

一部に欠陥を有する二次元周期場の動弾性解析

Elastodynamic analysis of two-dimensional periodic structures having a defect

阿部和久*・本間 広紀**・紅露一寛***

Kazuhisa ABE, Hiroki HONMA and Kazuhiro KORO

*正会員 工博 新潟大学教授 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

**新潟大学工学部建設学科 (研究当時) (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

***正会員 博(工) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

This paper presents a numerical method for two-dimensional solid phononic crystals having a defect. This problem is divided into two domains of the finite defective region and the surrounding periodic medium. The analysis method is then constructed by combining the finite element equation of the irregular region with the impedance matrix representing the external field. The impedance matrix is derived by analyzing a series of harmonic excitation problems of a periodic field given by the surrounding array. These solutions are obtained by the aid of Floquet transform. The developed method is applied to wave propagations through a defective field imbedded in a square lattice of circular holes. Modes trapped in the disturbed region are also analyzed for a composite material possessing a dispersion structure with a wide bandgap.

Key Words : *phononic crystals, point defect, wave propagation, local modes*

1. はじめに

周期構造内の波動場には、如何なる波数においても波動モードを持たない周波数帯(ストップバンド)が存在し得ることが知られている。この特性を利用することで波動の透過性や遮蔽性を制御することが可能であり、近年フォトニック結晶やフォノン結晶と呼ばれる周期材料が、様々な分野に応用されている。

周期構造の性能評価には、それが有するバンド特性の把握が基本となる。バンド構造は、無限周期場を構成する最小単位であるユニットセルで与えられる有限領域の問題に帰着して求めることができる。そのため、比較的容易かつ効率的に解析することができ、平面波展開法¹⁾や、有限要素法²⁾などに基づく多くの解法が提案されている。また、FDTD法³⁾による十分に広い有限領域での時間域解析から分散曲線を求める手法も採られている。

なお、周期構造に何らかの擾乱を導入することが、さらなる性能向上につながる場合がある。例えば、散乱体の配置をランダムに与えることが、波動透過率の低減に有効であることが知られている。Chen & Ye⁴⁾は、音響散乱体をランダムに配置することで透過波動の減衰性が向上することを示している。Duclos & Clément⁵⁾は、水中に円筒体をランダムに配置することで水面波の遮蔽効果が向上すると述べている。また、Nakashimaら⁶⁾は、介在物を層状に挿入した弾性場を対象に同様の検討を行っている。文献6)では、介在物の配置に対し、層の長手方向に周期性を仮定しているが、文献4,5)では完全にランダムな配置を扱っている。このような問題では、多数の散乱体を十分に広い領域内に配置して直接解析する以外に手立てが無い。

一方、周期構造に点または線状の欠陥を意図的に導入してつくられる、光ファイバ(ホーリーファイバ)や導波路⁷⁾を始め、種々のレンズ⁸⁾や遮音材⁹⁾なども検討

されている。文献8)における音響レンズの場合は、有限個の散乱体を効果的に配置することを前提としているが、ホーリーファイバや導波路は、無限周期場の一部にのみ欠陥を有する構造としてモデル化することができる。しかし、このように一部にのみ欠陥を有する無限場を直接対象とした解析法はこれまで提案されおらず、ランダムな配置の場合と同様に、領域を十分に広く設定したり、PML境界を導入して領域端での乱れを吸収する方法¹⁰⁾などが一般に用いられている。また、モード解析などにおいて無減衰系を設定する場合、例え解析領域を拡張したり端部に周期境界条件を課したりしても、その境界条件が解に影響を及ぼすこととなるため、無限場には存在し得ない応答が混入する恐れがある¹¹⁾。したがって、無限場を適切に表現し得る解法の構成が望まれる。

著者らの研究グループは、無限周期場中にそれと異なる構造を持つ周期層を挿入して得られる積層弾性場を対象とした波動透過解析法を、有限要素法に基づき構成した¹²⁾。文献12)では、周期層上下に接合している半無限周期場と等価なインピーダンス行列を求め、当該問題を周期層長手方向1ユニットの動的問題に帰着して解く方法を採用した。また、同様の手法に基づき、一部に異なる構造を含む無限長軌道における波動解析も行った^{11),13)}。文献12)で対象とした構造は、線状に欠陥が存在するものと基本的に同じであるので、著者らがこれまでに構築した手法を、直線状に伸びる導波路の解析に適用することは可能である。しかし、ホーリーファイバの様に一箇所のみ点欠陥が存在する問題を解くことはできない。そこで本論文では、その様な無限場を解析するための手法を構築する。

なお、当該問題に関連する一つのアプローチが、森田・西村¹⁴⁾により最近提案された。文献14)では、二次元空間において一次元方向に周期配置され、かつ一部に欠陥を有する無限場の波動問題を扱っている。そ

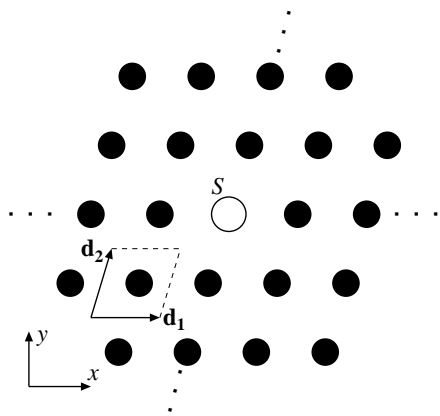


図-1 欠陥を有する二次元周期場

の下で、周期多重極境界要素法と Floquet 変換とを併用し、欠陥に因る乱れを反復計算により求めている。

これに対して本研究では、二重周期場の一箇所に点欠陥が存在する動弾性問題を対象とし、有限要素法をベースに、文献 12) に導出したインピーダンス行列と Floquet 変換とを援用した解法を構成する。具体的には、当該問題を欠陥域内の動的問題に帰着して解く。そのために外部領域と欠陥部との境界において、変位の適合条件と力のつり合い条件を課す。その際に外部領域のインピーダンス行列を用い、外部と欠陥部との連成を陽に定式化する。なお、この行列は、完全な周期場の加振問題を解き、欠陥部に相当する仮想境界上の変位と内部節点力との関係を求めることで導出する。ここで、この無限周期場の加振問題は、一次元 Floquet 変換と文献 12) で得たインピーダンス行列とを併用することで、1 ユニットの動的問題に帰着して解く。

以下では、二次元面内動弾性場を対象に、上述の解法の手順について詳しく述べる。また、逆 Floquet 変換における特異積分についても考察する。次に、欠陥部に波動を入射した場合の定常応答解析と、欠陥域内に局在するモードの解析に本手法を適用し、当該構造が有する波動特性について若干の検討を加える。

2. 解法の概要

2.1 対象とする問題

図-1 に示す様に、二次元無限周期波動場の一箇所に欠陥が存在している問題を考える。特に本研究では、平面ひずみ場を対象とする。なお、以下に述べる定式化の都合上、周期性を規定する 2 つのベクトル $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ の内、 \mathbf{d}_1 は x 軸に平行にとるものとする。また、ここでの欠陥とは、介在物が欠損して母材に置換されているものや、他の材料や形状のもので与えられている場合などを対象とする。

以下では、欠陥部周囲の周期構造内に存在する波動モードを入射する問題や、欠陥部を調和加振する問題などを対象に、有限要素法に基づく定式過程を示す。

2.2 求解方程式の導出

欠陥部とその外部との境界を S とし、当該問題を欠陥領域とその外部領域それぞれにおける動的問題に分離して考える。欠陥部における S 上の節点変位ベクトルと節点力ベクトルを $\{\mathbf{U}^D\}, \{\mathbf{F}^D\}$ で与える。一方、外部領域の解は入射波と散乱波により構成される。それらに対応する S 上の節点ベクトルを各々 $\{\mathbf{U}^I\}, \{\mathbf{F}^I\}$ および $\{\mathbf{U}^S\}, \{\mathbf{F}^S\}$ と定義する。この時、 S 上において課される変位の適合条件と力のつり合い条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}^D\} &= \{\mathbf{U}^I + \mathbf{U}^S\}, \\ \{\mathbf{F}^D + \mathbf{F}^I + \mathbf{F}^S\} &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (1)$$

以上の準備の下、次式に示す欠陥部の運動方程式について考える。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{DD} & \hat{\mathbf{K}}_{DM} \\ \hat{\mathbf{K}}_{MD} & \hat{\mathbf{K}}_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^D \\ \mathbf{U}^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^D \\ \mathbf{F}^M \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{K}}_{ij} = \mathbf{K}_{ij} - \omega^2 \mathbf{M}_{ij}$ は欠陥部の剛性行列 \mathbf{K} と質量行列 \mathbf{M} および円振動数 ω より与えられる部分行列であり、添字の D, M はそれぞれ S 上および内部の節点に関する成分であることを意味している。なお、欠陥内部に作用する節点力 $\{\mathbf{F}^M\}$ は既知であるものとする。

外部領域に関して、 S 上に作用する散乱波の節点力 $\{\mathbf{F}^S\}$ と、それに対応する節点変位 $\{\mathbf{U}^S\}$ との関係が、インピーダンス行列 $[\mathbf{K}_S]$ を介して次式のように与えられているものとする。

$$[\mathbf{K}_S] \{\mathbf{U}^S\} = \{\mathbf{F}^S\} \quad (3)$$

式 (1) 第 2 式より、 $\{\mathbf{F}^D\}$ は $\{\mathbf{F}^I\}, \{\mathbf{F}^S\}$ により次式で与えられる。

$$\{\mathbf{F}^D\} = -\{\mathbf{F}^I + \mathbf{F}^S\} \quad (4)$$

式 (4) に (3) を代入して次式を得る。

$$\{\mathbf{F}^D\} = -\{\mathbf{F}^I\} - [\mathbf{K}_S] \{\mathbf{U}^S\} \quad (5)$$

さらに式 (1) 第 1 式より、 $\{\mathbf{U}^S\}$ は次式により与えられる。

$$\{\mathbf{U}^S\} = \{\mathbf{U}^D - \mathbf{U}^I\} \quad (6)$$

式 (6) を (5) に代入して次式を得る。

$$\{\mathbf{F}^D\} = -\{\mathbf{F}^I\} - [\mathbf{K}_S] \{\mathbf{U}^D - \mathbf{U}^I\} \quad (7)$$

式 (7) を (2) に代入し、 $\{\mathbf{U}^D\}$ に関する項を左辺に移項して次の求解方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{DD} + \mathbf{K}_S & \hat{\mathbf{K}}_{DM} \\ \hat{\mathbf{K}}_{MD} & \hat{\mathbf{K}}_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^D \\ \mathbf{U}^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{F}^I + \mathbf{K}_S \mathbf{U}^I \\ \mathbf{F}^M \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式 (8) の右辺は全て既知であり、これを解くことで本問題の解を得ることができる。

以上より、当該問題は S 上のインピーダンス行列 $[\mathbf{K}_S]$ の導出に帰着する。

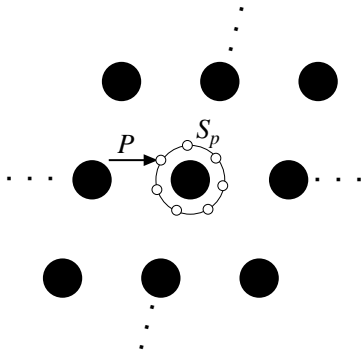


図-2 二次元周期場の加振問題

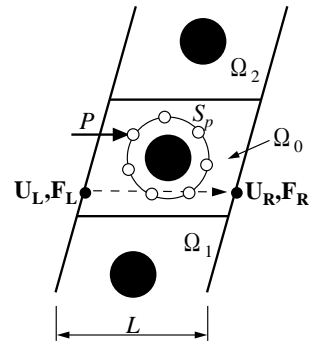


図-3 Floquet 変換後の加振問題

3. 欠陥外部領域のインピーダンス行列の導出

3.1 導出の方針

まず、欠陥の無い無限周期場における代表セルを対象に、欠陥境界 S に相当する仮想境界 S_p 上の有限要素節点の内何れか一つを x 方向に調和加振する問題を解く(図-2)。次に、この時の S_p 上の全節点における外部領域側の内部節点力を求める。以上より、 S_p 上の節点変位と内部節点力のペアが一組得られる。

同様に S_p 上の各節点を対象に、 x 方向加振と y 方向加振の問題を順次解く。これらに対して得られた節点変位ベクトルと節点力ベクトルを列成分に持つ正方行列を作成し、それぞれ $\{U_p\}, \{F_p\}$ とおく。すると、欠陥外部領域に対する S 上のインピーダンス行列 $\{K_S\}$ は次式により与えられることとなる。

$$\{K_S\} = \{F_p U_p^{-1}\} \quad (9)$$

以上より、 $\{K_S\}$ の導出は、無限周期場の加振応答を解くことに帰着する。

3.2 Floquet 変換

無限周期場の加振応答を求めるために、本研究では Floquet 変換¹⁵⁾を用いる。 x 軸上で定義された関数 f の、ある長さ L に関する Floquet 変換は次式で与えられる。

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tilde{x} + nL) e^{i\kappa nL} \quad (10)$$

ここで、 \tilde{x}, κ はそれぞれ $(-L/2, L/2)$ および $(0, 2\pi/L)$ の区間における実数であり、 κ は Floquet 波数と呼ばれるパラメータである。なお本問題の場合、 f は変位等に相当する。

\tilde{f} は \tilde{x} に関して次の周期性を持つ。

$$\tilde{f}(\tilde{x} + nL, \kappa) = e^{-i\kappa nL} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa), \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (11)$$

一方、逆 Floquet 変換は次式で与えられる。

$$f(\tilde{x} + nL) = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi/L} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) e^{-i\kappa nL} d\kappa \quad (12)$$

f が周期長 L の無限周期場で定義された次の問題の解であるものとする。

$$\mathcal{L}(x)f(x) = g(x) \quad (13)$$

ここで、 $\mathcal{L}(x)$ は運動方程式の線形作用素、 $g(x)$ は外力項である。なお、 \mathcal{L} は周期性を持つが、 f, g は共に周期性を仮定していない。

\mathcal{L} の周期性を考慮すると、式 (13) の Floquet 変換から次式を得る。

$$\mathcal{L}(\tilde{x})\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) = \tilde{g}(\tilde{x}, \kappa) \quad (14)$$

式 (14) は、ある Floquet 波数 κ に対する Floquet 変換 \tilde{f} が、有限領域 $(-L/2, L/2)$ における問題を解くことで得られることを意味している。式 (14) を解いて \tilde{f} が得られたならば、式 (12) による逆 Floquet 変換を経て無限周期場における解 f を求めることができる。

3.3 加振応答解析

S_p 上の何れかの節点を振動数 ω で調和加振する問題を解く。そのために、当該問題に対し x 軸方向に Floquet 変換を施す。なお、デルタ関数の Floquet 変換はデルタ関数で与えられるので¹⁶⁾、今対象としている一点加振問題は、 x 軸方向一周分を抽出し、式 (11) の周期条件に対応する次式を左右境界に課して得られる一点加振問題に変換される(図-3)。

$$\begin{aligned} \{U_R\} &= e^{-i\kappa L} \{U_L\}, \\ \{F_R\} &= -e^{-i\kappa L} \{F_L\} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $L = |\mathbf{d}_1|$ は x 軸方向周期長、 $\{U_L\}, \{F_L\}$ は左辺境界の値、 $\{U_R\}, \{F_R\}$ はそれらに対応する右辺境界の値である。

この段階で本問題は \mathbf{d}_2 方向に無限に伸びた周期構造を有しており、まだ有限要素解析を適用することができない。その対処方法として、 \mathbf{d}_2 方向についても Floquet 変換する方策が考えられる。しかし、この場合 \mathbf{d}_1 方向と合わせ二重変換を介することとなり、逆 Floquet 変換に多大な手間を要するため得策ではない。そこで本研究では、 \mathbf{d}_2 方向の無限周期場を、それと等価なインピーダンス行列で表現する方法を採る。

図-3の問題において、加振力が作用している1ユニット Ω_0 を取り出す。 Ω_0 における運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}'_{BB} & \hat{\mathbf{K}}'_{BT} & \hat{\mathbf{K}}'_{BL} & \hat{\mathbf{K}}'_{BM} \\ \hat{\mathbf{K}}'_{TB} & \hat{\mathbf{K}}'_{TT} & \hat{\mathbf{K}}'_{TL} & \hat{\mathbf{K}}'_{TM} \\ \hat{\mathbf{K}}'_{LB} & \hat{\mathbf{K}}'_{LT} & \hat{\mathbf{K}}'_{LL} & \hat{\mathbf{K}}'_{LM} \\ \hat{\mathbf{K}}'_{MB} & \hat{\mathbf{K}}'_{MT} & \hat{\mathbf{K}}'_{ML} & \hat{\mathbf{K}}'_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^B \\ \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U}^L \\ \mathbf{U}^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^B \\ \mathbf{F}^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^M \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{K}}'_{ij}$ は式(2)と同様に定義した部分行列であり、下添字の B, T, L, M はそれぞれ Ω_0 の底辺、上辺、左辺および領域内の節点に関する成分であることを意味している。また、部分行列における $(\cdot)'$ は、式(15)に基づく右辺節点値 $\{\mathbf{U}_R\}$, $\{\mathbf{F}_R\}$ の消去により、行列を縮約したことを表している¹²⁾。

式(15)の周期条件の下、 Ω_0 の下方に接しているセル Ω_1 の上面と、上方に接しているセル Ω_2 の下面、それぞれにおける下・上半無限場を表現するインピーダンス行列を $[\mathbf{K}_B]$, $[\mathbf{K}_T]$ とおく。すると、 Ω_0 上・下面との適合条件と力のつり合い条件より次式を得る。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_B\} &= -[\mathbf{K}_B]\{\mathbf{U}_B\}, \\ \{\mathbf{F}_T\} &= -[\mathbf{K}_T]\{\mathbf{U}_T\} \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)を(16)に代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}'_{BB} + \mathbf{K}_B & \hat{\mathbf{K}}'_{BT} & \hat{\mathbf{K}}'_{BL} & \hat{\mathbf{K}}'_{BM} \\ \hat{\mathbf{K}}'_{TB} & \hat{\mathbf{K}}'_{TT} + \mathbf{K}_T & \hat{\mathbf{K}}'_{TL} & \hat{\mathbf{K}}'_{TM} \\ \hat{\mathbf{K}}'_{LB} & \hat{\mathbf{K}}'_{LT} & \hat{\mathbf{K}}'_{LL} & \hat{\mathbf{K}}'_{LM} \\ \hat{\mathbf{K}}'_{MB} & \hat{\mathbf{K}}'_{MT} & \hat{\mathbf{K}}'_{ML} & \hat{\mathbf{K}}'_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^B \\ \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U}^L \\ \mathbf{U}^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^M \end{Bmatrix} \quad (18)$$

式(18)を解くことで、Floquet 変換後の加振応答解を得ることができる。

3.4 $[\mathbf{K}_B]$, $[\mathbf{K}_T]$ の導出の概要

式(17)におけるインピーダンス行列 $[\mathbf{K}_B]$, $[\mathbf{K}_T]$ は、文献12)に示した手順で求める。ここではその概略を述べる。詳細については文献12)を参照されたい。

1ユニットセルで与えられる領域の運動方程式に対し、 x 軸方向に式(15)の周期条件を課して得られた式(16)について考える。 $[\hat{\mathbf{K}}']$ を構成している剛性行列 $[\mathbf{K}']$ と質量行列 $[\mathbf{M}']$ に対して次の固有値問題を設定する。

$$[\mathbf{K}']\{\phi_i\} = \omega_i^2[\mathbf{M}']\{\phi_i\}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (19)$$

ここで、 ω_i は固有円振動数、 $\{\phi_i\}$ は固有モードベクトルであり、 N はユニットセル右辺境界成分縮約後の自由度である。

ユニットセル底辺の節点ベクトル $\{\mathbf{U}_B\}$, $\{\mathbf{F}_B\}$ と、上辺の節点ベクトル $\{\mathbf{U}_T\}$, $\{\mathbf{F}_T\}$ との関係を与える伝達マトリックス $[\mathbf{G}]$ を、次式をみだすものとして定義する。

$$[\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T \\ -\mathbf{F}_T \end{Bmatrix} \quad (20)$$

ここで、 $[\mathbf{G}]$ は次式により具体的に与えられる。

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{TT}\mathbf{H}_{BT}^{-1} & -\mathbf{H}_{TT}\mathbf{H}_{BT}^{-1}\mathbf{H}_{BB} + \mathbf{H}_{TB} \\ -\mathbf{H}_{BT}^{-1} & \mathbf{H}_{BT}^{-1}\mathbf{H}_{BB} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{BB} & \mathbf{H}_{BT} \\ \mathbf{H}_{TB} & \mathbf{H}_{TT} \end{bmatrix} = \sum_i^N \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \begin{Bmatrix} \phi_{Bi} \\ \phi_{Ti} \end{Bmatrix} [\bar{\phi}_{Bi} \bar{\phi}_{Ti}]^T \quad (21)$$

なお、 $m_i = [\bar{\phi}_i]^T[\mathbf{M}']\{\phi_i\}$ であり、 $\{\phi_{Bi}\}$, $\{\phi_{Ti}\}$ は $\{\phi_i\}$ における $(\cdot)_B$, $(\cdot)_T$ 成分、 (\cdot) は共役である。

次に、 $[\mathbf{G}]$ について次の固有値問題を設定する。

$$[\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} \quad (22)$$

式(22)の固有モードには、底辺から上辺に向かって進行するモードと、上辺から底辺に向かって進行するモードとが半数ずつ存在する。 $[\mathbf{K}_T]$ を作成する場合は前者を、 $[\mathbf{K}_B]$ の場合は後者を抽出し、それらを列方向に並べて次の正方行列をつくる。

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_0] &= [\mathbf{U}_1 \cdots \mathbf{U}_{N_1/2}], \\ [\mathbf{F}_0] &= [\mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_{N_1/2}] \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 N_1 は全モード数である。

インピーダンス行列 $[\mathbf{K}_B]$, $[\mathbf{K}_T]$ は、 $[\mathbf{U}_0]$, $[\mathbf{F}_0]$ により次式で与えられる。

$$[\mathbf{K}_B], [\mathbf{K}_T] = [\mathbf{F}_0\mathbf{U}_0^{-1}] \quad (24)$$

3.5 解析手順

これまでに述べた解析の流れを要約すると、以下のとおりとなる。

まず式(24)より、Floquet 変換後の周期場に対するインピーダンス行列 $[\mathbf{K}_B]$, $[\mathbf{K}_T]$ を求める。次に、式(18)より Floquet 変換後の加振応答を解く。その結果より仮想境界上の節点変位と内部節点力を抽出する。同様の操作を各 Floquet 波数の下で実行し、式(12)の逆 Floquet 変換を介して式(9)の行列 $[\mathbf{U}_P]$, $[\mathbf{F}_P]$ を求め、欠陥外部領域のインピーダンス行列 $[\mathbf{K}_S]$ を得る。最後に、式(8)を解いて本問題の解を得る。

4. 解析例

4.1 SV 波入射を受ける円形空洞

(1) 解析条件

本研究で構成した手法の妥当性を確認する目的で、図-4に示すように等方均質な無限弾性体中に円形空洞が一つ存在する場合を対象に、SV 平面波を入射する問題を解析する。解析では、空洞周囲の様な無限領域を「均質な周期場」と見なし、 $L \times L$ の正方形ユニットセルで表現した。一方、空洞半径は $L/4$ とした。欠陥領域境界 S は空洞境界と一致する様に設定し、その下で S 上のインピーダンス行列 $[\mathbf{K}_S]$ を求めるために、一様場のユニットセルを図-5に示す3次元セレンディピティ要素により分割した。なお、弾性体のポアソン比は 0.3 としている。この問題では欠陥部が空洞で与え

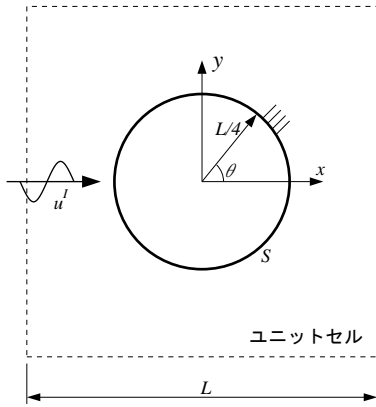


図-4 SV 波入射を受ける円形空洞とユニットセル

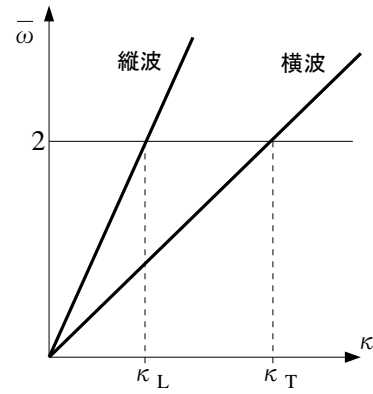


図-7 縦波・横波のモード線

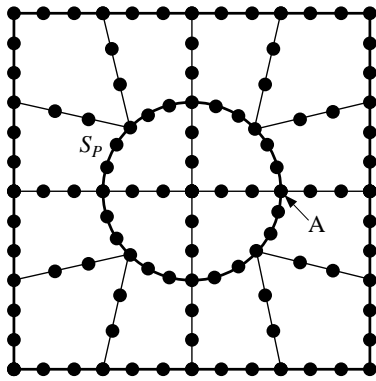


図-5 ユニットセルの要素分割

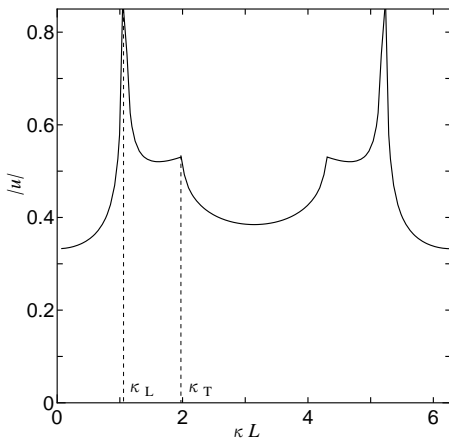


図-6 変位の Floquet 変換の分布

られているので、 S 上の応答は次式を解いて求めることができる。

$$[\mathbf{K}_S]\{\mathbf{U}^D\} = \{-\mathbf{F}^I + \mathbf{K}_S \mathbf{U}^I\} \quad (25)$$

(2) 特異積分の処理

以上の設定の下、3. に述べた Floquet 変換後の加振解析を実施した。当該解析の後、式(12)の解の逆 Floquet 変換を計算することとなる。その際に、Floquet 変換に

おける被積分関数である S_p 上の節点変位や内部節点力の特異性に留意する必要がある。図-5 中に示した節点 A を水平加振した場合を例に、同節点における水平変位の Floquet 変換の絶対値を求めたものを図-6 に示す。なお、図の横軸は Floquet 波数であり、 L と横波伝播速度 C_T とで無次元化した周波数 $\bar{\omega} = L\omega/C_T = 2$ の下で加振した結果を示している。図より、 $0 < \kappa L < \pi$ 、 $\pi < \kappa L < 2\pi$ の各区間に変位が急変する箇所が二つずつ対称に存在している様子が確認できる。当該点は、図-7 の様に横波と縦波のモード線が $\bar{\omega} = 2$ の水平線と交差する点における κ に一致している。

図-6 の $\kappa = \kappa_L$ における特異性を確認するため、当該点近傍の被積分関数の変動の様子を図-8 に示した。図の横軸は、 $\kappa < \kappa_L$ の範囲で $r = \kappa_L - \kappa$ と定義した κ の相対値である。また、縦軸は $|u|$ に \sqrt{r} をかけたものを表示しており、 $r \rightarrow 0$ において一定値に近づいていることから、当該の特異性は $1/\sqrt{r}$ で与えられるものであり、数値積分可能なことがわかる。

当該の特異性は以下のように理解することができる。当方均質な波動場を例に考えると、 x, y 方向の波数で与えられる二次元平面において、解の二重 Floquet 変換は半径 $r = R := \omega/C$ の円周上で $1/(r - R)$ の特異性を持つ。ただし、 C は横波または縦波の伝播速度である。本解析では x 方向にのみ逆 Floquet 変換を実行しているが、 y 方向へのインピーダンス行列の導入は、 y 方向に逆 Floquet 変換を適用した場合と等しい結果を与える。そこで、 x 方向波数 κ 一定の下、上述の特異項を y 方向波数について積分(逆 Floquet 変換)すると、 $1/\sqrt{|R - \kappa|}$ の特異性を得る。これが図-6, 8 における特異性である。

この特異積分の計算に際し、まず全積分区間を特異点(被積分関数の急変箇所)で区切り、さらに各区間を複数の小区間に細分割する。その下で、特異積分を含まない小区間は通常の Gauss 積分で計算する。一方、端点に特異性を持つ小区間は、以下に示す座標変換を施して特異性を除去した後に Gauss 積分を適用する。

具体例として、 (κ_1, κ_2) で与えられる小区間の左端(κ_1)に特異点が存在する場合の処理について示す。この場合は、次式により変数を ξ に変換する。

$$\kappa = \kappa_1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4}(1 + \xi)^2 \quad (26)$$

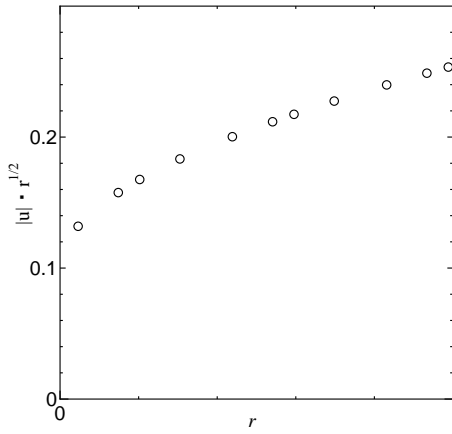


図-8 被積分関数の特異性

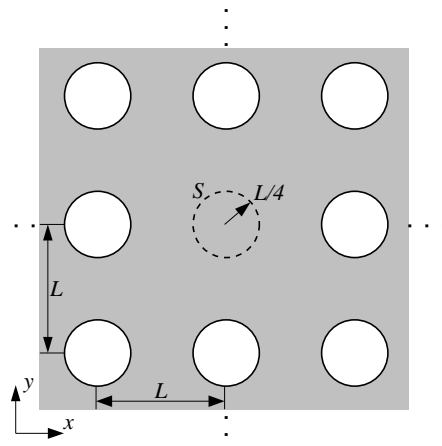


図-10 欠陥を有する周期空孔

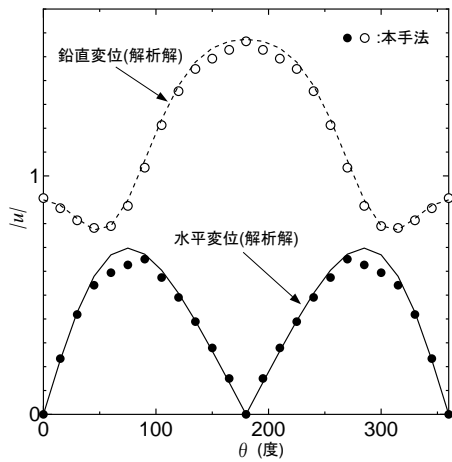


図-9 空洞境界上の変位分布

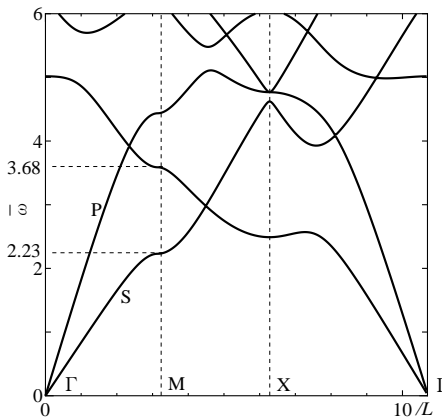


図-11 空孔正方格子の分散曲線

この時、積分は次式の様に変形できる。

$$\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(\kappa) d\kappa = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} \int_{-1}^1 f(\kappa(\xi)) \cdot (1 + \xi) d\xi \quad (27)$$

この積分における前述の特異成分 $1/\sqrt{k-\kappa_1}$ は、 $1/(1+\xi)$ に比例する項に変換されるので、式(27)右辺の被積分項 $(1+\xi)$ の存在により特異性は相殺され、よって通常の Gauss 積分で評価可能となる。

なお、以降に示す解析では、精度を確認の上、小区間の基準長を $0.2/L$ と設定し、その下で特異点で区切られる各区間を等分割した。また、Gauss 積分には 4 点積分を用いた。

(3) 解析結果

$\bar{\omega} = 2.9$ における空洞境界上の変位の絶対値を図-9 に示す。なお、入射波は図-4 のように x 軸方向へ進行する振幅 1 の SV 平面波により与えた。図には解析解¹⁷⁾も示した。本手法による結果と解析解との概ね良好な一致が得られており、提案法の妥当性を確認することができる。

4.2 欠陥を有する周期構造の入射波動解析

図-10 に示す様に、格子間隔 L の正方格子状に半径 $L/4$ の円形空孔が配置され、一箇所に空孔の無い欠陥が存在する弾性波動場を考える。当該の周期場における分散曲線を図-11 に示す。なお、弾性体のポアソン比は 0.4 としている。図は、波数空間の第 1 Brillouin ゾーンにおける 3 つの頂点 $\Gamma(0,0), M(\pi/L,0), X(\pi/L, \pi/L)$ を結ぶ辺上の分散曲線を展開したものである。Gamma-M 上におけるモード S と P は、それぞれ x 軸方向へ進行する横波と縦波に相当するバルク波である。図より、Gamma-M 上では、無次元化円振動数 $\bar{\omega}$ の値が 2.23 から 3.68 までの間の周波数帯において S 波モードが存在していない様子が確認できる。

解析では、この周波数帯 (S 波モードのストップバンド) とその近傍の $\bar{\omega}$ を対象に、最大振幅 1 の P 波モード入射 (x 方向) に対する欠陥部の応答を求めた。ここでは $\bar{\omega}=3.57$ (ストップバンド内) と、 $\bar{\omega}=3.68$ (ストップバンド上端) での応答について、それぞれ図-12,13 に示す。図の横軸 θ は、図-4 と同様に定義した円周上の角度である。なお、これらは欠陥境界 S 上での変位の絶対値を図示したものである。図には、欠陥の無い完全な周期場の円形空孔境界における変位応答も破線で

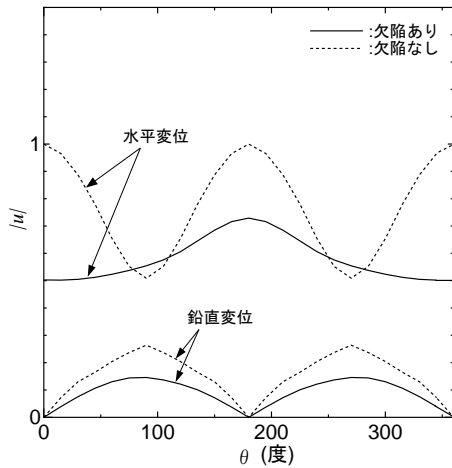


図-12 欠陥境界 Γ 上の変位応答 ($\bar{\omega}=3.57$)

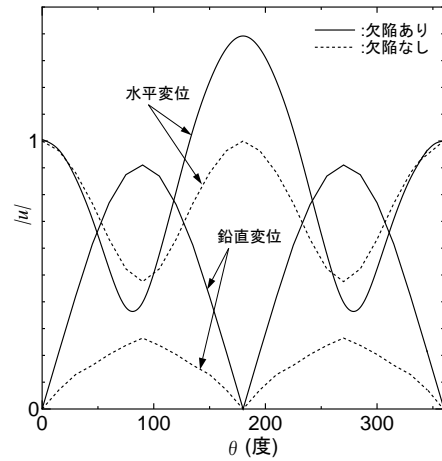


図-13 欠陥境界 Γ 上の変位応答 ($\bar{\omega}=3.68$)

示した．完全周期場の応答には，両周波数間で大差は認められない．一方，欠陥を有する場合には， $\bar{\omega}=3.68$ での変位応答が大きな値を示しており，周波数の差がわずかであるにも関わらず，応答には顕著な変化が認められる． $\bar{\omega}=3.68$ は S 波モードのバンド端に相当していることから，欠陥部で発生した乱れの一部が周囲の周期場で共振したことによる増幅がその原因として考えられる．

4.3 欠陥部に局在するモードの解析

如何なる波数においてもモードが全く存在しないストップバンドを有する周期場の場合，欠陥の導入によりその近傍に局在する新たなモードがストップバンド内に現れることがある．これは，当該周波数域内では格子内の波動伝播が遮られ，欠陥部に波動が閉じ込められることによるものである．

本手法によれば，このモードの存在は，式 (8) の求解行列の行列式がゼロとなる周波数の探索により検出することができる．なお，以下の解析では，本条件の探索に当たり，次の固有値問題を設定した．

$$[\tilde{\mathbf{K}}]\{\psi\} = \lambda\{\psi\} \quad (28)$$

ここで， $[\tilde{\mathbf{K}}]$ は式 (8) 左辺の行列である． $\det(\tilde{\mathbf{K}})=0$ は式 (28) の絶対最小固有値がゼロとなる条件により評価し，この条件をみたす円振動数を探索した．

完全なストップバンドを持つ周期構造として，母材をエポキシ樹脂，介在物を鉛で与えた複合材を想定し，母材のポアソン比を 0.37，母材に対する介在物の質量密度比を 9.6，せん断剛性比を 3.5，ポアソン比を 0.44 と設定した．なお，周期場の幾何条件や欠陥境界 S の設定等は図-10 に示したものと同じに与えた．ただし，図-10 の空洞は介在物に置き換えるものとする．

完全な周期場の分散曲線を図-14 に示す． $\bar{\omega}=3.61 \sim 4.74$ の周波数帯においては，全ての波数に亘り分散曲線が存在していないことが確認できる．式 (28) より，このバンド域周辺において求めた絶対最小固有値の分布を図-15 に示す．図より，ストップバンド内に $\det(\tilde{\mathbf{K}})=0$

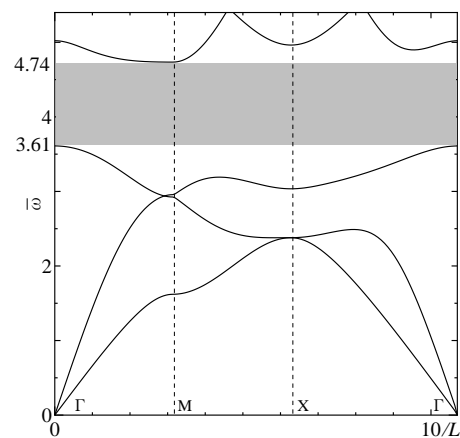


図-14 エポキシ・鉛複合材の分散曲線

をみたく周波数が三箇所存在していることがわかる．これらの周波数において，式 (28) のモード $\{\psi\}$ より得た変位振動のスナップショットを図-16 に示す．なお，式 (28) の固有モードからは欠陥境界 S の内側における応答のみ得ることができる．そのため，図は欠陥内部での変位モードを示したものとなっている．フォトニック結晶と同様に弾性体においても局所モードが存在し，さらに，それらは (a) 並進・(b) 回転・(c) せん断変形により特徴付けられたもので与えられていることがわかる．また，図-16(a) には y 軸方向に変位する並進モードを示したが，問題の対称性より同一周波数において x 方向に振動するモードも共存する．

5. おわりに

一箇所にのみ欠陥を有する二重周期平面ひずみ場の動弾性解析法を構築した．対象とする問題を，欠陥部とその周囲の無限周期場とに分離して解く方法を採用した．後者はそれと等価なインピーダンス行列で表現し，前者の運動方程式に帰着させることで求解方程式を構成した．本手法により，有限要素方程式の枠組みの下

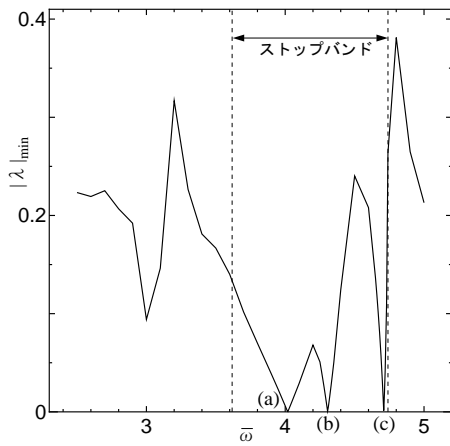


図-15 絶対最小固有値の分布

で無限周期場を捉えつつ、欠陥の存在による応答の乱れを適切に解析することが可能となった。

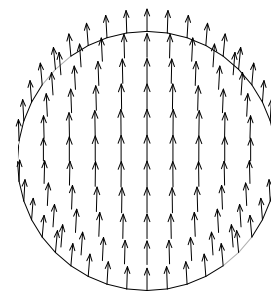
解析例として、周囲の周期場における波動モードを欠陥部に入射した場合の応答を求めた。その結果、S波モードのストップバンド端において、P波モード入射に対する応答が顕著な増幅を示す様子が確認された。

また、構成した手法に基づき、欠陥部近傍に局在するモードの探索を試みた。その結果、ストップバンド内において三つのモードの存在を確認することができた。

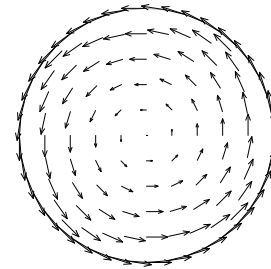
なお、本論文では面内波動問題を対象としたが、言うまでも無く本手法は面外波動問題へも容易に適用可能である。

参考文献

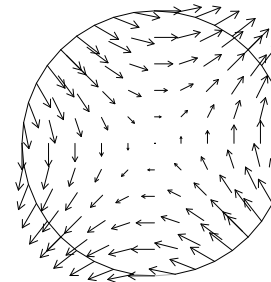
- 1) Kushwaha, M.S., Halevi, P. and Martínez, G.: Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites, *Pys. Rev. B*, **49**, 2313-2322, 1994.
- 2) Phani, A.S., Woodhouse, J. and Fleck, N.A.: Wave propagation in two-dimensional periodic lattices, *J. Acoust. Soc. Am.*, **119**, 1995-2005, 2006.
- 3) Sakoda, K., Kawai, N., Ito, T., Chutinan, A., Noda, S., Mitsu-yu, T. and Hirao, K.: Photonic bands of metallic systems. I. Principle of calculation and accuracy, *Phy. Rev. B*, **64**, 045116, 2001.
- 4) Chen, Y. and Ye, Zhen.: Acoustic attenuation by two-dimensional arrays of rigid cylinders, *Phy. Rev. Lett.*, **87**, 184301, 2001.
- 5) Duclos, G. and Clément, A.H.: Wave propagation through arrays of unevenly spaced vertical piles, *Ocean Eng.*, **31**, 1655-1668, 2004.
- 6) Nakashima, K., Biwa, S. and Matsumoto, E.: Elastic wave transmission and stop band characteristics in unidirectional composites, *J. Solid Mech. Mater. Eng.*, **2**, 1195-1206, 2008.
- 7) Koshiba, M. and Saito, K.: Numerical verification of degeneracy in hexagonal photonic crystal fibers, *IEEE Photon. Tech. Lett.*, **13**, 1313-1315, 2001.
- 8) Håkansson, A. and Sánchez-Dehesa, J.: Acoustic lens design by genetic algorithms, *Phys. Rev. B*, **70**, 214302, 2004.
- 9) Caballero, D., Sánchez-Dehesa, J., Rubio, C., Martínez-Sala, R., Sánchez-Pérez, V., Meseguer, F. and Llinares, J.: Large two-dimensional sonic band gaps, *Phys. Rev. E*, **60**, R6316-6319, 1999.
- 10) Koshiba, M.: Wavelength division multiplexing and demultiplexing with photonic crystal waveguide couplers, *J. Lightwave Tech.*, **19**, 1970-1975, 2001.
- 11) Abe, K., Fujishita, S. and Koro, K.: Development of transmitting boundary for periodically supported rails, *J. Mech. Sys. Transport. Logist.*, **3**, 44-52, 2010.
- 12) 阿部和久, 中山 悠, 紅露一寛: 中間層を有する周期複合材の弾性波動解析, 応用力学論文集, **13**, 1041-1048, 2010.
- 13) Abe, K., Kikuchi, A. and Koro, K.: Wave propagation in an infinite track having an irregular region, *Noise and Vibration Mitigation for Rail Transportation Systems*, T.Maeda



(a) $\bar{\omega}=4.02$



(b) $\bar{\omega}=4.31$



(c) $\bar{\omega}=4.71$

図-16 欠陥部の局所モード

et al. (Eds.), 71-79, Springer, 2012.

- 14) 森田樹一郎, 西村直志: 周期性の乱れを含む領域における Helmholtz 方程式の境界値問題の解法について, 計算数理工学論文集, **11**, 65-70, 2011.
- 15) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G.: Free field vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, *J. Sound Vib.*, **283**, 173-199, 2005.
- 16) 阿部和久, 笠原祐樹, 紅露一寛: 半無限周期構造における表面波モード解析手法, 応用力学論文集, **11**, 1031-1038, 2008.
- 17) Eringen, A.C. and Şuhubi, E. : *Elastodynamics*, Vol.II, Academic Press, Inc., 1975.

(2012年3月8日受付)