

粘弾性丸棒内のねじり波の伝ば*

田 辺 裕 治*¹, 前 川 一 郎*²
半 田 晋 一*³, 原 利 昭*⁴

The Propagation of Shear Wave in a Viscoelastic Rod

Yuji TANABE, Ichiro MAEKAWA,
Shinichi HANDA, and Toshiaki HARA

The impulsive response of a semi-infinite viscoelastic circular rod to impact torsion is analysed by employing the correspondence relation between linear elasticity and linear viscoelasticity. Supposing that the 3-element standard linear solid model can be applied to the behavior of the rod in shear, we study the influence of the loading condition at the struck end, i. e., the radial distribution of shear stress and rise time of the applied torque on the stress or strain-time history. Analyses are done by the Laplace transformation and the numerical inversion of it by the use of the FFT algorithm. The fluctuations of stress or strain caused by waves of high orders are large when the impulsive torque concentrates near the center of the struck end. With increase of the viscosity of the rod and the rise time of the applied torque, these fluctuations become negligibly small and, as a result, only a 1-dimensional shear wave propagates in the rod.

Key Words: Shock, Viscoelasticity, Correspondence Principle, Shear Wave, Laplace Transformation, FFT, Rise Time of Impact

1. 緒 言

機械構造物の衝撃強度評価の観点から、著者らは先に衝撃圧縮ないし衝撃ねじり負荷を受ける有限長棒の動的応力の評価式を一次元波動伝ばモデルから導出した⁽¹⁾。そして波の伝ばに伴う減衰と棒両端面における反射率を含めて表示した。しかしながらその有効性を検証する目的で行ったPMMA中実丸棒試験片の衝撃ねじり実験では波の減衰が検出できなかったため応力を過大評価する結果となった。この原因として、

(1) 中実丸棒の使用により生じた衝撃端面でのせん断応力の不均一分布に起因する高次モードの波の発生

(2) 波の伝ば距離に比較して短い区間で波頭の減衰を測定したことによる実験精度上の問題などが考えられる。したがってその評価式を実用に資するためには丸棒内を伝ばするねじり波の減衰特性について試験片形状も含めてさらに検討する必要がある

と考えられる。一方、PMMAを代表とする高分子材料は三要素モデルで表せる線形粘弾性体として取扱われることが多い⁽²⁾。そこで本研究では高分子材料を想定しその減衰に関する基礎的知見を得ることを目的として三要素標準線形固体の半無限長粘弾性丸棒を考え、その動的応答をラプラス変換法により解析した。解析は既知の動弾性問題のラプラス変換解⁽³⁾から対応原理⁽⁴⁾により動粘弾性問題のラプラス変換解を得た後、その逆変換をFFTを利用した数値ラプラス逆変換法⁽⁵⁾⁽⁶⁾により求める方法で行った。そして衝撃端面での負荷条件(せん断応力の半径方向分布とトルクの立上がり時間)が棒表面の応力とひずみに及ぼす影響について明らかにし、また一次元波動伝ば理論に基づく粘弾性特性の測定法⁽⁷⁾を中実丸棒に適用する際のひずみ波形の測定位置に関する指針を与えた。

2. ステップ関数状衝撃トルク
に対する動的応答

2・1 動粘弾性問題のラプラス変換解の誘導 図

1に示すような円柱座標系で表示される棒の端面にステップ関数状の衝撃トルクが作用する場合を考える。ただし時間 $t=0$ 以前に棒は無ひずみ、無応力状態で静止しているものとする。端面の境界条件を半径方向

* 平成元年9月22日 北陸信越支部信越地方講演会において講演, 原稿受付 平成元年2月9日。

*¹ 正員, 新潟大学大学院自然科学研究科(〒950-21 新潟市五ノ、嵐二の町8050)。

*² 正員, 東北大学工学部(〒980 仙台市荒巻字青葉)。

*³ 東北大学大学院。

*⁴ 正員, 新潟大学工学部。

の応力分布の不均一性を考慮して次のように与える。

$$(\tau_{r\theta})_{r=a} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$(\tau_{\theta z})_{z=0} = \tau_0 f(r) H(t) \dots\dots\dots (2)$$

ここで τ_0 , $f(r)$, $H(t)$ はそれぞれ応力の次元を有する定数, 端面に生ずる $\tau_{\theta z}$ の分布を与える r の任意関数, 単位ステップ関数である。いま棒を図2で示される三要素標準線形固体と考えるとその構成方程式は次のようになる。

$$\tau + \frac{k}{G\mu} \frac{\partial \tau}{\partial t} = G\gamma + \frac{1+k}{\mu} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \dots\dots\dots (3)$$

ここで τ , γ , t はそれぞれ応力, ひずみ, 時間である。また $k = G_2/G_1$, $G = G_1 G_2 / (G_1 + G_2)$, $\mu = (1+k)^2/c$ とおいた。式(1), (2)の境界条件に対応する動弾性問題の変位と応力が応力関数を用いて得られておりラプラス変換形で示せば次のようになる⁽³⁾。

$$\frac{G_e}{\tau_0} \bar{v}_\theta = -4A_0 \frac{r}{a} \frac{e^{-\alpha_2 z}}{\alpha_2 p} - \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n J_1(\lambda_n r) \times \frac{e^{-\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_2^2} z}}{\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_2^2} p} \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{\tau_0} = 4A_0 \frac{r}{a} \frac{e^{-\alpha_2 z}}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n J_1(\lambda_n r) \times \frac{e^{-\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_2^2} z}}{p} \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{\tau_0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n \lambda_n J_2(\lambda_n r) \frac{e^{-\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_2^2} z}}{\sqrt{\lambda_n^2 + \alpha_2^2} p} \dots\dots\dots (6)$$

ここで v_θ は円周方向変位であり, ρ , G_e をそれぞれ密度および横弾性係数として $\alpha_2 = p/c_2$, $c_2 = \sqrt{G_e/\rho}$, $\bar{F}(p) = \int_0^\infty F(t) e^{-pt} dt$ とおいた。また A_0, A_n は端面のせん断応力 $\tau_{\theta z}$ の分布関数 $f(r)$ のみによって決まる係数, J_ν は ν 次の第一種ベッセル関数, $\lambda_n a$ は $J_2(\lambda_n a) = 0$ ($0 < \lambda_1 a < \lambda_2 a < \dots$) の根である。したがって対応原理⁽⁴⁾により式(3)のラプラス変換から $p\bar{G}(p) = \bar{\tau}/\bar{\gamma}$ を求め, 式(4)~(6)中の G_e を $p\bar{G}(p)$ に置きかえれば本動粘弾性問題におけるひずみと応力のラプラス変換が次のように得られる。

$$\frac{G}{\tau_0} \bar{\gamma}_{\theta z} = \frac{G}{\tau_0} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} = (\bar{\gamma}_{\theta z})_0 + (\bar{\gamma}_{\theta z})_n \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{\theta z}}{\tau_0} = (\bar{\tau}_{\theta z})_0 + (\bar{\tau}_{\theta z})_n \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{r\theta}}{\tau_0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n J_2(\gamma_n \zeta) \frac{e^{-\sqrt{\bar{\Gamma}(p)} \xi}}{p \sqrt{\bar{m}(p)}} \dots\dots\dots (9)$$

ここで式(7), (8)の右辺第1項の添字0は一次元波に対応する0次の波, 第2項の添字nはn次の波を意味しており, 各項は次のように与えられる。

$$(\bar{\gamma}_{\theta z})_0 = 4A_0 \zeta \frac{\bar{g}(p) e^{-\sqrt{\bar{g}(p)} p \xi}}{p} \dots\dots\dots (10)$$

$$(\bar{\gamma}_{\theta z})_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n J_1(\gamma_n \zeta) \frac{\bar{g}(p) e^{-\sqrt{\bar{\Gamma}(p)} \xi}}{p} \dots\dots\dots (11)$$

$$(\bar{\tau}_{\theta z})_0 = 4A_0 \zeta \frac{e^{-\sqrt{\bar{g}(p)} p \xi}}{p} \dots\dots\dots (12)$$

$$(\bar{\tau}_{\theta z})_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n J_1(\gamma_n \zeta) \frac{e^{-\sqrt{\bar{\Gamma}(p)} \xi}}{p} \dots\dots\dots (13)$$

$$\bar{g}(p) = \frac{kp+1}{(1+k)p+1} \dots\dots\dots (14)$$

$$\bar{\Gamma}(p) = \left(\frac{\gamma_n}{\phi}\right)^2 + \frac{p^2(kp+1)}{(1+k)p+1} \dots\dots\dots (15)$$

$$\bar{m}(p) = 1 + \left(\frac{\phi}{\gamma_n}\right)^2 \frac{p^2(kp+1)}{(1+k)p+1} \dots\dots\dots (16)$$

ここでは長さ⁽⁵⁾と時間の基準単位を $1/\sqrt{\rho G} \mu$ と $1/\mu G$ ととり, 次の無次元化量を導入した。

$$\xi = \sqrt{\rho G} \mu z, \quad \phi = \sqrt{\rho G} \mu a, \quad \eta = \mu G t$$

また $\zeta = r/a$, $\gamma_n = \lambda_n a$, $\bar{F}(p) = \int_0^\infty F(\eta) e^{-p\eta} d\eta$ であり, A_0, A_n は次のように与えられる。

$$A_0 = \int_0^1 f(\zeta) \zeta^2 d\zeta \dots\dots\dots (17)$$

$$A_n = \frac{1}{J_1^2(\gamma_n)} \int_0^1 f(\zeta) J_1(\gamma_n \zeta) \zeta d\zeta \dots\dots\dots (18)$$

以下では丸棒表面のひずみと応力を考える。式(9)で表される $\tau_{r\theta}$ 成分は零となる。また弾性棒の場合と同様に式(18)から $f(\zeta) \propto \zeta$ ならば $A_n = 0$ となり, 端面のせん断応力が直線的に分布する場合にはひずみと応力はそれぞれ式(10), (12)で与えられる一次元波のみが伝ばする。そしてその逆変換は一次元の縦衝撃の

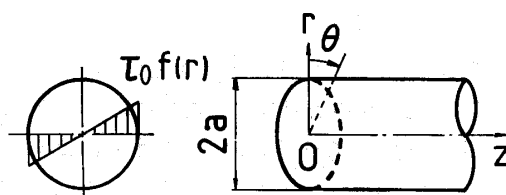


図1 端面に衝撃トルクを受ける丸棒とその座標系

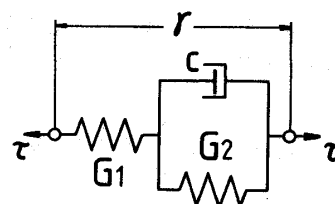


図2 三要素標準線形固体 (せん断)

場合の結果と同じ形になる⁽⁶⁾。次に高次の波を表す式(11), (13)の逆変換について考えてみる。両式は $(\phi/\gamma_1)^2 < 3k(1+k)$ の条件下では図3に示すように複素 p 平面上の $p = -1/(1+k)$, $-\alpha_n$, $-\beta_n \pm i\delta_n$ ($\alpha_n, \beta_n, \delta_n$ は実数)に分岐点を持っている。

ここで $p = -\alpha_n, -\beta_n \pm i\delta_n$ は

$$p^3 + q_0 p^2 + q_1 p + q_2 = 0$$

$$q_0 = 1/k, q_1 = (\gamma_n/\phi)^2(1+k)/k, q_2 = (\gamma_n/\phi)^2/k$$

の根である。したがって同図に示す反転積分路 Γ に沿う積分と合成則により逆変換が求められる。しかしながら分岐点 $p = -\beta_n \pm i\delta_n$ があるため計算が困難であり⁽⁶⁾、また右辺第1項の逆変換も含めて解が閉じた形で与えられない。そこで本研究では解を簡便に求めるためFFTを利用した数値ラプラス逆変換を用いることにした。

2.2 FFTによる数値ラプラス逆変換法⁽⁵⁾⁽⁶⁾

逆変換はその定義式を離散フーリエ変換形に書き換えた次式に高速フーリエ変換(FFT)を適用して行った。

$$F(h\Delta t) = \frac{e^{i\sigma h\Delta t}}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}_n e^{i2\pi n h/N} \dots\dots\dots (19)$$

$$(h=0, \dots, N-1)$$

$$\bar{F}_n = \bar{F}(\sigma + in\Delta\omega), \sigma = \text{const.}, i = \sqrt{-1},$$

$$\Delta t = T/N, \Delta\omega = 2\pi/T$$

ここで T は求める時間範囲である。また本研究では $\sigma = 6/T$, データ数は $N = 2^{13}$ とした。式(19)を式(11), (13)に直接適用すると解は不安定に振動する。そこで式(10)~(13)をラプラス変換の移動定理により時間軸に沿って $t = -X$ だけずらした次式のように変形してから逆変換した⁽¹⁰⁾。

$$F(t+X) = L^{-1}\{e^{pX}\bar{F}(p)\} \dots\dots\dots (20)$$

$$X = \sqrt{\frac{k}{1+k}} \frac{z}{a}$$

ここで $L^{-1}\{ \}$ はラプラス逆変換を表す。

2.3 数値結果と考察 端面に生ずるせん断応力の不均一分布が棒表面の応力とひずみに及ぼす影響について明らかにするため図4と以下の(I), (II)に示すような二つの応力の分布関数 $f(\zeta)$ について数値計算した⁽³⁾。いずれの場合もせん断応力の z 軸周りのモーメントは衝撃トルク T_0 にほぼ等しく、ここで T_0 はせん断応力が棒の中心軸からの距離に比例して分布する $f(\zeta) = \zeta$ の場合のモーメント $T_0 = \pi a^3 \omega / 2$ である。

(I) 外周付近にトルクを受ける場合[曲線(a)]:

$$f(\zeta) = 2\zeta^5$$

(II) 中心付近にトルクを受ける場合[曲線(b)]:

$$f(\zeta) = \zeta - \frac{J_1(\gamma_1 \zeta)}{J_1(\gamma_1)}$$

(I), (II)の場合に対して位置 $z = 4a$ における棒表面の応力変動を求めた結果を図5, 図6にそれぞれ示す。本研究では粘性的性質の強さの影響を明らかにするため、その強さを $\phi = 1.0$ の条件下で弱いほうから順に $k = \infty$ (弾性棒), 5.0, 1.0, 0.5と変えたそれぞれの場合について計算した。また式(12)に対応する一次元理論の結果を両図中に破線で示した。

まず本研究で用いた数値逆変換法の精度を確かめるため両図で弾性棒に相当する $k = \infty$ の結果と各図中○印で示した既知の解⁽³⁾とを比較したところ両者は有効数字約3けたが一致していた。

両図の応力はいずれも変動しているが、時間の経過とともに一次元理論の結果に漸近していくのがわかる。また k の値が小さいほど、すなわち粘性的性質が強いほど一次元理論との差は小さくなっている。次に同一の k 値に対する両図の結果を比較すると、図6は図5に比べて変動の振幅の減衰程度が小さくなっている。したがって棒の中心付近にトルクを受ける場合のほうが高次モードの波の影響が現れやすいと考えられる。そこで以下では図4の分布関数(b)の場合について考察する。

3. 衝撃トルクの立上りの影響

実際のトルクはステップ関数状には作用せずある有限の立上がり時間を有するものと考えられる。そこでこの立上がり時間が応力ないしひずみ変動に及ぼす影響を簡便に評価するため、図7および式(21)で示されるような指数関数状に増加する端面の応力に対する動的応答を2章と同様の方法により求めた。

$$(\tau_{\theta z})_{z=0} = \tau_0 f(\zeta)(1 - e^{-\eta t/\tau_0}) \dots\dots\dots (21)$$

ここで無次元化時間 τ_0 を、便宜上、立上がり時間と呼ぶことにする。図4の分布関数(b)に対して位置 $z = a$ と $z = 4a$ における棒表面の応力変動を $\tau_0 = 0.5, 1.0$ の場合について求めた結果を図8, 図9に示す。ま

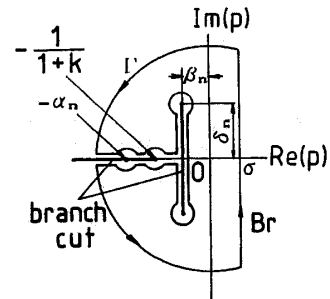


図3 反転積分路

た式(12)に対応する一次元理論の結果を各図中に破線で示した。図6との比較からトルクに立上がり時間がある場合にはステップ関数状に作用する場合よりも変動の振幅が小さくなるのがわかる。また両図から変動の周期は端面からの距離が増すと短くなるが、変動の振幅は端面からの距離および立上がり時間が大きいほどまた k 値が小さいほど小さくなる傾向にあるのがわかる。

図8, 図9に対応するひずみ変動を求めた結果を図10, 図11に示す。また式(10)に対応する一次元理論の結果を各図中に破線で示した。変動の全体的傾向は応力の場合と同様である。波形のごく立上がり初期を除けば一次元理論との差は図10(b)の $z=4a, t_0=0.5, k=5.0$ で最大約8%, 図11(b)の $z=4a, t_0=1.0, k=5.0$ で最大約5%である。したがって中実丸棒を使用してひずみの測定を行った場合でも、 $k=5.0$ 以下で $t_0=1.0$ 以上の衝撃トルクが作用するとすれば $z=4a$ 以上衝撃端から離れた位置で高次の波に起因する誤差は小さく5%以下であると考えられる。

実際にPMMA中実丸棒を用いて測定したひずみ波形例を図12に示す⁽¹¹⁾。同材の粘弾性定数を中空棒で得られている値⁽²⁾と同程度とすれば $k=4$ であり、また実測波形の立上がり時間は無次元化時間で約2となっていることから図12の測定位置で波はほぼ一次的に伝ばしていると考えられる。また逆に同ひずみ波形に対して一次元波動伝ば理論に基づく粘弾性定数推定法⁽⁷⁾を適用しても実用上問題ないと考えられる⁽¹¹⁾。

4. 結 論

三要素標準線形固体の半無限長粘弾性丸棒の衝撃ねじり応答をラプラス変換法とFFTを利用した数値逆変換法により解析した。その結果を要約すれば以下のようなになる。

(1) 一定のステップ関数状衝撃トルクが作用する場合に端面に生じるせん断応力の分布が棒表面の応力変動に及ぼす影響を調べた。

その結果、粘性的性質が強いほど一次元理論による結果との差は小さくなるが棒の中心付近にトルクが作用するほうが棒外周に作用するよりも変動の振幅の減衰程度が小さく高次モードの波の影響が現れやすいことがわかった。

(2) 指数関数状に増加するトルクが棒の中心付近に作用する場合の棒表面の応力とひずみ変動を調べた。

その結果、ステップ関数状にトルクが作用する場合に比べ応力ないしひずみの変動の振幅は小さくなっ

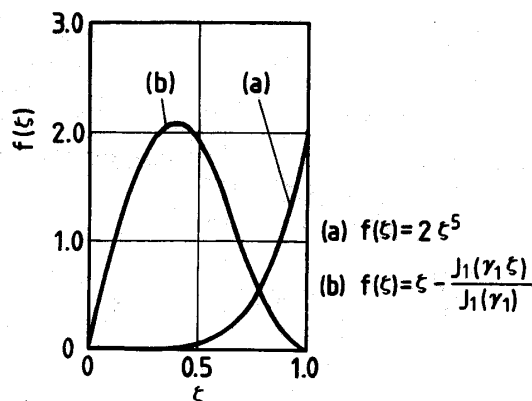


図4 衝撃端面における応力の分布関数

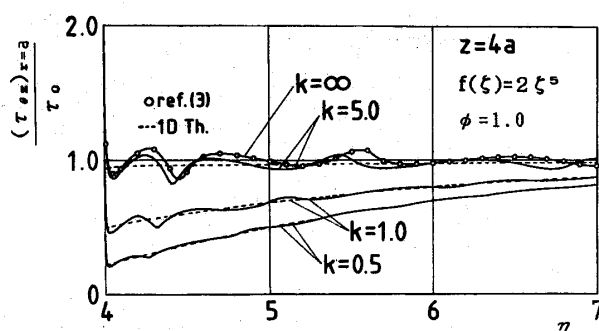


図5 棒外周付近にステップ関数状衝撃トルクを受ける場合の応力の時間変動

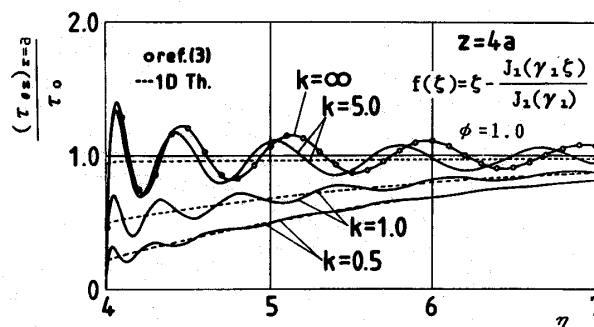


図6 棒中心付近にステップ関数状衝撃トルクを受ける場合の応力の時間変動

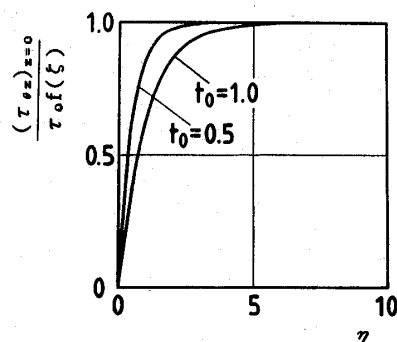
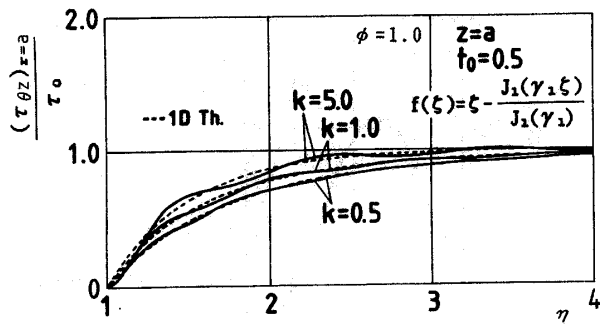
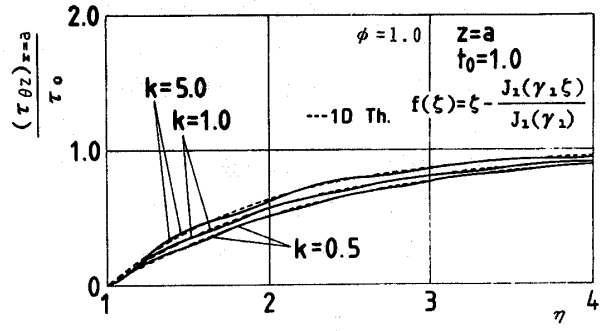


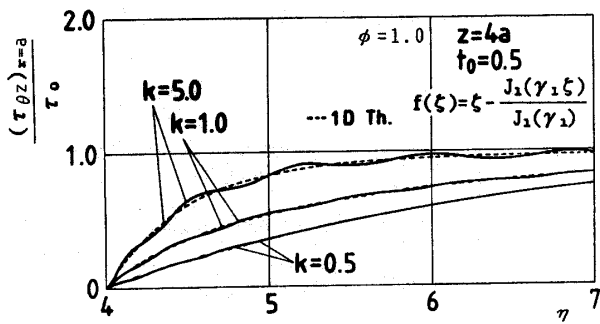
図7 指数関数状に増加する端面の作用応力



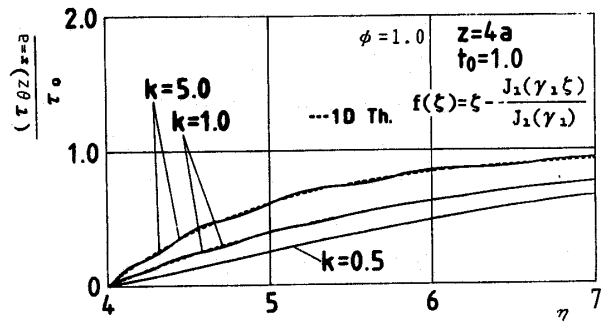
(a) $z=a$



(a) $z=a$



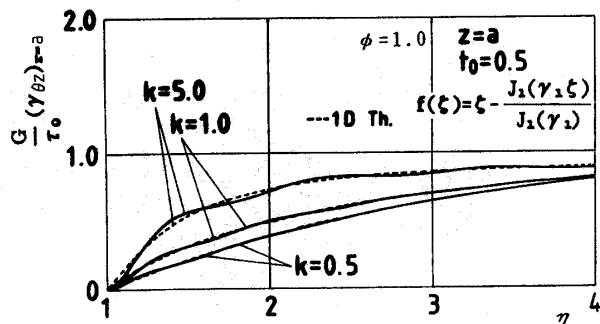
(b) $z=4a$



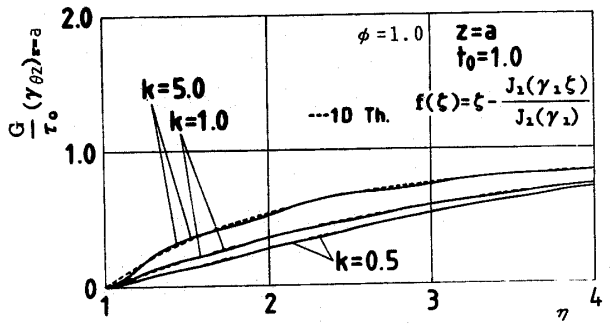
(b) $z=4a$

図 8 棒中心付近に指数関数状に増加するトルクを受ける場合の応力の時間変動 ($t_0=0.5$)

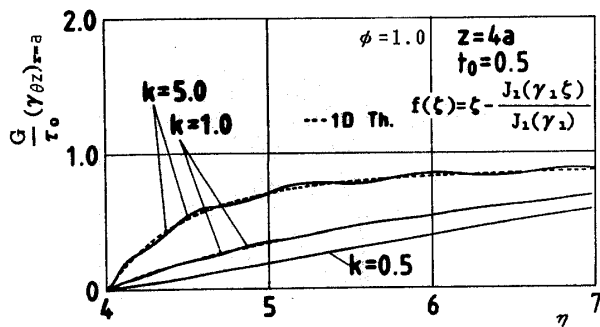
図 9 棒中心付近に指数関数状に増加するトルクを受ける場合の応力の時間変動 ($t_0=1.0$)



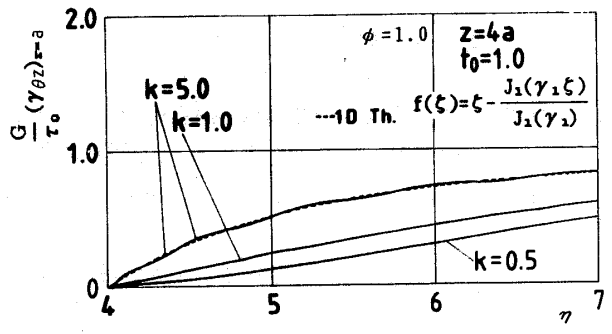
(a) $z=a$



(a) $z=a$



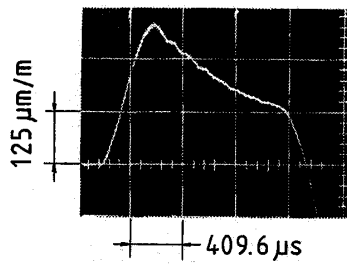
(b) $z=4a$



(b) $z=4a$

図 10 棒中心付近に指数関数状に増加するトルクを受ける場合のひずみの時間変動 ($t_0=0.5$)

図 11 棒中心付近に指数関数状に増加するトルクを受ける場合のひずみの時間変動 ($t_0=1.0$)



$z=6a$, $a=15\text{mm}$
Specimen length=1000mm

図 12 PMMA 中実丸棒におけるひずみ波形例⁽¹¹⁾

た。さらにその振幅は端面からの距離およびトルクの立上がり時間が大きいほどまた粘性的性質が強いほど小さくなり、一次元理論の結果により近づくことがわかった。そして PMMA を用いて測定したひずみ波形を例にとりねじり波がほぼ一次的に伝ばしていると

みなせることを示した。

本研究の一部は文部省科学研究補助金〔昭和 62 年度奨励研究(A)〕により行われた。また本研究の遂行にあたって、新潟大学工学部学生、清水洋志君に協力していただいた。ここに記して謝意を表する。

文 献

- (1) 前川・田辺・鈴木, 機論, 53-495, A (1987), 2056.
- (2) 例えば, 曾我部・都築, 機論, 53-486, A (1987), 348.
- (3) 竹内・松本・中原, 機論, 33-251, (1967), 1018.
- (4) 松本, 機論, 48-436, A (1982), 1475.
- (5) Krings, W. and Waller, H., *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 14 (1979), 1183.
- (6) 足立・宇治橋・松本, 機論, 51-467, A (1985), 1886.
- (7) 例えば, 曾我部・岸田・中川, 機論, 47-419, A (1981), 748.
- (8) 松本・中原・関野, 機論, 45-399, A (1979), 1409.
- (9) 台丸谷・内藤, 機論, 39-318, (1973), 516.
- (10) 細野, BASIC による高速ラプラス変換, (1984), 148, 共立出版.
- (11) 田辺・前川・半田, 機講論, No.880-7 (1988-11), 193.