することによる応力場の乱れなどを詳細に示した。

## 2. 解 析 方 法

円柱座標  $(r, \theta, z)$  において軸対称ねじりを受ける弾性体の変位成分  $(u_{rk}, v_{\theta k}, w_{zk})$  と応力成分  $(\sigma_{rk}, \sigma_{\theta k}, \sigma_{zk}, \tau_{rz k}, \tau_{\theta z k}, \tau_{\theta r k})$  は Boussinesq の調和応力関数  $\lambda_{3k}$  ( $k=1, 2$ ) を用いて次のように表示できる。

\* 昭和63年10月29日 山梨地方講演会において講演。原稿受付 昭和63年4月21日。

\*<sup>1</sup> 准員, 新潟大学大学院 (〒950-21 新潟市五十嵐-2の町8050)。

\*<sup>2</sup> 正員, 新潟大学工学部。

\*<sup>3</sup> 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

$$\left. \begin{aligned} 2Gv_{\theta k} &= -\partial\lambda_{3k}/\partial r, \quad u_{rk} = w_{zk} = 0 \\ \tau_{\theta zk} &= -\partial^2\lambda_{3k}/(2\partial r\partial z) \\ \tau_{r\theta k} &= \partial^2\lambda_{3k}/(2\partial z^2) + \partial\lambda_{3k}/r\partial r \\ \sigma_{rk} &= \sigma_{\theta k} = \sigma_{zk} = \tau_{rk} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

ここで、 $G_k$  ( $k=1, 2$ )は横弾性係数であり、以下では同様に添字  $k=1$  と  $2$  によって図1の上層と下層に関する物理的諸量をそれぞれ表すものとする。

図1に示すように内、外半径がそれぞれ  $r_i, r_o$  の環状孔を有する剛体床上におおのの厚さが  $h_k$  ( $k=1, 2$ ) の二層構造無限厚板があり、その上面 ( $z=h$ ) を孔と同形状の剛体パンチで微小角度  $\omega_o$  だけねじる場合を考える。パンチおよび剛体床はそれぞれ厚板上、下面に密着し、両層は境界面 ( $z=h_2$ ) で接着されているものとするれば、境界条件は次のようになる。

- (i)  $(v_{\theta 1})_{z=h} = \omega_o r \quad (r_i \leq r \leq r_o)$
  - (ii)  $(v_{\theta 2})_{z=0} = 0 \quad (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r)$
  - (iii)  $(\tau_{\theta z 1})_{z=h} = 0 \quad (0 \leq r < r_i, r_o < r)$
  - (iv)  $(\tau_{\theta z 2})_{z=0} = 0 \quad (r_i < r < r_o)$
  - (v) 接着境界 ( $z=h_2$ ) において  
 $v_{\theta 1} = v_{\theta 2}, \tau_{\theta z 1} = \tau_{\theta z 2} \quad (0 \leq r < \infty)$
  - (vi) 無限遠方においてすべての応力は消失
- .....(2)

式(2)の条件(vi)を考慮して次の応力関数を用いる。

$$\lambda_{3k} = \int_0^\infty \{A_k(\lambda) \sinh \lambda z + B_k(\lambda) \cosh \lambda z\} \times J_0(\lambda r) d\lambda \dots\dots(3)$$

ここで、 $A_k(\lambda)$  および  $B_k(\lambda)$  は  $\lambda$  のみの未知関数、 $J_n(\lambda r)$  は  $n$  次の第1種ベッセル関数である。式(1)と(3)による変位と応力に境界条件(v)を適用し、さらに(i)~(iv)の条件を考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} 2G_1(v_{\theta 1})_{z=h} &= \int_0^\infty \{[\alpha(\lambda) \sinh \lambda h + \gamma(\lambda) \cosh \lambda h] \\ &\times A_2(\lambda) + \{\beta(\lambda) \cosh \lambda h - \gamma(\lambda) \sinh \lambda h\} \\ &\times B_2(\lambda)\} \lambda J_1(\lambda r) d\lambda = 2G_1 \omega_o r \quad (r_i \leq r \leq r_o) \\ 2G_2(v_{\theta 2})_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda B_2(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= 0 \quad (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \\ 2(\tau_{\theta z 1})_{z=h} &= \int_0^\infty \{[\alpha(\lambda) \cosh \lambda h + \gamma(\lambda) \sinh \lambda h] \\ &\times A_2(\lambda) + \{\beta(\lambda) \sinh \lambda h - \gamma(\lambda) \cosh \lambda h\} \\ &\times B_2(\lambda)\} \lambda^2 J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (0 \leq r < r_i, r_o < r) \\ 2(\tau_{\theta z 2})_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda^2 A_2(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= 0 \quad (r_i < r < r_o) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

ここで、 $\Gamma = G_1/G_2$  であり、

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \alpha(\lambda) \\ \beta(\lambda) \end{aligned} \right\} &= (1+\Gamma) \pm (1-\Gamma) \cosh 2\lambda h_2 \\ 2\gamma(\lambda) &= (\Gamma-1) \sinh 2\lambda h_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

したがって、本問題は式(4)を満足する  $A_2(\lambda)$  と  $B_2(\lambda)$  を決定する問題になり、ここでは次のようにパンチ接触部の応力と孔部における厚板下面変位を共に級数表示する方法を用いてこれらを決定する。

有孔剛体床上の単層板<sup>(11)</sup>および孔のない剛体床上の二層板<sup>(14)</sup>がそれぞれねじりを受ける場合を考慮すれば、本問題の  $(\tau_{\theta z 1})_{z=h}$  と  $(v_{\theta 2})_{z=0}$  は未知係数  $a_n$  と  $b_n$  ( $n=0, 1, \dots$ ) を用いて次式のように表示できる。

$$\frac{(\tau_{\theta z 1})_{z=h}}{G_1 \omega_o} = \frac{r}{\pi \eta} \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\cos n\phi}{\sin \phi}, \quad (r_i < r < r_o) \dots\dots(6)$$

$$\frac{(v_{\theta 2})_{z=0}}{\Gamma \omega_o} = \frac{2r}{\pi \eta} \sum_{n=0}^\infty b_n \sin(n+1)\phi, \quad (r_i \leq r \leq r_o) \dots\dots(7)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} 2c &= r_o + r_i, \quad 2d = r_o - r_i, \quad \eta = cd/(c^2 + d^2) \\ \phi &= \cos^{-1} \{ (1/\eta - r^2/cd)/2 \} \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

式(4)の第2, 3式、式(6)および式(7)をハンケル逆変換すれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \lambda A_2(\lambda) &= 2G_1 \xi \sum_{n=0}^\infty \{a_n M_n(\lambda) e(\lambda) - b_n N_n(\lambda) f(\lambda)\} \\ B_2(\lambda) &= 2G_1 \xi \sum_{n=0}^\infty b_n N_n(\lambda) \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)$$

ここで、 $\xi = -cd\omega_o/\eta$  であり、

$$\left. \begin{aligned} M_n(\lambda) &= \partial\{J_n(\lambda c)J_n(\lambda d)\}/\partial\lambda \\ N_n(\lambda) &= M_n(\lambda) - M_{n+2}(\lambda) \\ e(\lambda) &= 1/[\alpha(\lambda) \cosh \lambda h + \gamma(\lambda) \sinh \lambda h] \\ f(\lambda) &= e(\lambda) \{ \beta(\lambda) \sinh \lambda h - \gamma(\lambda) \cosh \lambda h \} \end{aligned} \right\} (10)$$

式(9)は任意の係数  $a_n, b_n$  に対して  $(\tau_{\theta z 1})_{z=h}$  および  $(v_{\theta 2})_{z=0}$  の条件を恒等的に満足する。そこで、式(9)を

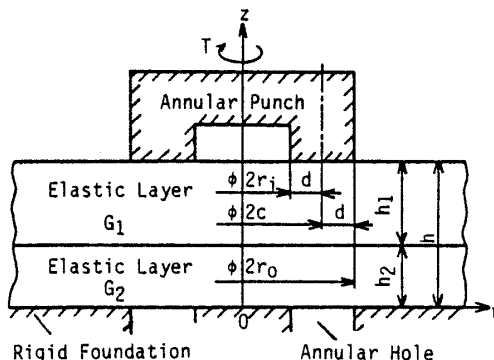


図1 有孔剛体床上の二層板

式(4)の第1, 4式に代入してゲーゲンバウアーの加法定理<sup>(15)</sup>を利用すれば, 次式を得る.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{a_n M_n(\lambda) g(\lambda) + \Gamma b_n N_n(\lambda) \lambda e(\lambda)\} \times \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) M_m(\lambda) \cos m\phi d\lambda = 1 - 2\eta \cos \phi \quad (0 \leq \phi \leq \pi) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \{a_n M_n(\lambda) e(\lambda) - b_n N_n(\lambda) \lambda f(\lambda)\} \times \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) M_m(\lambda) \cos m\phi d\lambda = 0 \quad (0 < \phi < \pi) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで,  $\delta_{0m}$  はクロネッカ・デルタであり,

$$g(\lambda) = e(\lambda) \{a(\lambda) \sinh \lambda h + \gamma(\lambda) \cosh \lambda h\} \dots (13)$$

式(11), (12)は共に  $\phi$  に関係なく成立することから両辺の  $\cos m\phi$  に関する係数を等置するとともに式(12)においては第  $m$  番めから第  $(m+2)$  番めの式を順次差引いて次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{a_n M_n(\lambda) g(\lambda) + \Gamma b_n N_n(\lambda) \lambda e(\lambda)\} \\ & \times M_m(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - \eta \delta_{1m} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \{a_n M_n(\lambda) e(\lambda) - b_n N_n(\lambda) \lambda f(\lambda)\} \\ & \times \lambda N_m(\lambda) d\lambda = 0 \end{aligned} \right\} \quad (m=0, 1, \dots) \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)を解いて  $a_n, b_n$  を決定すればすべての変位や応力が求められる.

なお, 本問題において  $\Gamma=1$  とすれば, 式(14)に対応して次の方程式を得る.

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [a_n M_n(\lambda) \tanh \lambda h + b_n N_n(\lambda) \lambda \operatorname{sech} \lambda h] \\ & \times M_m(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - \eta \delta_{1m} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [a_n M_n(\lambda) \operatorname{sech} \lambda h - b_n N_n(\lambda) \lambda \tanh \lambda h] \\ & \times \lambda N_m(\lambda) d\lambda = 0 \end{aligned} \right\} \quad (m=0, 1, \dots) \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(15)は厚さ  $h$  の単層板の結果<sup>(11)</sup>に一致する. また,  $b_n \rightarrow 0$  とすれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} g(\lambda) M_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - \eta \delta_{1m} \quad (m=0, 1, \dots) \quad \dots\dots\dots (16)$$

となり, 孔のない剛体床上にある二層厚板がねじりを受ける場合<sup>(14)</sup>に一致する. さらに,  $\Gamma=1$  とすれば式(16)は

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \tanh \lambda h M_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - \eta \delta_{1m} \quad (m=0, 1, \dots) \quad \dots\dots\dots (17)$$

となって孔のない剛体床上の単層板の結果<sup>(16)</sup>に一致し, 式(17)で  $h \rightarrow \infty$  とすれば半無限体の結果<sup>(17)</sup>に一致する.

### 3. 厚板表面の応力および応力特異性係数

厚板表面 ( $z=0, h$ ) における変位と応力は級数および無限積分形で表示され, 特に積分に対しては直接数値積分適用項と積分公式を利用する項に分離して容易に求めることが可能である. ここではこの種の問題で重要視される厚板下面の  $(\tau_{\theta z 2})_{z=0}$  のみを示すことにすれば, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} (\tau_{\theta z 2})_{z=0} / G_1 \xi = & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [a_n M_n(\lambda) e(\lambda) + b_n N_n(\lambda) \\ & \times \lambda \{1 - f(\lambda)\}] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} [\lambda^2 N_n(\lambda) \\ & - \zeta r(n+1) \{(-1)^n r_0^2 \sin \lambda r_0 - r^2 \cos \lambda r_i\}] \\ & \times J_1(\lambda r) d\lambda - \zeta r_0^2 (r^2 - r_0^2)^{-1/2} H(r - r_0) \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n - \zeta r_i^2 [H(r - r_i) \\ & + \{1 - r_i(r_i^2 - r^2)^{-1/2}\} H(r_i - r)] \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで,  $H(x)$  はヘビサイドのステップ関数であり,

$$\zeta = 2/\pi r (cd)^{3/2} \dots\dots\dots (19)$$

式(18)より  $(\tau_{\theta z 1})_{z=h}$  は孔の両縁 ( $r \rightarrow r_i - 0, r_0 + 0$ ) で特異性を有する. 一方,  $(\tau_{\theta z 2})_{z=0}$  も式(6)から明らかにようにパンチ両縁で特異性を有する. そこで, 野田ら<sup>(18)</sup>と同様にこのような応力特異性を評価する一つの方法として次式により, 応力特異性係数を定義して論ずる.

$$G_1 \omega_0 \left\{ \begin{matrix} S_y \\ S_y^* \end{matrix} \right\} = \lim_{r \rightarrow r_{y2}} \sqrt{2\pi(r - r_y)/r_0} \left\{ \begin{matrix} (\tau_{\theta z 1})_{z=h} \\ (\tau_{\theta z 2})_{z=0} \end{matrix} \right\} \quad (y=i, o) \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで,  $r_y$  ( $y=i, o$ ) は孔とパンチの内, 外半径を表すものとし, 式(6), (18)および式(20)より  $S_y, S_y^*$  は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \eta \left\{ \begin{matrix} S_i \\ S_o \end{matrix} \right\} &= (cd/\pi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \begin{matrix} (r_i/r_0)^{1/2} \\ (-1)^n \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (21) \\ \eta \left\{ \begin{matrix} S_i^* \\ S_o^* \end{matrix} \right\} &= 2r_0 (\pi cd)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_n \left\{ \begin{matrix} (r_i/r_0)^{3/2} \\ (-1)^n \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (22)$$

次に, パンチを  $\omega_0$  だけねじるのに要するトルク  $T$  は式(6)を用いて次式で与えられる.

$$T = 2\pi \int_{r_i}^{r_0} r^2 (\tau_{\theta z 1})_{z=h} dr = 2\pi G_1 \xi^2 (a_0 - \eta a_1) / \omega_0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

### 4. 数値結果

式(14)より  $a_n, b_n$  を求めるにあたっては文献(11)と同様に, 直接数値積分する項とベッセル関数の漸近公式を利用する項とに分離して計算した. これら係数

の収束に及ぼすパラメータ、 $h/r_o$ ,  $h_2/h$ ,  $\Gamma$ などの影響は比較的小さく、 $r_i/r_o$ が小さくなるほど項数を多くする必要はあるが  $r_i/r_o=0.25$ の場合でも15項程度で応力値の精度は十分であることを確認した。なお、以下の結果においては、それぞれ  $\omega_o r$ ,  $\omega_o G h$ ,  $\omega_o r_o^3$  によって変位、応力およびトルクを無次元化し、“—”を付してこれらを表示する。

図2, 3は種々の  $\Gamma$  に対する厚板両面での  $\overline{v_{\theta z}}$  と  $\overline{\tau_{\theta z}}$  の分布を示した図である。図2より厚板上面では  $\Gamma$  が小さいほど  $(\overline{\tau_{\theta z1}})_{z=h}$  (破線) は大きな値を示す。パンチ非接触域の  $(\overline{v_{\theta1}})_{z=h}$  (実線) はいずれの  $\Gamma$  に対してもパンチ両縁で半径方向こう配は無限大になり、 $\Gamma$  とともに変位量も大きくなる。図3は厚板下面の  $(\overline{v_{\theta2}})_{z=0}$  (一点鎖線) と  $(\overline{\tau_{\theta z2}})_{z=0}$  (実線) の分布図である。比較のために剛体床に孔がない場合の  $(\overline{\tau_{\theta z2}})_{z=0}$  を破線で示した。  $(\overline{\tau_{\theta z2}})_{z=0}$  は孔の両縁で無限大になり、無限大への漸近のしかたは  $\Gamma$  が小さいほど急激になる。また、いずれの  $\Gamma$  に対しても  $r/r_o > 1.5$  における  $(\overline{\tau_{\theta z2}})_{z=0}$  は孔のない場合の結果にほぼ一致して孔の影響は消失する。孔部における  $(\overline{v_{\theta2}})_{z=0}$  は  $\Gamma$  とともに大

きくなる。

図4は板厚を一定 ( $h/r_o=1$ ) として下層厚さに関するパラメータ  $h_2/h$  を変化させた場合の  $(\overline{\tau_{\theta z1}})_{z=h}$  および  $(\overline{v_{\theta1}})_{z=h}$  の分布を示した図である。  $\Gamma$  による差異を明示するため  $\Gamma=0.5$  と2の場合を破線と実線でそれぞれ示した。  $\Gamma=0.5$  の場合には、下層厚さの増大とともに  $(\overline{\tau_{\theta z1}})_{z=h}$  も増加し、  $\Gamma=2$  の場合は逆の傾向を生じて応力値は小さくなる。これに対して  $(\overline{v_{\theta1}})_{z=h}$  は  $\Gamma$

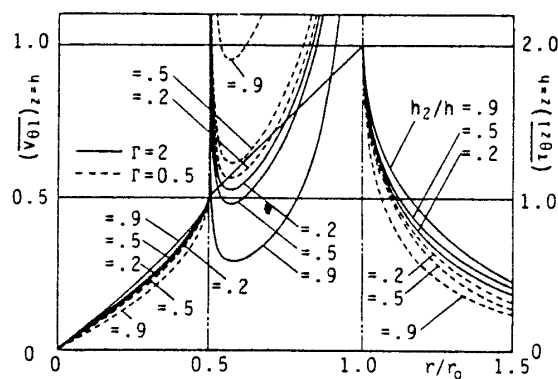


図4  $(\overline{v_{\theta1}})_{z=h}$  と  $(\overline{\tau_{\theta z1}})_{z=h}$  の分布 ( $h/r_o=1, r_i/r_o=0.5$ )

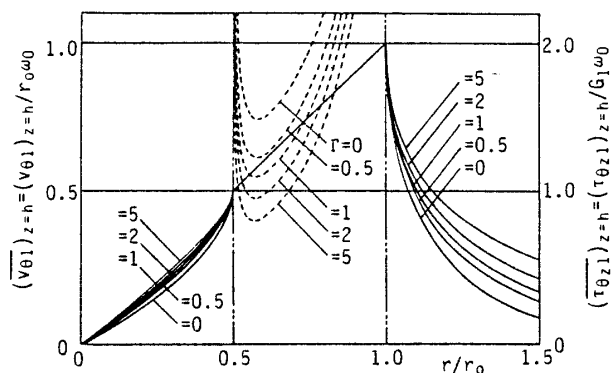


図2  $(\overline{v_{\theta1}})_{z=h}$  と  $(\overline{\tau_{\theta z1}})_{z=h}$  の分布 ( $h/r_o=1, r_i/r_o=0.5, h_2/h=0.5$ )

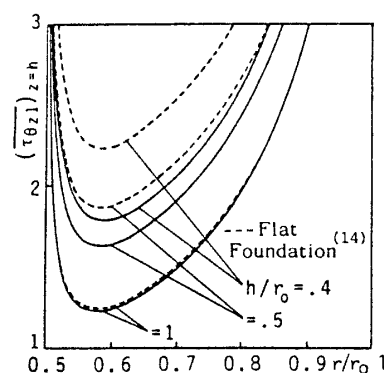


図5  $(\overline{\tau_{\theta z1}})_{z=h}$  の分布 ( $r_i/r_o=0.5, h_2/h=0.5, \Gamma=0.5$ )

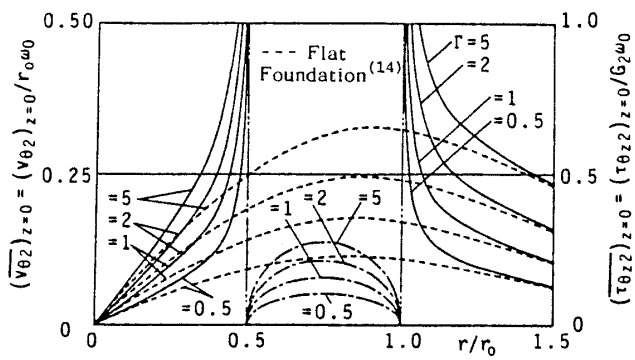


図3  $(\overline{v_{\theta2}})_{z=0}$  と  $(\overline{\tau_{\theta z2}})_{z=0}$  の分布 ( $h/r_o=1, r_i/r_o=0.5, h_2/h=0.5$ )

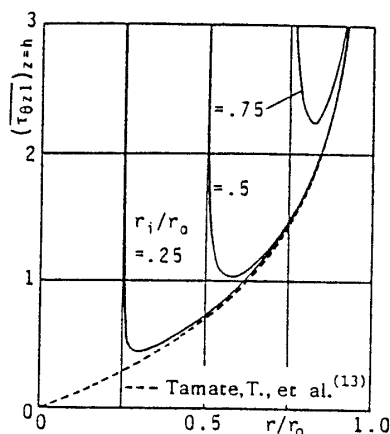
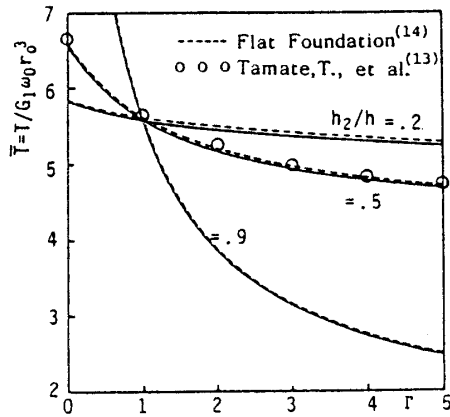


図6  $(\overline{\tau_{\theta z1}})_{z=h}$  の分布 ( $h/r_o=6.75, h_2/h=0.2, \Gamma=5$ )

図7 トルク  $\bar{T}$  の  $\Gamma$  による変化 ( $h/r_0=1, r_i/r_0=0.5$ )

$=0.5$  の場合には下層厚さの増加とともに減少するが、 $\Gamma=2$  の場合には逆の傾向を示して下層厚さとともに増加する。

図5はパンチ接触部の  $(\bar{\tau}_{\theta z1})_{z=h}$  に及ぼす孔の影響を示した図であり、破線は孔のない場合の結果を示している。板が厚くなるほど応力値は減少して破線の結果に漸近し、孔の影響は小さくなる。

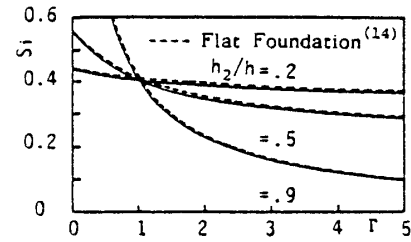
図6は種々の  $r_i/r_0$  に対する  $(\bar{\tau}_{\theta z1})_{z=h}$  の分布図である。比較のために玉手ら<sup>(12)</sup>による孔のない剛体床上的二層板を円柱状剛体パンチでねじる場合 ( $h/r_0=6.75$ ) の結果を破線で示した。この場合、板は十分に厚く、孔の影響は生じない。 $r_i/r_0$  が小さくなってパンチ幅が増すほど  $r_i < r$  で円柱パンチの結果に漸近し、パンチ内径縁の影響は極めて局部的となる。

図7には式(23)で与えられるトルク  $T$  を  $T/G_1\omega_0 r_0^3$  で無次元化した  $\bar{T}$  の  $\Gamma$  による変化を示した図であり、破線は孔のない場合の結果を示す。板厚が一定 ( $h/r_0=1$ ) の場合における  $\bar{T}$  に及ぼす孔の影響はいずれの  $h_2/h$  に対しても極めて小さい。特に、 $h_2/h=0.5$  の場合、円柱パンチの結果にほぼ一致し、パンチ内径縁の影響は  $\Gamma$  に関係なく極めて小さい。

図8は式(21)に基づく  $S_y$  の  $\Gamma$  による変化を示した図であり、破線は孔がない場合の結果である。ここでは  $S_y$  のみを示したが  $S_\theta$  もほぼ同じ傾向を示し、板厚が一定 ( $h/r_0=1$ ) であれば、いずれの  $h_2/h$  についても孔の影響は極めて小さく、 $S_y < S_\theta$  である。 $\Gamma$  の増加とともに  $S_y$  は減少し、下層が厚くなるほどその減少割合は急激になる。また、 $\Gamma=1$  ではいずれの下層厚さに対しても  $S_y$  はそれぞれ一致した値になる。

## 5. 結 言

有孔剛体床上的二層弾性厚板表面を円環状剛体パン

図8  $S_y$  の  $\Gamma$  による変化 ( $h/r_0=1, r_i/r_0=0.5$ )

チでねじる場合を解析し、厚板両面における変位や接触応力分布を明示するとともに剛体床に孔がない場合および円柱状パンチの結果と比較することによって以下のような点を明らかにした。

(1) 厚板下面の  $(\bar{\tau}_{\theta z2})_{z=0}$  は孔の両縁で特異性を有し、板厚が  $h/r_0=1$  の場合  $r/r_0 > 1.5$  ではいずれの  $\Gamma$  に対しても孔の影響は消失する。

(2) 板厚が  $h/r_0=1$  の場合、下層厚さに関係なくトルク  $\bar{T}$  は孔の影響をほとんど受けない。上下両層の厚さが等しい場合の  $\bar{T}$  は孔のない剛体床上的二層板を円柱状パンチでねじる場合の結果にほぼ一致し、 $\Gamma$  に関係なくパンチ内径縁の影響を受けない。

(3) パンチ両縁の応力特異性係数  $S_y$  ( $y=i, o$ ) は板厚が一定 ( $h/r_0=1$ ) の場合、孔の影響は極めて小さく、下層厚さに関係なく常に  $S_i < S_o$  となる。

## 文 献

- (1) Reissner, E. and Sagoci, H. F., *J. Appl. Phys.*, 15-9 (1944), 652.
- (2) Sagoci, H. F., *J. Appl. Phys.*, 15-9 (1944), 655.
- (3) Sneddon, I. N., *J. Appl. Phys.*, 18-1 (1947), 130.
- (4) Gladwell, G. M. L., *Int. J. Eng. Sci.*, 6-10 (1968), 591.
- (5) Florence, A. L., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 14-4 (1961), 453.
- (6) Keer, L. M., *Acta Mech.*, 17-1/2 (1973), 1.
- (7) Low, R. D., *Q. Appl. Math.*, 22 (1964), 153.
- (8) Zakorko, V. N., *PMM*, 38-1 (1974), 131.
- (9) Dhaliwal, R. S. and Singh, B. M., *Int. J. Eng. Sci.*, 15 (1977), 421.
- (10) 原・ほか3名, 機論, 49-448, A (昭58), 1507.
- (11) 原・ほか3名, 機論, 52-474, A (昭61), 299.
- (12) 玉手・阿部, 機論, 39-325 (昭48), 2587.
- (13) 玉手・齊藤, 機論, 41-341 (昭50), 33.
- (14) 原・ほか4名, 第28回構造強度に関する講演会講演論文抄録集, (昭61), 418.
- (15) 森口・ほか2名, 数学公式(III), (昭38), 218, 岩波書店.
- (16) 渋谷・ほか3名, 機論, 42-362 (昭51), 3031.
- (17) 渋谷, 機論, 41-347 (昭50), 1957.
- (18) 野田・阿部, 機論, 49-444, A (昭58), 952.