

PMMA丸棒内のねじり波の減衰*

田辺裕治^{*1}, 前川一郎^{*2}
半田晋一^{*3}, 原利昭^{*1}

The Attenuation of Torsional Strain Wave in a PMMA Rod

Yuji TANABE, Ichiro MAEKAWA,
Shinichi HANDA, and Toshiaki HARA

In order to clarify the strain attenuation during shear wave propagation, impact torsion experiments are carried out using a PMMA rod specimen. The strain pulses measured by strain gages are complicated due to the superposition of many reflected and transmitted waves from the supported end of the specimen. To obtain data from such pulses for determining a viscoelastic model, a method which modifies the pulse form is developed taking into account wave propagation behavior in the experimental system. From Fourier components of the modified pulses, complex compliances and viscoelastic constants are evaluated assuming that the three-element standard linear solid model can be applied to the specimen. The attenuation of shear strain with propagation distance is predicted by the one-dimensional viscoelastic wave propagation theory. As a result, predicted values of shear strain agree well with experimental ones.

Key Words: Shock, Viscoelasticity, PMMA, Impact Torsion, Strain Wave, Fourier Analysis, Attenuation, One-dimensional Wave Propagation Theory

1. 緒言

著者らは先に衝撃圧縮ないし衝撃ねじり負荷を受ける有限長棒の動的応力の評価式を波の伝ば過程における減衰と棒両端面における反射率とを考慮した一次元波動伝ばモデルから導いた⁽¹⁾。また同時にその有効性を確かめるためにPMMA中実丸棒を供試材としてひずみ波形の測定実験を行った。しかし衝撃ねじりにおいては波の減衰が検出できず、理論波形の最大値は実測値のその約1.3倍となった。そこで本研究では、PMMA丸棒内を伝ばするねじりひずみ波の減衰特性を明らかにするため前報と同様の衝撃ねじり実験を行ってひずみ波形を測定し、そのフーリエ周波数解析から粘弾性モデルを決定する⁽²⁾ことを試みた。この際測定される波形には試験片支持端面からの反射波や透過波が重畳するのでこれらの影響をなくして粘弾性特性が決定できるような波形データ処理法を検討するとともに、PMMAを三要素標準線形固体として粘弾性定数を求めた。そして得られた粘弾性特性と実験装置系

内の波動伝ば挙動を考慮してねじり波の伝ばに伴う減衰を予測し、実測値と比較検討した。

2. 試験片および実験装置

実験装置と測定系の概略を図1に示す。試験片には外径30mm、長さ1mの市販のPMMA中実丸棒を用いた。これをエポキシ系接着剤により鋼製の回転翼に接合した後、鋼製のベッド上に水平に設置した。回転翼は2個の玉軸受で支持し試験片に不要な曲げ荷重が加わるのを防いだ。試験片の他端はすべり軸受により支持し軸周りに自由に回転できるようにした。衝撃トルクは回転翼のピンに外径25mm、長さ500mmの軟鋼製の丸棒を自落落下させて与えた。そして回転翼端から距離 z の位置にあるひずみゲージにより測定した波形信号をプリアンプで増幅しトランジェントメモリに記録した後、マイクロコンピュータに転送して計算処理を行った。実験はすべて20°C室温下で行った。試験片の静的Young率 E 、密度 ρ はそれぞれ

$$E=2.94 \text{ GPa}, \rho=1.18 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

である。

3. 実験結果および考察

3.1 衝撃ねじりひずみ波形の測定 $z=100, 500$

* 平成元年10月15日 第67期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成元年3月6日。

*1 正員、新潟大学工学部(〒950-21 新潟市五十嵐二の町8050)。

*2 正員、東北大学工学部(〒980 仙台市荒巻字青葉)。

*3 東北大学大学院。

mmで測定されたひずみ波形例を図2(a), (b)にそれぞれ示す。両波形はいずれも最初ある立上がり時間を持って単調に増加し、最大点を通過して徐々に減少する傾向にある。また図2(b)のほうが図2(a)に比べて波形の最大値は小さく最大点までのひずみの増加速度も小さくなっていて減衰および分散の影響が現れているのがわかる。しかし波形の持続時間が両者で異なっていることから、単一のパルスが試験片内を伝ばしているのではなくいくつかの波の重畳によってこれらが構成されているものと考えられる。したがってこれらの波形のままでは単一パルスが伝ばするとして粘弾性定数を決定する方法⁽²⁾が直接適用できないので、なんらかの前処理が必要となる。そこで一次元波動伝ば理論(付録参照)により図1に示した実験装置系内の波動伝ば挙動を考慮した場合の理論波形を求め、その構成成分について検討してみた。簡単のために試験片を弾性棒と仮定し、単位応力 $\tau_0=1$ が入射する場合の応力 τ の時間変動を計算した結果が図3である。図2(a), (b)と図3との比較から実測ひずみ波形の最大点通過後の減少は回転翼から試験片への透過波に起因し、また波形の打ち切りは試験片の自由端で反射した波が到着した時点で生じたものであることがわかる。このことを図4に模式的に示す。同図中a点が透過波の到着(時刻 t_a)、b点が反射波の到着(時刻 t_b)を表す。また波形の持続時間 T は式(1)で与えられる。

$$T = \frac{2(L-z)}{c_p} \dots \dots \dots (1)$$

ここで L , c_p はそれぞれ試験片長さおよび粘弾性波の伝ば速度である。

3.2 ひずみ波形の補正 反射波や透過波が重畳している図2(a), (b)の波形のフーリエ周波数解析から粘弾性定数を求める⁽²⁾ために以下の波形データ処理を施した。まず、反射波による波形の打ち切りが振幅スペクトルに及ぼす影響を取り除くために図2(b)の波形に対して反射波が到着した時刻のひずみをオフセット値として原波形から差し引いた。次に図2(a)に対してはオフセット後の図2(a), (b)の両波形の振幅スペクトルが周波数 $f=0$ kHzで等しい値になるようにオフセットをとった。この操作は波形の面積を一定に保つことに相当し、PMMAを三要素モデルで表せる線形粘弾性固体⁽³⁾として粘弾性定数を決定するための処理である。続いて位相スペクトルを得る必要上、式(1)の T の実測値から c_p を求めて測定点間の距離を波が伝ばするのに要する時間を算出し、オフセット後の図2(b)の波形をその時間分だけ時間軸に沿

って移動させた。以上の波形処理手順の流れを図5に示す。

3.3 粘弾性定数の決定 $z=100, 500$ mmで測定したひずみ波形に前節の方法を適用して振幅ならびに位相スペクトルを求め、複素コンプライアンスの実数部 J_1 と虚数部 J_2 を算出した結果を図6に示す。同図で $f \approx 2$ kHzを超えると J_1, J_2 が急激に減少するのは

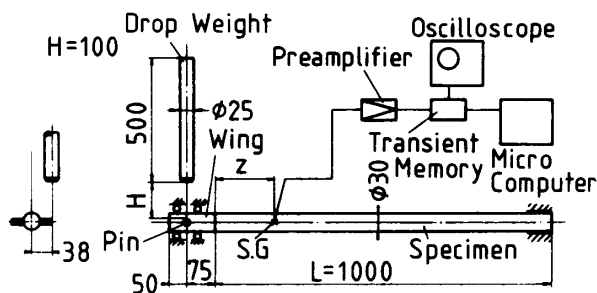
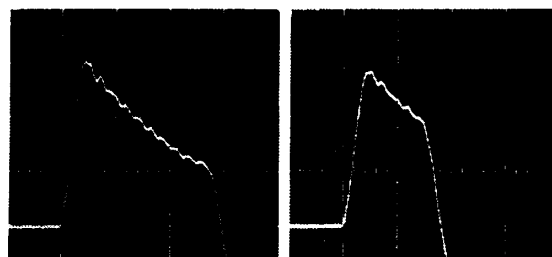


図1 実験装置および測定系



(a) $z=100$ mm (b) $z=500$ mm

縦軸: $156 \mu\text{m}/\text{m}/\text{div}$, 横軸: $0.4 \text{ ms}/\text{div}$

図2 測定ひずみ波形例

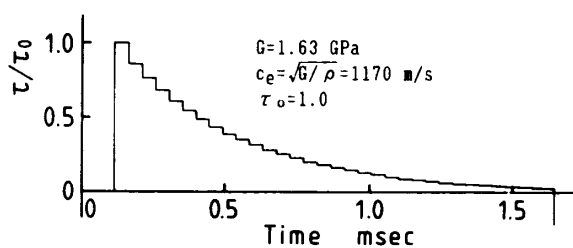


図3 応力波形の解析結果($z=100$ mm)

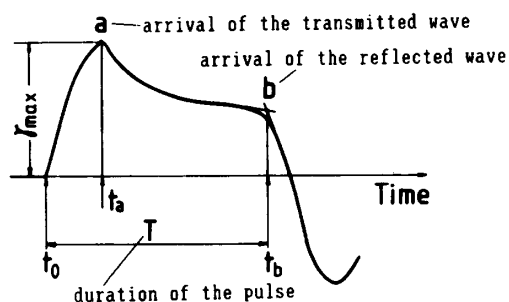


図4 ひずみ波形(模式図)

波形の持続時間が比較的長く振幅スペクトルに2 kHz以上の成分がほとんど含まれないためである。そして図6の約2 kHzまでの結果が三要素固体モデルの特性⁽³⁾に近い。一方、試験片が図6中に示す同モデルで表せるとすれば各粘弾性定数 G_1, G_2, c と J_1, J_2 の関係は式(2), (3)で与えられる。

$$J_1(\omega) = \frac{1}{G_1} + \frac{G_2}{G_2^2 + (\omega c)^2} \dots\dots\dots (2)$$

$$J_2(\omega) = \frac{\omega c}{G_2^2 + (\omega c)^2} \dots\dots\dots (3)$$

ここで ω は角周波数 $\omega = 2\pi f$ である。図6で f が約2 kHzまでのデータと上の関係式からBland-Lee法⁽⁴⁾により各定数を求めた結果、以下の値が得られた。

$$G_1 = 2.25 \text{ GPa}, G_2 = 8.75 \text{ GPa}, c = 0.511 \text{ MPa}\cdot\text{s}$$

これらの値と式(2), (3)による粘弾性モデルの予測値を図6中に実線で示した。また各定数は他の文献値⁽⁵⁾とほぼ等しく、粘弾性波の伝ば速度についても $c_p = \sqrt{G_1/\rho} \approx 1380 \text{ m/s}$ となり、図2のひずみ波形から求めた実測値 1350 m/s にほぼ等しい。したがって前節で述べた方法によって波形データ処理を行っても有効な粘弾性モデルが決定できるといえよう。

3.4 減衰特性の推定 前節の粘弾性定数を用いて位置 z におけるひずみの最大値 γ_{\max} を推定する。 $z = 100 \text{ mm}$ における実測ひずみ波形の立上がり部分をランプ状波形で近似して境界条件とし、一次元波動伝ば理論⁽⁶⁾に基づいて各位置におけるひずみを計算した結果を実測値とともに図7に示す。各波形の立上がり部分の実測値と理論値は良く一致しているのがわかる。次に、図4で示したように各位置に衝撃端からの

最初の透過波が到着する時刻のひずみとその位置における最大ひずみを与えると考えられる。そこで図7の $z = 100 \text{ mm}$ の実測ひずみ波形からその時刻 t_a を読み取り、各理論波形の立上がりから t_a 後の時刻におけるひずみ γ_{\max} と位置 z との関係性を求めた。その結果を前報と同じ形の減衰関数⁽¹⁾として表せば式(4)のようになる。

$$\gamma_{\max}/\gamma_0 = C \exp(-\alpha z) \dots\dots\dots (4)$$

$$C = 1.02, \alpha = 0.168 \text{ m}^{-1}$$

ここで γ_0 は $z = 100 \text{ mm}$ における最大ひずみである。式(4)による予測値と実測値をともに示すと図8のようになり、両者は良く一致しているのがわかる。

以上の減衰特性の導出過程からわかるように有限寸法の物体内の波の減衰は材質のみならず波の伝ば挙動によっても影響を受けるといえよう。

4. 結 言

以上の結果をまとめると次のようになる。

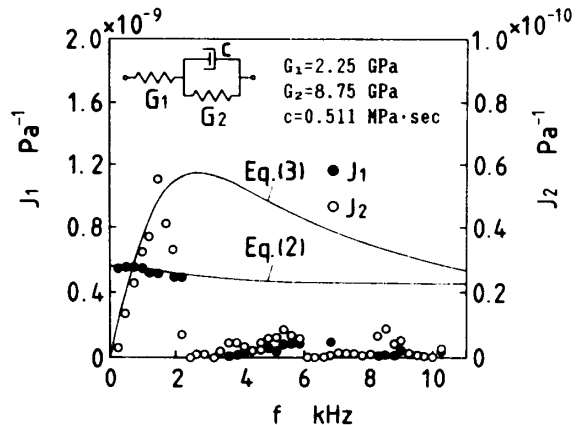


図6 複素コンプライアンス

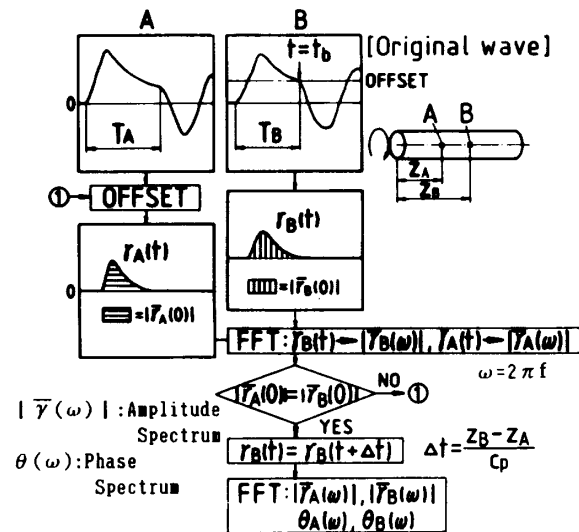


図5 波形処理手順

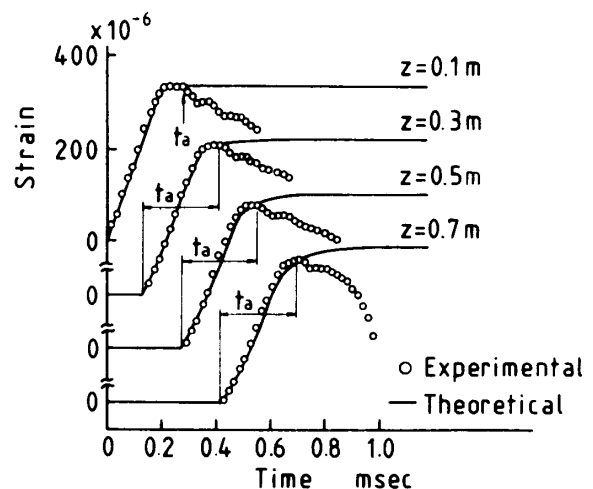


図7 伝ば距離に伴うひずみ波形の変化

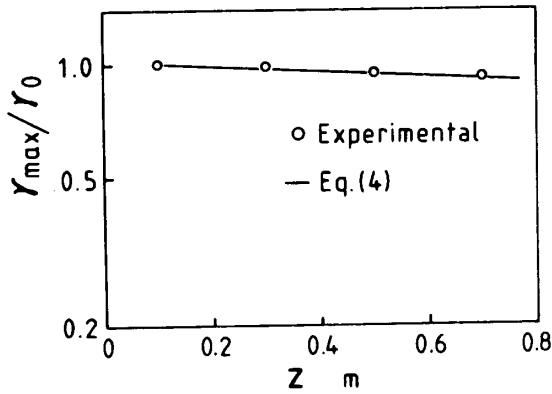


図 8 伝ば距離と最大ひずみの関係

(1) 反射波や透過波が重畳しているひずみ波形から粘弾性定数を決定する方法について検討し、有効な値を得た。

(2) (1)の粘弾性定数を用いてねじり波の減衰特性を推定した。実験装置系内の波動伝ば挙動を考慮すればその特性は実測値と良く一致することを示した。

本研究の一部は文部省科学研究補助金[昭和62年度奨励研究(A)]により行われた。また本研究の遂行にあたって、新潟大学工学部学生清水洋志君に協力していただいた。ここに記して謝意を表する。

付 録

一次元波動伝ば理論による応力波形の計算：

図9に示すように弾性棒IがIIに衝突する場合を考える。各棒を長さ Δl の要素に分割し、各要素の中点における応力の時間変動を計算する。いま第 n 要素の時刻 $t(t > 0)$ における応力を $s_n(t)$ と表せばそれは式(5)で与えられる。

$$s_n(t) = s_n^L(t) + s_n^R(t) + s_n(t - \Delta t) \dots \dots \dots (5)$$

ここで $\Delta t = \Delta l / c_e$, c_e は弾性波の伝ば速度である。また $s_n^L(t)$ と $s_n^R(t)$ は時刻 t で第 n 要素中をLからR方向、RからL方向へそれぞれ伝ばする波を表しており、式(6)、(7)で与えられる。

$$s_n^L(t) = \alpha_n^L s_n^R(t - \Delta t) + \beta_{n-1}^R s_{n-1}^L(t - \Delta t) \dots \dots \dots (6)$$

$$s_n^R(t) = \alpha_n^R s_n^L(t - \Delta t) + \beta_{n+1}^L s_{n+1}^R(t - \Delta t) \dots \dots \dots (7)$$

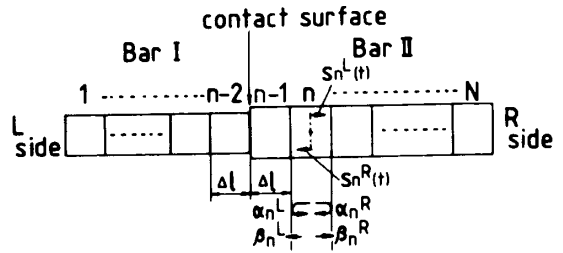


図 9 波動の一次元伝ばモデル

ここで α_n^L, β_n^L はそれぞれ第 n 要素L側の面の反射率、透過率を表し、 α_n^R, β_n^R はそれぞれR側の面のそれを表す。初期条件はL方向、R方向へ伝ばする波に分けて与え、それぞれ式(8)、(9)で表される。

$$s_n^L(0) = s_{n0}^L \dots \dots \dots (8)$$

$$s_n^R(0) = s_{n0}^R \dots \dots \dots (9)$$

本研究では図1を図9のモデルに置き換えて計算する。すなわち、図9の棒Iを落下棒、棒IIを回転翼と試験片の接合体と考える。モデル化にあたっては、図1の回転翼左端からピンまでの部分はその影響が小さいとして無視し、また回転翼と試験片間の接着層の影響も小さく棒II内では波は一次元的に伝ばすると考える。そして試験片に最初に応力が入射した時刻を時間の原点にとり、その入射応力を $\omega = 1$ として式(5)～(9)により計算した結果が図3である。なお、試験片は剛性率が $G = 1.63 \text{ GPa}$ の弾性棒とし、各要素側面および棒I、IIの接触面における反射率、透過率は衝撃ねじりに対して得られている結果⁽⁷⁾⁽⁸⁾を用いた。また2本の棒は接触面の要素(図9では第 $n-2$ 要素、第 $n-1$ 要素)の応力の符号が同時に反転した時に離れるとして計算した。

文 献

- (1) 前川・田辺・鈴木, 機論, 53-495, A (1987), 2056.
- (2) 曾我部・岸田・中川, 機論, 47-419, A (1981), 748.
- (3) 曾我部・都築, 機論, 51-472, A (1985), 2738.
- (4) Bland, D. R. and Lee, E. H., *J. Appl. Mech.*, 23-9 (1956), 416.
- (5) 曾我部・都築・山本, 機論, 53-486, A (1987), 348.
- (6) 田辺・前川・半田, 機論, No. 880-7 (1988-11), 195.
- (7) 竹内・松本・中原, 機論, 33-251 (1967), 1018.
- (8) 茶谷・放生, 機論, 44-381 (1978), 1445.