

有限長周期杭が配置された地盤の表面波分散解析

Dispersion Analysis of Surface Elastic Waves for Ground with Finite-Length Periodic Piles

古里 駿*・阿部和久**・紅露一寛***・Pher Errol Balde QUINAY****
Shun FURUSATO, Kazuhisa ABE, Kazuhiro KORO and Pher Errol Balde QUINAY

*新潟大学大学院学生 自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

**工博 新潟大学教授 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

***博 (工) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

****博 (工) 新潟大学助教 災害・復興科学研究所 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

A dispersion analysis method is developed for surface elastic waves in a semi-infinite ground, in which a periodic array of piles with finite length is arranged. A displacement solution is given by coupling of the finite element discretization and the plane wave description. In order to consider the finite piles, a semi-infinite unit cell is decomposed into two sub-domains, i.e., the upper layer including the pile and the lower semi-infinite region. The comprehensive solution is then constructed by imposing the continuity conditions on the interface between both domains. The dispersion analysis is reduced to a search for zeros of the determinant of solving matrix in an irreducible sub-region of the first Brillouin zone. Through numerical examples, the influence of the pile length on the band structure is discussed.

Key Words : band structure, vibration barrier, Rayleigh waves, pile length

1. はじめに

自動車や列車走行による交通振動や、工場などから発生する機械振動を低減する目的で、地盤中に杭を等間隔に配置した「防振杭」を用いる方法が以前から検討されている¹⁾。当該工法は、防振壁や防振溝を地中に設ける場合に比べ、施工が容易で経済性にも優れている。既往の研究や適用事例では、杭を一列に配置したものの^{1),2),3)}が多く見受けられるが、三角形ハニカム状に配置したケースも検討されている⁴⁾。なお、これらの研究においては、杭の長さが防振効果に及ぼす影響が主に検討されている。例えば文献²⁾では、杭の長さを Rayleigh 波長の 2 倍以上にとれば防振杭を透過する波の振幅はほぼ一定値に収束するとの知見を解析結果より得ている。また、中空 PC 柱を密に配置した柱列壁の場合⁵⁾では、表面波長程度の打設深さが必要との実測結果が示されている。

なお、文献⁴⁾のように 2 次元平面内に周期的に杭を配置する場合、その周期性を利用することで地盤振動の遮蔽性能を制御し得るものと考えられる。一般に周期構造は、如何なる波数ベクトルの波動も伝播しない周波数帯であるストップバンドを持ち得るという特性を有している。この性質を利用することで、特定の周波数帯の音のみ遮蔽する遮音壁⁶⁾や、特定の周波数域の光を伝送できる光導波路⁷⁾などの開発が可能となる。また、弾性周期構造においてもストップバンドの存在は 60 年以上前から認識されており⁸⁾、それに基づいた動特性に関する研究が行われてきた。これら完全周期場のバンド解析は、平面波展開法⁹⁾や有限要素法¹⁰⁾などの適用により、周期構造を代表する最小領域(ユニットセル)の波動場を対象として、周波数に関する標準固有値問題に帰着して解くことができる。そのため解析が

容易であり、現在では photonic・phononic 結晶技術の様々な工業製品への応用の際にも、バンド解析が行われている。

しかし、地盤の振動低減問題のように表面波を対象とする場合、波動解の定式化の際に自由表面における境界条件の考慮が必要となる。この場合、上述のような標準固有値問題に帰着して解くことができないこともあり、検討事例は決して多くない。数少ない解析例の内の一つとして、Tanaka & Tamura¹¹⁾によるものがある。彼らは異方性複合材料を対象に、円形介在物の埋め込まれた半無限場の Rayleigh 波分散解析を、平面波展開法に基づき実施している。その結果、Rayleigh 波モードは 2 次元周期場中の面外バルク波(SH 波)の最下バンド直下にのみ存在することや、それより高周波数域には真の表面波ではないが減衰が少なく比較的遠方まで伝播し得る擬表面波¹²⁾が存在することなどを明らかにした。また、彼ら¹³⁾は同様の手法により、円筒形介在物を三角形ハニカム格子状に埋め込んだポリマー・アルミニウム複合材の表面波バンド解析も行っている。

一方、著者らの研究グループ¹⁴⁾では、自由表面内に周期的に無限長杭を配置した地盤を対象に表面波分散解析を試みた。なお解析において、変位場を地表面内の方向に有限要素で離散化し、深さ方向に波数展開する方法を採った。この場合、平面波展開法に比べ、杭と地盤との境界部におけるひずみの不連続性を容易に表現することができる。文献¹⁴⁾では、文献¹¹⁾と同様に、Rayleigh 波が最下バンドにのみ存在することや、擬表面波の存在を確認した。また、杭を三角形ハニカム格子状に配置する場合、Rayleigh 波と擬表面波の分散曲線の間にはストップバンドが存在することがわかった。このことは、当該配置がこの周波数域において高い遮蔽性を有することを意味している。

文献 14) での検討は無限長杭を対象としている。しかし、当然のことながら実際の杭は有限な長さを有している。したがって、杭の配置に加え、その長さも表面波のバンド構造に影響を及ぼすものと考えられる。そこで本論文では、半無限一様弾性体中に有限長の円筒形介在物(杭)が周期的に埋め込まれている場合を対象に、表面波分散解析手法を構成する。

なお、前述のとおり半無限周期場における表面波の分散解析の実施例は多くなく、さらに有限長介在物を対象とした場合となると検討事例は極めて少ない。文献 15) では、有限長の円筒形空孔が設けられた圧電材料の弾性場と電磁場の連成下での表面波分散解析を試みている。表面に加え空孔底面の境界条件を平面波展開により処理することは煩雑であり、ここでは 3 次元有限要素近似が用いられている。ただしその場合、下半無限場を直接表現できないため、空孔底面より下方に存在する半無限一様場を有限厚の領域に置き換えている。なお、一般に有限領域による近似では、打ち切り端からの反射波を完全に排除することは難しく、それがバンド解析に及ぼす影響が懸念される。

本論文においては、文献 14) に構成した有限要素と波数展開とを併用する解法を踏襲し、それを半無限弾性場に埋め込まれた有限長杭の問題に拡張する。具体的には、介在物(杭)を含む上層部とその下の半無限一様場とに領域を分離し、それぞれの部分領域に対して解を構成する。これらの解より、上層部については表面と底面の節点変位と節点力との関係を、また下半無限場についてはその上面における節点変位と節点力との関係をそれぞれ導出し、接合面の連続条件を課すことで最終的な方程式を構成する。表面波分散曲線は、当該方程式の行列式がゼロとなる波数・周波数空間内の点集合として求める。

以下では、まず解法の構成手順について述べる。続いて、解析例を通し杭の長さが分散曲線やストップバンド幅に及ぼす影響について調べ、バンド構造の観点から防振杭に要求される杭の長さについて検討する。

2. 解法の構成

2.1 対象とする問題

本研究では図-1 に示す様な、半無限地盤中に有限長 h の杭が周期的に配置されている定常波動問題を対象とする。なお、 (x, y) 座標は自由表面内にとり、 z 座標は自由表面を原点として深さ方向にとる。杭の断面形状は任意であるが、図-2 のように (x, y) 面内における 2 つのベクトル $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ により規定される格子点上に周期的に配置されているものとする。また、地盤と杭はどれも等方均質な弾性体でモデル化し、それらの結合面は完全に付着しており剥離や滑り等は生じないものとする。

2.2 解の構成

本問題における波動分散解析の実施に当たり、図-1 に示す様な地盤と杭から成る上層部と地盤のみで与えられる下半無限場とに対して、それぞれ解を構成する。なお、各部分領域内の解は文献 14) と同様の方法により

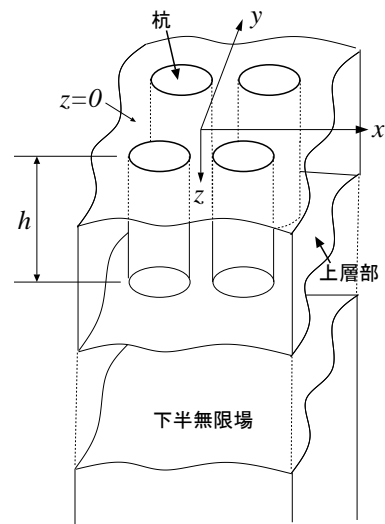


図-1 地盤内に周期的に配置された杭

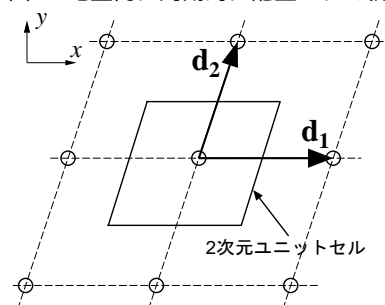


図-2 2次元周期場と基本ベクトル

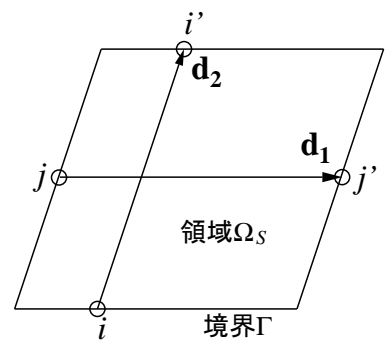


図-3 2次元ユニットセルとその境界点

表現する。以下では、その概略について述べる。

上層部または下半無限場の何れかの部分領域における解について考える。二重周期性を規定するベクトル $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ に対し、定常応答 \mathbf{u} は Bloch の定理を満たし、次式が成り立つ。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + n_j \mathbf{d}_j) = e^{-ik n_j} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (n_j \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, \mathbf{k} は (x, y) 面内の波数ベクトル (Bloch 波数) であり、繰り返し指標は総和規約に従うものとする。

式 (1) より、図-3 に示した (x, y) 面内 2 次元ユニットセル Ω_S の互いに向かい合う境界上の点 (i, i') と (j, j')

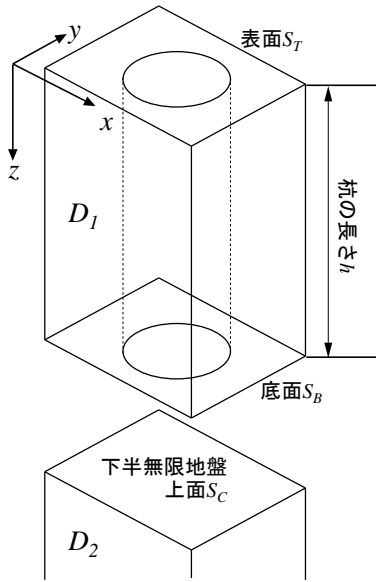


図-4 上層ユニットセル D_1 と下半無限ユニットセル D_2

とに対して、次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{u}_{j'} = e^{-ik \cdot \mathbf{d}_1} \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{u}_{j''} = e^{-ik \cdot \mathbf{d}_2} \mathbf{u}_j \quad (2)$$

なお、本研究における解析領域は、前述のとおり図-3を断面に持ち、深さ方向に長さ h の3次元ユニットセル D_1 と、その下に位置する半無限長ユニットセル D_2 により与えられる(図-4)。また以下では、 D_1 の上面(自由表面)と底面をそれぞれ S_T, S_B と呼び、 D_2 の上面を S_C と呼ぶ。

以上より、当該周期場の定常応答 \mathbf{u} は、式(2)の境界条件の下で、1ユニットセル内の動弾性問題に帰着して記述することができる。式(2)を満たすユニットセル D_1 または D_2 内の解を次式のように表現する。

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = [\mathbf{N}(\bar{\mathbf{r}})]\{\mathbf{U}\}e^{-i(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{r}} + \beta z)} \quad (3)$$

ここで $\bar{\mathbf{r}} = (x, y)$ 、 $[\mathbf{N}(\bar{\mathbf{r}})]$ は有限要素の補間関数を成分とした行列である。また、 $\{\mathbf{U}\}$ は変位に関する節点ベクトル、 β は z 方向波数である。

本研究では文献(14)と同様に、式(3)により解を z 方向に波数展開し、一方 (x, y) 平面内については当該面内の波数ベクトル \mathbf{k} で与えられる平面波表現と有限要素による離散化とを併用する。なお、 $\{\mathbf{U}\}$ は図-3の2次元ユニットセルの境界辺上の点 (i, i') と (j, j') に対して周期条件を満たす様に与えるものとする。このとき、式(3)の \mathbf{u} は式(2)の条件を自動的に満たすこととなる。また、式(3)では以下に述べる解法の展開の都合上、単一の波数 β について表記したが、実際には自由度相当の項数を有しており、それらの一次結合によって解を構成する。

この時点において β は未知量となっている。対象としている問題の β を求めるため、運動方程式より β に関する固有値問題を導出する。そのために、 $\{\mathbf{U}\}$ に含まれる各節点 j の (x, y, z) 変位成分 $\{u_j, v_j, w_j\}$ の内、 z 成分を新たな変数 \hat{w}_j で表し、次のような変数変換を施す

11),14) .

$$\begin{aligned} \{\mathbf{U}_j\} &= \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{v}_j \\ i\beta \hat{w}_j \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_j \\ \hat{v}_j \\ \hat{w}_j \end{Bmatrix} := [\mathbf{H}_j]\{\hat{\mathbf{U}}_j\} \end{aligned} \quad (4)$$

すると、式(3)の \mathbf{u} は次式により書き換えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= [\hat{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{r}})]\{\hat{\mathbf{U}}\}e^{-i(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{r}} + \beta z)}, \\ [\hat{\mathbf{N}}] &= [\mathbf{N}\mathbf{H}] \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $[\mathbf{H}]$ は節点 j に対する変換行列 $[\mathbf{H}_j]$ を全節点に対して並べて得られる対角行列である。

2.3 有限要素方程式

有限要素方程式は次式より導かれる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} [\delta \boldsymbol{\varepsilon}^*]\{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ = \int_{\Gamma} \delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{p} d\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $(\cdot)^*$ は共役転置、 $(\bar{\cdot})$ は共役、 $\delta(\cdot)$ は仮想成分、 ω は円振動数、 ρ は質量密度、 $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ はひずみと応力テンソル、 \mathbf{p} は表面力、 Γ は (x, y) 面内2次元ユニットセル Ω_s の境界(図-3)である。なお、3次元ユニットセル D_1, D_2 内には外力が作用していないものとする。

式(6)におけるひずみ $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}$ は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= [\mathbf{B}_1 + i\beta \mathbf{B}_2 + \beta^2 \mathbf{B}_3]\{\hat{\mathbf{U}}\}e^{-i(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{r}} + \beta z)} \\ &:= [\hat{\mathbf{B}}]\{\hat{\mathbf{U}}\}e^{-i(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{r}} + \beta z)} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $[\hat{\mathbf{B}}]$ は節点変位ベクトルからひずみを求めるための行列であり、 $[\mathbf{B}_1], [\mathbf{B}_2], [\mathbf{B}_3]$ は補間関数と波数の積、および補間関数の x または y に関する一次の導関数を成分に持つ行列で与えられる。なお、それらの具体的な成分については文献(14)を参照されたい。

また、応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$ は次式により与えられる。

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (8)$$

ここで、 $[\mathbf{D}]$ は応力-ひずみ関係を与える行列である。

式(6)に(5)、(7)、(8)を代入すると、1要素 Ω_e 当りの運動方程式が次式により与えられる。

$$\begin{aligned} [\delta \hat{\mathbf{U}}^*] \int_{\Omega_e} [\hat{\mathbf{B}}^* \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}] d\Omega \{\hat{\mathbf{U}}\} \\ - \omega^2 [\delta \hat{\mathbf{U}}^*] \int_{\Omega_e} \rho [\hat{\mathbf{N}}^* \hat{\mathbf{N}}] d\Omega \{\hat{\mathbf{U}}\} = [\delta \hat{\mathbf{U}}^*] \{\hat{\mathbf{F}}'\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\{\hat{\mathbf{F}}'\}$ の各節点成分 $\{\hat{f}'_{xj}, \hat{f}'_{yj}, \hat{f}'_{zj}\}$ は、式(4)の節点変位ベクトル $\{\mathbf{U}\}$ と同様に定義される節点力ベクトル $\{\mathbf{F}\}$ 、および $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ に対応する節点力ベクトル $\{\hat{\mathbf{F}}\}$ に対して次式の様に与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}'_{xj} \\ \hat{f}'_{yj} \\ \hat{f}'_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{xj} \\ f_{yj} \\ \beta^2 f_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{xj} \\ f_{yj} \\ -i\beta f_{zj} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

なお、式(6)において仮想成分との内積を複素ベクトルの意味で評価したことで、式(9)の領域積分は $e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\beta z)}$ の項を含まないものとなっていることに注意されたい。

式(9)より与えられる1要素当りのつり合い式を整理して次式を得る¹⁴⁾。

$$[\delta\hat{\mathbf{U}}^*][\hat{\mathbf{K}}_1 + \beta^2\hat{\mathbf{K}}_2 - \omega^2\mathbf{M}][\hat{\mathbf{U}}] = [\delta\hat{\mathbf{U}}^*][\hat{\mathbf{F}}] \quad (11)$$

ここで、 $[\hat{\mathbf{K}}_j](j=1,2)$ は係数に β を含まない行列であり、次式により与えられる。

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{K}}_j] &= \int_{\Omega_c} [\mathbf{K}'_j] d\Omega, \\ [\mathbf{K}'_1] &= [\mathbf{B}_1^*\mathbf{D}\mathbf{B}_1] + [\mathbf{B}_1^*\mathbf{D}\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T\mathbf{D}\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^*\mathbf{D}\mathbf{B}_2]_z, \\ [\mathbf{K}'_2] &= [\mathbf{B}_3^T\mathbf{D}\mathbf{B}_3] + [\mathbf{B}_1^*\mathbf{D}\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_3^T\mathbf{D}\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^*\mathbf{D}\mathbf{B}_2]_{xy} \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、 $[\]_{xy}$ は当該行列の z 成分に関する行(3,6,...)をすべてゼロに置換したものであり、 $[\]_z = [\] - [\]_{xy}$ である。なお、 $[\mathbf{K}'_1]$ 、 $[\mathbf{K}'_2]$ の右辺第2項目より本来 β^2 の項を、また、 $[\mathbf{K}'_2]$ の右辺第1項目より β^4 の項を得る。その下で z 成分に関する行のみ β^2 で割ることで式(11)を得る。また、式(11)の $[\mathbf{M}]$ は通常用いられる整合質量行列と同様の計算により与えられる。

$\{\mathbf{U}\}$ と同様に、 $\{\hat{\mathbf{U}}\}$ 、 $\{\hat{\mathbf{F}}\}$ もユニットセル境界周辺において式(3)で述べたような次の周期条件を満たす。

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{U}}_l\} &= \{\hat{\mathbf{U}}_b\}, & \{\hat{\mathbf{U}}_r\} &= \{\hat{\mathbf{U}}_l\} \\ \{\hat{\mathbf{F}}_l\} &= -\{\hat{\mathbf{F}}_b\}, & \{\hat{\mathbf{F}}_r\} &= -\{\hat{\mathbf{F}}_l\} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $(\cdot)_b, (\cdot)_l, (\cdot)_r$ はそれぞれ (x, y) 面内における2次元ユニットセル Ω_S の底辺、上辺、左辺、右辺の境界上の節点に関する部分ベクトルである。

式(13)を(11)に対応する全体系の方程式に適用し、 $(\cdot)_l, (\cdot)_r$ に関する成分を消去すると、外力の作用しない波動場に対して次の $-\beta^2$ に関する固有値問題を得る。

$$[\hat{\mathbf{K}}_1 - \omega^2\hat{\mathbf{M}}][\tilde{\boldsymbol{\phi}}] = -\beta^2[\hat{\mathbf{K}}_2][\tilde{\boldsymbol{\phi}}] \quad (14)$$

ここで、 (\cdot) は上述の様に行列やベクトルを縮約して得られたものであることを意味している。

2.4 下半無限場との連成を考慮した上層部の方程式の導出

式(14)より、下方(正の z 方向)と上方(負の z 方向)に伝播していく波動に対応する β を得る。なお、これらのペアは縮約後の自由度 \tilde{N} だけ存在する。上層部 D_1 の解は、下方へ伝播する波動モード成分と、 D_2 との結合境界から上方へ反射する成分とから構成される。

すると D_1 の解は、式(14)の固有モードの一次結合のかたちで次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathbf{U}}(z)\} &= \sum_j^{\tilde{N}} (\alpha_{Tj} e^{-i\beta_j z} + \alpha_{Bj} e^{i\beta_j z}) \{\tilde{\boldsymbol{\phi}}_j\} = [\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(z)]\{\boldsymbol{\alpha}\}, \\ \{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(z)\} &= [e^{-i\beta_1 z} \tilde{\boldsymbol{\phi}}_1, \dots, e^{-i\beta_{\tilde{N}} z} \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\tilde{N}}, e^{i\beta_1 z} \tilde{\boldsymbol{\phi}}_1, \dots, e^{i\beta_{\tilde{N}} z} \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\tilde{N}}] \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 α_{Tj}, α_{Bj} はそれぞれ下向きと上向きの波動モードに関する結合係数であり、 $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ はそれらを成分に持つベクトルである。

さらに式(13)の周期条件に基づき、 $\{\tilde{\mathbf{U}}(z)\}$ から縮約された成分を復元すれば次式を得る。

$$\{\check{\mathbf{U}}(z)\} = [\check{\boldsymbol{\Phi}}(z)]\{\boldsymbol{\alpha}\} \quad (16)$$

ここで、 $[\check{\boldsymbol{\Phi}}(z)]$ は $[\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(z)]$ の各列ベクトルを周期条件に基づき拡張して得られる長方形行列である。

式(16)より式(7)、(8)に基づき応力を評価すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} &= [\mathbf{D}']\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{D}'\hat{\mathbf{B}}]\{\check{\mathbf{U}}(z)\}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= [\mathbf{D}'\hat{\mathbf{B}}\check{\boldsymbol{\Phi}}(z)]\{\boldsymbol{\alpha}\}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &:= [\mathbf{S}(z)]\{\boldsymbol{\alpha}\}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 $[\mathbf{D}']$ は $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ から応力3成分 $(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z)$ を生成する行列である。

すると、上層部 D_1 の自由表面 S_T と底面 S_B とにおける表面力に対する節点値ベクトル $\{\mathbf{F}_T, \mathbf{F}_B\}$ が次式のように与えられることとなる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_T \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{TT} & \mathbf{C}_{TB} \\ \mathbf{C}_{BT} & \mathbf{C}_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_T \\ \boldsymbol{\alpha}_B \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここで、 $\{\boldsymbol{\alpha}_T, \boldsymbol{\alpha}_B\}$ は、下方へ進行するモードと上方へ進行するモードに対する結合係数 α_{Tj}, α_{Bj} をそれぞれ成分に持つ部分ベクトルである。また、行列 $[\mathbf{C}]$ は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_{TT} \ \mathbf{C}_{TB}] &= - \int_{\Omega_S} [\tilde{\mathbf{N}}^T][\mathbf{S}(0)] d\Omega, \\ [\mathbf{C}_{BT} \ \mathbf{C}_{BB}] &= \int_{\Omega_S} [\tilde{\mathbf{N}}^T][\mathbf{S}(h)] d\Omega \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $[\tilde{\mathbf{N}}]$ は、変位ベクトル $\{\mathbf{U}\}$ の2次元ユニットセル境界 Γ 上の周期条件に基づき $[\mathbf{N}]$ を縮約して得られる行列である。

一方、 D_1 の上面 S_T と底面 S_B における、 $\{\tilde{\mathbf{U}}(z)\}$ に対応する節点ベクトル $\{\mathbf{U}_T, \mathbf{U}_B\}$ は次式により与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{TT} & \boldsymbol{\Phi}_{TB} \\ \boldsymbol{\Phi}_{BT} & \boldsymbol{\Phi}_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_T \\ \boldsymbol{\alpha}_B \end{Bmatrix} \quad (20)$$

ここで、行列 $[\boldsymbol{\Phi}]$ は次式により定義されるものである。

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\Phi}_{TT} \ \boldsymbol{\Phi}_{TB}] &= [\check{\boldsymbol{\Phi}}(0)], \\ [\boldsymbol{\Phi}_{BT} \ \boldsymbol{\Phi}_{BB}] &= [\check{\boldsymbol{\Phi}}(h)] \end{aligned} \quad (21)$$

式(18)と(20)より、 $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ を消去して、上層部 D_1 における $\{\mathbf{F}\}$ と $\{\mathbf{U}\}$ の次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_T \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} &= [\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}^{-1}] \begin{Bmatrix} \check{\mathbf{U}}_T \\ \check{\mathbf{U}}_B \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{K}_{TB} \\ \mathbf{K}_{BT} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_B \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

下半無限領域 D_2 の上面 S_C における節点変位 $\{\mathbf{U}_C\}$ と節点力 $\{\mathbf{F}_C\}$ との関係を与える行列 $[\mathbf{K}_C]$ (インピーダ

ンス行列)も、 D_1 に対する式 (22) の行列と同様の手順により導出して次式を得る。

$$[\mathbf{K}_C]\{\mathbf{U}_C\} = \{\mathbf{F}_C\} \quad (23)$$

ただし、下半無限場 D_2 の解は、下方へ伝播するモード成分のみから構成される。

上層部 D_1 の底面 S_B と下半無限領域 D_2 の上面 S_C とに対する変位の適合条件 $\{\mathbf{U}_B\} = \{\mathbf{U}_C\}$ と、力のつり合い条件 $\{\mathbf{F}_B\} = -\{\mathbf{F}_C\}$ より、次式を得る。

$$[\mathbf{K}_C]\{\mathbf{U}_B\} = -\{\mathbf{F}_B\} \quad (24)$$

式 (24) を (22) に代入して $\{\mathbf{F}_B\}$ を消去し、上層部 D_1 における次の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{K}_{TB} \\ \mathbf{K}_{BT} & \mathbf{K}_{BB} + \mathbf{K}_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_T \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

2.5 表面波モードの分散解析法

表面波モードの分散解析を行うため、自由表面の境界条件 $\{\mathbf{F}_T\} = \{\mathbf{0}\}$ を式 (25) に課して次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TT} & \mathbf{K}_{TB} \\ \mathbf{K}_{BT} & \mathbf{K}_{BB} + \mathbf{K}_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

式 (26) より、左辺の行列の行列式がゼロとなる条件より表面波の分散曲線を探索する方法と、 $\{\mathbf{U}_B\}$ を消去して縮約された行列の行列式に基づき分散曲線を求める方法とが考えられる。両手法を比較したところ、後者による方が計算時間・探索精度の何れにおいても優位となる結果を得たため、以下では後者に基づく計算方法を採用する。この場合、表面波モードの条件は次式で与えられる。

$$|\mathbf{K}_{TT} - \mathbf{K}_{TB}(\mathbf{K}_{TB} + \mathbf{K}_C)^{-1}\mathbf{K}_{BT}| = 0 \quad (27)$$

なお、実際の計算では式 (27) の行列に対する以下の固有値問題を設定し、絶対最小固有値 $|\lambda_{min}|$ がゼロとなる条件に置き換える。

$$\begin{aligned} &[\mathbf{K}_{TT} - \mathbf{K}_{TB}(\mathbf{K}_{TB} + \mathbf{K}_C)^{-1}\mathbf{K}_{BT}]\{\psi\} = \lambda\{\psi\}, \\ &|\lambda_{min}| = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

以下の解析では、 (x, y) 面内波数ベクトル \mathbf{k} をある値に設定し、その下で円振動数 ω に $\Delta\omega$ ずつ増分を加えながら式 (28) により絶対最小固有値を求めて行く。その値がある閾値以下の値を与える場合、当該の (\mathbf{k}, ω) において表面波モードが存在するものと判定する。この操作を各波数ベクトル \mathbf{k} に対して行い、分散曲線を作成する。

2.6 解析上の工夫

式 (22) の計算に当り、 $[\Phi]^{-1}$ を求める必要がある。なお、式 (15) に示したように、 $[\Phi_{BT}]$, $[\Phi_{BB}]$ はそれぞれ列ベクトルに $e^{-i\beta_j h}$, $e^{i\beta_j h}$ が係数としてかけられている。前者は下方へ進行する波動成分を与えるため、その絶対値は $z = h$ において 1 以下となる。一方、後者は上方へ進行する成分であり、その絶対値は 1 以上となる。

そのため、 h に対して指数関数的に増大し、杭が比較的長い場合は上述の逆行列計算の際に精度低下を招く恐れがある。

この問題に対処するため、式 (18), (20) を次のような関係式に変更する。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_T \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{TT} & \mathbf{C}_{TB}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}_{BT} & \mathbf{C}_{BB}\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_T \\ \mathbf{A}^{-1}\alpha_B \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{TT} & \Phi_{TB}\mathbf{A} \\ \Phi_{BT} & \Phi_{BB}\mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_T \\ \mathbf{A}^{-1}\alpha_B \end{Bmatrix} \quad (30)$$

ここで、 $[\mathbf{A}]$ は $e^{-i\beta_j h}$ を成分に持つ対角行列である。

上の式を用いる場合、式 (30) 右辺の行列には $e^{i\beta_j h}$ を含む成分は無く、したがって安定に逆行列計算を行うことが可能となる。

3. 解析例

3.1 半無限一様弾性場における Rayleigh 波

本手法の妥当性を検証するために、一様な半無限弾性場における Rayleigh 波の分散解析を行った。ここでの解析対象は均質場であるため、解析領域の 1 ユニットセルの形状と、上層部 D_1 の長さの設定は任意である。そこで、 (x, y) 面内 2 次元ユニットセルを正方形で与え、その一辺の長さ a に対して D_1 の長さを $h = 10a$ とした。また、2 次元ユニットセルの有限要素分割は一要素で与える。なお、以下の全ての解析において、自由度低減の目的で有限要素補間に 3 次元セレンディピティ要素を用いている。式 (3) より、解は有限要素近似と波数ベクトル \mathbf{k} の平面波との積によって表現されている。一方、一様場における Rayleigh 波モードは調和平面波で与えられる。したがって当該モード解は、本来低次要素を用いても再現可能である。

ポアソン比を 0.4 と設定して、横波伝播速度 C_T により無次元化した振動数 $\bar{\omega} = a\omega/C_T$ に対して増分 $\Delta\bar{\omega} = 0.01$ を与え、絶対最小固有値の閾値 10^{-3} の下、式 (28) により分散曲線を探索した。 x 軸方向に進行する Rayleigh 波に対して求めた分散曲線上の点を図-5 に示す。なお、比較のため Rayleigh 波の理論分散曲線を実線で示した。

図より、本解析結果は理論値との良好な一致を示しており、本手法の妥当性が確認できる。

3.2 正方格子状に配列されたコンクリート杭

図-6 に示すように正方格子状に有限長杭を配置した場合の分散解析を行う。なお、文献 2) では一列に配置された防振杭を対象とした解析結果より、十分な振動遮蔽効果を得るためには Rayleigh 波長の 1/4 以上の杭径が必要と結論づけている。本研究では 2 次元周期配列を対象としており 1 次元配列の場合とは幾分異なる傾向にあると考えられるが、文献 2) での知見を参考に、以下の解析では杭の間隔 (格子定数) を杭径 d に対して $a = 2d$ と設定した。この時、ストップバンド前後の周波数では、表面波の半波長が格子間隔程度になると考えられるので、以上のような設定の下で杭径はストップバンド端の表面波長の概ね 1/4 を与える。図-6 中に示した 2 次元ユニットセルを、図-7 に示すように有限

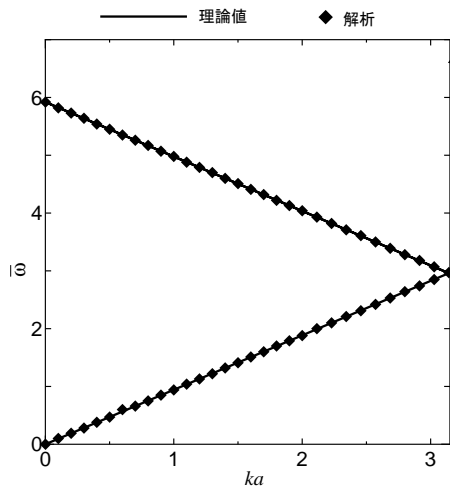


図-5 Rayleigh 波の分散曲線

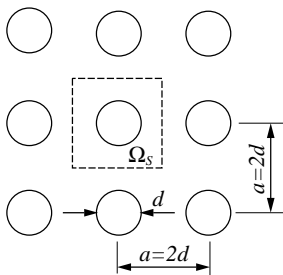


図-6 正方形格子状配列の杭

要素により 16 分割した。また、ここではコンクリート杭を想定し、母材（地盤）と介在物（防振杭）のポアソン比をそれぞれ 0.4 および 0.2，母材に対する介在物のせん断剛性比と質量密度比をそれぞれ 10 および 1.5 と設定した。ただし、鉄筋などによる剛性の異方性は考慮していない。

周期構造における分散曲線（曲面）は、波数空間内において第 1 Brillouin ゾーンを 1 ユニットとする周期性（逆格子）を持つ。本正方形格子に対する第 1 Brillouin ゾーンは図-8 に示すように与えられる。図中のベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は、杭の配置を規定しているベクトル $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ (図-2) に対する双対基底であり、次式により定義される。

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_j = \delta_{ij} \quad (31)$$

ここで、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。第 1 Brillouin ゾーン内における定常解の対称性に基づき、図-8 に示した部分領域 Γ -X-M の境界边上の波数ベクトルについて分散曲線を求めた。

杭の長さ $h = 2a$ に対して得られた分散曲線を、文献 14) で求めた無限長杭に対する分散曲線と合わせて図-9 に示す。なお、図には、表面波の分散曲線の他に、式 (28) の固有値が極小値をとる擬表面波モードも示した。表面波の分散曲線は、 $h = 2a, \infty$ の両ケースとも 1 番目の周波数バンドにのみ存在し、それより高い周波数域

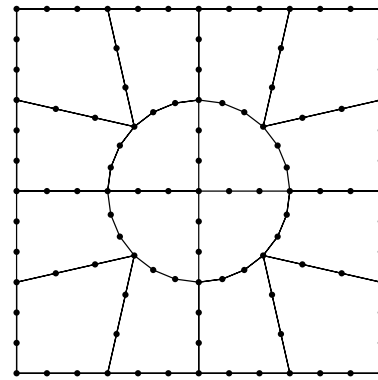


図-7 正方形格子ユニットセルの要素分割

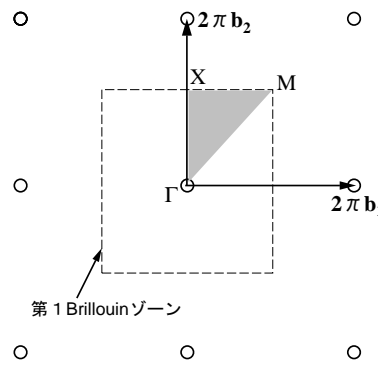


図-8 正方形格子状配列の逆格子と第 1 Brillouin ゾーン

には存在していない。一方、 $\bar{\omega} > 4$ の周波数域には擬表面波モードが存在している。なお、表面波の分散曲線直上にも擬表面波が存在しているが、有限長杭と無限長杭との差異を見易くするため、図-9 には示していない。図より、両ケースの分散曲線はほぼ一致しており、 $h = 2a$ において無限長杭と同様の波動伝播特性が得られていることがわかる。図-9 において、擬表面波のプロット点が幾分ばらついている。これは、文献 14) に述べたとおり擬表面波はバルク波の分散曲線上に分布するが、それらの交差点近傍では固有値の極小値の探索精度が低下するためであると考えられる。

次に、杭長 h が分散曲線に及ぼす影響についてより詳細に調べるために、 $h = 0.5a, a, 2a, \infty$ の 4 ケースに対して求めた、第 1 Brillouin ゾーンの境界辺 X-M 上の表面波分散曲線を図-10 に示す。図より、分散曲線は杭長の増加に伴い無限長杭の場合に収束しており、 $h = 2a$ 程度で無限長杭の場合とほぼ一致した結果を与えることがわかる。なお、杭長の増加と共に分散曲線は高周波数側へ移動しているが、これは杭が埋め込まれた地盤の巨視的剛性の増加によるものと考えられる。また、M 点の波数においては杭長の影響が認められないことから、ここでのモードは剛体変位で特徴付けられ剛性に依存しないものと考えられる。

3.3 三角形ハニカム状に配列されたコンクリート杭

図-11 に示すように三角形ハニカム状に有限長杭を

— 無限長杭の表面波 - - - 無限長杭の擬表面波
 ● 有限長杭の表面波 ○ 有限長杭の擬表面波

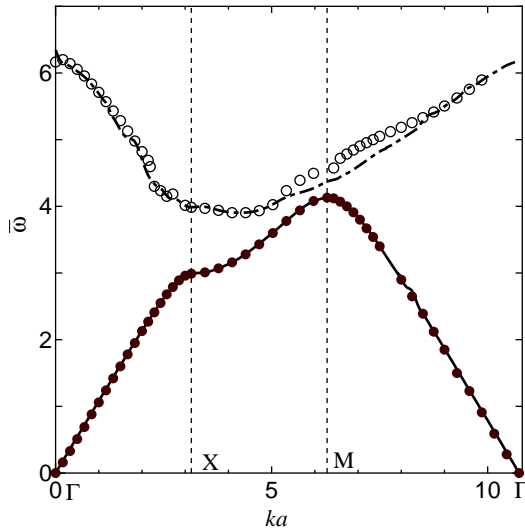


図-9 正方格子状配列の表面波分散曲線

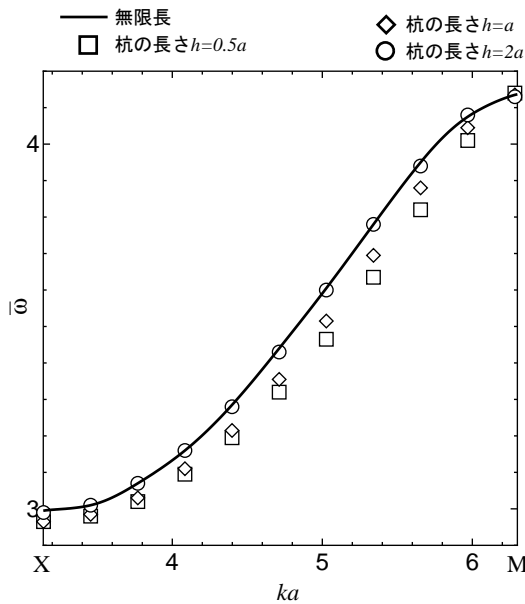


図-10 表面波分散曲線に杭長が及ぼす影響 (正方格子)

配置した場合の分散解析を行う。2次元ユニットセル Ω_S の要素分割は正方格子配列の場合と同様に3次元セルディピティ要素により16分割で与えた。なお、格子間隔 $a = 2d$ と設定した場合、正方格子状配列の充填率 $\pi/16 \approx 0.196$ に比べ、三角ハニカム格子状配列の充填率は $\pi/8\sqrt{3} \approx 0.227$ となり幾分高い値を有する。

三角形ハニカム格子に対する第1 Brillouin ゾーンは図-12に示すように与えられる。当該波数域における定常解の対称性に基づき、図-12における部分領域 Γ - X - M の境界边上の波数ベクトルに対して分散曲線を求めた。

杭の長さ $h = 2a$ の下で得られた分散曲線を、文献(14)

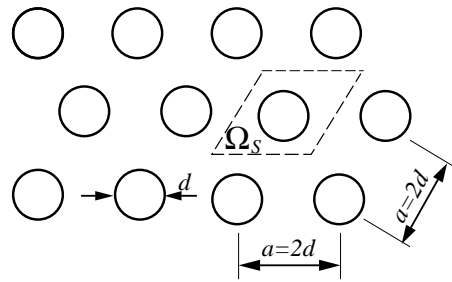


図-11 三角形ハニカム格子状配列の杭

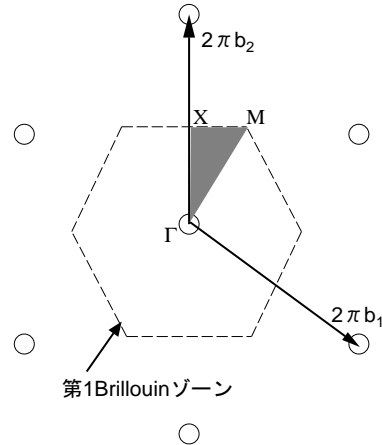


図-12 三角形ハニカム状配列の逆格子と第1 Brillouin ゾーン

で求めた無限長杭に対する分散曲線と合わせて図-13に示す。なお、図には、表面波の分散曲線に加え擬表面波モードも示した。図より、表面波モードも擬表面波モードも存在しないストップバンドが $\bar{\omega} = 3.9 \sim 4.4$ の周波数域に分布していることが確認できる。ここで、前述のとおり表面波の分散曲線直上には擬表面波が存在しているが、それらは近接しているため、ストップバンド下端は表面波の分散曲線で事実上評価可能である。また、前節に示した正方格子配列の場合と同様に、杭長 $h = 2a$ での分散曲線は無限長杭のものと同様に一致していることがわかる。

次に、杭長が分散曲線に及ぼす影響についてより詳細に調べるために、 $h = 0.5a, a, 2a, \infty$ の4ケースに対して求めた、第1 Brillouin ゾーン境界辺 X - M 上の表面波分散曲線を図-14に示す。図より、分散曲線は杭長の増加に伴い無限長杭での結果に収束しており、正方格子状に配列した杭の場合と同様に、 $h = 2a$ 程度で無限長杭のバンド構造とほぼ一致した結果が得られていることが確認できる。

周期配置された防振杭の振動遮蔽特性は、ストップバンド幅に基づき概ね評価できるものと考えられる。そこで、三角形ハニカム格子状に配置された杭の長さがストップバンドの分布に及ぼす影響について調べた。その結果を図-15に示す。なお図において、ストップバンド下端は第1 Brillouin ゾーン境界上の波数ベクトル M 点における表面波モードの周波数に対応し、一方上端は X 点と M 点間における擬表面波モードの最小周波

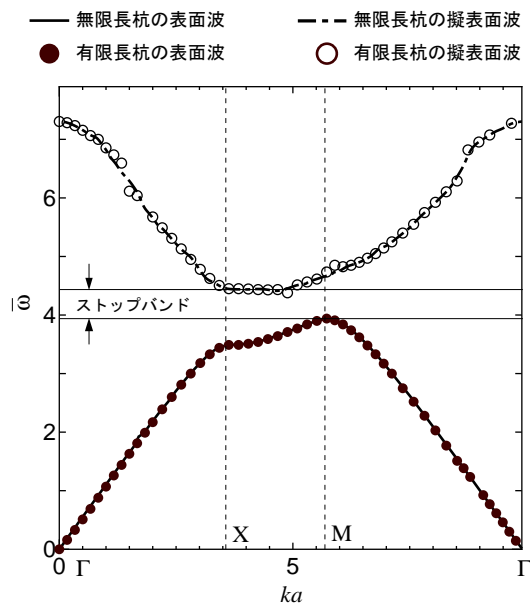


図-13 三角形ハニカム状配列における表面波分散曲線

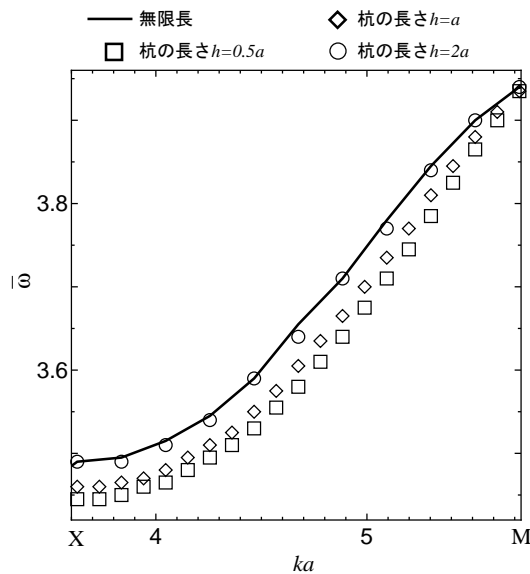


図-14 表面波分散曲線に杭長が及ぼす影響 (三角形ハニカム格子)

数に対応している (図-13) . 図より, $h > 0.5a$ において表面波モードの最大周波数より擬表面波モードの最小周波数が高くなり, ストップバンドが現れることがわかる. なお, この範囲でのストップバンド下端は杭長によらずほぼ一定値を示している. これに対して, ストップバンド上端の周波数は杭長と共に増加し, $h \geq 2a$ においてほぼ一定値に収束していることが確認できる. また, その結果としてストップバンド幅は $h \leq 2a$ の範囲で杭長の増加と共に広がる. ただし図-14 より, 表面波の分散曲線の位置も, M 点以外では杭長 h に依存しており, その増加と共に高周波数側へと移動することがわかる. この傾向は, 杭長が長くなることで巨視

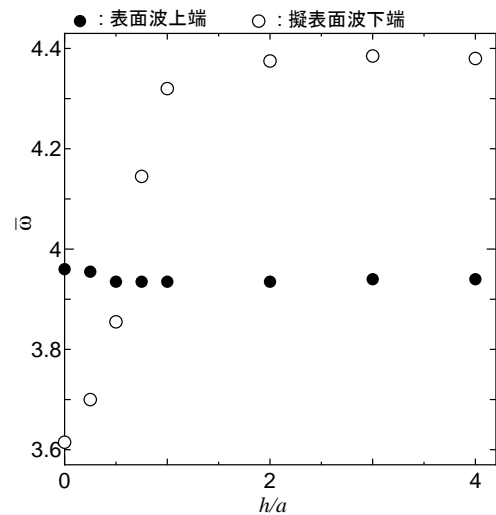


図-15 杭長がストップバンドに及ぼす影響 (三角形ハニカム格子)

的剛性の高い上層部の厚さが増し, その影響が支配的になることによるものと考えられる.

4. おわりに

水平面内に 2 次元周期的に配置された有限長防振杭を対象に, 表面波分散解析法を構成した. その際に, 文献 14) と同様に, 変位解の構成において 2 次元水平面内には有限要素と平面波との積による近似表現を用い, 深さ方向には平面波による展開を採用した. また, 本定式過程の下で有限長杭を考慮するために, 当該周期構造の半無限ユニットセルを, 杭を含む上層部とその下の半無限場とに分け, それぞれの領域に対して解を与えた. 最終的な方程式は, 両領域間の接合境界における連続条件を考慮することで導出した. 表面波モードの条件は, 当該方程式の行列式のゼロ点により与えた.

以上の解法に基づき, コンクリート防振杭の長さが表面波のバンド構造に及ぼす影響について調べた. その結果, 正方形格子状配列と三角形ハニカム格子状配列の何れにおいても, 杭長 h を格子間隔 a の 2 倍程度にとればバンド構造は無限長杭のそれと概ね一致することがわかった. また, 三角形ハニカム格子の場合には, 表面波と擬表面波の分散曲線の間にはストップバンドが分布するが, その周波数値も $h = 2a$ 程度の下で無限長杭の場合に十分近づくことが確認できた.

以上より, 分散曲線の観点から防振杭について議論する場合, 杭長を杭間隔の 2 倍程度に設定すれば無限長杭と同等の振動遮蔽効果が期待できると結論づけることができる. なお, この結果をストップバンド端での波長を基準にして表すと, 杭の長さは表面波長程度にとれば良いと言うことができる. 文献 2), 5) では十分な防振効果を得るために必要な杭長は Rayleigh 波長の 1~2 倍であると結論づけられており, 本研究で得られた上述の結果は 2 次元周期配列を対象としてはいるものの, 既往の研究による知見とも概ね符合する. この

ことは、バンド構造に基づいた本議論の妥当性を裏付けているものと解釈できる。

参考文献

- 1) Avilés, J. and Sánchez-Sesma, F.J.: Piles as barrier for elastic waves, *J. Geotech. Engng. (ASCE)*, **109**, 1133-1146, 1983.
- 2) Avilés, J. and Sánchez-Sesma, F.J.: Foundation isolation from vibrations using piles as barriers, *J. Engng. Mech. (ASCE)*, **114**, 1854-1870, 1988.
- 3) Kattis, S.E., Polyzos, D. and Beskos, D.E.: Vibration isolation by a row of piles using a 3-D frequency domain BEM, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **46**, 713-728, 1999.
- 4) Onoda, K., Nagasawa, H., Ohshima, T. and Tamura, T.: Development of isolation barrier for ground vibration by employing group of embedded circular drain in the soil, *Env. Vib.*, Takemiya (ed.), 485-491, 2005.
- 5) 神田仁, 石井啓稔, 阪本泰士, 川村淳一, 平川泰行, 伊藤康宏: 起振機実験から得られた PC 柱列壁の防振効果について, 土木学会第 59 回年次学術講演会, 3-313, 2004.
- 6) Sánchez-Pérez, J.V., Rubio, c., Martínez-Sala, R., Sánchez-Grandia, R., V.Gomez: Acoustic barriers based on periodic arrays of scatterers. *Appl. Phys. Lett.*, **81**, 5240-5242, 2002.
- 7) 迫田和彰: フォトニック結晶入門, 森北出版, 2004.
- 8) Mead, D.J.: Wave propagation in continuous periodic structures: Research contributions from Southampton. *J. Sound Vib.*, **190**, 495-524, 1996.
- 9) Kushwaha, M.S., Halevi, P., Dobrzynski, L. and Djafari-Rouhani, B.: Acoustic band structure of periodic elastic composites, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 2022-2025, 1993.
- 10) Phani, A.S., Woodhouse, J. and Fleck, N.A.: Wave propagation in two-dimensional periodic lattices, *J. Acoust. Soc. Am.*, **119**, 1995-2005, 2006.
- 11) Tanaka, Y. and Tamura, S.: Surface acoustic waves in two-dimensional periodic elastic structures, *Phys. Rev. B*, **58**, 7958-7965, 1998.
- 12) Every, A.G.: Pseudosurface wave structure in phonon imaging, *Phys. Rev. B*, **33**, 2719-2732, 1986.
- 13) Tanaka, Y. and Tamura, S.: Acoustic stop bands of surface and bulk modes in two-dimensional phononic lattices consisting of aluminum and a polymer, *Phys. Rev. B*, **60**, 13 294, 1999.
- 14) 阿部和久, 荒木聡秀, 紅路一寛: 二重周期弾性場の有限要素表面波分散解析, 土木学会論文集 A2, **67**(2), I 905-I 913, 2011.
- 15) Yudistira, D., Pennec, Y., Rouhani, B.D., Dupont, S. and Laude, V.: Non-radiative complete surface acoustic wave bandgap for finite-depth holey phononic crystal in lithium niobate, *Appl. Phys. Lett.*, **100**, 061912, 2012.

(2013 年 3 月 18 日 受付)