土木学会論文集 A2（応用力学），Vol. 68, No. 2（応用力学論文集 Vol. 15），I_237-I_248, 2012.

2次元定常スカラー波動問題における wavelet 境界要素法と有限要素法との結合解法

A coupling method of wavelet BEM and FEM for 2-D steady-state scalar wave equation

紅露一寛*・阿部和久**
Kazuhiro KORO, Kazuhisa ABE

*正会員　博士（工学）　新潟大学准教授　大学院自然科学研究科（〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地）
**正会員　工博　新潟大学教授　工学部建設学科（〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地）

A coupling method of FEM and wavelet BEM is developed for 2-D steady-state scalar wave equation. The wavelet BEM is formulated using the non-orthogonal spline wavelets. These wavelets have the vanishing moment property independent of the order of piesewise polynomials. The coefficient submatrices of the reduced equations on the wavelet-based BEM are also compressed with the truncation of small matrix entries. The linear algebraic equations with a sparse coefficient matrix are solved using iterative solver, e.g. Bi-CGStab, GPBi-CG and GMRES. In particular, the use of GMRES shows rapid and robust convergence in the present numerical experiments.

Key Words : *wavelet BEM, FEM, FE-BE coupling method, 2-D steady-state scalar wave equation, matrix compression*

1. はじめに

境界要素法 (BEM)[1),2)]は，原則として境界上の離散化のみで近似解を得られる方法であり，解析自由度を有限要素法 (FEM) などの領域型解法に比べて小さく設定できる利点を有している．しかしながら，境界要素法による離散化の後に得られる連立一次方程式は，有限要素法とは異なり，密な係数行列を有する．そのため，一般的な境界要素解析においては，N を解析自由度として，$O(N^2)$ の記憶容量を必要とし，求解計算に $O(N^3)$ の計算量を要してしまい，結果的に大規模境界要素解析が困難であることが弱点とされてきた．そのため，高速多重極展開法[3),4)]や wavelet を離散化に用いる方法（wavelet 法）[5),6)]などの高速化・効率化手法の開発・実用化に関する研究が精力的に進められている．

Wavelet を用いた境界要素法（wavelet 境界要素法, wavelet BEM）[5)−15)] は，計算効率に関する境界要素法の弱点を解決する高速化・効率化解法の一つである．Wavelet は境界積分方程式の未知量の近似と Galerkin 法による離散化の重み関数として用いられる．離散化により得られた係数行列の成分の大半は，wavelet の有するゼロモーメント性（所定次以下の単項式と wavelet との内積が 0 となる性質）により微小なものとなる．実際の解析においては，微小係数成分の切り捨てにより係数行列を疎行列化することで，境界要素解析の計算効率を改善する．Wavelet BEM は，係数行列における遠方からの影響係数をメモリ上に保存する必要のない高速多重極展開法には計算効率の改善効果は及ばないものの，複雑な定式化を経ることなく簡易に境界要素解析を効率化できる利点を有している．

Wavelet BEM においては，離散化に用いる wavelet 級数の最高階層を大きくするほど，解析自由度に対する scaling 関数の個数の比率が低いほど，得られる係数行列は高いスパース性を示す．しかしながら，領域形状が複雑で wavelet 級数を定義する部分境界を多数設定しなければならない場合では，多数の scaling 関数を用い，低い最高階層の wavelet 級数で境界値関数を近似するのが最も合理的となってしまい，全解析自由度に占める scaling 関数の個数が相対的に大きくなり，係数行列のスパース性がさほど期待できなくなる．また，曲率の変化の大きい曲線境界上で wavelet 級数を定義する場合には，境界積分区間において被積分関数の変動における Jacobian の影響が大きくなるため，サポート間距離が小さくない場合でも係数成分が微小とならないことが考えられる．そのため，wavelet BEM を適用する場合には，wavelet 導入による計算効率の改善効果ができるだけ高くなるよう，wavelet 級数を定義する部分境界は直線境界に設定し，部分境界数はできるだけ少なくすることで近似に用いる scaling 関数をできるだけ少なくし，かつ級数の最高階層をできるだけ高く設定するのが肝要である．

なお，境界要素法は，解析自由度が小さく設定できる利点の他に，開領域問題への適用が領域型解法に比べて有利である利点がある[2)]．定式化においては，境界積分方程式を導出する過程で用いる基本解として放射条件を満たす解を選ぶことが可能であるため，開領域

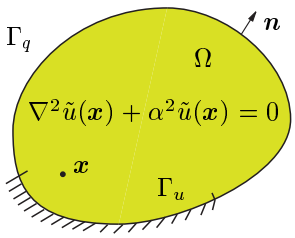
問題において仮想の粘性境界や伝達境界を設定する必要がなく，実境界上の離散化だけで近似解を得ることができる．特に定常波動問題においては，仮想の境界を設けることで生じる物理的に不合理な応答を排除することは，非定常解析の場合よりも強く求められる．しかし，前述の通り，境界要素法のみでは計算負荷が小さくなく，解析においては高速多重極展開法や wavelet 法などの高速化・効率化解法を適用するか，もしくは有限要素法における波動エネルギーの放射境界として境界要素法を用いる有限要素・境界要素結合解法[16]を適用するのが解法選択上合理的な判断である．有限要素・境界要素結合解法を用いて定常波動解析を行なう場合，当然のことながら計算効率の面からは境界要素法の適用を最小限に抑えることが望ましい．しかしながら，その適用を最小限としても，結合方程式の係数行列には密な小行列の部分ができてしまう．有限要素法由来の小行列の部分が疎となることを勘案すると，この境界要素法適用部分も可能な限り疎な行列とすることは，結合解法による定常波動解析の計算効率を向上させる上で重要であると思われる．

そこで本研究では，2 次元定常スカラー波動問題における境界要素法と有限要素法との結合解法を対象に，wavelet BEM を適用することによる当該結合解法の計算効率の向上の可能性について検討する．なお，有限要素法と wavelet 境界要素法との結合解法には，wavelet BEM が複雑形状の問題において計算効率の改善効果が低減する問題点を解決する役割も担っている[17]．文献[17]では，Laplace 問題・Poisson 問題の結合解法の定式化および近似解の誤差，係数行列の圧縮性能に関する解析結果を示しているが，定常スカラー波動問題の定式化および解析結果は示されていない．以下では，まず当該の有限要素・境界要素結合解法の定式化を示す．有限要素法，wavelet 境界要素法の両手法を用いて離散化したのち，結合面上でポテンシャル値の連続条件とフラックスの流出入の釣り合い条件を課すことで，結合方程式を導出する．方程式の結合に際しては，境界要素方程式の縮約計算を伴うため，係数行列成分の切り捨ては境界要素方程式の係数行列作成時と代数計算による縮約演算終了後の 2 段階で実施する．提案手法の定式化の妥当性，微小な係数行列成分の切り捨てによる係数行列の圧縮の可能性，および結合方程式の求解計算に対する反復解法の導入可能性について，簡単な数値実験を通して検証する．

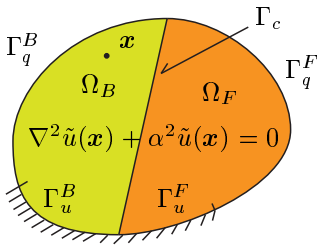
2. 2 次元定常スカラー波動問題の定式化

図–1(a) に示す 2 次元定常スカラー波動問題の支配方程式と境界条件は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} &\nabla^2\tilde{u}(\boldsymbol{x}) + \alpha^2\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad (\boldsymbol{x} \in \Omega) \\ &\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = \bar{\tilde{u}}(\boldsymbol{x})\ (\boldsymbol{x} \in \Gamma_u), \qquad \tilde{q}(\boldsymbol{x}) = \bar{\tilde{q}}(\boldsymbol{x})\ (\boldsymbol{x} \in \Gamma_q) \end{aligned} \tag{1}$$



(a) 対象領域と問題設定.



(b) 境界要素領域 Ω_B と有限要素領域 Ω_F との分割.

図–1 対象とする問題.

ここで，Ω は領域，Γ は境界であり，$\Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma$，$\Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$ であるものとする．また，$\tilde{u}$ はポテンシャル，$\tilde{q} = \partial\tilde{u}/\partial n_x$（$n_x$: 点 $\boldsymbol{x}$ での外向き法線方向）であり，$\bar{\tilde{u}}$，$\bar{\tilde{q}}$ はともに既知境界値である．$\alpha = \omega/c$ であり，ω は円振動数，c は波動伝播速度である．なお，Ω が開領域の場合には，次の条件を満足するものとする．

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \tilde{u}(\boldsymbol{x}) = \tilde{u}_{inc}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

次に，解析対象領域 Ω を wavelet 境界要素法を適用する領域 Ω_B と有限要素法を適用する領域 Ω_F とに分割する．$\Omega_B \cup \Omega_F = \Omega$，$\Omega_B \cap \Omega_F = \emptyset$ となるように領域を分割すると，Γ_c を Ω_B と Ω_F との結合面として，

- 領域 Ω_B

$$\begin{aligned} &\nabla^2\tilde{u}(\boldsymbol{x}) + \alpha^2\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad (\boldsymbol{x} \in \Omega_B) \\ &\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = \bar{\tilde{u}}(\boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x} \in \Gamma_u^B) \\ &\tilde{q}(\boldsymbol{x}) = \bar{\tilde{q}}(\boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x} \in \Gamma_q^B) \end{aligned} \tag{3}$$

- 領域 Ω_F

$$\begin{aligned} &\nabla^2\tilde{u}(\boldsymbol{x}) + \alpha^2\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad (\boldsymbol{x} \in \Omega_F) \\ &\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = \bar{\tilde{u}}(\boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x} \in \Gamma_u^F) \\ &\tilde{q}(\boldsymbol{x}) = \bar{\tilde{q}}(\boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x} \in \Gamma_q^F) \end{aligned} \tag{4}$$

のように各領域の境界値問題を得る．なお，$\Gamma_u^B \cup \Gamma_u^F = \Gamma_u$，$\Gamma_u^B \cap \Gamma_u^F = \emptyset$，$\Gamma_q^B \cup \Gamma_q^F = \Gamma_q$，$\Gamma_q^B \cap \Gamma_q^F = \emptyset$ であるものとし，結合面 Γ_c は $\Gamma_c \cap (\Gamma_u^B \cup \Gamma_q^B) = \emptyset$ を満たすものとする．

3. Wavelet 境界要素法による離散化

まず，wavelet 境界要素法を適用する領域 Ω_B の離散化について考える．当該領域の境界値問題に対応する

境界積分方程式は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
c(\boldsymbol{\xi})\tilde{u}(\boldsymbol{\xi}) &+ \int_{\Gamma^B} \tilde{q}^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\tilde{u}(\boldsymbol{x})d\Gamma_x \\
&- \int_{\Gamma^B} \tilde{u}^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\tilde{q}(\boldsymbol{x})d\Gamma_x = \tilde{u}_{inc}(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned} \tag{5}
$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は積分点，$\boldsymbol{\xi}$ はソース点であり，境界 Γ^B は $\Gamma^B = \Gamma^B_u \cup \Gamma^B_q \cup \Gamma_c$ で定義するものとする．$c(\boldsymbol{\xi})$ は点 $\boldsymbol{\xi}$ における境界のなす角で決まる関数であり，$\tilde{u}_{inc}(\boldsymbol{\xi})$ は外部問題では所定の関数で与えるが，内部問題の場合はゼロとなる．$\tilde{u}^*$，$\tilde{q}^*$ は基本解であり，次式で定義する．

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) &:= \frac{i}{4}H_0^{(1)}(\alpha|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|) \\
\tilde{q}^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) &:= \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial n_x}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})
\end{aligned} \tag{6}
$$

ここで，i は虚数単位であり，$H_0^{(1)}$ は 0 次第 1 種 Hankel 関数である．

式 (5) の境界積分方程式を離散化するために，式中の $\tilde{u}$ と $\tilde{q}$ を次式の wavelet 級数で近似する．

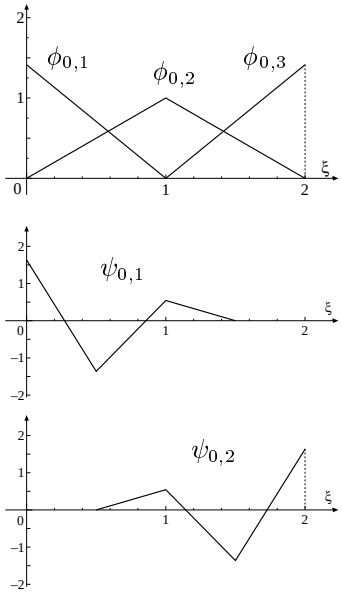
$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(\boldsymbol{x}) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{\tilde{u}}_{0,j}\phi_{0,j}(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=1}^{n_w(k)} \tilde{\tilde{u}}_{k,l}\psi_{k,l}(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{i=1}^{N_B} \tilde{U}_i w_i(\boldsymbol{x}) \\
\tilde{q}(\boldsymbol{x}) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{\tilde{q}}_{0,j}\phi_{0,j}(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=1}^{n_w(k)} \tilde{\tilde{q}}_{k,l}\psi_{k,l}(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{i=1}^{N_B} \tilde{Q}_i w_i(\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{7}
$$

なお，$\hat{\tilde{u}}_{0,j}$，$\tilde{\tilde{u}}_{k,l}$，$\hat{\tilde{q}}_{0,j}$，$\tilde{\tilde{q}}_{k,l}$ はそれぞれ $\tilde{u}$，$\tilde{q}$ の展開係数であり，$\tilde{U}_i$，$\tilde{Q}_i$ はこれらをまとめて表わしたものである．$w_i(\boldsymbol{x})$ は基底関数 $\phi_{0,j}(\boldsymbol{x})$，$\psi_{k,l}(\boldsymbol{x})$ をまとめて表わしたものである．また，$\phi_{0,j}$，$\psi_{k,l}(j = 1, 2, \ldots, n_s$，$k = 0, 1, \ldots, m$，$l = 1, 2, \ldots, n_w(k))$ の総数は N_B となるものとする．

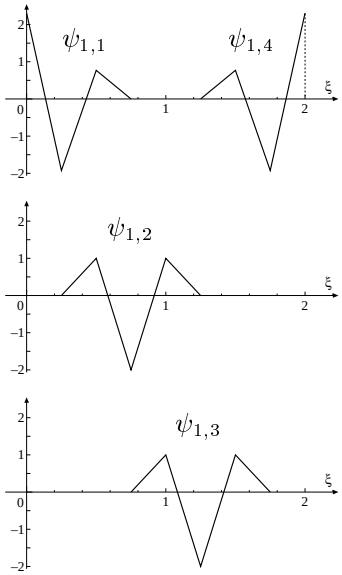
式 (7) において，$\phi_{0,j}(\boldsymbol{x})$，$\psi_{k,l}(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ scaling 関数，wavelet であり，本研究では区間線形・2 次ゼロモーメント性を有する非直交 wavelet[6)]を用いる．この場合，scaling 関数は**図–2**(a) に示すような区分線形関数であり，部分境界内での scaling 関数の配置は**図–2**(a) に示すとおりである．また，wavelet は次のゼロモーメント条件

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \zeta^p \psi_{k,l}(\zeta)d\zeta = 0, \quad (p = 0, 1) \tag{8}
$$

を満足し，ともに 1 種類ずつの内部 wavelet と境界 wavelet から構成される．その形状および部分境界内での wavelet 基底の配置は**図–2**(b) に示す通りである．なお，本論文で示す定式化は，区間線形非直交 wavelet を用いる限りにおいては有効であり，2 次以外のゼロモーメント次数に設定して離散化することも可能である．



(a) 階層 0 での scaling 関数と wavelet の配置.



(b) 階層 1 での wavelet の配置.

図–2 区間線形・2 次ゼロモーメント性を有する非直交 wavelet の形状と有界な展開区間における基底関数の配置方法（区間 [0, 2] での配置）.

式 (5) に式 (7) を代入して得られる残差 $r(\boldsymbol{\xi})$ に対し，$w_i(i = 1, 2, \ldots, N_B)$ を重み関数として Galerkin 法を適用すると，次の連立 1 次方程式を得る．

$$
\boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{Q}} + \tilde{\boldsymbol{u}}_{inc} \tag{9}
$$

ここで，$\tilde{\boldsymbol{U}}$，$\tilde{\boldsymbol{Q}}$ は式 (7) の $\tilde{u}$，$\tilde{q}$ についての wavelet 展開係数を収納したベクトルであり，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ は係数行列である．$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ の成分をそれぞれ g_{ij}，h_{ij} とし，$\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}$ の成分を $(\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc})_i$ とすると，g_{ij}，h_{ij}，$(\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc})_i$ はそれぞ

れ次式で生成される．

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &:= \int_{\Gamma^B} w_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma^B} \tilde{u}^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) w_j(\boldsymbol{x}) d\Gamma_x d\Gamma_\xi \\
h_{ij} &:= \int_{\Gamma^B} c(\boldsymbol{\xi}) w_i(\boldsymbol{\xi}) w_j(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_\xi \\
&\quad + \int_{\Gamma^B} w_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma^B} \tilde{q}^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) w_j(\boldsymbol{x}) d\Gamma_x d\Gamma_\xi \\
(\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc})_i &:= \int_{\Gamma^B} w_i(\boldsymbol{\xi}) \tilde{u}_{inc}(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_\xi
\end{aligned}
\tag{10}
$$

式 (9) において，係数行列とベクトルを $\Gamma_u^B \cup \Gamma_q^B$ 上の基底関数に関する成分と Γ_c 上の基底関数に関する成分とに分けて整理すると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{bb} & \boldsymbol{H}_{bc} \\ \boldsymbol{H}_{cb} & \boldsymbol{H}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{U}}_b \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_c \end{Bmatrix} \\
&\quad = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{bb} & \boldsymbol{G}_{bc} \\ \boldsymbol{G}_{cb} & \boldsymbol{G}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{Q}}_b \\ \tilde{\boldsymbol{Q}}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(b)} \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(c)} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

ここで，添字 b，(b) はともに $\Gamma_u^B \cup \Gamma_q^B$ 上の基底関数に関する諸量を，添字 c，(c) はともに Γ_c 上の基底関数に関する諸量であることをそれぞれ表わすものとする．

部分境界 $\Gamma_u^B \cup \Gamma_q^B$，$\Gamma_c$ 上のスプライン節点（線形補間の定義点）での $\tilde{u}$，$\tilde{q}$ の値を収納したベクトルをそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{u}}_b$，$\tilde{\boldsymbol{u}}_c$，$\tilde{\boldsymbol{q}}_b$，$\tilde{\boldsymbol{q}}_c$ とすると，これらは次式の wavelet 逆変換（再構成）によって評価することができる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{u}}_b &= \boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{U}}_b, \qquad \tilde{\boldsymbol{q}}_b = \boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{Q}}_b \\
\tilde{\boldsymbol{u}}_c &= \boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{U}}_c, \qquad \tilde{\boldsymbol{q}}_c = \boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{Q}}_c
\end{aligned}
\tag{12}
$$

なお，$\boldsymbol{W}$ は wavelet 逆変換（再構成）を代数的に計算するための変換行列であり，文献[6]で示した非直交 wavelet における wavelet 逆変換を高速 wavelet 変換アルゴリズムで計算する際に用いる各階層での変換行列を再帰的に乗算計算することで構成可能である．この変換行列の構成に際しては，逆行列計算は必要とせずに疎行列の乗算のみを必要とする．

4. 有限要素法による離散化

次に，有限要素法を適用する領域 Ω_F の離散化について考える．重み付き残差法を用いると，式 (4) に対応する次の重み付き残差式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_F} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) d\Omega_x \\
&\quad - \int_{\Omega_F} \alpha^2 \tilde{v}(\boldsymbol{x}) \tilde{u}(\boldsymbol{x}) d\Omega_x = \int_{\Gamma_q^F \cup \Gamma_c} \tilde{q}(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) d\Gamma_x
\end{aligned}
\tag{13}
$$

ここで，$\tilde{v}$ は Ω_F 内で区分的に連続，かつ部分境界 Γ_u^F 上で $\tilde{v} = 0$ であるものとする．

式 (13) を離散化するにあたり，まず領域 Ω_F を N_e 個の有限要素に分割し，任意に選んだ 1 つの要素領域 $\Omega_F^{(e)}$ 上での $\tilde{u}$，$\tilde{v}$（以下，$\tilde{u}^{(e)}$，$\tilde{v}^{(e)}$ で表わす）がそれぞれ次式で与えられるものとする．

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}^{(e)}(\boldsymbol{x}) &\approx \left[\boldsymbol{N}^{(e)}(\boldsymbol{x})\right] \left\{\tilde{\boldsymbol{u}}^{(e)}\right\} \\
\tilde{v}^{(e)}(\boldsymbol{x}) &\approx \left[\boldsymbol{N}^{(e)}(\boldsymbol{x})\right] \left\{\tilde{\boldsymbol{v}}^{(e)}\right\}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

なお，$\boldsymbol{N}^{(e)}(\boldsymbol{x})$ は要素内で定義された形状関数を収納したベクトルであり，本研究では境界要素部分の補間近似との整合性を考慮して，3 節点三角形要素で与えるものとする．$\tilde{\boldsymbol{u}}^{(e)}$，$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(e)}$ は要素領域 $\Omega_F^{(e)}$ を定義するための節点における $\tilde{u}$，$\tilde{v}$ の値をそれぞれ収納したベクトルである．ここで，式 (14) を用いて Ω_F 内の $\partial\tilde{u}/\partial\boldsymbol{x}$，$\partial\tilde{v}/\partial\boldsymbol{x}$ の値 $\partial\tilde{u}^{(e)}/\partial\boldsymbol{x}$，$\partial\tilde{v}^{(e)}/\partial\boldsymbol{x}$ を近似すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}^{(e)}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) &\approx \left[\boldsymbol{B}^{(e)}(\boldsymbol{x})\right] \left\{\tilde{\boldsymbol{u}}^{(e)}\right\} \\
\frac{\partial \tilde{v}^{(e)}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) &\approx \left[\boldsymbol{B}^{(e)}(\boldsymbol{x})\right] \left\{\tilde{\boldsymbol{v}}^{(e)}\right\}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

を得る．

式 (14)，(15) を式 (13) に代入し，領域積分・境界積分を要素ごとに計算すると，次式を得る．

$$
\sum_{e=1}^{N_e} \left\{\tilde{\boldsymbol{v}}^{(e)}\right\}^T \left[\tilde{\boldsymbol{K}}^{(e)}\right] \left\{\tilde{\boldsymbol{u}}^{(e)}\right\} = \sum_{e=1}^{N_e} \left\{\tilde{\boldsymbol{v}}^{(e)}\right\}^T \left\{\tilde{\boldsymbol{f}}^{(e)}\right\}
\tag{16}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\left[\tilde{\boldsymbol{K}}^{(e)}\right] &= \int_{\Omega_F^{(e)}} \left(\left[\boldsymbol{B}^{(e)}(\boldsymbol{x})\right]^T \left[\boldsymbol{B}^{(e)}(\boldsymbol{x})\right] \right. \\
&\qquad \left. - \alpha^2 \left[\boldsymbol{N}^{(e)}(\boldsymbol{x})\right]^T \left[\boldsymbol{N}^{(e)}(\boldsymbol{x})\right] \right) d\Omega_x \qquad (17) \\
\left\{\tilde{\boldsymbol{f}}^{(e)}\right\} &= \int_{\Gamma_q^F \cup \Gamma_c} \left[\boldsymbol{N}^{(e)}(\boldsymbol{x})\right]^T \tilde{q}(\boldsymbol{x}) d\Gamma_x
\end{aligned}
$$

とする．

式 (16) を整理すると，次の連立一次方程式を得る．

$$
\left[\tilde{\boldsymbol{K}}\right] \left\{\tilde{\boldsymbol{u}}\right\} = \left\{\tilde{\boldsymbol{f}}\right\}
\tag{18}
$$

ここで，式 (18) の係数行列および解ベクトル，等価節点力ベクトルを，結合面上の節点での諸量の成分とそれ以外の節点での成分とに分離し，整理すると，次式を得る．

$$
\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{K}}_{cc} & \tilde{\boldsymbol{K}}_{cf} \\ \tilde{\boldsymbol{K}}_{fc} & \tilde{\boldsymbol{K}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}}_c \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{f}}_c \\ \tilde{\boldsymbol{f}}_f \end{Bmatrix}
\tag{19}
$$

なお，下添字 c，f はそれぞれ Γ_c 上の節点，Γ_c 上にない節点に関する諸量であることを表わしている．

5. Wavelet 境界要素法と有限要素法との結合解法

本節では，wavelet を用いた離散化により得られた境界要素方程式 (11) と有限要素方程式 (19) の結合解法の定式化を示す．

まず，式 (11) 第 2 式を $\tilde{\boldsymbol{Q}}_c$ について解く．その結果，次式を得る．

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{Q}}_c = &-\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{G}_{cb}\tilde{\boldsymbol{Q}}_b + \boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cc}\tilde{\boldsymbol{U}}_c \\ &+ \boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cb}\tilde{\boldsymbol{U}}_b - \boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(c)}\end{aligned} \tag{20}$$

これを式 (11) 第 1 式に代入し，整理すると次式を得る．

$$\begin{aligned}&\left[\boldsymbol{H}_{bb} - \boldsymbol{G}_{bc}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cb}\right]\tilde{\boldsymbol{U}}_b + \left[\boldsymbol{H}_{bc} - \boldsymbol{G}_{bc}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cc}\right]\tilde{\boldsymbol{U}}_c \\ &- \left[\boldsymbol{G}_{bb} - \boldsymbol{G}_{bc}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{G}_{cb}\right]\tilde{\boldsymbol{Q}}_b = \tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(b)} - \boldsymbol{G}_{bc}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(c)}\end{aligned} \tag{21}$$

次に，式 (20) で得られた $\tilde{\boldsymbol{Q}}_c$ を wavelet 逆変換し，Γ_c 上の節点における $\tilde{q}$ の値を収納したベクトル $\tilde{\boldsymbol{q}}_c$ を計算する．式 (12) より，

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{q}}_c &= \boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{Q}}_c \\ &= -\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{G}_{cb}\tilde{\boldsymbol{Q}}_b + \boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cc}\tilde{\boldsymbol{U}}_c \\ &\quad + \boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cb}\tilde{\boldsymbol{U}}_b - \boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(c)}\end{aligned} \tag{22}$$

となるから，$\tilde{\boldsymbol{q}}_c$ をさらに等価節点力 $\tilde{\boldsymbol{f}}_c^{(BE)}$ に変換する．その結果，次式の等価節点力ベクトルを得る．

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{f}}_c^{(BE)} &= \boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{q}}_c = \boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{Q}}_c \\ &= -\boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{G}_{cb}\tilde{\boldsymbol{Q}}_b + \boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cc}\tilde{\boldsymbol{U}}_c \\ &\quad + \boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cb}\tilde{\boldsymbol{U}}_b - \boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(c)}\end{aligned} \tag{23}$$

ここで，$\boldsymbol{T}$ は $\tilde{q}$ の節点値 $\tilde{\boldsymbol{q}}_c$ を等価節点力へ変換するための変換行列である．

一方，有限要素領域 Ω_F 側から評価した結合面 Γ_c 上の等価節点力は，式 (19) より，

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_c^{(FE)} = \tilde{\boldsymbol{f}}_c = \tilde{\boldsymbol{K}}_{cc}\tilde{\boldsymbol{u}}_c + \tilde{\boldsymbol{K}}_{cf}\tilde{\boldsymbol{u}}_f \tag{24}$$

となるから，結合面 Γ_c 上で次式を満足することを求める．

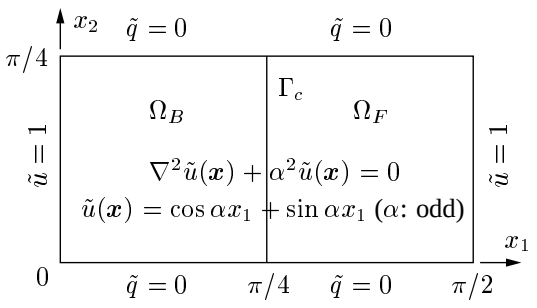
$$\tilde{\boldsymbol{f}}_c^{(BE)} + \tilde{\boldsymbol{f}}_c^{(FE)} = \boldsymbol{0} \tag{25}$$

よって，式 (23)，(24) を式 (25) に代入し，Γ_c 上の $\tilde{u}$ の節点値ベクトル $\tilde{\boldsymbol{u}}_c$ を wavelet 展開係数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{U}}_c$ に $\tilde{\boldsymbol{u}}_c = \boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{U}}_c$ を用いて変換すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\left[\boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cb}\right]\tilde{\boldsymbol{U}}_b + \left[\tilde{\boldsymbol{K}}_{cc}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cc}\right]\tilde{\boldsymbol{U}}_c \\ &- \left[\boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{G}_{cb}\right]\tilde{\boldsymbol{Q}}_b = \left[\boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\right]\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(c)}\end{aligned} \tag{26}$$

以上の結果，最終的に解くべき連立一次方程式は式 (19) 第 2 式，(21)，(26) を連立することにより，次式で得られる．

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{bb} & \boldsymbol{A}_{bc} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{cb} & \boldsymbol{A}_{cc} & \tilde{\boldsymbol{K}}_{cf} \\ \boldsymbol{0} & \tilde{\boldsymbol{K}}_{fc}\boldsymbol{W} & \tilde{\boldsymbol{K}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{U}}_b \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_c \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_f \end{Bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{bq} \\ \boldsymbol{A}_{cq} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \left\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_b\right\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(b)} - \left[\boldsymbol{G}_{bc}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\right]\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(c)} \\ \left[\boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\right]\tilde{\boldsymbol{u}}_{inc}^{(c)} \\ \tilde{\boldsymbol{f}}_f \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{27}$$



図–3 解析対象とした例題の問題設定.

ここで，係数行列ブロック $\boldsymbol{A}_{bb}$，$\boldsymbol{A}_{bc}$，$\boldsymbol{A}_{cb}$，$\boldsymbol{A}_{cc}$，$\boldsymbol{A}_{bq}$，$\boldsymbol{A}_{cq}$ はそれぞれ次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{bb} &= \boldsymbol{H}_{bb} - \boldsymbol{G}_{bc}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cb} \\ \boldsymbol{A}_{bc} &= \boldsymbol{H}_{bc} - \boldsymbol{G}_{bc}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cc} \\ \boldsymbol{A}_{cb} &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cb} \\ \boldsymbol{A}_{cc} &= \tilde{\boldsymbol{K}}_{cc}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cc} \\ \boldsymbol{A}_{bq} &= \boldsymbol{G}_{bb} - \boldsymbol{G}_{bc}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{G}_{cb} \\ \boldsymbol{A}_{cq} &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{G}_{cb}\end{aligned} \tag{28}$$

解析においては，Γ_u^B および Γ_q^B 上での境界条件に応じて式 (28) の未知量と既知量とを整理し，Γ_u^F 上の境界条件を課した上で連立一次方程式を解くことにより，近似解が得られることとなる．

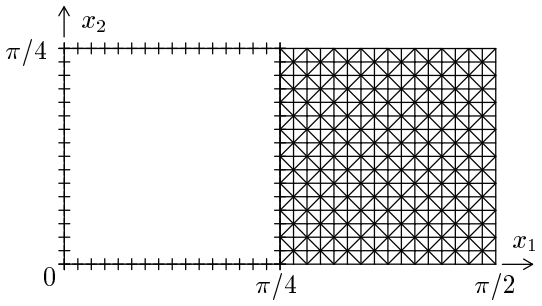
6. 定式化の妥当性および計算効率の検討

6.1 解析条件

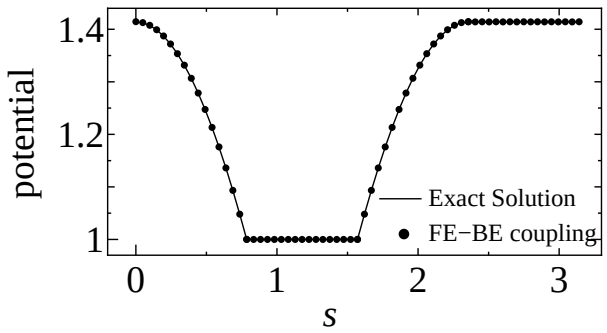
本研究で提案した結合解法の定式化の妥当性，および計算効率を検討する目的で，**図–3** に示す例題を対象に，当該の結合解法を用いて解析を行なった．解析に際し，$\omega = 1$，$c = 1$ に設定した．そのため，$\alpha = \omega/c = 1$ となり，真の解が $\tilde{u} = \cos x_1 + \sin x_1$ で与えられる．また，境界要素法を適用する領域 Ω_B は矩形領域で定義し，この矩形各辺において 2 節で示した wavelet 級数をそれぞれ定義している．そのため，scaling 関数 $\phi_{0,j}$ は各辺で 3 個配置することとなり，scaling 関数の総数は $n_s = 12$ となる．解析時の境界要素部分の解析自由度は，Wavelet 級数の最高階層 m の設定値を変えることで増減させるものとした．

6.2 定式化の妥当性の検討

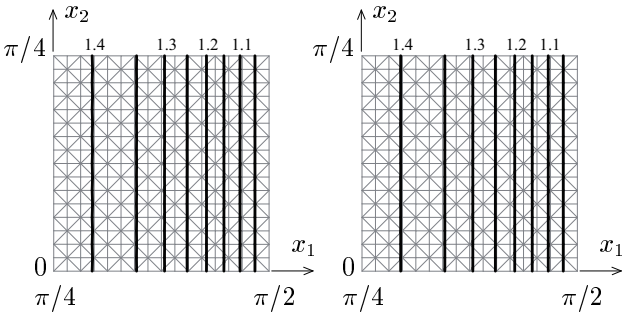
まず，当該の有限要素・wavelet 境界要素結合解法の定式化の妥当性を検討するために，境界要素法適用領域 Ω_B の境界上でのポテンシャル値（実部）の分布と，有限要素法適用領域 Ω_F におけるポテンシャル値（実部）の分布を**図–5** に示す．なお，解析結果は**図–4** の離散化条件で得られたものを示しており，**図–5**(a) 中の s



図–4 境界要素法離散化に用いたスプライン節点，および有限要素分割の例（wavelet 級数の最高階層 $m = 2$，境界要素法の自由度: $N_B = 68$，有限要素法の自由度（節点数）: $N_F = 289$，総自由度: $N = 340$）.



(a) BEM 適用境界 Γ^B でのポテンシャル $\tilde{u}$ の分布（実部）.



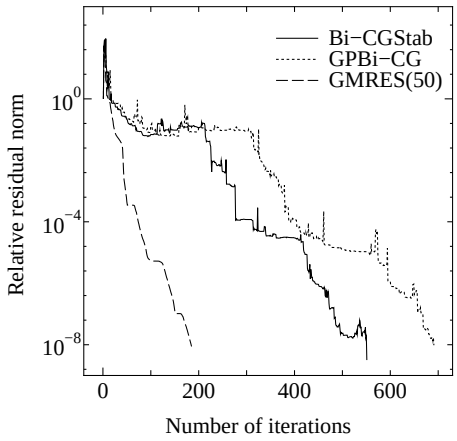
(i) FEM. (ii) Exact solution.

(b) FEM 領域 Ω_F におけるポテンシャル $\tilde{u}$ の分布（実部）.

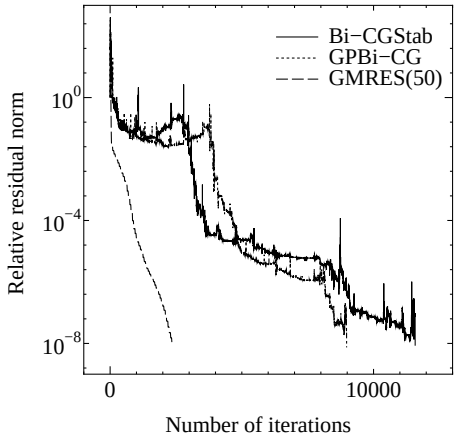
図–5 境界要素解と有限要素解（ポテンシャル $\tilde{u}$）の分布（s は点 $(\pi/4, \pi/4)$ を原点に，反時計方向に定義した周長座標）.

は点 $(\pi/4, \pi/4)$ を原点として反時計方向に定義した周長座標である．また，ポテンシャル値 $\tilde{u}$ の虚部は真の解が $\mathrm{Im}(\tilde{u}) = 0$ となり，当該手法により得られた解は離散化誤差とみなせる程度の変動しか観測されなかったため，図示を省略することとした．

図–5(a) より，Ω_B の境界上における $\tilde{u}$ の近似解は，真の解と一致している．また，**図–5**(b) では，Ω_F の内部における $\tilde{u}$ の近似解の等値線は，真の解のそれと一致している．以上の結果より，本論文で示した有限要素・境界要素結合解法の定式化が妥当なものであることが確認できる．



(a) 解析自由度 $N = 340(N_B = 68, N_F = 289)$.



(b) 解析自由度 $N = 1188(N_B = 132, N_F = 1089)$.

図–6 反復解法の収束性.

6.3 反復解法の適用可能性

次に，結合方程式 (27) に境界条件を適用して得られる連立一次方程式を解く際に反復解法を適用することを前提に，反復解法の収束性について検討する．解析においては，Bi-CGStab 法[18]，GPBi-CG 法[19]，GMRES(μ) 法[18),19)]（リスタート値 $\mu = 50$）を用いることとし，前処理手法として対角スケーリングを適用することとした．対角スケーリングは，最も簡易な前処理手法であり，Laplace 問題の wavelet BEM の解析例題[6)]においても収束解を与えているため，今回の検討でも前処理手法として用いた．各々の反復解法の下での連立一次方程式の相対残差ノルムの収束挙動を**図–6** に示す．Laplace 問題において wavelet BEM における反復解法の適用可能性を検討した先行研究[20)]と同様，有限要素・wavelet 境界要素結合方程式の求解計算においても，反復解法

表–1 反復解の収束までに要した計算時間（収束判定値 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$，解析自由度 $N = 1188$，うち $N_B = 132$, $N_F = 1089$).

反復解法	収束までの反復回数	計算時間 (sec)
Bi-CGStab	11,580	3.41
GPBi-CG	8,977	2.94
GMRES(50)	2,389	0.74

の定式化の特徴が反映された結果となっている．Krylov 部分空間における残差の双直交条件に基づく解法である GPBi-CG, Bi-CGStab 法の収束は緩慢で前処理手法の改良が必要な状況にあるのに対し，最小条件に基づく GMRES 法は安定かつ速やかに相対残差ノルムが収束していることがわかる．

今回比較の対象とした３種類の反復解法では，1 回の反復に必要とする演算量が異なるため，反復解の収束までに要した計算時間もあわせて**表–1** に示す．ここで示した計算結果は，解析自由度 $N = 1188(N_B = 132, N_F = 1089)$ とした場合のものである．反復解が収束に至るまでに計算時間で比較しても，GMRES の良好な収束性が連立一次方程式の求解計算時間の短縮に寄与していることが確認できる．

なお，今回の検討ではさほど規模の大きくない離散化条件の下で反復解法の適用可能性について検討したが，α が大きい場合や解析自由度が大きい場合など，反復解法の収束性が悪化することもあり得る．この点については，今後の検討課題としたい．

6.4 境界要素方程式に由来する係数行列の圧縮性能

次に，結合方程式 (27) の係数行列のうち，境界要素法に関する部分の係数切り捨てによる係数行列の圧縮の可能性について検討する．係数行列の切り捨ては，境界要素方程式 (11) を構成した段階で得られる係数行列 $\boldsymbol{G}$ と $\boldsymbol{H}$ を対象とするもの（第 1 段切り捨て）と，結合方程式 (27) を縮約計算により構成した際に生じる係数行列 $\boldsymbol{A}_{bb}$，$\boldsymbol{A}_{bc}$，$\boldsymbol{A}_{cb}$，$\boldsymbol{A}_{cc}$，$\boldsymbol{A}_{bq}$，$\boldsymbol{A}_{cq}$ および $\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}$ を対象とするもの（第 2 段切り捨て）の２つが考えられる．

第 1 段切り捨ては，2 次元定常スカラー波動問題の wavelet 境界要素法解析において階層非依存型切り捨て基準値を用いる係数切り捨て手法を採用する．この方法では，係数行列 $\boldsymbol{G}$ の成分の大きさに基づき，次式の条件を満たす係数成分 g_{ij}, h_{ij} をともに 0 とみなして切り捨てる．

$$|g_{ij}| < \kappa g_{max}, \tag{29}$$

ここで，g_{ij} は式 (10) 第 1 式で定義される，係数行列 $\boldsymbol{G}$ の成分であり，g_{max} は $|g_{ij}|$ の絶対最大値，κ は第 1 段切り捨てにおける切り捨て基準値である．なお，階層非依存型切り捨て基準値を用いる手法[6),8),9),13)−15)] を採用した場合，係数成分 g_{ij} の計算に先立ってその大きさの近似評価値を用いて「事前切り捨て」を実行することにより，係数行列の作成に要する計算量を削減することがある．しかし今回の解析では，有限要素–wavelet 境界要素結合解法における係数行列の作成計算量には直結するが圧縮性能には直接関係しない事前切り捨てアルゴリズムは，解析時には導入しないこととした．

一方，第 2 段切り捨ては，次式で定義する係数行列を対象に，上述の 7 種類の係数行列ブロックの各成分について，次式を満たす係数成分のみを 0 とみなして切り捨てる．

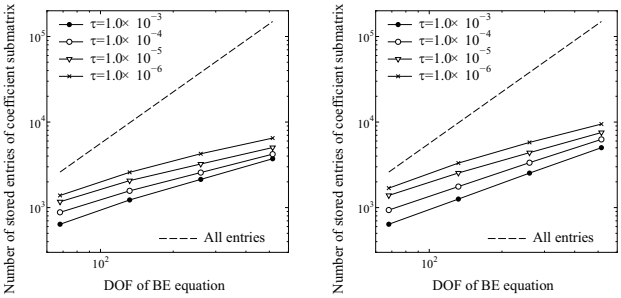
$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}_{bb})_{kl} &= \begin{cases} (\boldsymbol{A}_{bb})_{kl}, & (|(\boldsymbol{A}_{bb})_{kl}| \geq \tau) \\ 0, & (|(\boldsymbol{A}_{bb})_{kl}| < \tau) \end{cases} \\
(\boldsymbol{A}_{bc})_{kl} &= \begin{cases} (\boldsymbol{A}_{bc})_{kl}, & (|(\boldsymbol{A}_{bc})_{kl}| \geq \tau) \\ 0, & (|(\boldsymbol{A}_{bc})_{kl}| < \tau) \end{cases} \\
(\boldsymbol{A}_{cb})_{kl} &= \begin{cases} (\boldsymbol{A}_{cb})_{kl}, & (|(\boldsymbol{A}_{cb})_{kl}| \geq \tau) \\ 0, & (|(\boldsymbol{A}_{cb})_{kl}| < \tau) \end{cases} \\
(\boldsymbol{A}'_{cc})_{kl} &= \begin{cases} (\boldsymbol{A}'_{cc})_{kl}, & (|(\boldsymbol{A}'_{cc})_{kl}| \geq \tau) \\ 0, & (|(\boldsymbol{A}'_{cc})_{kl}| < \tau) \end{cases}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}_{bq})_{kl} &= \begin{cases} (\boldsymbol{A}_{bq})_{kl}, & (|(\boldsymbol{A}_{bq})_{kl}| \geq \tau) \\ 0, & (|(\boldsymbol{A}_{bq})_{kl}| < \tau) \end{cases} \\
(\boldsymbol{A}_{cq})_{kl} &= \begin{cases} (\boldsymbol{A}_{cq})_{kl}, & (|(\boldsymbol{A}_{cq})_{kl}| \geq \tau) \\ 0, & (|(\boldsymbol{A}_{cq})_{kl}| < \tau) \end{cases} \\
(\boldsymbol{G}_{cc}^{-1})_{kl} &= \begin{cases} (\boldsymbol{G}_{cc}^{-1})_{kl}, & (|(\boldsymbol{G}_{cc}^{-1})_{kl}| \geq \tau) \\ 0, & (|(\boldsymbol{G}_{cc}^{-1})_{kl}| < \tau) \end{cases}
\end{aligned} \tag{31}$$

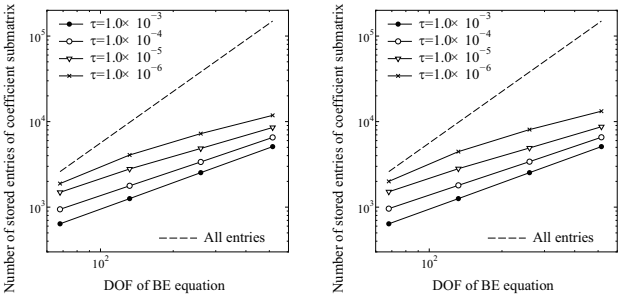
ただし，τ は第 2 段切り捨てにおける切り捨て基準値であり，$\boldsymbol{A}'_{cc}$ は $\boldsymbol{A}'_{cc} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}\boldsymbol{H}_{cc}$ と定義する．

図–7–図–13 は，$\omega = 1$ の場合において，所定の切り捨て基準値の下で得られる $\boldsymbol{A}_{bb}$，$\boldsymbol{A}_{bc}$，$\boldsymbol{A}_{cb}$，$\boldsymbol{A}'_{cc}$，$\boldsymbol{A}_{bq}$，$\boldsymbol{A}_{cq}$ および $\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}$ の保存成分数を示したものである．解析においては，第 1 段切り捨ての切り捨て基準値 κ を $\kappa = 1.0 \times 10^{-\delta_1}(\delta_1 = 3, 4, 5, 6)$ に，第 2 段切り捨ての切り捨て基準値 τ を $\tau = 1.0 \times 10^{-\delta_1}(\delta_1 = 3, 4, 5, 6)$ にそれぞれ設定した．

係数行列ブロック $\boldsymbol{A}_{bb}$，$\boldsymbol{A}_{bc}$，$\boldsymbol{A}_{bq}$ については，境界要素方程式の係数行列 $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ のブロック小行列および $\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}$ の加乗算で構成されていることもあり，縮約後に得られる係数行列ブロックの圧縮性が第 1 段切り捨ての影響を受けることが確認できる．その影響は，第 1 段切り捨てに用いる切り捨て基準値 κ が大きいほど明確である．反対に，κ を小さくすると第 1 段切り捨てによる $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ の保存成分数の増減の影響はわずかなものとなり，縮約後に得られる係数行列ブロックの保存成分数の多少は概ね第 2 段切り捨てに左右されることがわかる．また，$\boldsymbol{A}_{bb}$，$\boldsymbol{A}_{bc}$，$\boldsymbol{A}_{bq}$ の増加率は，各々の係数行列ブロック内の全成分数の増加率よりも明らか

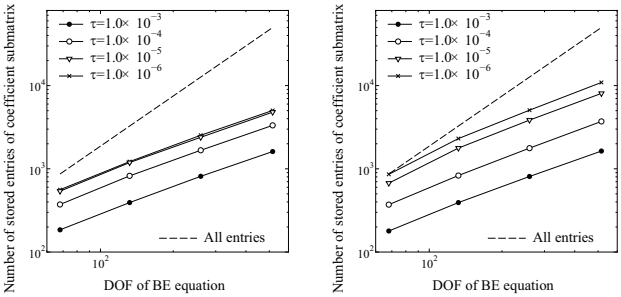


(a) $\kappa = 1.0 \times 10^{-3}$. (b) $\kappa = 1.0 \times 10^{-4}$.

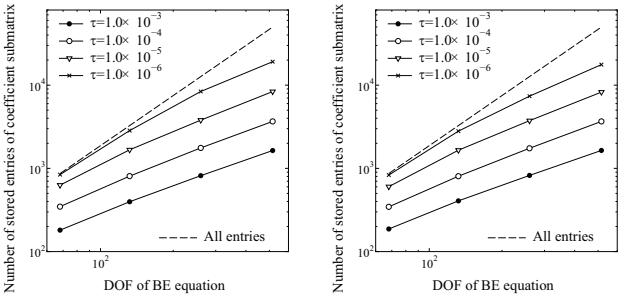


(c) $\kappa = 1.0 \times 10^{-5}$. (d) $\kappa = 1.0 \times 10^{-6}$.

図–7 係数行列ブロック $\boldsymbol{A}_{bb}$ の保存成分数.

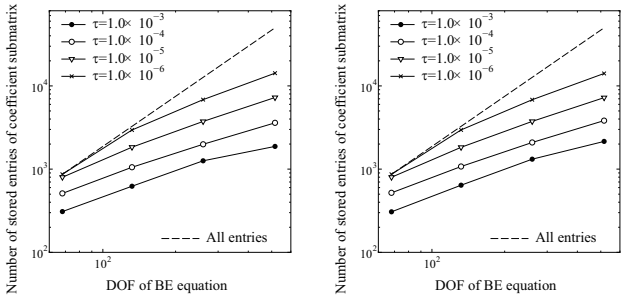


(a) $\kappa = 1.0 \times 10^{-3}$. (b) $\kappa = 1.0 \times 10^{-4}$.

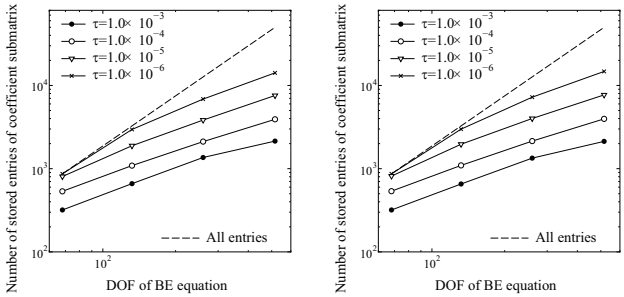


(c) $\kappa = 1.0 \times 10^{-5}$. (d) $\kappa = 1.0 \times 10^{-6}$.

図–8 係数行列ブロック $\boldsymbol{A}_{bc}$ の保存成分数.

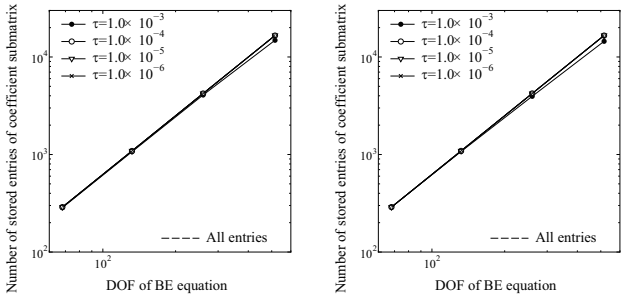


(a) $\kappa = 1.0 \times 10^{-3}$. (b) $\kappa = 1.0 \times 10^{-4}$.

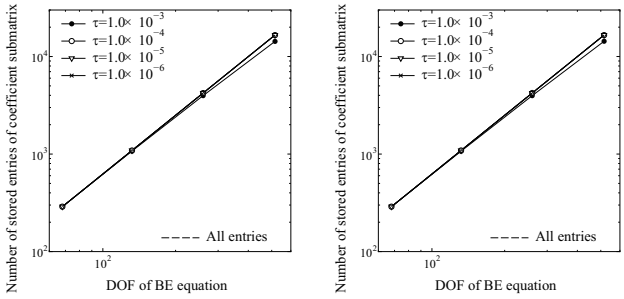


(c) $\kappa = 1.0 \times 10^{-5}$. (d) $\kappa = 1.0 \times 10^{-6}$.

図–9 係数行列ブロック $\boldsymbol{A}_{cb}$ の保存成分数.



(a) $\kappa = 1.0 \times 10^{-3}$. (b) $\kappa = 1.0 \times 10^{-4}$.

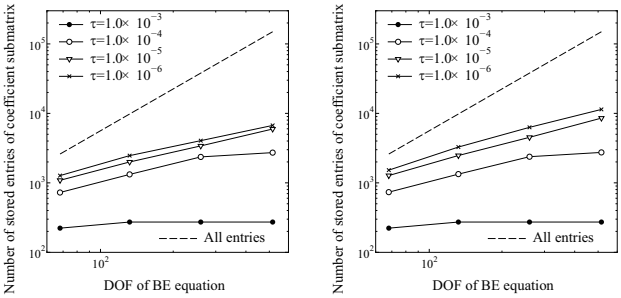


(c) $\kappa = 1.0 \times 10^{-5}$. (d) $\kappa = 1.0 \times 10^{-6}$.

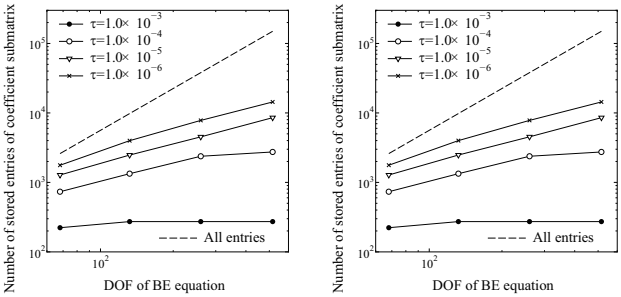
図–10 係数行列ブロック $\boldsymbol{A}'_{cc}$ の保存成分数.

に小さい．そのため，これら 3 つの係数行列ブロックの成分については，wavelet 級数の最高階層 m を大きくすることで解析自由度を大きくする場合，解析自由度が大きくなるほど係数行列の高いスパース性が期待できる．

一方，係数行列ブロック $\boldsymbol{A}_{cb}$，$\boldsymbol{A}_{cq}$ の保存成分数は，$\boldsymbol{A}_{bb}$，$\boldsymbol{A}_{bc}$，$\boldsymbol{A}_{bq}$ とは異なる特性を示して変動する．$\boldsymbol{A}_{cb}$，$\boldsymbol{A}_{cq}$ は，境界要素方程式の係数行列 $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ のブロック小行列と $\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}$ との乗算を計算したのち，wavelet 再構成（逆変換）の作用をもつ行列 $\boldsymbol{W}$ を乗じた上で等価節点力への変換行列を作用させることで構成する．そのため，定式化の上からは，この 2 つのブロック小行列の保存成分数に及ぼす第 1 段切り捨ての切り捨て基準値の設定の影響は，先に論じた $\boldsymbol{A}_{bb}$，$\boldsymbol{A}_{bc}$，$\boldsymbol{A}_{bq}$ と比して小さくなることが予想される．解析結果では，当初の予想通り，第 1 弾切り捨ての切り捨て基準値を変

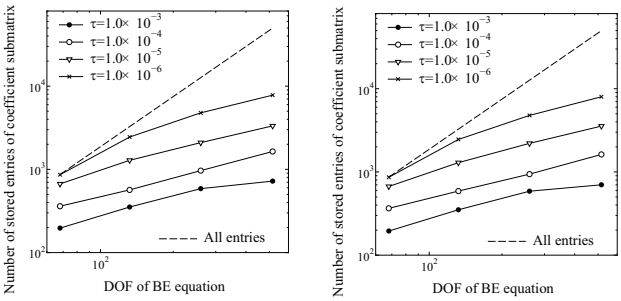


(a) $\kappa = 1.0 \times 10^{-3}$.　(b) $\kappa = 1.0 \times 10^{-4}$.

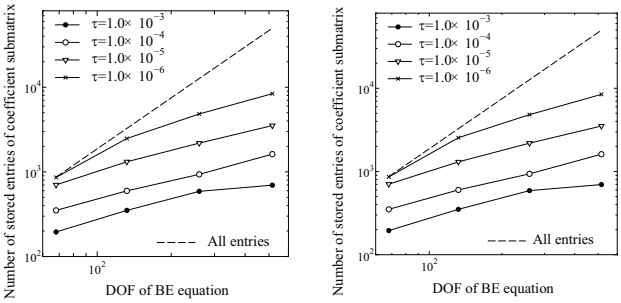


(c) $\kappa = 1.0 \times 10^{-5}$.　(d) $\kappa = 1.0 \times 10^{-6}$.

図–11 係数行列ブロック $\boldsymbol{A}_{bq}$ の保存成分数.



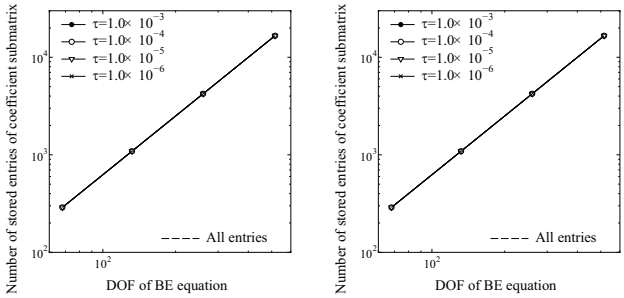
(a) $\kappa = 1.0 \times 10^{-3}$.　(b) $\kappa = 1.0 \times 10^{-4}$.



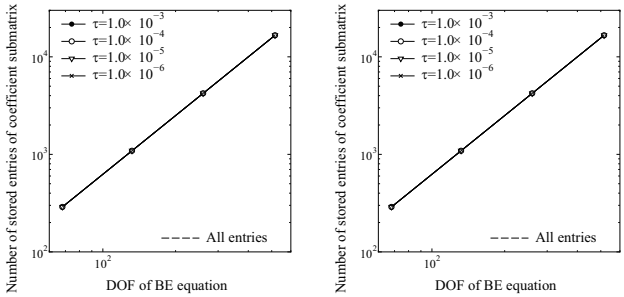
(c) $\kappa = 1.0 \times 10^{-5}$.　(d) $\kappa = 1.0 \times 10^{-6}$.

図–12 係数行列ブロック $\boldsymbol{A}_{cq}$ の保存成分数.

化させても $\boldsymbol{A}_{cb}$，$\boldsymbol{A}_{cq}$ の保存成分数はほとんど変動していない．すなわち，$\boldsymbol{A}_{cb}$，$\boldsymbol{A}_{cq}$ の保存成分数は概ね第 2 段切り捨ての結果であると考えることができる．なお，上述のように，これら 2 つの係数行列ブロックの生成においては，wavelet 再構成（逆変換）$\boldsymbol{W}$ を作用させることから，係数成分のスパース性は低下することが懸念された．しかし，実際の解析結果においては，これらの係数行列ブロックについても，解析自由度を



(a) $\kappa = 1.0 \times 10^{-3}$.　(b) $\kappa = 1.0 \times 10^{-4}$.



(c) $\kappa = 1.0 \times 10^{-5}$.　(d) $\kappa = 1.0 \times 10^{-6}$.

図–13 係数行列ブロック $\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}$ の保存成分数.

大きくするほど，第 2 段切り捨ての切り捨て基準値を大きく設定するほど保存成分数は減少傾向を示し，係数行列のスパース化に寄与するものと思われる．

さらに，係数行列ブロック $\boldsymbol{A}'_{cc}$，$\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}$ の保存成分数について考察する．解析結果より，これら 2 つの係数行列ブロックの成分の絶対値は，それ以外のブロック $\boldsymbol{A}_{bb}$，$\boldsymbol{A}_{bc}$，$\boldsymbol{A}_{bq}$，$\boldsymbol{A}_{cb}$，$\boldsymbol{A}_{cq}$ の成分の絶対値よりもかなり大きく，今回設定した切り捨て基準値の範囲内ではほとんど切り捨て対象成分が存在しないことがわかる．これは，$\boldsymbol{A}'_{cc}$，$\boldsymbol{G}_{cc}^{-1}$ を構成する際に用いる係数行列ブロック $\boldsymbol{H}_{cc}$，$\boldsymbol{G}_{cc}$ の成分が，部分境界の空間的広がりが $\Gamma_u^B \cup \Gamma_q^B$ よりも小さい Γ_c 上に存在する 2 つの基底を用いて生成されるため，$\boldsymbol{A}_{bb}$ や $\boldsymbol{A}_{bc}$ などと比べて係数生成に用いる 2 つの基底関数のサポート間距離が小さいものが大半を占めることが原因であると考えられる．

次に，解析自由度 $N = 340$(うち $N_B = 68$, $N_F = 289$)，および $N = 1188$(うち $N_B = 132$, $N_F = 1089$) の場合における，境界要素法に由来する係数行列 $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ 全体における非ゼロ成分の保存率（全成分数に対する保存成分数の割合）を**表–2** に示す．なお，今回の解析では $\boldsymbol{G}$ の成分の大きさに基づき切り捨てを実行しているため，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ の保存成分数は同数となっていることから，**表–2** では行列 $\boldsymbol{G}$ の保存率のみを示している．また，境界要素解の誤差には，境界要素法を適用した部分境界および結合面上で評価したポテンシャル $\tilde{u}$ の L^2 誤差ノルムを示している．境界要素方程式に由来する係数行列 $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ の保存成分数は，切り捨て基準値を大きくするほど少なくなり，高い圧縮効果が期待できる．ただし，微小な係数成分の切り捨ては，境界要素

表–2 境界要素法に由来する係数行列 $\boldsymbol{G}$ の成分の保存率.

(a) 解析自由度 $N = 340$(うち $N_B = 68, N_F = 289$).

κ	τ	保存率 (%)	境界要素解の誤差
1.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	38.06	2.67×10^{-2}
	1.0×10^{-4}		6.77×10^{-3}
	1.0×10^{-5}		5.62×10^{-3}
	1.0×10^{-6}		5.60×10^{-3}
1.0×10^{-4}	1.0×10^{-3}	52.42	2.47×10^{-2}
	1.0×10^{-4}		4.00×10^{-3}
	1.0×10^{-5}		2.22×10^{-4}
	1.0×10^{-6}		1.72×10^{-4}
1.0×10^{-5}	1.0×10^{-3}	70.76	2.47×10^{-2}
	1.0×10^{-4}		3.97×10^{-3}
	1.0×10^{-5}		2.48×10^{-4}
	1.0×10^{-6}		1.63×10^{-4}
1.0×10^{-6}	1.0×10^{-3}	92.56	2.47×10^{-2}
	1.0×10^{-4}		3.97×10^{-3}
	1.0×10^{-5}		2.46×10^{-4}
	1.0×10^{-6}		1.63×10^{-4}

(b) 解析自由度 $N = 1188$(うち $N_B = 132, N_F = 1089$)

κ	τ	保存率 (%)	境界要素解の誤差
1.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	20.39	2.71×10^{-2}
	1.0×10^{-4}		8.64×10^{-3}
	1.0×10^{-5}		7.78×10^{-3}
	1.0×10^{-6}		7.76×10^{-3}
1.0×10^{-4}	1.0×10^{-3}	28.42	2.61×10^{-2}
	1.0×10^{-4}		4.18×10^{-3}
	1.0×10^{-5}		1.02×10^{-3}
	1.0×10^{-6}		9.16×10^{-4}
1.0×10^{-5}	1.0×10^{-3}	42.52	2.61×10^{-2}
	1.0×10^{-4}		4.20×10^{-3}
	1.0×10^{-5}		5.29×10^{-4}
	1.0×10^{-6}		4.20×10^{-5}
1.0×10^{-6}	1.0×10^{-3}	61.85	2.61×10^{-2}
	1.0×10^{-4}		4.15×10^{-3}
	1.0×10^{-5}		5.57×10^{-4}
	1.0×10^{-6}		4.20×10^{-5}

解に混入する切り捨て誤差が離散化誤差と同等かそれ以下となる範囲でのみ可能となる．解析結果では，境界要素解の離散化誤差は結合方程式構成後の切り捨て（第 2 段切り捨て）に用いる切り捨て基準値 τ の影響を強く受けている．しかし，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ の半数程度の成分が保存される第 1 段切り捨て基準値 κ の値の下では，τ の設定値によっては近似解の誤差に切り捨ての影響が発現しないように第 1 段・第 2 段の切り捨てが実行できることが確認できた．なお，今回の解析では $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ のスパース性はさほど高いものではないが，wavelet BEM の離散化の際の最高階層レベルを大きく設定して解析を行なった場合，境界要素法由来の係数行列は今回以上のスパース性を示すと思われる．

6.5 結合方程式の係数行列における圧縮性能

次に，有限要素法と wavelet 境界要素法との結合後に得られる連立一次方程式の係数行列について，第 1 段・第 2 段切り捨て後の非ゼロ成分の保存率を**表–3** に示す．なお，解析は前節同様，解析自由度 $N = 340$(うち $N_B = 68, N_F = 289$)，および $N = 1188$(うち $N_B = 132, N_F = 1089$) の場合を対象とした．当該の解析条件では，境界要素法の自由度よりも有限要素法の節点数が大きくなっていることもあり，係数行列成分の切り捨て基準値を変更しても係数成分の保存率はさほど変化せず，いずれの解析自由度の下でも数%以下の保存率が実現できている．なお，**6.4** 節で示したように，境界要素方程式の縮約後に得られる係数行列の圧縮性能には，切り捨て基準値の設定および係数行列のブロック小行列によって差が認められる．しかし，解析自由度の大半が有限要素節点数で占められる場合では，最終的に解くべき連立一次方程式のスパース性にはさほど影響しない．また，wavelet BEM では離散化の際に scaling 関数はできるだけ少なく，wavelet の階層はできるだけ大きく設定して解析を行なった方が計算効率上有利である．そのため，境界形状が複雑な場合において，複雑形状の部分を有限要素法で離散化し，wavelet 境界要素法での離散化自由度を最小限に抑えるように当該手法を適用した場合，全体の計算効率を支配するのは有限要素部分となることから，一般的な wavelet BEM よりも効率よく定常波動解析を進めることが可能であると考えられる．

6.6 解析時の計算時間

最後に，解析時の計算時間の内訳を**表–4** に示す．なお，解析は，解析自由度 $N = 1188$(うち $N_B = 132$, $N_F = 1089$) の場合を対象とし，切り捨て基準値は $\kappa = \tau = 1.0 \times 10^{-6}$，反復法として GMRES(50) を用いた場合の結果を示した．表中,「BE 係数計算」は境界要素方程式の係数行列計算,「FE 係数計算」は有限要素法の剛性行列計算,「縮約・結合」は有限要素・境界要素の各方程式の縮約および結合のための計算,「反復法」は反復法による連立一次方程式の求解計算をそれぞれ示している．解析結果より，解析計算の大半を要しているのが境界要素方程式の係数行列 $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ の作成である．そのため，当該結合解法の計算時間の短縮には，二重の境界積分を要する係数成分計算の効率化が最も効果的であり，6.2 節で示した反復解法の収束性の改善も有

表–3 有限要素-wavelet 境界要素結合後の連立一次方程式の係数行列におけるの非ゼロ成分の保存率.

(a) 解析自由度 $N = 340$(うち $N_B = 68, N_F = 289$).

κ	τ	保存率 (%)	境界要素解の誤差
1.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	2.722	2.67×10^{-2}
	1.0×10^{-4}	3.331	6.77×10^{-3}
	1.0×10^{-5}	3.970	5.62×10^{-3}
	1.0×10^{-6}	4.286	5.60×10^{-3}
1.0×10^{-4}	1.0×10^{-3}	2.719	2.47×10^{-2}
	1.0×10^{-4}	3.362	4.00×10^{-3}
	1.0×10^{-5}	4.272	2.22×10^{-4}
	1.0×10^{-6}	4.824	1.72×10^{-4}
1.0×10^{-5}	1.0×10^{-3}	2.731	2.47×10^{-2}
	1.0×10^{-4}	3.352	3.97×10^{-3}
	1.0×10^{-5}	4.295	2.48×10^{-4}
	1.0×10^{-6}	4.982	1.63×10^{-4}
1.0×10^{-6}	1.0×10^{-3}	2.736	2.47×10^{-2}
	1.0×10^{-4}	3.361	3.97×10^{-3}
	1.0×10^{-5}	4.285	2.46×10^{-4}
	1.0×10^{-6}	5.025	1.63×10^{-4}

(b) 解析自由度 $N = 1188$(うち $N_B = 132, N_F = 1089$)

κ	τ	保存率 (%)	境界要素解の誤差
1.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	0.735	2.71×10^{-2}
	1.0×10^{-4}	0.837	8.64×10^{-3}
	1.0×10^{-5}	0.956	7.78×10^{-3}
	1.0×10^{-6}	1.060	7.76×10^{-3}
1.0×10^{-4}	1.0×10^{-3}	0.738	2.61×10^{-2}
	1.0×10^{-4}	0.846	4.18×10^{-3}
	1.0×10^{-5}	1.033	1.02×10^{-3}
	1.0×10^{-6}	1.199	9.16×10^{-4}
1.0×10^{-5}	1.0×10^{-3}	0.740	2.61×10^{-2}
	1.0×10^{-4}	0.846	4.20×10^{-3}
	1.0×10^{-5}	1.037	5.29×10^{-4}
	1.0×10^{-6}	1.290	4.20×10^{-5}
1.0×10^{-6}	1.0×10^{-3}	0.740	2.61×10^{-2}
	1.0×10^{-4}	0.848	4.15×10^{-3}
	1.0×10^{-5}	1.039	5.57×10^{-4}
	1.0×10^{-6}	1.303	4.20×10^{-5}

効であると考えられる.

7. おわりに

本研究では，開領域問題の定常波動解析に有効な境界要素法の利点を保持しつつ，境界要素法特有の計算効率の悪さを改善する方法である wavelet 境界要素法と有限要素法との結合解法を提案し，簡単な解析例を対象とした数値実験を通して，その定式化の妥当性，および解析時の計算効率について検討した．その結果，厳密解が得られている例題において，厳密解に対して十分な精度の近似解が得られており，当該結合解法の定式化の妥当性が確認できた．また，結合方程式の求解計算に反復解法を適用することの可能性について，反復解の収束性の観点から検討した．Bi-CGStab, GPBi-CG, GMRES(μ) の 3 手法を対角スケーリング前処理の下で適用したところ，静的問題における既往の研究成果同様，GMRES(μ) が良好な収束と安定な収束過程を示す結果を得た．さらに，結合方程式を構成する（縮約後の）係数行列の圧縮可能性を検討した結果，縮約計算後であっても切り捨てにより係数行列の圧縮が可能であることが確認できた．また，ポテンシャルの近似解の誤差を考慮した上で係数成分の切り捨ての実効性を検討し，切り捨てに起因して生じる近似解の誤差が離散化誤差を超えない範囲で係数成分の切り捨てを実行できることを確認した．さらに解析時の計算時間の内訳を明らかにし，解析時間の短縮には境界要素方程式の係数成分の計算を効率化するのが最も効果的であることがわかった．

表–4 結合解法による解析の計算時間の内訳（解析自由度 $N = 1188$(うち $N_B = 132, N_F = 1089$)）.

	計算時間 (sec)	比率 (%)
BE 係数計算	6.95	89.9
FE 係数計算	0.01	0.1
縮約・結合	0.03	0.3
反復法	0.74	9.6

なお，今回の検討では，提案手法の計算効率に及ぼす $\alpha = \omega/c$（ω: 円振動数，c 波動伝播速度）の影響については未検討となっている．α を大きな値に設定した場合（高周波数領域の解析を行なう場合），係数行列のスパース性や連立一次方程式の求解計算の収束挙動に影響を及ぼすことが考えられる．また，境界要素法のメリットを生かせる開領域の定常波動解析における当該手法の有効性についても未検討である．これらの課題については，今後詳細な検討が必要と考える．

参考文献

1) 田中正隆，中村正行，松本敏郎著：境界要素法（計算力学と CAE シリーズ），培風館，1991.
2) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法．京都大学学術出版会，2000.
3) Nishimura, N.: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, Vol.55, No.4, pp.299–324, 2002.
4) Liu, Y.: Fast multipole boundary element method. Cambridge University Press, 2009.
5) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure Appl. Math.*,

Vol.44, pp.144–183, 1991.
6) Koro, K. & Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149–164, 2001.
7) Schneider, R: Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme. B.G.Teubner, Stuttgart, 1998.
8) Koro, K. & Abe, K.: A practical determination strategy of optimal threshold parameter for matrix compression in wavelet BEM. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.57, pp.169–191, 2003.
9) 紅露一寛，阿部和久：Wavelet BEM における Beylkin 型係数切り捨て手法の行列圧縮効果に関する検討．土木学会応用力学論文集，Vol.6, pp.301-310, 2003.
10) Goswami, J.C., Chan, A.K. & Chui, C.K.: On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol.43, No.6, pp.614–622, 1995.
11) Ravnik, J., Škerget, L. & Hriberšek, M.: The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.28, pp.1303-1314, 2004.
12) Ravnik, J., Škerget, L. & Žunič, Z.: Comparison between wavelet and fast multipole data sparse approximations for Poisson and kinematics boundary-domain integral equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.198, pp.1473-1485, 2009.
13) 紅露一寛，五十嵐和希，阿部和久：拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法における wavelet 基底の適用とその計算効率．計算数理工学論文集，Vol.9, pp.73-78, 2009.
14) 紅露一寛，阿部和久：Haar wavelet を用いた 2 次元拡散問題時間域境界要素法における係数行列保存成分数の解析自由度依存性．土木学会論文集 A2（応用力学）, Vol.67, No.2, I_95-I_106, 2011.
15) 紅露一寛，菅波祐太，古川　陽，阿部和久：2 次元スカラー波動方程式のための非直交スプライン wavelet を用いた時間域境界要素法．土木学会応用力学論文集，Vol.13, pp.241–252, 2010.
16) Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C. 著，田中正隆訳: 境界要素解析–理論と応用．丸善，1984.
17) Harbrecht, H., Paiva, F., Pérez, C. & Schneider, R.: Biorthogonal wavelet approximation for the coupling of FEM-BEM. *Numer. Math.*, Vol.92, pp.325–356, 2002.
18) van der Vorst, H.H.: Iterative Krylov methods for large linear systems. Cambridge University Press, 2003.
19) Saad, Y.: Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2003.
20) 紅露一寛，阿部和久：Wavelet 境界要素法における反復解法の有効性．境界要素法論文集，Vol.16, pp.57–62, 1999.

(2012 年 3 月 8 日 受付)