

二重周期弾性場の有限要素表面波分散解析

FE-Based Surface Elastic Wave Analysis of a Two-Dimensional Periodic Half-Space

阿部和久*・荒木聡秀**・紅露一寛***

Kazuhisa ABE, Toshihide ARAKI and Kazuhiro KORO

*正会員 工博 新潟大学教授 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

**学生会員 学(工) 新潟大学大学院博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

***正会員 博(工) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

This paper presents a numerical method for surface elastic waves in a half-space possessing a two-dimensional periodicity. The solution is expressed by plane waves in the vertical direction, while it is approximated by finite elements in the horizontal plane. By virtue of the Bloch's theorem, the problem is reduced to equations of motion in a unit cell. The vertical wavenumbers satisfying the equations in the unit cell are determined by solving an eigenvalue problem with respect to the wavenumbers. As numerical examples, periodic arrays of piles embedded in a ground are analyzed. In the analyses piles made of concrete and a soft material are considered with arrangements given by the square and the triangular honeycomb lattices. Under these conditions, the influences of the stiffness and the lattice pattern of piles on the band structure are investigated.

Key Words : surface elastic wave, periodic structure, FEM, array of piles

1. はじめに

複合材料は単体の材料にはない様々な力学特性を有しており、近年種々の工学分野においてその活用が図られている。動的な特性に関して見ると、波動モードが分散性を持ち、さらにストップバンドと呼ばれる波動が伝播しない周波数帯が存在することが知られており、その性質を利用した導波路や遮蔽材などの開発が行われている。より優れた波動透過(遮蔽)特性を有する複合材料の設計には、バンド構造の適切な評価が重要となる。複合材料内の介在物が周期的に配置されている場合、複合材中を伝播する波動モードのバンド構造は、その周期場を構成する最小基本単位であるユニットセルに関する固有値問題に帰着して比較的容易に求めることができ、これまでに様々な解法に基づく多くの解析例が報告されている^{1),2),3)}。

一方、自由表面を有する半無限周期場を対象とする場合、境界条件が付加されるため、上述の様な固有値問題に基づく効率的解法に依ることができず、表面波の分散解析は無限周期構造に比べ実施例が少ない。Boudoutiら⁴⁾および Aono & Tamura⁵⁾は、自由表面に平行な周期層を有する2次元半無限場の表面波モードと共振モード(擬表面波⁶⁾)とについて調べている。

また、Djafari-Riuhaniら⁷⁾や、Wang⁸⁾らは、自由表面に対して垂直方向に周期層が伸びている二次元半無限場を対象に、Rayleigh波の解析を行っている。さらに、Tanaka & Tamura⁹⁾は、三次元半無限場の自由表面内に二重周期性を有し、深さ方向に一樣な異方弾性場を対象に、Rayleigh波や擬表面波の分散特性について調べている。これらの解析では、解を深さ方向と表面に平行な方向とにそれぞれ平面波展開する解法が採られて

いる。なお、文献8)では層毎に解を平面波展開し、その下で運動方程式を満たすように深さ方向の波数を決定している。この場合、深さ方向の波数が層毎に異なる値を持ち、そのため層境界での連続条件が満たされず、解法は不完全なものとなっている。これに対し、文献7)ではユニットセル全体でFourier展開を適用し、連続条件が自動的に満たされる様に解を構成している。また、深さ方向の波数の決定に際し、変位ベクトル成分に変数変換を施すことで当該波数に関する固有値問題を導出している点が興味深い。文献9)では、この文献7)の技法を踏襲し、それを3次元問題に拡張した解法を用いている。

また著者ら^{10),11)}は、二次元半無限場の面内に二重周期性を有する構造を対象に、有限要素法に基づく解法を構成し、Rayleigh波タイプの表面波の分散解析を行った。

上に挙げた文献では、半導体素子や圧電複合材などの工業製品が主な解析対象となっている。一方、土木工学分野における関連した事例として、地中にドレーン柱を三角形ハニカム状に配置した防振壁¹²⁾や、直交格子状配置下でのPC柱列防振壁¹³⁾などの適用が試みられている。また、杭を一列に配置した防振壁については多くの研究が行われている^{14),15),16)}。なお、これらの検討では、施工性や経済性の理由から防振壁や防振溝の代わりに柱列を用いることが提案されている。周期状の配列を採用している文献13)においても、打設深さに関しては議論されているものの、周期場が有するバンド構造に着目した検討まではなされていない。しかし、二次元面内波動の場合を対象とした解析では、比較的少ない周期層数下でも無限周期場に匹敵する遮蔽特性が確認されており¹⁷⁾、柱列防振壁においても、周期場における表面波のバンド特性に基づいた検討は有用な知見を与え得るものと思われる。

そこで本研究では、周期配置された柱列への適用を

† Dedicated to the memory of Prof. Takeshi TAMURA

‡ Dedicated to the memory of Prof. Takuo FUKUI

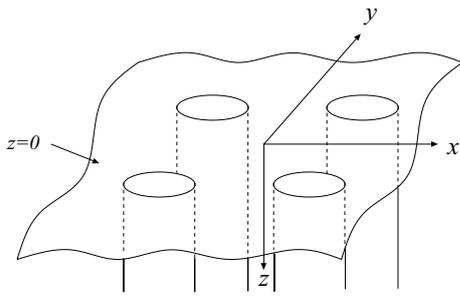


図-1 二重周期性を有する半無限場

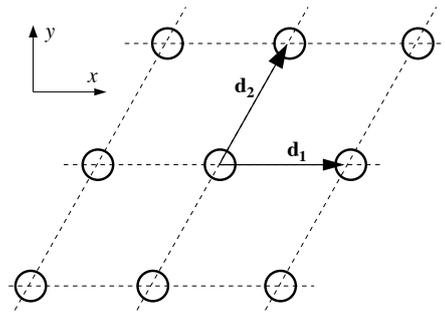


図-2 二次元周期場と基本ベクトル

念頭に、自由表面内に二重周期構造を有する三次元半無限場の表面波分散解析を試みる。なお文献9)の解法では、上述のように自由表面内に関して平面波展開法^{18),19)}を適用している。この場合、剛性などの物性値の分布も含め Fourier 級数展開されることとなり、分散曲線を適切に求めるために必要となる展開項数が少なく抑えられ、計算の効率化を図ることができる。しかしその一方、母材と介在物との境界部におけるひずみの不連続性までは十分に再現できない⁷⁾。そのため本研究では、(x,y) 面内に対して解を有限要素により離散近似する解法を構成し、この点に関する改善を試みる。一方、深さ方向については文献9)と同様に波数展開を採用する。これにより有限要素による離散化は、表面内に展開された周期場の二次元ユニットセルに関するのみ実施すれば良いこととなる。

以下では、まず具体的解法について述べる。次に、適用例として地盤中に配置されたコンクリート柱やドレーン柱を想定した解析を行い、柱材の剛性や周期配列パターンの違いが分散曲線のバンド特性に及ぼす影響などについて考察する。

2. 解法の構成

2.1 対象とする問題

本研究では図-1に示す様に、自由表面内に介在物が周期的に配置され、深さ方向に一樣な半無限場を対象とする。なお、x,y座標は自由表面内にとり、z座標は自由表面を原点として深さ方向にとる。介在物の断面形状は任意であるが、図-2の様に(x,y)面内の2つの基本ベクトル $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ により与えられる格子点上に周期的に配置されているものとする。また、母材と介在物は何れも均質な弾性体とし、それらの結合面は完全に付着しており、剥離や滑り等は生じないものとする。

2.2 解の構成

二重周期性を規定するベクトル $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ に関し、定常波動解 \mathbf{u} は次式で与えられる Bloch の定理²⁰⁾をみたとす。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + n_j \mathbf{d}_j) = e^{-ik \cdot n_j \mathbf{d}_j} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (n_j \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、 \mathbf{k} は (x,y) 面内の波数ベクトルであり、繰返し指標は総和規約に従うものとする。

式(1)より、図-3に示した二次元ユニットセルの互いに向き合う境界上の点 (i, i') と (j, j') とに対して、次

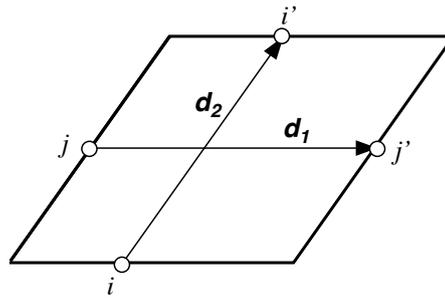


図-3 二次元ユニットセルとその境界点

の関係が成り立つ。

$$\mathbf{u}_{i'} = e^{-ik \cdot \mathbf{d}_2} \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_{j'} = e^{-ik \cdot \mathbf{d}_1} \mathbf{u}_j \quad (2)$$

なお、本研究における解析領域は、図-3を断面に持つ半無限部分領域により与えられる。

以上より、当該周期場の定常解は、式(2)の境界条件の下で、1ユニットセル内の動弾性問題に帰着して求めることができる。

式(2)を満たすユニットセル内の解を次式の様に構成する。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = [\mathbf{N}(\bar{\mathbf{r}})]\{\mathbf{U}\}e^{-i(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{r}} + \beta z)} \quad (3)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{r}} = (x, y)$ 、 $[\mathbf{N}(\bar{\mathbf{r}})]$ は有限要素の補間関数を成分とした行列、 $\{\mathbf{U}\}$ は変位に関する節点ベクトル、 β は z 方向波数である。本研究では式(3)の様に、z 方向に波数展開し、(x,y) 面内については波数 \mathbf{k} で与えられる平面波表現と有限要素による離散化とを併用する。 $\{\mathbf{U}\}$ は図-3の二次元ユニットセルの境界上において、 (i, i') と (j, j') に対し周期条件を満たす様に与えるものとする。このとき、式(3)の \mathbf{u} は式(2)の条件を自動的に満たすこととなる。

また、式(3)では以下に述べる解法の展開の都合上、単一の β について表記したが、実際には自由度相当の項数を一次結合して解を構成する。なお詳細については、自由表面の境界条件と合わせ後程述べる。

2.3 変数変換

対象としている問題の解を与える β を決定するため、運動方程式より β に関する固有値問題を導出する。そのために、文献7), 9)と同様に、 $\{\mathbf{U}\}$ の各節点成分

$\{u_j, v_j, w_j\}$ の内、鉛直成分を新たな変数で表し、次の様に変数変換を施す。

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{v}_j \\ i\beta\hat{w}_j \end{Bmatrix} \quad (4)$$

すると、式(3)の \mathbf{u} は次式により書き換えられる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = [\hat{\mathbf{N}}(\hat{\mathbf{r}})]\{\hat{\mathbf{U}}\}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}+\beta z)} \quad (5)$$

ここで、 $[\hat{\mathbf{N}}]$ は各節点 j における z 成分の補間関数 N_j を $i\beta N_j$ に置き換えて得られる行列である。

このとき、ひずみ $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$ は次式の様に表される。

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= [\hat{\mathbf{B}}]\{\hat{\mathbf{U}}\}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}+\beta z)} \\ &= [\mathbf{B}_1 + i\beta\mathbf{B}_2 + \beta^2\mathbf{B}_3]\{\hat{\mathbf{U}}\}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}+\beta z)} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $[\mathbf{B}_1]$, $[\mathbf{B}_2]$, $[\mathbf{B}_3]$ の節点 j に関する部分行列は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_1^j] &= \begin{bmatrix} N_{j,x} - ik_x N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_{j,y} - ik_y N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_{j,y} - ik_y N_j & N_{j,x} - ik_x N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{B}_2^j] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_j & N_{j,y} - ik_y N_j \\ -N_j & 0 & N_{j,x} - ik_x N_j \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{B}_3^j] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_j \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 $(\cdot)_{,x}, (\cdot)_{,y}$ は x, y に関する偏微分、 k_x, k_y は波数ベクトル \mathbf{k} の x, y 成分である。

また、応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$ は次式により与えられる。

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (8)$$

ここで、 $[\mathbf{D}]$ は応力-ひずみ関係を与える行列である。

2.4 有限要素方程式

有限要素方程式は次式より導かれる。

$$\int_{\Omega_S} [\delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*]\{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_S} \rho \delta\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{p} d\Gamma \quad (9)$$

ここで、 $(\cdot)^*$ は共役転置、 (\cdot) は共役、 $\delta(\cdot)$ は仮想成分、 ω は円振動数、 ρ は質量密度、 \mathbf{p} は表面力、 Ω_S と Γ は 3次元解析領域の断面を与える二次元ユニットセルの

領域とその境界である。なお領域 Ω_S 内には、物体力等の外力が作用していないものとする。

式(9)に(5),(6),(8)を代入すると、一要素 (Ω_e) 当りの運動方程式が次式より与えられる。

$$\begin{aligned} [\delta\hat{\mathbf{U}}^*] \int_{\Omega_e} [\hat{\mathbf{B}}^* \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}] d\Omega \{\hat{\mathbf{U}}\} \\ - \omega^2 [\delta\hat{\mathbf{U}}^*] \int_{\Omega_e} \rho [\hat{\mathbf{N}}^* \hat{\mathbf{N}}] d\Omega \{\hat{\mathbf{U}}\} = [\delta\hat{\mathbf{U}}^*] \{\hat{\mathbf{F}}'\} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\{\hat{\mathbf{F}}'\}$ の各節点成分 $\{\hat{f}'_{xj}, \hat{f}'_{yj}, \hat{f}'_{zj}\}$ は、式(3)の節点変位ベクトル $\{\mathbf{U}\}$ と同様に定義される節点力ベクトル $\{\mathbf{F}\}$ から、式(4)に対応するベクトル $\{\hat{\mathbf{F}}\}$ を介して次式により与えられるものである。

$$\begin{Bmatrix} f_{xj} \\ f_{yj} \\ f_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_{xj} \\ \hat{f}_{yj} \\ i\beta\hat{f}_{zj} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \hat{f}_{xj} \\ \hat{f}_{yj} \\ \beta^2\hat{f}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{f}'_{xj} \\ \hat{f}'_{yj} \\ \hat{f}'_{zj} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

なお、式(9)で仮想成分との内積を複素ベクトルの意味で評価したことで、式(10)の領域積分は $e^{-i(\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}+\beta z)}$ の項を含まないものとなっている。式(7)より、式(10)の $[\hat{\mathbf{B}}^* \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}]$ は次の様に展開される。

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{B}}^* \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}] &= [\mathbf{B}_1^* \mathbf{D} \mathbf{B}_1] \\ &+ \beta^2 [\mathbf{B}_1^* \mathbf{D} \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^* \mathbf{D} \mathbf{B}_2] + \beta^4 [\mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3] \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、右辺第1項目の行列は z 成分に関する行(3,6,...)が全てゼロとなっており、逆に β^4 の項の行列(第3項)は(3,6,...)行以外がゼロとなっている。また、式(10)の慣性項に関する行列 $[\hat{\mathbf{N}}^* \hat{\mathbf{N}}]$ は(3,6,...)行にのみ β^2 が係数としてかかっている。したがって、式(10)で与えられる1要素当りのつり合い式の(3,6,...)行目のみ、両辺を β^2 で割ると次式を得る。

$$[\delta\hat{\mathbf{U}}^*] [\hat{\mathbf{K}}_1 + \beta^2 \hat{\mathbf{K}}_2 - \omega^2 \mathbf{M}] \{\hat{\mathbf{U}}\} = [\delta\hat{\mathbf{U}}^*] \{\hat{\mathbf{F}}\} \quad (13)$$

ここで、 $[\hat{\mathbf{K}}_j] (j=1,2)$ は係数に β を含まない行列であり、次式により与えられる。

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{K}}_j] &= \int_{\Omega_e} [\mathbf{K}'_j] d\Omega, \\ [\mathbf{K}'_1] &= [\mathbf{B}_1^* \mathbf{D} \mathbf{B}_1] + [\mathbf{B}_1^* \mathbf{D} \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^* \mathbf{D} \mathbf{B}_2]_{,z}, \\ [\mathbf{K}'_2] &= [\mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_3] + [\mathbf{B}_1^* \mathbf{D} \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^* \mathbf{D} \mathbf{B}_2]_{,xy} \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 $[\]_{,xy}$ は当該行列の z 成分に関する行(3,6,...)を全てゼロに置換したものであり、 $[\]_{,z} = [\] - [\]_{,xy}$ である。また、式(13)の $[\mathbf{M}]$ は通常用いられる整合質量行列と同様の計算により与えられる。

2.5 表面波モードの分散解析

$\{\mathbf{U}\}$ と同様に $\{\hat{\mathbf{U}}\}$, $\{\hat{\mathbf{F}}\}$ もユニットセル境界辺において次の周期条件を満たす。

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{U}}_T\} &= \{\hat{\mathbf{U}}_B\}, \quad \{\hat{\mathbf{U}}_R\} = \{\hat{\mathbf{U}}_L\}, \\ \{\hat{\mathbf{F}}_T\} &= -\{\hat{\mathbf{F}}_B\}, \quad \{\hat{\mathbf{F}}_R\} = -\{\hat{\mathbf{F}}_L\} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $(\cdot)_B, (\cdot)_T, (\cdot)_L, (\cdot)_R$ はそれぞれユニットセルの底辺, 上辺, 左辺, 右辺境界上の節点に関する部分ベクトルである。

式 (15) を (13) に対応する全体系の方程式に適用し、 $(\cdot)_T, (\cdot)_R$ に関する成分を消去すると、外力の作用しない波動場に対して次の $-\beta^2$ に関する固有値問題をj得る。

$$[\tilde{\mathbf{K}}_1 - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}]\{\tilde{\phi}\} = -\beta^2 [\tilde{\mathbf{K}}_2]\{\tilde{\phi}\} \quad (16)$$

ここで、 (\cdot) は上述の様に行列やベクトルを縮約して得られたものであることを意味している。

式 (16) より、下方 (z 方向) と上方に伝播して行く波動モードに対応する β を得る。なお、これらのペアは縮約後の自由度 \tilde{N} だけ存在する。これらより、下方へ進行するもののみ抽出し、それらを $\beta_j (j = 1, \dots, \tilde{N})$ とおくと、解 $\{\tilde{\mathbf{U}}(z)\}$ は一般に式 (16) の固有モード $\{\tilde{\phi}_j\}$ の一次結合により次式の様jに与えられることとなる。

$$\{\tilde{\mathbf{U}}(z)\} = \sum_j^{\tilde{N}} \alpha_j e^{-i\beta_j z} \{\tilde{\phi}_j\} = [\tilde{\Phi}(z)]\{\alpha\} \quad (17)$$

ここで、 $[\tilde{\Phi}(z)]$ は $e^{-i\beta_j z} \{\tilde{\phi}_j\}$ を第 j 列成分に持つ行列、 α_j は結合係数であり、 $\{\alpha\}$ は α_j を成分に持つベクトルである。

さらに式 (15) の周期条件に基づき、 $\{\tilde{\mathbf{U}}(z)\}$ から $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ に対応するベクトル $\{\check{\mathbf{U}}(z)\}$ を復元すれば次式を得る。

$$\{\check{\mathbf{U}}(z)\} = [\check{\Phi}(z)]\{\alpha\} \quad (18)$$

ここで、 $[\check{\Phi}(z)]$ は $[\tilde{\Phi}(z)]$ の各列ベクトルを周期条件に基づき拡張して得られる長方形行列である。

式 (18) より (6), (8) に基づき応力を評価すると、自由表面 ($z = 0$) 上での表面力が次式の様jに表現されることとなる。

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}' \hat{\mathbf{B}} \check{\Phi}(0)]\{\alpha\} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (19)$$

$$:= [\mathbf{S}]\{\alpha\} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

ここで、 $[\mathbf{D}']$ は $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ から表面力 3 成分を構成する行列である。

すると、表面力に関する節点値ベクトル $\{\mathbf{F}_S\}$ が次式により与えられることとなる。

$$\{\mathbf{F}_S\} = [\mathbf{C}]\{\alpha\}, \quad (20)$$

$$[\mathbf{C}] = \int_{\Omega_S} [\tilde{\mathbf{N}}^T][\mathbf{S}] d\Omega$$

なお $[\tilde{\mathbf{N}}]$ は、仮想変位ベクトル $\{\delta \mathbf{U}\}$ のユニットセル境界での周期性に基づき $[\mathbf{N}]$ を縮約して得られる行列である。

表面波モードの条件は、自由表面での境界条件 $\{\mathbf{F}_S\} = \{\mathbf{0}\}$ より与えられる。すると、式 (20) より次式を得る。

$$\det[\mathbf{C}] = 0 \quad (21)$$

なお、行列式の直接評価は、その値が大きく変動する恐れがあり、必ずしも得策ではない。そこで、以降

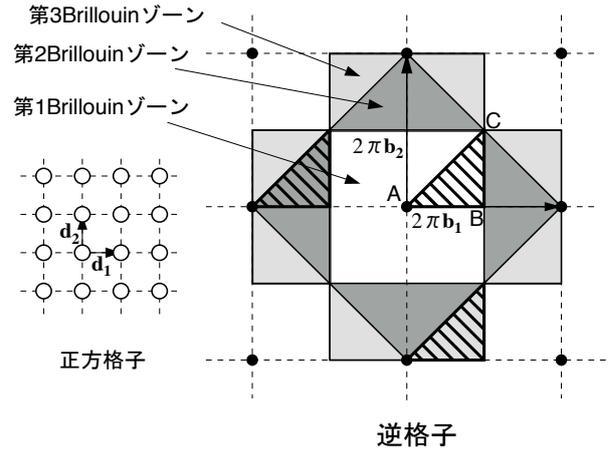


図-4 正方格子の逆格子と Brillouin ゾーン

の解析では式 (21) の代わりに、次式のように絶対最小固有値がゼロとなる条件に基づき、分散曲線の探索を行う。

$$[\mathbf{C}]\{\alpha\} = \mu\{\alpha\}, \quad (\mu = 0) \quad (22)$$

3. 解析時の波数の設定について

3.1 表面波モードの分散解析手順

表面波モードの分散解析は式 (22) に基づいて実施する。具体的には文献 (11) に示した解析手順と同様に、 (x, y) 面内波数ベクトル \mathbf{k} をある値に設定し、その下で円振動数 ω を増分 $\Delta\omega$ ずつ更新しながら式 (22) に基づき絶対最小固有値を求める。もし、その値がある閾値以下の極小値を与えるものであるならば、当該の (\mathbf{k}, ω) において表面波モードが存在するものと判定する。

(\mathbf{k}, ω) 空間におけるこの様な点の集合は分散曲面を構成する。なお、この曲面は、基本ベクトル \mathbf{d}_j に対する次式の双対基底 \mathbf{b}_j に基づいて与えられる波数空間内のユニットセルに関して周期性を持つことが知られている²⁰⁾。

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_j = \delta_{ij} \quad (23)$$

ここで、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

$2\pi\mathbf{b}_j$ より構成される逆格子の原点と他の格子点とを結ぶ線の垂直二等分線で囲まれた領域の内、原点に最も近いものを第 1 Brillouin ゾーン、以降近い領域から順に第 2, 第 3... Brillouin ゾーンと呼ぶ。図-4 は正方格子に対する逆格子を例に、当該域を示したものである。上述のとおり、分散曲面は第 1 Brillouin ゾーンを基本単位として波数空間内で周期性を持つ。したがって、分散解析はその内部についてのみ実施すれば良く、さらに通常は対称性により図-4 中の 3 点 A, B, C をつなぐ直線上の波数ベクトルに対して解析を行う。

3.2 波数の設定

上述の分散解析において、ある波数 \mathbf{k} の下で与えられる解は、ユニットセル境界で式 (2) の条件をみたすも

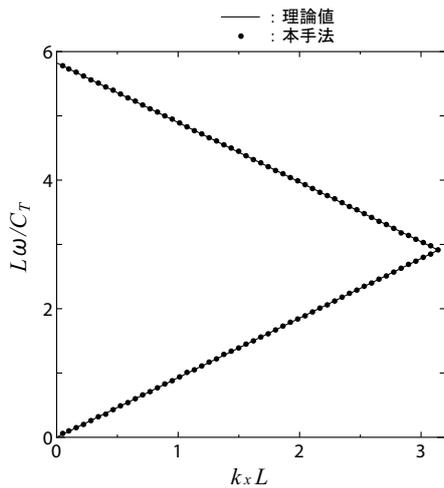


図-5 一様半無限場の Rayleigh 波分散曲線

のとして規定される。これは領域内の解の変動が波数 \mathbf{k} の平面波で与えられることを必ずしも意味するものではない。実際、介在物の存在により、変位は平面波とは幾分異なったものとなる。ただし、領域内全体に亘る解の挙動は波数 \mathbf{k} の平面波で概ね特徴づけることができるであろう。したがって、式(3)によりユニットセル内の変位を表現した場合、主要な変動成分は指数関数部 ($e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$) で表現されることとなり、波動振幅の空間変動が有限要素に課される主な近似対象となる。このことにより、比較的粗い分割でも良好な精度での解析が可能となる。

なお、式(1)や(2)の関係は、波数 \mathbf{k} を $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + 2\pi n_j \mathbf{b}_j$ に置き換えても成り立つ。第1 Brillouin ゾーン内の高周波数域に存在する分散曲面上の表面波は、当該ゾーン内の波数 \mathbf{k} の下で式(1)を満たすが、それに対応する波動は波数 \mathbf{k} の平面波より短波長のモードで与えられる。このことは、 n_1 または n_2 がゼロ以外の値を持つ波数 \mathbf{k}' によりこれらのモードが特徴づけられていることを意味している。したがって、式(3)に基づく解析で高周波数域のバンドを精度良く求めるためには、 \mathbf{k} を \mathbf{k}' に変更し、短波長モードを適切に表現する必要がある。具体的には、周波数の低い方から1番目のバンドでは第1 Brillouin ゾーン内の \mathbf{k} をそのまま用いれば良い。2番目のバンドは、第2 Brillouin ゾーン内で $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + 2\pi n_j \mathbf{b}_j$ により平行移動可能な波数域を設定すれば良い²⁰⁾。同様に、3番目は第3 Brillouin ゾーン内で波数を設定することとなる。

例えば図-4の正方格子において、第1 Brillouin ゾーン内の A-B-C-A の辺上に波数 \mathbf{k} をとる場合、2番目のバンドに対しては $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - 2\pi \mathbf{b}_1$ 、3番目に対しては $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - 2\pi \mathbf{b}_2$ とすれば良い。なお、図-4の斜線部の境界が各々これらに対応している。

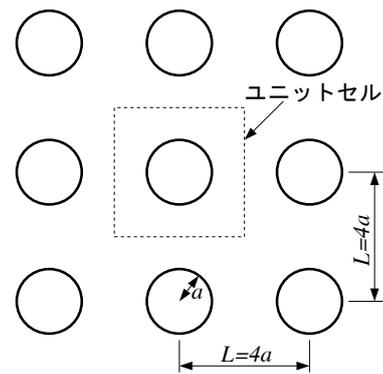


図-6 円柱の正方格子状の配置

4. 解析例

4.1 半無限一様弾性場の Rayleigh 波

本手法の妥当性を確認する目的で、一様半無限場における Rayleigh 波の分散解析を行った。当該問題の表面波モードは単一波数の平面波で与えられる。したがって、式(3)の離散化による場合、有限要素成分 $[\mathbf{N}(\mathbf{r})][\mathbf{U}]$ は一定振幅の表現に充てられることとなるため、本来要素分割を必要としない。また、ここでは均質場を解析対象としているので、 (x, y) 面内のユニットセルの形状は任意である。そこで、解析に際して二次元ユニットセルは正方形で与え、それを一要素で分割した。

なお上述の様に、有限要素分割の主な役割は表面波モードの振幅の表現にある。そのため、複雑に変動する主要な波動成分は離散化対象とならない。そこで、一般に高次要素を用いても精度維持が可能と考えられ、以降に示す解析では離散化自由度低減の目的で、3次元レンディピティ長方形要素を採用した。

ポアソン比 0.3 の下、 x 軸に沿って進行する Rayleigh 波の分散曲線を、図-4の第1 Brillouin ゾーン内の線分 A-B 上で、下から2本目まで求めた結果を図-5に示す。図は無次元波数 $k_x L$ と無次元円振動数 $\bar{\omega} = L\omega/C_T$ について描いたものである。ただし、 L はユニットセルの境界辺の長さ、 C_T は横波伝播速度である。なお、分散曲線の探索に当り、無次元円振動数 $\bar{\omega}$ の増分を $\Delta\bar{\omega} = 0.01$ とした。また、式(22)における μ が探索時の最大値の 10^{-3} 以下となるものを、分散曲線抽出時の閾値とした。図中黒丸のプロット点が本手法による結果であり、実線が理論値である。図より、探索の際の円振動数の解像度 $\Delta\bar{\omega} = 0.01$ の範囲内で理論値との一致が得られており、解法の妥当性が確認できる。

4.2 正方格子状に配置されたコンクリート柱列

半径 a の円形中実断面のコンクリート柱を、図-6の様に $L = 4a$ の間隔で正方格子状に配置した場合を想定し、表面波分散解析を実施した。解析に当り、母材(地盤)と介在物(コンクリート柱)のポアソン比はそれぞれ 0.4 および 0.2 とし、母材に対する介在物のせん断剛性比と密度比をそれぞれ 10 と 1.5 に設定した。なお、鉄筋等による剛性の異方性は簡単のため考慮していない。ユニットセルの有限要素分割は図-7のとおりである。

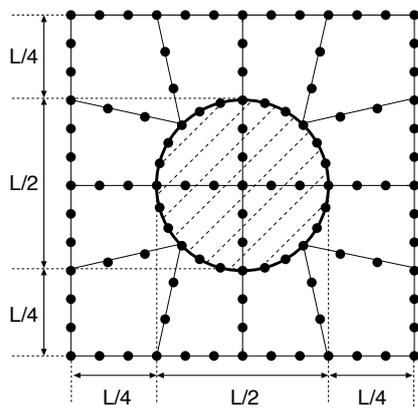


図-7 正方形格子ユニットセルの有限要素分割

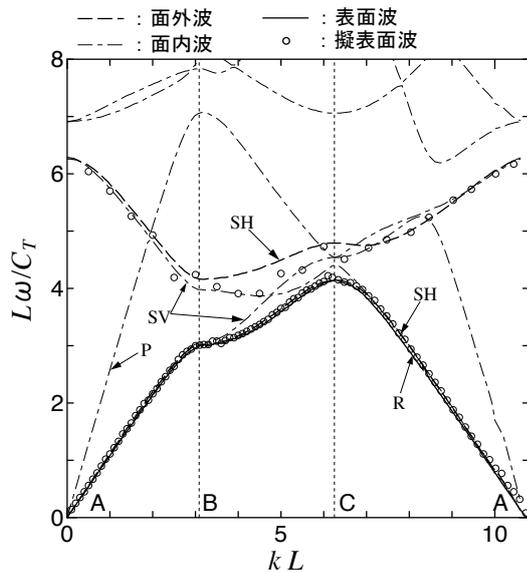


図-8 円柱の正方形格子状配列における表面波分散曲線

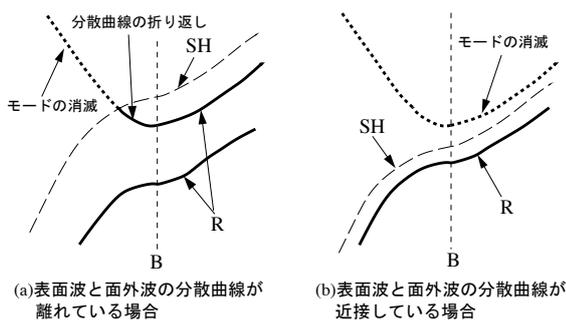


図-9 表面波分散曲線と面外波分散曲線

図-4 の第 1 Brillouin ゾーンにおける A-B-C-A 上の波数に対して求めた表面波モードの分散曲線を図-8 に示す。なお、図には、図-6 と同一の周期構造を持ち z 方向に無限に続く領域で与えられる平面ひずみ場における面内波 (P, SV) モードと、 z 方向面外波 (SH) モードの分散曲線も合わせて示した。

図では幾つかの曲線が輻射しており判別しづらいが、表面波モードの分散曲線 (R) は、面外波モードの最も低い周波数バンドより下方にのみ分布し、それより高い周波数域には存在していないことがわかる。これは文献 6,9) で述べられている様な、以下の理由によるものと考えられる。すなわち、 (x, y) 面内を進行する面外波の分散曲線より高周波数域では、同一水平波数ベクトルの下で、非ゼロの z 方向波数成分を持つバルク波が存在する。当該周波数域では、自由表面に沿って伝播する波動とバルク波モードとが共存し、それらの重畳により波動が構成される。後者は表面から下方遠方へ進行する波動を与えるため、表面近傍の波動エネルギーの減衰を惹き起す。その結果、表面波モードは消滅することとなる。

また、表面波の分散曲線が、面外波のその直下に位置しておりそれらの間隔が極めて狭いため、B 点におけるバンド端付近においても、高周波モード側の分散曲線の折り返しの存在は認められない⁷⁾(図-9)。そのため、周期構造の特徴である上下分散曲線間のギャップが現れていないことがわかる。

式 (22) における絶対最小固有値は、表面波の分散曲線の位置以外でも、緩やかではあるが極小値を与える周波数を持つ。本探索で得られたその様な点を図中に白丸でプロットした。図より、表面波の分散曲線直上の面外波モードがこれに対応していることがわかる。上述のとおり、バルク波の分散曲線より高周波数域では、上・下方向波数成分を持つ波動が運動方程式を満たす解として存在するが、分散曲線上の波動は z 方向波数がゼロとなっており、 (x, y) 面に平行に進行するバルク波モードを与える。このとき、下方へ放射される波動エネルギーは極小となり、よって波動振幅は極大となる。なお、面外波は z 方向変位で与えられている。そのため、表面波の z 方向変位成分に対し面外波モードが共振することとなる。以上が当該極小点の物理的解釈であり、文献 6) ではこれを擬表面波 (Pseudosurface Wave) と呼んでいる。この波動は自由表面と平行に進むバルク波成分を含むので、波動エネルギーは下方遠方まで分布し、振幅は進行に伴い次第に減衰して行くこととなる。

以上に述べたように、表面波モードは面外波の最低周波数バンドより下方にしか存在しないので、それより高い周波数域では、一般的にいかなる波動も減衰を伴わずに半無限周期場内を伝播することができない。しかし、 $\bar{\omega} > 4$ における高周波数域の面外波や面内せん断波モード近傍にも上述の共振点の分布が認められており、有限層数で構成される実際の柱列壁では、擬表面波が十分減衰する前に防振壁を透過し終える恐れがある。なお、透過率の定量的評価には有限周期層に対する波動透過解析¹⁷⁾が有用となるが、半無限場に対する解析手法の構築については今後の課題である。

4.3 三角形ハニカム状に配置された柱列壁

円柱の配置を図-10 の様に三角形ハニカム状に変更して分散解析を行った。なお、介在物の半径 a に対する格子間距離を、正方形格子の場合と同じく $L = 4a$ に設定した。この場合、介在物の充填率は $\pi/8\sqrt{3} \approx 0.227$

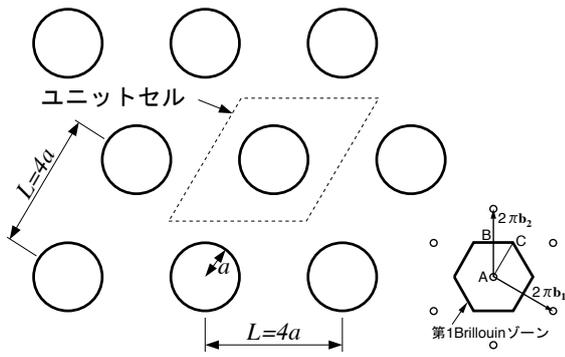


図-10 三角形ハニカム状の配列 (左) と第 1 Brillouin ゾーン (右)

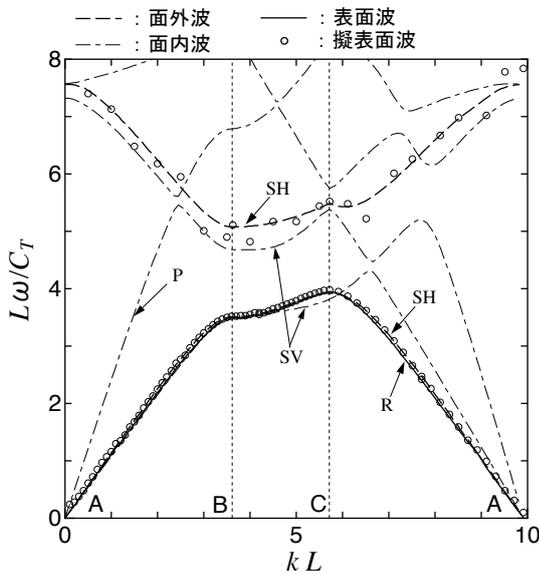


図-11 三角形ハニカム状配列における表面波分散曲線

となり、4.2 の正方格子配列の充填率 $\pi/16 \approx 0.196$ に比べて 3% 程高くなる。図-10 における平行四辺形状のユニットセルの要素分割数は、正方格子と同じく 16 要素とした。

図-10 中に示した第 1 Brillouin ゾーン内の点 A-B-C-A に沿って求めた結果を図-11 に示す。正方格子配列の場合と同様に、面外波モードの最初のバンドより下方にしか表面波の分散曲線は存在していない。また、正方格子配列の場合に比べ、面外波の 2 本目の分散曲線が $\bar{\omega} > 5$ の高周波数側に移動しており、比較的広いストップバンドを形成している。それに伴い、 $\bar{\omega} \approx 4.7$ より上方に分布している擬表面波の周波数域と表面波モードのパスバンド上端との間にも、同様の比較的広い周波数帯が存在していることが確認できる。この周波数帯には表面波も擬表面波も存在せず、少ない柱列層数でも高い遮蔽性が得られるものと考えられ、三角形ハニカム状の配置の有効性が窺える。

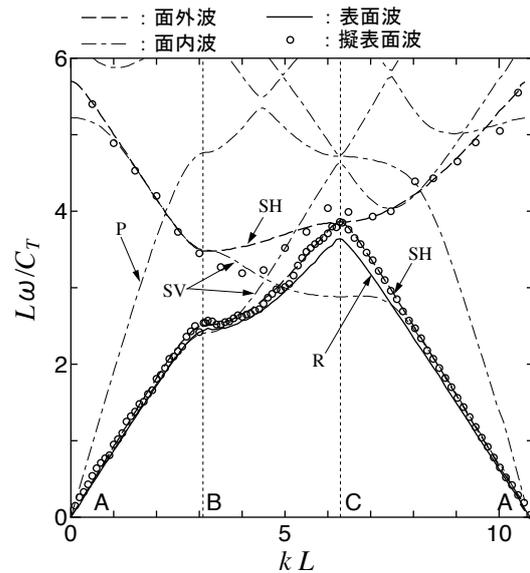


図-12 円柱の正方格子状配列における表面波分散曲線 (円柱の剛性を低減した場合)

4.4 正方格子状に配置された低剛性柱列

防振壁には地盤とのインピーダンス比の大きな材料を用いるのが効果的と考えられる。そのため、低剛性材料の使用も有効であり、文献 12) ではドレーン材による柱列壁が検討されている。そこで、低剛性材料の使用を想定した設定の下で分散解析を行う。なお、ドレーン材には様々な材質のものが使用されている。ここでは低剛性化の影響を確認する目的で、柱材を特定せず母材に対するせん断剛性比を 0.1、質量密度比を 0.2 とした場合について解析した。また、ポアソン比は 0.2 としている。

以上の条件の下、円柱を図-6 の正方格子状に配置した場合を対象に、表面波の分散解析を実施した。その結果を図-12 に示す。4.2, 4.3 に示したコンクリート柱の場合と同様に、実線で示されている表面波の分散曲線は、面外波動の分散曲線より低い周波数域にのみ存在している。また、1 番目の面外波動モードや、その上のモードの分散曲線付近に擬表面波が分布しており、高剛性円柱の場合と同様の傾向が認められる。ただし、コンクリート柱の場合に比べ、表面波と面外波の両分散曲線の間が比較的広く空いていることがわかる。さらに、表面波分散曲線のバンド上端周波数が、柱の低剛性化により $\bar{\omega} = 3.7$ 付近まで低下している。このことは、コンクリート柱と同じ格子間隔でも、より低周波数の表面波成分を遮蔽できることを意味しており、母材より剛性の低い材料を柱材に用いたことによる影響が僅かながらも認められる。

4.5 表面波の変位モード

4.2 に示した正方格子状に配置されたコンクリート柱列を例に、表面波モードにおける自由表面ユニットセル部の変形の様子を図-13 に示す。図は $k_x L = k_y L = 3.0$ の波数の下、表面波が斜め 45° 方向に進行するケースを図

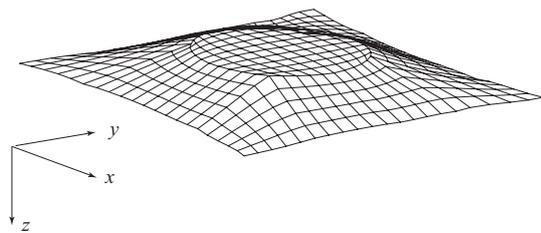


図-13 表面波の変位モード

示したものである。なお、当該波数点は、第1 Brillouin ゾーンの角(C点)近くに位置している。そのため、応答は定在波に近いものとなっており、柱が上下方向に大きく振動する応答が得られている。図は、柱が上方に最も大きく変位した瞬間を描画したものである。柱(介在物)の剛性が周辺地盤(母材)のそれに比べ高いため、柱部は殆ど変形せず、その周辺部に変形が集中している様子が確認できる。

平面波展開法による場合、変位は Fourier 級数で表されるため、このような変形の不連続性の把握にはかなりの項数を必要とする。これに対し、有限要素法を用いる本手法では、変形の詳細を適切且つ容易に再現することができる。

5. おわりに

自由表面内に二重周期性を有する半無限三次元場を対象とした表面波分散解析法を、有限要素法に基づき構成した。周期場における定常解は、ユニットセル内の問題に帰着して表現した。その下で、深さ方向の解の変動を波数展開して与えることにより、有限要素の離散化を1次元減ずる方法を採用した。なお、ユニットセルにおける運動方程式を満たす深さ方向波数は、当該波数に関する固有値問題を導出し、それを解くことで求めた。

解析では、地盤中に周期的に配置された柱列壁を想定し、柱材の剛性や配列の違いが表面波のバンド特性に及ぼす影響について調べた。その結果、何れのケースにおいても、表面波の分散曲線は、同じ周期性を持つ無限場における面外波モードの1本目の分散曲線より低い周波数域に存在し、それより上には存在しないことがわかった。なお、表面波の分散曲線は面外波のその直下に位置している。そのため、面外波の分散曲線を求めることで、表面波のバンド特性を概ね予測することができる。表面波の分散解析では、各波数ベクトル毎に式(22)を満たす周波数を探索する必要があるが比較的多くの手間を必要とするので、より計算負荷の少ない面外波の分散解析による近似評価は有効な簡便法であると言える。

表面波モードの周波数には上限が存在するものの、さらに上の周波数域には擬表面波が分布していることが確認された。なお、柱を正方格子状に配置した場合、表面波と擬表面波が各々存在する周波数帯は連続分布し

ているが、三角形ハニカム状配列ではそれらの間に比較的広いストップバンドが存在することがわかった。

また、地盤より軟らかい材料を柱材に用いることで、少なくとも今回の解析においては、表面波モードが存在する周波数の上限が幾分低減されるという効果が認められた。

参考文献

- 1) Sigmund, O. and Jensen, J.S.: Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **361**, 1001-1019, 2003.
- 2) Phani, A.S., Woodhouse, J. and Fleck, N.A.: Wave propagation in two-dimensional periodic lattices, *J. Acoust. Soc. Am.*, **119**, 1995-2005, 2006.
- 3) Qian, Z.-H., Jin, F., Li, F.-M. and Kishimoto, K.: Complete band gaps in two-dimensional piezoelectric phononic crystals with {1-3} connectivity family, *Int. J. Solids & Struct.*, **45**, 4748-4755, 2008.
- 4) El Boudouti, E.H., Djafari-Rouhani, B. and Nougouai, A.: Surface elastic waves in superlattices: Sagittal localized and resonant modes, *Phys. Rev. B*, **51**, 801-804, 1995.
- 5) Aono, T. and Tamura, S.: Surface and pseudosurface acoustic waves in superlattices, *Phys. Rev. B*, **58**, 4838-4845, 1998.
- 6) Every, A.G.: Pseudosurface wave structures in phonon imaging, *Phys. Rev. B*, **33**, 2719-2732, 1986.
- 7) Djafari-Rouhani, B., Maradudin, A.A. and Wallis, R.F.: Rayleigh waves on a superlattice stratified normal to the surface, *Phys. Rev. B*, **29**, 6454-6462, 1984.
- 8) Wang, Y.-Z., Li, F.-M., Huang, W.-H. and Wang, Y.-S.: The propagation and localization of Rayleigh waves in disordered piezoelectric phononic crystals, *J. Mech. Phys. & Solids*, **56**, 1578-1590, 2008.
- 9) Tanaka, Y. and Tamura, S.: Surface acoustic waves in two-dimensional periodic elastic structures, *Phys. Rev. B*, **58**, 7958-7965, 1998.
- 10) 阿部和久, 笠原祐樹, 紅露一寛: 半無限周期構造における表面波モード解析手法, 応用力学論文集, **11**, 1031-1038, 2008.
- 11) 阿部和久, 笠原祐樹, 紅露一寛: 半無限周期構造を対象とした表面波モード解析手法の改善, 応用力学論文集, **12**, 1013-1020, 2009.
- 12) Onoda, K., Nagasawa, H., Ohshima, T. and Tamura, T.: Development of isolation barrier for ground vibration by employing group of embedded circular drain in the soil, *Env. Vib.*, Takemiya (ed.), 485-491, 2005.
- 13) 神田 仁, 石井啓稔, 阪本泰士, 川村淳一, 平川泰行, 伊藤康宏: 起振機実験から得られた PC 柱列壁の防振効果について, 土木学会第 59 回年次学術講演会, 3-313, 2004.
- 14) Avilés, J. and Sánchez-Sesma, F.J.: Piles as barrier for elastic waves, *J. Geotech. Engng. (ASCE)*, **109**, 1133-1146, 1983.
- 15) Avilés, J. and Sánchez-Sesma, F.J.: Foundation isolation

- from vibrations using piles as barriers, *J. Engng. Mech.* (ASCE), **114**, 1854-1870, 1988.
- 16) Kattis S.E., Polyzos, D. and Beskos, D.E.: Vibration isolation by a row of piles using a 3-D frequency domain BEM, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **46**, 713-728, 1999.
- 17) 阿部和久, 中山 悠, 紅露一寛: 中間層を有する周期複合材の弾性波動解析, 応用力学論文集, **13**, 1041-1048, 2010.
- 18) Kushwaha, M.S., Halevi, P. and Martínez, G.: Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites, *Phys. Rev. B*, **49**, 2313-2322, 1994.
- 19) Vasseur, J.O., Djafari-Rouhani, B., Dobrzynski, L., Kushwaha, M.S. and Halevi, P.: Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials: the carbon/epoxy composite and some metallic systems, *J. Phys.: Condens. Matter*, **6**, 8759-8770, 1994.
- 20) Brillouin, L.: Wave propagation in periodic structures, Dover Publications, Inc., 1953.

(2011年3月8日 受付)