

円板状剛体介在物によって開口する弾性厚板内部の円形き裂*

坂本 信*¹, 原 利昭*²
渋谷 寿一*³, 小泉 堯*³

Indentation of a Penny-Shaped Crack by a Disc-Shaped Rigid Inclusion in an Elastic Layer

Makoto SAKAMOTO, Toshiaki HARA,
Toshikazu SHIBUYA, and Takashi KOIZUMI

An axisymmetric contact problem is considered to be the cause of the indentation of a penny-shaped crack by a thin disc-shaped rigid inclusion in an elastic layer. This three-part mixed boundary value problem is reduced to a solution of infinite systems of simultaneous equations in which the crack shape function is expressed as an appropriate series. The normal contact stress between the inclusion and the crack surface, as well as the stress intensity factor, are shown in curves calculated numerically. The effects of various values of nondimensional parameters on the stress field and the stress intensity factors are studied.

Key Words: Elasticity, Rigid Inclusion, Penny-Shaped Crack, Elastic Layer, Stress Intensity Factor Contact Stress, Mixed Boundary-Value Problem

1. 緒 言

線形破壊力学によるき裂問題はこれまでに広く研究がなされ、応力拡大係数をはじめとする数多くの工学的知見⁽¹⁾が得られている。それとともにこれらの問題に関する種々の解析法も提案されている。例えば、三次元軸対称問題では、Sneddon⁽²⁾による無限弾性体中の円形き裂に内圧が作用する場合やLowengrub⁽³⁾, Collins⁽⁴⁾による厚板内部にこの種のき裂が存在する場合等の解析例が知られている。また、円環状き裂の問題は三領域混合境界値問題の解法研究にも関連して種々の分野で扱われ、いくつかの解法⁽⁵⁾⁻⁽⁹⁾が示されている。

一方、き裂に関する接触問題は介在物によって開口するき裂を有する材料の力学的挙動を明らかにし、実用材料等における強度評価の基礎資料を得る上からも興味のある問題の一つと言える。例えば、弾性体中の有限き裂が剛体介在物によって開口する問題に対して

Dhawan⁽¹⁰⁾とMaitiら⁽¹¹⁾は弾性体がそれぞれ横等方性および等方性無限体の場合を扱い、強磁性体の場合を進藤⁽¹²⁾が解析している。Maitiはまた、楔形介在物と半無限き裂の問題⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾についても論じている。Tsai⁽¹⁵⁾はき裂内に偏平回転円板状介在物を有する横等方性無限体の軸対称問題に対してハンケル逆変換法を用いる解法を示し、き裂面上における接触応力や応力拡大係数等を求めている。また、Selvaduraiらは等方性⁽¹⁶⁾および横等方性⁽¹⁷⁾無限体中の円形き裂が円板状介在物によって開口する場合を第二種フレドホルム積分方程式の解法問題に帰着して解析し、き裂と介在物の半径比に基づく級数展開式を用いて応力拡大係数等を示している。しかしながら、これらの多くは無限体中のき裂を解析対象としており、弾性厚板に関するこの種の問題は近年、多用化傾向にある複合材料における界面機構の解明とも密接に関係して重要であると思われるが、極めて少ないようである。

そこで、本研究は無限厚板中央面内の円形き裂が円板状剛体介在物によって開口する場合の三領域混合境界値問題を文献(18)の解法を拡張して適用し、変位、応力分布および応力拡大係数等を明示するとともに応力状態等に及ぼす板厚や介在物とき裂の半径比の影響を明らかにした。

* 昭和63年11月17日 第954回講演会において講演、原稿受付 昭和63年5月10日。

¹ 准員、新潟大学大学院(〒950-21 新潟市五十嵐2の町8050)。

² 正員、新潟大学工学部。

³ 正員、東京工業大学工学部(〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

2. 応力解析

2.1 応力関数 円柱座標 (r, θ, z) における変位および応力成分をそれぞれ $(u_r, v_\theta, w_z), (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta})$ とすれば、ねじりのない軸対称応力状態におけるこれらの成分は Boussinesq の調和応力関数 $\psi_i (i=0, 3)$ を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= \partial\psi_0/\partial r + z\partial\psi_3/\partial r, v_\theta = 0 \\ 2Gw_z &= \partial\psi_0/\partial z + z\partial\psi_3/\partial z - (3-4\nu)\psi_3 \\ \sigma_r &= \partial^2\psi_0/\partial r^2 + z\partial^2\psi_3/\partial r^2 \\ &\quad - 2\nu\partial\psi_3/\partial z \\ \sigma_\theta &= \partial\psi_0/(r\partial r) + z\partial\psi_3/(r\partial r) \\ &\quad - 2\nu\partial\psi_3/\partial z \\ \sigma_z &= \partial^2\psi_0/\partial z^2 + z\partial^2\psi_3/\partial z^2 \\ &\quad - 2(1-\nu)\partial\psi_3/\partial z \\ \tau_{rz} &= \partial^2\psi_0/\partial r\partial z + z\partial^2\psi_3/\partial r\partial z \\ &\quad - (1-2\nu)\partial\psi_3/\partial r, \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここで、 G は横弾性係数、 ν はポアソン比である。

2.2 解析方法 図1に示すように厚さ $2h$ の弾性厚板の中央面内に直径 $2c$ の円形き裂が存在し、直径 $2d$ 、微小高さ $2\epsilon_0$ の円板状剛体介在物によって開口する場合を考える。したがって、本問題で扱う応力状態は厚板中央面 ($z=0$) に関して対称であることおよび介在物と厚板が滑らかに接触する場合を考慮して境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad (w_z)_{z=0} &= \epsilon_0 \quad (0 \leq r \leq d) \\ &= 0 \quad (c \leq r < \infty) \\ (ii) \quad (\sigma_z)_{z=0} &= 0 \quad (d < r < c) \\ (iii) \quad (\tau_{rz})_{z=0} &= 0 \quad (0 \leq r < \infty) \\ (iv) \quad (\sigma_z)_{z=h} &= 0, (\tau_{rz})_{z=h} = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \\ (v) \quad &\text{無限遠方ですべての応力は消失。} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

境界条件を (v) を考慮して応力関数 $\psi_i (i=0, 3)$ を次のように選ぶ。

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= \int_0^\infty \{D_1(\lambda)\cosh Z + D_2(\lambda)\sinh Z\} \\ &\quad \times J_0(R) d\lambda \\ \psi_3 &= \int_0^\infty \{D_3(\lambda)\sinh Z + D_4(\lambda)\cosh Z\} \\ &\quad \times J_0(R) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

ここで、 $D_i(\lambda) (i=1\sim 4)$ は λ のみの未知関数であり、 $J_n(R)$ は n 次の第一種ベッセル関数である。なお、式 (3) および以下の積分表示式においてはき裂、介在物、厚板等の形状寸法に関する諸量 x と積分変数 λ の積を便宜上大文字を用いて $\lambda x = X$ として表示するものとする。式 (1) と (3) による変位と応力に境界条件 (iii) と (iv) を適用すれば、 $D_i(\lambda) (i=1\sim 3)$ は $D_4(\lambda)$ によって次のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} \lambda D_1(\lambda) &= \{(1-2\nu)(1-\cosh 2H) - 2H^2\} \\ &\quad \times k(\lambda) D_4(\lambda) \\ \lambda D_2(\lambda) &= (1-2\nu) D_4(\lambda) \\ D_3(\lambda) &= (1-\cosh 2H) k(\lambda) D_4(\lambda) \\ k(\lambda) &= 1/(2H + \sinh 2H) \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

さらに、式 (4) を考慮して残りの境界条件 (i), (ii) を適用すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (w_z)_{z=0} &= x \int_0^\infty D_4(\lambda) J_0(R) d\lambda \\ &= \epsilon_0 (0 \leq r \leq d); = 0 \quad (c \leq r) \\ (\sigma_z)_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda f(\lambda) D_4(\lambda) J_0(R) d\lambda \\ &= 0 \quad (d < r < c) \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

ここで、 $x = (\nu - 1)/G$ であり、

$$f(\lambda) = \{\cosh 2H - 1 - 2H^2\} k(\lambda) \dots\dots (6)$$

したがって、本問題は式 (5) を解いて $D_4(\lambda)$ を決定する問題になるが、ここでは文献 (18) の解法を拡張して適用し、これを決定する。なお、以下の解析を容易にするため次の変数変換式を利用する。

$$\left. \begin{aligned} 2a &= c + d, 2b = c - d \\ r^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

いま、式 (5) の第1式より $(w_z)_{z=0}$ は $0 \leq r \leq d$ および $c \leq r$ とともに一定値になり、 $d < r < c$ では r のみの連続関数であることに着目して $D_4(\lambda)$ を x の関数 $F(x)$ を用いて次式によって与える。

$$\left. \begin{aligned} D_4(\lambda) &= \int_0^\pi F(x) J_1(\lambda q) dx \\ q^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos x \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

式 (8) を式 (5) の第1式に代入し、積分順序を変えれば次式を得る。

$$(w_z)_{z=0} = x \int_0^\pi F(x) H(q-r) dx / q \dots\dots (9)$$

ここで、 $H(q-r)$ はヘビサイドのステップ関数であ

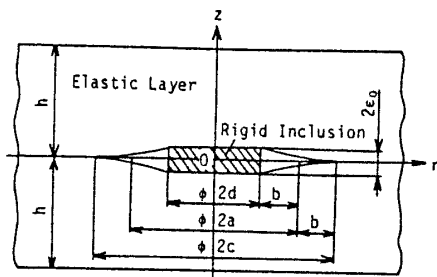


図1 円形き裂中の剛体介在物

り、式(7)、(8)のともに第2式より次の関係が得られる。

$$H(q-r) = \begin{cases} 1 & (r \leq d \leq q, d < r < q \leq c) \\ 0 & (q \leq c \leq r, d \leq q < r < c) \end{cases} \quad (10)$$

したがって、式(9)、(10)より任意の $F(x)$ に対して境界条件(i)が成立することから $F(x)$ を未知係数 $a'_n (n=0, 1, \dots)$ を含む次のようなフーリエ級数で表示する。

$$\pi F(x) = q \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \cos n\chi \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(9)~(11)より、 $(w_z)_{z=0}$ は次式で表示される。

$$(w_z)_{z=0} = \begin{cases} \left. \begin{aligned} & \chi a'_0 = \varepsilon_0 \quad (0 \leq r \leq d) \\ & \frac{\chi a'_0}{\pi} \left(\pi - \phi - \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \frac{\sin n\phi}{na'_0} \right) \\ & \quad (d < r < c) \end{aligned} \right\} \quad (12) \\ 0 \quad (c \leq r) \end{cases}$$

次いで、残りの境界条件(ii)を考慮するために式(11)を式(8)の第1式に代入し、次の関係式

$$\partial J_0(\lambda q) / \partial \lambda = -q J_1(\lambda q) \quad \dots\dots\dots (13)$$

および積分公式⁽¹⁹⁾を利用すれば

$$D_4(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} a'_n M_n(\lambda) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

$$M_n(\lambda) = \partial \{ J_n(A) J_n(B) \} / \partial \lambda \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(14)を式(5)の第2式に代入し、式(13)および

$$\partial \{ r J_1(R) \} / \partial r = R J_0(R) \quad \dots\dots\dots (16)$$

を考慮するとともに両辺を r で積分すれば、次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n \int_0^{\infty} f(\lambda) M_n(\lambda) \partial J_0(R) / \partial \lambda d\lambda = \alpha \quad (d \leq r \leq c) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 α は積分定数である。式(17)にゲーゲンパワアの加法定理⁽¹⁹⁾を適用すれば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n \int_0^{\infty} f(\lambda) M_n(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) M_m(\lambda) \times \cos m\phi d\lambda = \alpha \quad (0 \leq \phi \leq \pi) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 δ_{0m} はクロネッカデルタである。式(18)は任意の ϕ について成立する必要がある、 a'_n を

$$a'_n = \alpha a_n \quad (n=0, 1, \dots) \quad \dots\dots\dots (19)$$

と置き換えるとともに両辺の $\cos m\phi$ に関する係数を等置すれば、次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} f(\lambda) M_n(\lambda) M_m(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} \quad (m=0, 1, \dots) \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(12)、(19)より $\alpha = \varepsilon_0 / \chi a_0$ となり、 $D_4(\lambda)$ は次式で与えられる。

$$D_4(\lambda) = - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(\lambda) \quad \dots\dots\dots (21)$$

したがって、式(1)、(3)、(21)よりすべての変位や応力等が求められる。

3. き裂面の応力、応力拡大係数および応力特異性係数

き裂を含む面における変位や応力は式(1)、(3)および(21)より得られる結果において $z=0$ とおけば求められるが、数値計算の精度や簡略化を考慮してここでは特異項を分離する方法を用いた。なお、 $z=0$ に対しても容易に計算可能である。例えば、 $(\sigma_z)_{z=0}$ は $\beta = (ab)^{-1/2} / \pi$ として λ が十分大きい場合

$$\lambda M_n(\lambda) \rightarrow \beta \{ d \sin D - (-1)^n c \cos C \} \quad \dots\dots (22)$$

$$f(\lambda) \rightarrow 1$$

であることを考慮して次のように表示できる。

$$-(\sigma_z)_{z=0} / \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [f(\lambda) - 1] \lambda M_n(\lambda) \times J_0(R) d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [\lambda M_n(\lambda) + \beta \{ d \sin D - (-1)^n c \cos C \}] J_0(R) d\lambda - \frac{H(d-r)}{(d^2-r^2)^{1/2}} \times \beta d \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta c \frac{H(r-c)}{(r^2-c^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \dots\dots (23)$$

式(23)より $(\sigma_z)_{z=0}$ は介在物端部およびき裂縁とともに特異性を有する。そこで、これら応力特異性を評価するために接触問題等⁽¹²⁾⁽²⁰⁾で扱われている介在物端部での応力特異性係数 S とき裂縁での応力拡大係数 K_I を

$$S = \lim_{r \rightarrow d^-} \sqrt{2\pi c(d-r)} [\chi (\sigma_z)_{z=0} / \varepsilon_0] \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$K_I = \lim_{r \rightarrow c^+} \sqrt{2\pi c(r-c)} [-\chi (\sigma_z)_{z=0} / \varepsilon_0] \quad \dots\dots (25)$$

によって定義すれば、式(23)~(25)より次式を得る。

$$S = \gamma \sqrt{cd} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$K_I = \gamma c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 $\gamma = \beta \sqrt{\pi} / a_0$ である。

4. 数値解析

a_n を決定する場合、無限連立一次方程式(20)の係数を求める必要があり、文献(7)と同様にして直接数値積分する項とベッセル関数の漸近特性を考慮するとともに積分公式を利用する項に分離して計算を行った。

表1は $h/c=1$ において介在物とき裂の半径比 $\zeta (= d/c)$ が $\zeta=0.25, 0.5, 0.75$ とした場合に得られた係数 a_n を示したものである。 ζ が小さくなるにつれて収束は遅くなる傾向があるが、 $\zeta=0.25$ の場合でも22項を用いれば、応力特異性係数 S および応力拡大係数 K_I

は十分に収束することをあらかじめ確認した。以下の結果においてはこの種の問題で特に興味を有する無次元量 $\bar{w}_z (= w_z/\epsilon_0)$ と $\bar{\sigma}_z (= -\sigma_z/aa_0)$ に関連した結果について示すものとする。また、ポアソン比は $\nu=0.3$ とし、比較のために $h/c=\infty$ (無限体の場合に対応) の特別な場合の結果についても示した。

図2は板厚が $h/c=1$, 介在物とき裂の半径比が $\zeta=0.5$ の場合における \bar{w}_z の半径方向分布図である。き裂を含む厚板中央面において $(\bar{w}_z)_{z=0}$ は介在物 ($r \rightarrow d$

+) およびき裂縁 ($r \rightarrow c-$) でともにその半径方向こう配は無有限大になる。介在物中心部 ($r=0$) でいずれの z/h に対しても $(\bar{w}_z)_{z=0}$ は最大となり、 r が大きくなるとともに単調に減少するが、その減少のしかたは板中央面に近づくほど急激になる。

図3は $h/c=1, \zeta=0.5$ の場合における $\bar{\sigma}_z$ の分布図である。 $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ はそれぞれ介在物端部で負の、き裂縁で正の無有限大になって特異性を有する。板内部の中央面近傍において $\bar{\sigma}_z$ は介在物の影響を強く受けるが、表面に近づくほどその影響は減少して応力値は小さくなり、 $r/c \geq 1.7$ ではいずれの z/h に対しても介在物の影響はほぼ消失して $\bar{\sigma}_z \approx 0$ となる。また、き裂面を除く板内部 ($h > z > 0$) においていずれの z/h に対しても $r/c=0.8$ 近傍で $\bar{\sigma}_z$ の符号は変化し圧縮から引張りに転ずる。

図4は $\zeta=0.5$ として種々の板厚に対する $(\bar{w}_z)_{z=0}$ および $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ の半径方向分布図である。 $(\bar{w}_z)_{z=0}$ の半径方向こう配はいずれの h/c に対しても介在物端部およびき裂縁においてともに無有限大になる。板厚が $h/c \geq 2$ であれば $h/c=\infty$ の結果との差異は小さい。これに対して $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ はいずれの h/c の場合にも介在物端部とき裂縁とともに特異性を有し、介在物との接触部では圧縮、き裂縁より外側 ($r > c$) では引張応力になる。また、介在物接触部の $(\sigma_z)_{z=0}$ は板厚によって明白

表1 係数 $a_n (h/c=1)$

n	$\zeta=0.25$	$\zeta=0.5$	$\zeta=0.75$
0	6.93955277	3.43889117	1.90255619
1	7.30240819	1.91832160	0.50202020
2	4.11444544	0.51099223	0.04726343
3	2.55235206	0.18332615	0.00745882
4	1.56474090	0.06541914	0.00122102
5	0.94833669	0.02254458	0.00019100
6	0.57207716	0.00765564	0.00002889
7	0.34445050	0.00259415	0.00001478
8	0.20721641	0.00088170	
9	0.12462394	0.00031796	
10	0.07493217	0.00010717	
11	0.04508107	0.00006917	
12	0.02709814		
13	0.01635625		
14	0.00979487		
15	0.00602043		
16	0.00354636		
17	0.00236532		
18	0.00123598		
19	0.00110191		
20	0.00031733		
21	0.00077085		

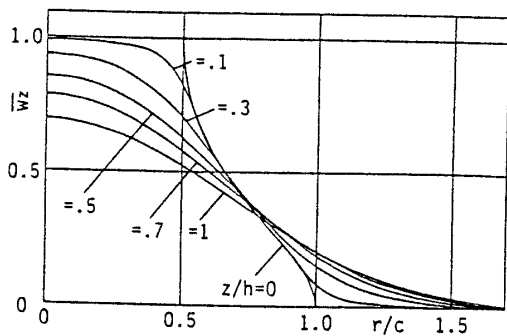


図2 \bar{w}_z の分布 ($h/c=1, \zeta=0.5$)

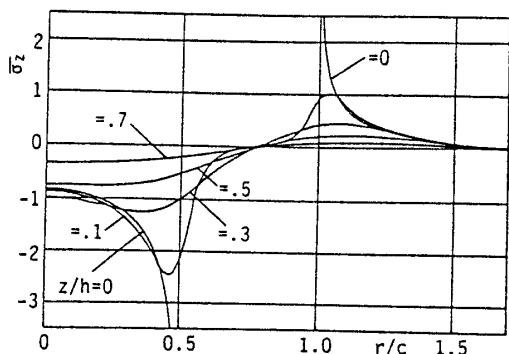


図3 $\bar{\sigma}_z$ の分布 ($h/c=1, \zeta=0.5$)

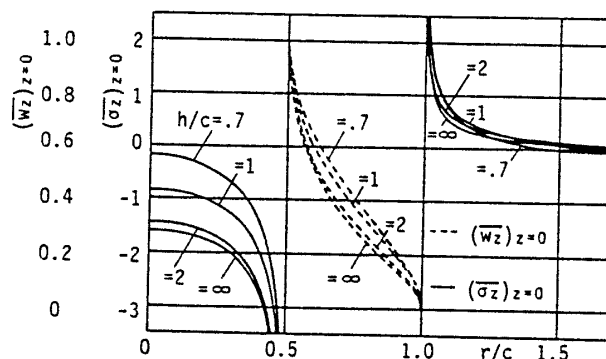


図4 $(\bar{w}_z)_{z=0}$ と $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ の分布 ($\zeta=0.5$)

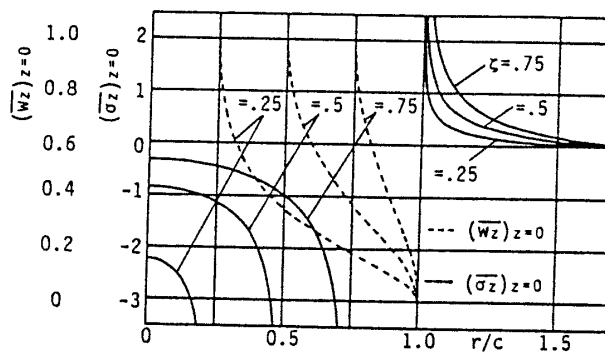


図5 $(\bar{w}_z)_{z=0}$ と $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ の分布 ($h/c=1$)

な差異を示すが、き裂外側領域では比較的差異は小さい。

図5は板厚を $h/c=1$ として $\zeta=0.25, 0.5, 0.75$ の場合における厚板中央面の $(\bar{w}_z)_{z=0}$ と $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ の分布図である。いずれの ζ に対しても $(\bar{w}_z)_{z=0}$ の半径方向こう配は $r \rightarrow d+$ および $r \rightarrow c-$ で無限大になる。一方、介在物との接触部における $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ は圧縮応力であり、介在物半径が小さいほど応力値は大きくなる。また、き裂外側領域においてはいずれの ζ に対しても $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ は引張応力であり、 $r \rightarrow c+$ で特異性を有して無限大になるが、 ζ が小さくなるほど急激に無限大に近づくとともに介在物半径が小さくなるほど介在物の接触応力に及ぼす影響は局部的になることがわかる。

図6は $\zeta=0.5$ として、種々の板厚に対する厚板表面上の $(\bar{w}_z)_{z=h}$ を示した図である。いずれの板厚の場合にもこの表面変位は介在物の中心部 ($r=0$) で最大になり、板が薄いほど大きい。また、いずれの板厚に対しても r の増加とともに単調に減少するが、板が薄いほどその減少割合は大きく、特に板厚が $h \leq c$ の場合では $1.5 < r/c < 2$ の領域において表面変位の符号は負に転じ、その後零に漸近する。板厚が $h \geq 5c$ では、零への漸近のし方は極めて遅くなる。

図7は式(26), (27)で与えられる応力特異性係数 S と応力拡大係数 K_I の ζ による変化を示した図である。 S は ζ の増加とともにいったん減少し、その後上昇する下に凸の曲線で与えられる。これに対して K_I は ζ とともに単調に増加する。なお、参考のために Selvadurai らの訂正式⁽²¹⁾に基づく無限体の結果についても示した。 ζ が小さい場合には本研究に良く一致するが、 ζ とともに差異は増加し、 $\zeta=0.8$ の場合には18.6%本結果のほうが大きくなる。これは、Selvadurai らが ζ による級数展開法を採用していることに起因しているものと思われる。

図8は $\zeta=0.5$ として S および K_I の板厚による変化を示した図であり、 S は板厚とともに増加し、 $h/c \geq 4$ では $h/c = \infty$ の特別な場合にほぼ一致する。これに対して K_I は板厚の増加とともに減少し、緩やかに $h/c = \infty$ の結果に漸近する。

5. 結 言

厚板中央面内に存在する円形き裂が円板上剛体介在物によって開口する場合を三次元弾性論に基づいて解析し、介在物接触部の圧力分布、き裂表面変位および応力拡大係数を明示するとともにこれらに及ぼす板厚や介在物の大きさの影響等を明らかにした。これらを要約すれば以下のとおりである。

(1) いずれの板厚の場合も介在物端部とき裂縁における $(\bar{w}_z)_{z=0}$ の半径方向こう配はともに無限大になる。また、 $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ は介在物との接触部で圧縮、き裂外側で引張応力になり、介在物接触部で板厚の影響をより強く受ける。

(2) $h/c=1, \zeta=0.5$ の場合、 $(\bar{\sigma}_z)_{z=0}$ に及ぼす介在物の影響は $r/c \geq 1.7$ でほぼ消失する。厚板内部 ($h > z > 0$) の $\bar{\sigma}_z$ は $r/c=0.8$ 近傍で符号は一様に変化して圧縮応力から引張応力に転ずる。

(3) 応力特異性係数 S は ζ の増加とともにいったん減少した後増加し、 S と ζ の関係は下に凸の曲線で与えられる。応力拡大係数 K_I は ζ とともに単調に増加する。 ζ が小さい場合には Selvadurai らの結果に良く一致するが、 $\zeta \geq 0.7$ ではその差は大きくなる。

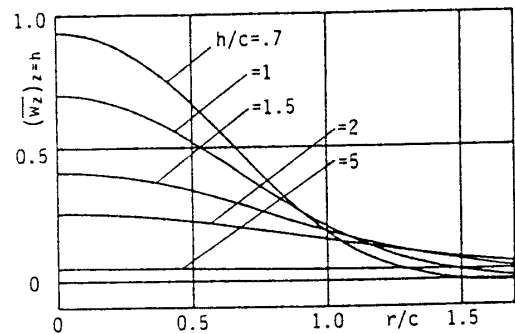


図6 $(\bar{w}_z)_{z=h}$ の分布 ($\zeta=0.5$)

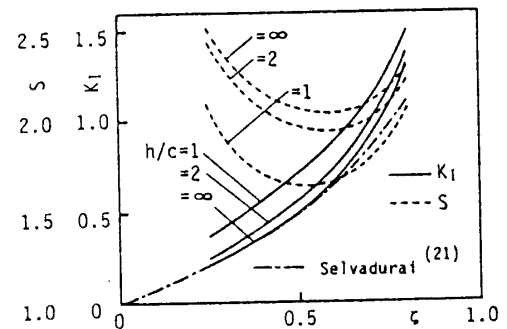


図7 S, K_I と ζ の関係

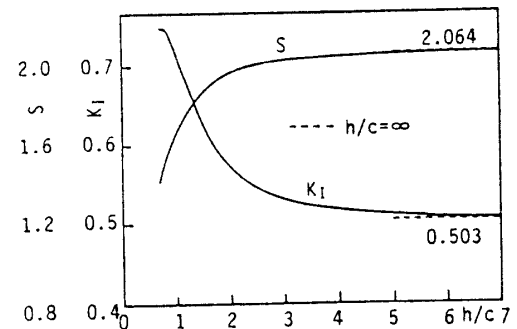


図8 S, K_I と h/c の関係 ($\zeta=0.5$)

文 献

- (1) Murakami, Y. 編, *Stress Intensity Factors Handbook*, (1987), Pergamon Press, Oxford.
- (2) Sneddon, I. N., *Proc. R. Soc. Lond.*, Ser. A, **187** (1946), 229.
- (3) Lowengrub, M., *Q. Appl. Math.*, **19-2** (1961), 119.
- (4) Collins, W. D., *Proc. R. Soc. Lond.*, Ser. A, **266** (1962), 359.
- (5) Moss, L. W. and Kobayashi, A. S., *Int. J. Fract. Mech.*, **7-1** (1971), 89.
- (6) 西谷・村上, 機講論, No. 720-10 (昭47), 25.
- (7) 渋谷・ほか2名, 機論, **40-339** (昭49), 2986.
- (8) 進藤, 機論, **47-413**, A (昭56), 36.
- (9) Selvadurai, A. P. S. and Singh, B. M., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **38** (1985), 233.
- (10) Dhawan, G. K., *Acta Mech.*, **21** (1975), 115.
- (11) Maiti, M., *Int. J. Fract.*, **15** (1979), 389.
- (12) 進藤, 機論, **46-402**, A (昭55), 150.
- (13) Maiti, M. and Paramgur, R., *Int. J. Fract.*, **18** (1982), 39.
- (14) Maiti, M. and Paramgur, R., *Eng. Fract. Mech.*, **13** (1980), 767.
- (15) Tsai, Y. M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **51-4** (1984), 811.
- (16) Selvadurai, A. P. S. and Singh, B. M., *Int. J. Fract.*, **25** (1984), 69.
- (17) Selvadurai, A. P. S., *Mechanics of Material Interfaces*, Elsevier, Amsterdam, (1986), 157.
- (18) 渋谷・ほか3名, 機論, **45-394**, A (昭54), 634.
- (19) 森口・ほか2名, 数学公式(III), (昭38), 岩波書店.
- (20) 野田・阿部, 機論, **49-444**, A (昭58), 952.
- (21) Selvadurai, A. P. S. and Singh, B. M., *Int. J. Fract.*, **29** (1985), R 19.

討 論

〔質問〕 長谷川 久夫〔明治大学工学部〕

き裂と介在物の接触問題のご研究, 興味深く拝読した。境界条件式(2)の(i)では, き裂面と介在物面は常に接触しているものと仮定しておられるが, 各部の寸法の組合せによっては, 介在物中央部では, 介在物面とき裂面の間に無接触の領域の生ずる可能性はないか。

〔回答〕 この種のき裂中の介在物を扱った問題^{(15)~(17)}では, 介在物はき裂長さ比べて十分薄く, 全表面が接触する条件下で解析がなされ, 本研究もこのような条件を仮定している。図4, 5より, 板厚とき裂半径の比(h/c)が小さくなるほど, また介在物とき裂の半径比($\zeta=d/c$)が大きくなるほど接触応力 $(\sigma_z)_{z=0, r<d}$ は小さくなる傾向が見られる。 $\zeta=0.5$ の場合には $h/c \leq 0.6$ において, $h/c=0.7$ の場合には $\zeta \geq 0.6$ においてそれぞれ介在物の中心($r=0$)近傍で $(\sigma_z)_{z=0}$ は正になり, ご指摘のような無接触領域が生ずると考えられる。その場合には, 別に定める境界条件のもとで本法を適用した解析が可能であると考えられるが, 今後の課題である。

〔質問〕 笠野 英秋〔拓殖大学工学部〕

次の三点についてご教示願いたい。

(1) 本問題と“実用材料における強度評価”との関

連性がよく理解できないが, 介在物によって開口するき裂の問題とは具体的にどのようなことを想定しているのか。

(2) 境界条件式(2)(i)に関して, $(w_z)_{z=0} = \varepsilon_0 (0 \leq r \leq d)$ と設定した場合, 理論的に考えうる $\zeta = d/c (0 \leq \zeta \leq 1)$ の範囲で, き裂と介在物界面の接触応力 $(\sigma_z)_{z=0, (0 \leq r \leq d)}$ が引張応力となる領域が発生する可能性はないか。

(3) 図3に関して, 任意の断面 $z/h = \text{const.}$ で z 方向の合力は零となると思うが, 数値的に確認できるか。

〔回答〕 (1) 実用材料中には介在物等のいわゆる不純物が含まれ, これを起点としたき裂の発生および進展が観察されている。このような場合のき裂挙動を明らかにすることは材料の強度評価に関連して重要と考えられる。このような観点から, 本研究は材料中の不純物を基点として発生したき裂を想定するとともにき裂中の介在物を近似的に剛体とみなして解析を行った。

(2) 長谷川氏への回答を参照願いたい。

(3) ご指摘の確認は原理的には本研究の計算法を利用して可能と考えているが, 実際に z 方向の合力については計算していない。