

面外定常波動問題における非直交 wavelet を用いた境界要素法の 係数行列保存成分数

Number of non-zero matrix entries in wavelet BEM
for steady-state out-of-plane wave propagation problems

紅露一寛*・阿部和久**
Kazuhiro KORO, Kazuhisa ABE

*正会員 博士(工学) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科(〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
**正会員 工博 新潟大学教授 工学部建設学科(〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

In the BEM with the non-orthogonal spline wavelets for steady-state out-of-plane wave propagation problems, the relation between the number of non-zero entries of the coefficient matrices and the degree of freedom (DOF) N is theoretically investigated using the information on the size and the arrangement of the support of the basis functions. The coefficient matrices are compressed by truncation with a prescribed threshold value κ . The value of κ is determined so that the amount of storage is minimized without reducing the accuracy of BE solution, and shows $\kappa \approx \rho N^{-\beta}$ ($\rho, \beta > 0$). The number of non-zero entries of the matrices \mathbf{G} and \mathbf{H} , $\mathcal{N}(\mathbf{G})$ and $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ increases in proportion to $O(N \log N)$ or $O(N^{1+\gamma})$ ($0 < \gamma < 1$). The low compression rate of the coefficient matrix for a high-frequency problem can be improved using the wavelets with a higher-order vanishing moment property.

Key Words : steady-state out-of-plane wave equation, wavelet BEM, non-orthogonal wavelet

1. はじめに

境界要素法 (BEM)¹⁾は、支配方程式から導出される境界積分方程式を離散化して数値的に解く手法であり、線形かつ物体力や内部ソースのない問題では境界上の離散化のみで近似解を得られる方法である。また、境界積分方程式を導出する際に用いる基本解を、無限遠方からの波動伝播成分が生じないように構成できるため、開領域問題における無限遠方での波動エネルギーの放射を矛盾なく表現できる。そのため BEM では、解析領域を閉領域として設定せざるを得ない領域型解法のように、解析の便宜上設けられた遠方境界からの反射波の発生に注意を払う必要がなく²⁾、土木工学分野においては主に地盤振動解析や音場解析などで用いられてきた。さらに、境界上のみを離散化で十分な問題設定の下では、解析自由度を有限要素法 (FEM) などの領域型解法に比して小さく設定できる利点を有している。

しかしながら、BEM において最終的に得られる連立一次方程式の係数行列は、FEM や差分法 (FDM) のように疎行列とはならず、静的問題や定常問題では密行列となる。そのため、一般的な境界要素解析においては、 N を解析自由度として、 $O(N^2)$ の記憶容量を必要とし、求解計算には $O(N^3)$ の計算量を要することとなる。このような背景から、大規模問題への適用が困難であると考えられてきた。しかし、この 10 数年の間、BEM の計算効率の悪さを克服すべく、高速多重極展開法^{3),4)} や wavelet を離散化に用いる方法 (wavelet 法)^{5),6)} など

の高速化・効率化手法の開発・実用化に関する研究が精力的に進められてきた。

Wavelet を用いた境界要素法 (wavelet 境界要素法, wavelet BEM) は、境界積分方程式の離散化において、方程式の未知量の近似と Galerkin 法の重み関数に wavelet 基底を用いる方法である。Wavelet を用いた離散化では、基底関数として scaling 関数と wavelet の 2 種類が用いられる。特に wavelet はゼロモーメント性 (所定次以下の単項式と wavelet との内積が 0 となる性質) を有しているため、wavelet と基本解からなる被積分関数を境界上で積分することにより得られた係数行列成分は、このゼロモーメント性によりその大半が微小なものとなる。微小となった係数成分は、所定の閾値 (切り捨て基準値) を下回るもののみを切り捨ててゼロとみなす。その結果、大多数の係数が切り捨てられることとなれば、係数行列は疎行列となり、境界要素解析の計算効率が大きく改善されることとなる。

Wavelet BEM に関する研究成果は、当初は楕円型境界値問題の境界積分方程式法に適用することで $O(N \log N)$ の計算量が実現できることを数学的に証明した Beylkin の論文⁵⁾ や、第 1 種・第 2 種積分方程式への適用時の精度と計算量を考察した Schwab や Schneider らの一連の研究論文^{7)–10)} など、応用数学の観点から考察したものが多い。一方、工学的見地から wavelet BEM の実用化に取り組む研究も多数報告されている。測地学への適用¹¹⁾ や、定常スカラー波動問題への適用^{12),13),14)}、電磁場解析への適用^{15),16),17),18)}、有限要素法

との結合解法の開発^{19),20),21)}などがある．また，著者らは，境界要素解析に適した wavelet 基底として非直交 wavelet を開発し⁶⁾，境界要素解析における切り捨ての閾値の決定法²²⁾や境界積分の計算負荷を軽減するための数値積分公式²³⁾などを提案している．また，文献²⁴⁾では，係数行列成分の生成に用いる基底関数の階層レベルによらず一定の切り捨て基準値を用いて係数行列の圧縮を行なう Beylkin 型係数切り捨て手法を採用する場合を対象に，係数行列の保存成分数の漸近評価に取り組んでいる．なお，文献^{22)–24)}はいずれも Laplace 問題を対象としたものであるが，wavelet BEM 適用の試みは広がってきており，後述の波動問題だけでなく，2 次元拡散問題や 2 次元スカラー波動問題の時間域境界積分方程式の離散化^{25),26),27)}，流れの問題の境界要素解析^{28),29)}への適用の試みなども報告されている．

定常波動問題の境界要素解析に注目すると，積分方程式を離散化して得られる係数行列が密行列となるのが定常波動場を解析対象とした場合であることから，電磁場の定常解析に wavelet を適用した Goswami¹⁵⁾，Wang¹⁶⁾，定常スカラー波動問題において wavelet を適用した場合の係数行列の圧縮性能を理論的に評価した Vandewalle ら¹²⁾や Harris ら¹³⁾の研究がある．また，一般的な wavelet 級数展開または wavelet 変換に基づく定式化だけでなく，wavelet packet を用いた定式化についても提案されている^{14),17),18)}．しかし，いずれにおいても，面外定常波動場の境界積分方程式の離散化に非直交 wavelet を用い，係数行列の微小成分の切り捨てにおいて一定の閾値（切り捨て基準値）に基づく判定条件を用いる Beylkin 型切り捨て手法を採用する場合における，係数行列保存成分数の解析自由度依存性は明らかにされていない．

そこで本研究では，面外定常波動問題の境界積分方程式を非直交 wavelet を用いた境界要素法で離散化し，係数行列の微小成分の切り捨てを一定の切り捨て基準値に基づいて判定・実行する場合を対象に，係数行列の保存成分数における解析自由度依存性について考察する．また，切り捨て基準値は近似値の切り捨て誤差と離散化誤差とが同等となるように定め，そのときの切り捨て基準値の解析自由度依存性についても検討する．理論的考察により得られた保存成分数の評価結果の妥当性は，簡単な例題を対象とした数値実験結果との比較を通し検討する．

2. 面外定常波動問題の境界積分方程式

図-1 に示す面外定常波動問題の支配方程式と境界条件は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{u}(x) + \alpha^2 \tilde{u}(x) &= 0, & (x \in \Omega) \\ \tilde{u}(x) &= \tilde{u}_0(x) & (x \in \Gamma_u), \quad \tilde{q}(x) = \tilde{q}_0(x) & (x \in \Gamma_q) \end{aligned} \quad (1)$$

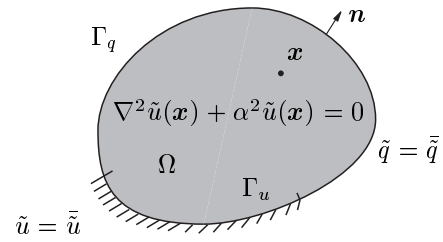


図-1 対象とする問題．

ここで， Ω は領域， Γ は境界であり， $\Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma$ ， $\Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$ であるものとする．また， \tilde{u} は面外変位， $\tilde{q} = \partial \tilde{u} / \partial n_x$ (n_x : 点 x での外向き法線) であり， \tilde{u}_0 ， \tilde{q}_0 はともに既知境界値である． α は波数で $\alpha = \omega / c$ で与えられ， ω は円振動数， c は波動伝播速度である．なお， Ω が開領域の場合には，次の条件を満足するものとする．

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \tilde{u}(x) = \tilde{u}_{inc}(x). \quad (2)$$

式 (1) で定義した境界値問題に対応する境界積分方程式は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} c(\xi) \tilde{u}(\xi) + \int_{\Gamma} \tilde{q}^*(x; \xi) \tilde{u}(x) d\Gamma_x \\ - \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x; \xi) \tilde{q}(x) d\Gamma_x = \tilde{u}_{inc}(\xi). \end{aligned} \quad (3)$$

ここで， x は積分点， ξ はソース点であり， $c(\xi)$ は点 ξ における境界のなす角で決まる関数である． $\tilde{u}_{inc}(\xi)$ は外部問題では所定の関数で与えるが，内部問題の場合は 0 となる．また， \tilde{u}^* ， \tilde{q}^* は基本解および二重層核であり，次式で定義する．

$$\begin{aligned} \tilde{u}^*(x; \xi) &:= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\alpha |x - \xi|), \\ \tilde{q}^*(x; \xi) &:= \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial n_x}(x; \xi). \end{aligned} \quad (4)$$

ここで， i は虚数単位であり， $H_0^{(1)}$ は 0 次第 1 種 Hankel 関数である．

3. Wavelet 境界要素法

3.1 Wavelet 基底を用いた境界積分方程式の離散化

Wavelet 境界要素法では，式 (3) の境界積分方程式を離散化するために，式中の \tilde{u} と \tilde{q} を次式の wavelet 級

数で近似する．

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{u}_{0,j} \phi_{0,j}(x) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{n_w(k)} \tilde{u}_{k,l} \psi_{k,l}(x) \\
&= \sum_{i=1}^N \tilde{U}_i w_i(x), \\
\tilde{q}(x) &\approx \sum_{j=1}^{n_s} \hat{q}_{0,j} \phi_{0,j}(x) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{n_w(k)} \tilde{q}_{k,l} \psi_{k,l}(x) \\
&= \sum_{i=1}^N \tilde{Q}_i w_i(x),
\end{aligned} \tag{5}$$

なお， $\hat{u}_{0,j}$ ， $\tilde{u}_{k,l}$ ， $\hat{q}_{0,j}$ ， $\tilde{q}_{k,l}$ はそれぞれ \tilde{u} ， \tilde{q} の展開係数であり， \tilde{U}_i ， \tilde{Q}_i はこれらをまとめて表わしたものである． $\phi_{0,j}(x)$ ， $\psi_{k,l}(x)$ はそれぞれ scaling 関数，wavelet であり， $w_i(x)$ はこれらの基底関数をまとめて表わしたものである．本研究では区間一定の非直交 wavelet⁶⁾を用いる．また， $\phi_{0,j}$ ， $\psi_{k,l}$ ($j = 1, 2, \dots, n_s$ ， $k = 0, 1, \dots, M$ ， $l = 1, 2, \dots, n_w(k)$) の総数は N となるものとする．Wavelet 境界要素法では，この N が解析自由度となる．

なお，wavelet は次のゼロモーメント条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta^p \psi_{k,l}(\zeta) d\zeta = 0, \quad (p = 0, 1, \dots, n-1) \tag{6}$$

を満足し，これが境界要素法の係数行列成分を微小とする際に鍵となる性質である．ここで， n はゼロモーメント次数である．

式 (3) に式 (5) を代入して得られる境界積分方程式の残差に対し， w_i ($i = 1, 2, \dots, N$) を重み関数とした Galerkin 法を適用すると，次の連立 1 次方程式を得る．

$$H\tilde{U} = G\tilde{Q} + \tilde{u}_{inc}. \tag{7}$$

ここで， \tilde{U} ， $\tilde{Q} \in \mathbb{C}^N$ (\mathbb{C} : 複素数全体の集合) は式 (5) の \tilde{u} ， \tilde{q} についての wavelet 展開係数 \tilde{U}_i ， \tilde{Q}_i を収納したベクトルであり， G ， $H \in \mathbb{C}^{N \times N}$ は係数行列である． G ， H の成分をそれぞれ g_{ij} ， h_{ij} とし， \tilde{u}_{inc} の成分を $(\tilde{u}_{inc})_i$ とすると， g_{ij} ， h_{ij} ， $(\tilde{u}_{inc})_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$ ， $j = 1, 2, \dots, N$) はそれぞれ次式で生成される．

$$\begin{aligned}
g_{ij} &:= \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x; \xi) w_j(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi}, \\
h_{ij} &:= \int_{\Gamma} c(\xi) w_i(\xi) w_j(\xi) d\Gamma_{\xi} \\
&\quad + \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} \tilde{q}^*(x; \xi) w_j(x) d\Gamma_x d\Gamma_{\xi}, \\
(\tilde{u}_{inc})_i &:= \int_{\Gamma} w_i(\xi) \tilde{u}_{inc}(\xi) d\Gamma_{\xi}.
\end{aligned} \tag{8}$$

式 (7) の展開係数ベクトル \tilde{U} ， \tilde{Q} の成分を未知成分と既知成分とに分離して式 (7) を整理すると，最終的に次の連立一次方程式を得る．

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b}. \tag{9}$$

ここで， $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ は式 (9) の係数行列， $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^N$ は未知な展開係数ベクトルであり， $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^N$ は既知量を整

理して得られたベクトルである．

3.2 係数行列成分の切り捨て

Wavelet 基底を用いた境界要素解析では，解析時の使用メモリの削減と計算時間の短縮を図るために，微小な係数行列成分をゼロとみなして切り捨てる．本研究では，切り捨て対象となる係数成分の選択および切り捨ては，係数成分の計算実行後にのみ実行する．得られた係数成分 g_{ij} ， h_{ij} の大きさに基づき，次式を満たす係数についてはゼロとみなして切り捨てる．

$$|g_{ij}| < \kappa g_{max}, \quad |h_{ij}| < \kappa h_{max}. \tag{10}$$

ここで， κ は切り捨て基準値であり， g_{max} ， h_{max} はそれぞれ $|g_{ij}|$ ， $|h_{ij}|$ の最大値である．なお，wavelet BEM による解析では，切り捨て対象成分の生成に関する不要な計算時間の短縮を図るために，式 (8) の計算の前にも係数成分の近似評価式を用いて切り捨てを実行するのが一般的である²²⁾．しかし本研究では，所定の閾値の下での係数行列保存成分数の解析自由度依存性を調べることを目的としていることもあり，係数計算前の切り捨て（事前切り捨て）は実行せず，係数計算後の事後切り捨てのみを実行する．

また，式 (8) の第 1 式，第 2 式の g_{ij} ， h_{ij} の計算に用いる 2 つの基底 w_i ， w_j のサポートが重なり合う係数行列成分については，微小成分の切り捨てを実行せず全て保存するものとする．

4. 係数行列の保存成分数の評価

式 (7) の係数行列 G ， H は，それらの係数成分 g_{ij} ， h_{ij} (式 (8) 参照) の生成に用いた基底 w_i ， w_j の階層レベル k_i ， k_j に対応する小行列に分割することができる．そのため， G ， H の保存成分数 $\mathcal{N}(G)$ ， $\mathcal{N}(H)$ は，小行列毎に評価した成分数を全階層にわたって和をとることで与えられる．

ここで，行列 G または H を行列 A と表わし， A の中でその成分が階層レベル (k_i, k_j) に対応するものを集めた小行列を A_{k_i, k_j} と定義すると，切り捨て後の A_{k_i, k_j} の保存成分数 $\mathcal{N}(A_{k_i, k_j})$ は次のように評価できる²²⁾．

$$\mathcal{N}(A_{k_i, k_j}) \leq C(2^{k_i} + 2^{k_j} + \gamma 2^{(k_i+k_j)} \delta_{k_i, k_j}), \tag{11}$$

ここで， δ_{k_i, k_j} は保存される係数成分を生成する際に用いる 2 つの基底のサポート間距離の上限値であり， C は定数， $\gamma > 0$ とする．

係数行列 A 全体の保存成分数は，式 (11) を k_i ， k_j

について和をとることで次式で評価できる．

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{A}) &\leq C_0 \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M \mathcal{N}(\mathbf{A}_{k_i, k_j}) \\ &\leq C_1 N \log N + C_2 \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(k_i+k_j)} \delta_{k_i, k_j}, \end{aligned} \quad (12)$$

なお, C_0, C_1, C_2 は定数である．また, N は $N \sim 2^{M+1}$ で与えられる．

4.1 係数行列成分の近似評価

式 (12) を用いて係数行列 G, H の保存成分数を評価するためには, 保存される係数成分のサポート間距離の上限値 δ_{k_i, k_j} を評価する必要がある．そこでまず, δ_{k_i, k_j} を係数行列成分の近似評価式から与えることとする．

近似評価の対象となるのは, 式 (8) の係数行列成分 g_{ij}, h_{ij} である．今, 保存成分数における解析自由度依存性の評価に必要なものは, 式 (12) より基底 w_i, w_j がともに wavelet で与えられる場合の係数行列保存成分のサポート間距離の上限値 δ_{k_i, k_j} である． w_i, w_j がともに wavelet である場合の係数成分の近似評価式は, 基本解に含まれる Hankel 関数およびその高階微分がソース点と積分点との距離 $r = |x - \xi| = 0$ で特異性を有していること, 二点間の距離が大きくなると Bessel 関数の挙動には遠方場近似が成り立つことに留意して, 次式で与えられる．

$$\begin{aligned} |g_{ij}| &\leq \beta_g \cdot \alpha^{2n} 2^{-\frac{2n+1}{2}(k_i+k_j)} F_g(\alpha, r), \\ |h_{ij}| &\leq \beta_h \cdot \alpha^{2n+1} 2^{-\frac{2n+1}{2}(k_i+k_j)} F_h(\alpha, r), \end{aligned} \quad (13)$$

ここで, β_g, β_h は定数であり, 関数 F_g, F_h はそれぞれ次式で定義する．

$$F_g(\alpha, r) = \begin{cases} \alpha^{-2n} r^{-2n}, & r < \delta_{g0}, \\ \alpha^{-1/2} r^{-1/2}, & r \geq \delta_{g0}, \end{cases} \quad (14)$$

$$F_h(\alpha, r) = \begin{cases} \alpha^{-(2n+1)} r^{-(2n+1)}, & r < \delta_{h0}, \\ \alpha^{-1/2} r^{-1/2}, & r \geq \delta_{h0}, \end{cases} \quad (15)$$

ただし, δ_{g0}, δ_{h0} は次式で与えられる．

$$\delta_{g0} = \varepsilon_1 \alpha^{-1}, \quad \delta_{h0} = \varepsilon_2 \alpha^{-1}. \quad (16)$$

なお, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は正数である．

4.2 係数行列 G の保存成分数 $\mathcal{N}(G)$ の評価

係数行列 G の保存成分数 $\mathcal{N}(G)$ を評価するために, まずはブロック小行列 G_{k_i, k_j} の保存成分数について考える．式 (11) から, 当該小行列の保存成分数 $\mathcal{N}(G_{k_i, k_j})$ は, その小行列内における保存成分のうち, 係数成分の生成に用いる基底関数 w_i, w_j のサポート間距離の最大値 δ_{k_i, k_j} を与えれば評価可能である．しかし, 基底

のサポート間距離の最大値は, 式 (13), (14) より, 係数 $|g_{ij}|$ の近似がサポート間距離に応じて異なる関数で与えられる．そのため, 保存成分数の評価にあたっては, まず, このサポート間距離が各小行列でどのように与えられるかを調べておく必要がある．

今, 切り捨ての実行判定の対象としている係数 $|g_{ij}|$ について, その近似値が式 (13) 第 1 式と式 (14) 第 1 式で与えられる場合を考える．このとき, 対象としている係数成分が保存の対象となるためには, 式 (10) の切り捨て判定条件を留意すると, サポート間距離 r について

$$\begin{aligned} \beta_g \alpha^{2n} 2^{-\frac{2n+1}{2}(k_i+k_j)} \cdot \alpha^{-2n} r^{-2n} &\geq \kappa g_{max}, \\ \therefore r &\leq \left(\frac{\beta_g}{\kappa g_{max}} \right)^{1/2n} 2^{-\frac{2n+1}{4n}(k_i+k_j)}, \end{aligned} \quad (17)$$

なる関係を得る．式 (17) の r の範囲は, 式 (14), (16) 第 1 式より $r < \varepsilon_1 \alpha^{-1}$ の内部でなければならないから, 次式を満たさねばならない．

$$\left(\frac{\beta_g}{\kappa g_{max}} \right)^{1/2n} 2^{-\frac{2n+1}{4n}(k_i+k_j)} \leq \varepsilon_1 \alpha^{-1}, \quad (18)$$

$$\therefore k_i + k_j \geq \omega_g,$$

ここで, ω_g は次式で定義する．

$$\omega_g = \frac{2}{2n+1} \left[\log \frac{\beta_g}{\kappa g_{max}} - 2n \log \varepsilon_1 + 2n \log \alpha \right], \quad (19)$$

式 (19) において, 切り捨て基準値 κ が $\kappa = \rho N^{-\beta}$ ($\beta > 0, \rho$: 定数) で与えられるものと仮定すると, 次式を得る．

$$\begin{aligned} \omega_g &= W_g + \frac{2\beta}{2n+1} \log N, \\ W_g &= \frac{2}{2n+1} \left[\log \frac{\beta_g}{\rho g_{max} \varepsilon_1^{2n}} + 2n \log \alpha \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

以上の結果から, 小行列ブロック G_{k_i, k_j} の階層レベル k_i, k_j について, $k_i + k_j \geq \omega_g$ を満たす場合には, 保存対象となる係数成分のサポート間距離 r は式 (17) 第 2 式を満たさねばならない．そのため, $k_i + k_j \geq \omega_g$ を満たす G_{k_i, k_j} における保存成分のサポート間距離の上限 δ_{k_i, k_j} は,

$$\begin{aligned} \delta_{k_i, k_j} &= \delta_{g1}, \quad (k_i + k_j \geq \omega_g), \\ \delta_{g1} &:= \left(\frac{\beta_g}{\rho g_{max}} \right)^{1/2n} \cdot 2^{-\frac{2n+1}{4n}(k_i+k_j)} \cdot N^{\frac{\beta}{2n}}, \end{aligned} \quad (21)$$

で与えられることとなる．

一方, $k_i + k_j < \omega_g$ の場合には, 保存対象成分のサポート間距離の最大値は, 式 (13) 第 1 式および式 (14) 第 2 式から与えることができる．このとき, 保存対象となる係数成分のサポート間距離は,

$$\begin{aligned} r &< \delta_{g2}, \\ \delta_{g2} &:= \left(\frac{\beta_g}{\rho g_{max}} \right)^2 \alpha^{4n-1} N^{2\beta} 2^{-(2n+1)(k_i+k_j)}, \end{aligned} \quad (22)$$

で与えられる．よって，この場合においては，式 (11) の δ_{k_i, k_j} は

$$\delta_{k_i, k_j} = \delta_{g2}, \quad (k_i + k_j < \omega_g), \quad (23)$$

で与えられる．

以上の結果を用いて，行列 G の保存成分数 $\mathcal{N}(G)$ を評価する．

(1) $\omega_g < 0$ の場合

この場合，全ての係数行列ブロックにおいて，保存成分数は式 (21) で与えられる．その結果，保存成分数 $\mathcal{N}(G)$ は式 (12) より次式で評価できる．

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(G) &\leq C_{g1} N \log N + C_2 \left(\frac{\beta_{g1}}{\rho_{gmax}} \right)^{1/2n} N^{\frac{\beta}{2n}} \\ &\quad \cdot \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(1-\frac{2n+1}{4n})(k_i+k_j)} \quad (24) \\ &\leq C_{g1} N \log N + C_{g2} N^{1+\frac{\beta-1}{2n}}. \end{aligned}$$

ただし， C_{g1} ， C_{g2} は定数である．

よって， $\omega_g < 0$ となる場合には，2次元 Laplace 問題の場合と同様の解析自由度依存性²⁴⁾を示すことができる．

(2) $0 \leq \omega_g \leq M$ の場合

この場合には，式 (12) より，

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(G) &\leq C_{g1} N \log N \\ &\quad + C_2 \sum_{k_i=0}^{\omega_g} \sum_{k_j=0}^{\omega_g-k_i} 2^{k_i+k_j} \delta_{g2} \\ &\quad + C_2 \sum_{k_i=0}^{\omega_g} \sum_{k_j=\omega_g-k_i+1}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{g1} \quad (25) \\ &\quad + C_2 \sum_{k_i=\omega_g+1}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{g1} \end{aligned}$$

となるから，上式において ω_g を式 (20) で与え， δ_{g1} ， δ_{g2} に式 (21)，(22) を代入した上で，各項に含まれる k_i ， k_j についての和を計算して整理すると，次の結論を得る．

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(G) &\leq C_{g1} N \log N + C_{g3} N^{1+\frac{\beta-1}{2n}} \\ &\quad + C_{g4} N^{\frac{2\beta}{2n+1} + \frac{2n-1}{4n}} + C_{g5} N^{\frac{2\beta}{2n+1}} \quad (26) \\ &\quad + C_{g6} N^{\frac{2\beta}{2n+1}} \log N, \end{aligned}$$

のように評価できる．

(3) $M < \omega_g \leq 2M$ の場合

この場合，式 (12) より，

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(G) &\leq C_{g1} N \log N \\ &\quad + C_2 \sum_{k_i=0}^{\omega_g-M} \sum_{k_j=0}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{g2} \\ &\quad + C_2 \sum_{k_i=\omega_g-M+1}^M \sum_{k_j=0}^{\omega_g-k_i} 2^{k_i+k_j} \delta_{g2} \quad (27) \\ &\quad + C_2 \sum_{k_i=\omega_g-M+1}^M \sum_{k_j=\omega_g-k_i+1}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{g1} \end{aligned}$$

となるから， $0 \leq \omega_g \leq M$ の場合と同様に，各項に含まれる k_i ， k_j についての和を計算して整理すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(G) &\leq C_{g1} N \log N + C_{g3} N^{1+\frac{\beta-1}{2n}} \\ &\quad + C_{g5} N^{\frac{2\beta}{2n+1}} + C_{g6} N^{\frac{2\beta}{2n+1}} \log N, \quad (28) \end{aligned}$$

のように評価できる．

(4) $\omega_g > 2M$ の場合

当該の場合には，全ての係数行列ブロック G_{k_i, k_j} において $\delta_{k_i, k_j} = \delta_{g2}$ が選択されることとなる．そのため，式 (12) より係数行列 G の保存成分数 $\mathcal{N}(G)$ は，

$$\mathcal{N}(G) \leq C_{g1} N \log N + C_2 \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{g2}, \quad (29)$$

で評価できるから，式 (21) を上式に代入し，各項に含まれる k_i ， k_j についての和を計算して整理すると， $2\beta - 4n > 0$ の場合には，次式を得る．

$$\mathcal{N}(G) \leq C_{g1} N \log N + C_{g7} N^{2\beta-4n}. \quad (30)$$

なお， $2\beta - 4n \leq 0$ の場合には，

$$\mathcal{N}(G) \leq C_{g1} N \log N, \quad (31)$$

の挙動を示すこととなる．

4.3 係数行列 H の保存成分数 $\mathcal{N}(H)$ の評価

係数行列 H の保存成分数は，行列 G の場合と同様の方法で評価することができる．

まず，行列 H の小行列ブロック H_{k_i, k_j} の保存成分数を評価するために，当該の小行列に関して式 (11) に含まれる δ_{k_i, k_j} を評価する． δ_{k_i, k_j} は，係数 $|h_{ij}|$ の近似と切り捨ての閾値から定められることとなるが，式 (13)，(14) より，係数 $|h_{ij}|$ の近似がサポート間距離 r に応じて異なる関数で与えられる．

そこで，切り捨ての実行判定の対象としている係数 $|h_{ij}|$ について，その近似値が式 (13) 第2式と式 (15) 第1式で与えられる場合を考える．このとき，対象としている係数成分が保存の対象となるためには，式 (10) の切り捨て判定条件を留意すると，サポート間距離 r に

ついて

$$\frac{\beta_h \alpha^{2n+1} 2^{-\frac{2n+1}{2n+1}(k_i+k_j)}}{\alpha^{2n+1} r^{2n+1}} \geq \kappa h_{max}, \quad (32)$$

$$\therefore r \leq \left(\frac{\beta_h}{\kappa h_{max}} \right)^{\frac{1}{2n+1}} 2^{-\frac{1}{2}(k_i+k_j)},$$

なる関係を得る．式 (32) の r の範囲は，式 (15)，(16) 第 2 式より $r < \varepsilon_2 \alpha^{-1}$ の内部でなければならないから，次式を満たさねばならない．

$$\left(\frac{\beta_h}{\kappa h_{max}} \right)^{\frac{1}{2n+1}} 2^{-\frac{1}{2}(k_i+k_j)} \leq \varepsilon_2 \alpha^{-1}, \quad (33)$$

$$\therefore k_i + k_j \geq \omega_h,$$

なお， ω_h は次式で定義する．

$$\omega_g = \frac{2}{2n+1} \log \frac{\beta_h}{\kappa h_{max}} - 2 \log \varepsilon_2 + 2 \log \alpha, \quad (34)$$

ここで，前節と同様に，切り捨て基準値 κ が $\kappa = \rho N^{-\beta}$ ($\beta > 0$, ρ : 定数) で与えられるものと仮定すると，次式を得る．

$$\omega_h = W_h + \frac{2\beta}{2n+1} \log N, \quad (35)$$

$$W_h = \frac{2}{2n+1} \log \frac{\beta_h}{\rho h_{max} \varepsilon_2^2} + 2 \log \alpha.$$

以上の結果から，小行列ブロック H_{k_i, k_j} の階層レベル k_i, k_j について， $k_i + k_j \geq \omega_h$ を満たす場合には，保存対象となる係数成分のサポート間距離 r は式 (32) 第 2 式を満たさねばならない．そのため， $k_i + k_j \geq \omega_h$ を満たす H_{k_i, k_j} においては， δ_{k_i, k_j} は次式で与えられる．

$$\delta_{k_i, k_j} = \delta_{h1}, \quad (k_i + k_j \geq \omega_g),$$

$$\delta_{h1} := \left(\frac{\beta_h}{\rho h_{max}} \right)^{\frac{1}{2n+1}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}(k_i+k_j)} \cdot N^{\frac{\beta}{2n+1}}, \quad (36)$$

で与えられることとなる．

一方， $k_i + k_j < \omega_h$ の場合には，保存対象成分のサポート間距離の最大値は，式 (13) 第 2 式および式 (15) 第 2 式から与えることができる．このとき，保存対象となる係数成分のサポート間距離は，

$$r < \delta_{h2},$$

$$\delta_{h2} := \left(\frac{\beta_h}{\rho h_{max}} \right)^2 \alpha^{4n+1} N^{2\beta} 2^{-(2n+1)(k_i+k_j)}, \quad (37)$$

で与えられる．よって，この場合においては，式 (11) の δ_{k_i, k_j} は

$$\delta_{k_i, k_j} = \delta_{h2}, \quad (k_i + k_j < \omega_h), \quad (38)$$

で与えられる．

以下では， ω_h と最高階層 M との大小関係を考慮し，行列 H の保存成分数 $\mathcal{N}(H)$ を評価する．

(1) $\omega_h < 0$ の場合

この場合，全ての係数行列ブロックにおいて， δ_{k_i, k_j} は式 (36) で与えられる．その結果，保存成分数 $\mathcal{N}(H)$

は式 (12) より次式で評価できる．

$$\mathcal{N}(H) \leq C_{h1} N \log N + C_2 \left(\frac{\beta_{h1}}{\rho g_{max}} \right)^{\frac{1}{2n+1}} \cdot N^{\frac{\beta}{2n+1}} \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{(1-\frac{1}{2})(k_i+k_j)} \quad (39)$$

$$\leq C_{h1} N \log N + C_{h2} N^{1+\frac{\beta}{2n+1}}.$$

ただし， C_{h1}, C_{h2} は定数である．

よって， $\omega_h < 0$ となる場合には，2次元 Laplace 問題における H 行列と同様の解析自由度依存性²⁴⁾を示す．

(2) $0 \leq \omega_h \leq M$ の場合

この場合には，式 (12) より，

$$\mathcal{N}(H) \leq C_{h1} N \log N$$

$$+ C_2 \sum_{k_i=0}^{\omega_h} \sum_{k_j=0}^{\omega_h-k_i} 2^{k_i+k_j} \delta_{h2}$$

$$+ C_2 \sum_{k_i=0}^{\omega_h} \sum_{k_j=\omega_h-k_i+1}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{h1} \quad (40)$$

$$+ C_2 \sum_{k_i=\omega_h+1}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{h1}$$

となるから，上式において ω_h を式 (35) で与えた上で， δ_{h1}, δ_{h2} に式 (36)，(37) を代入し，各項に含まれる k_i, k_j についての和を計算して整理すると，次の結論を得る．

$$\mathcal{N}(H) \leq C_{h1} N \log N + C_{h3} N^{1+\frac{\beta}{2n+1}}$$

$$+ C_{h4} N^{\frac{2\beta}{2n+1}} + C_{h5} N^{\frac{2\beta}{2n+1}} \log N \quad (41)$$

$$+ C_{h6} N^{\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2n+1}},$$

のように評価できる．

(3) $M < \omega_h \leq 2M$ の場合

この場合，式 (12) より，

$$\mathcal{N}(H) \leq C_{h1} N \log N$$

$$+ C_2 \sum_{k_i=0}^{\omega_h-M} \sum_{k_j=0}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{h2}$$

$$+ C_2 \sum_{k_i=\omega_h-M+1}^M \sum_{k_j=0}^{\omega_h-k_i} 2^{k_i+k_j} \delta_{h2} \quad (42)$$

$$+ C_2 \sum_{k_i=\omega_h-M+1}^M \sum_{k_j=\omega_h-k_i+1}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{h1}$$

となるから， $0 \leq \omega_h \leq M$ の場合と同様に，各項に含まれる k_i, k_j についての和を計算して整理すると，次式を得る．

$$\mathcal{N}(H) \leq C_{h1} N \log N + C_{h3} N^{1+\frac{\beta}{2n+1}}$$

$$+ C_{h4} N^{\frac{2\beta}{2n+1}} + C_{h5} N^{\frac{2\beta}{2n+1}} \log N, \quad (43)$$

のように評価できる．

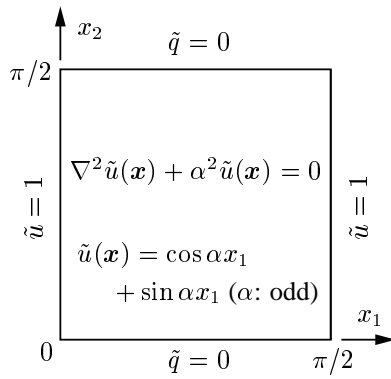


図-2 解析対象とした例題の問題設定.

(4) $\omega_h > 2M$ の場合

当該の場合には、全ての係数行列ブロック H_{k_i, k_j} において $\delta_{k_i, k_j} = \delta_{h2}$ が選択されることとなる。そのため、式 (12) より係数行列 H の保存成分数 $\mathcal{N}(H)$ は、

$$\mathcal{N}(H) \leq C_{h1} N \log N + C_2 \sum_{k_i=0}^M \sum_{k_j=0}^M 2^{k_i+k_j} \delta_{h2}, \quad (44)$$

で評価できるから、式 (37) を上式に代入し、各項に含まれる k_i, k_j についての和を計算して整理すると、 $2\beta - 4n > 0$ の場合には、次式を得る。

$$\mathcal{N}(H) \leq C_{h1} N \log N + C_{h6} N^{2\beta-4n}. \quad (45)$$

なお、 $2\beta - 4n \leq 0$ の場合には、

$$\mathcal{N}(H) \leq C_{h1} N \log N, \quad (46)$$

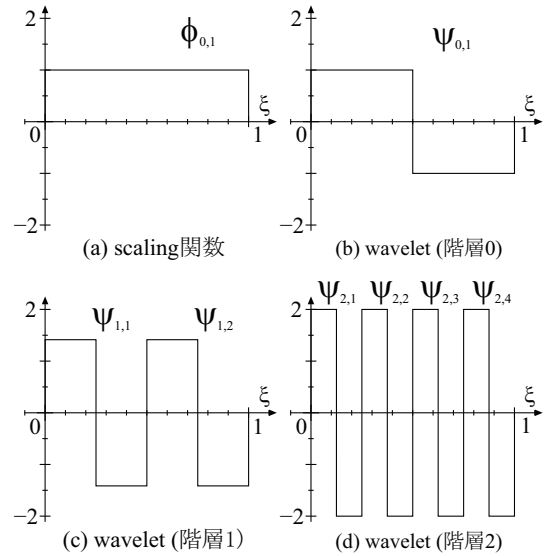
の挙動を示すこととなる。

5. 境界要素解析の計算効率の検討

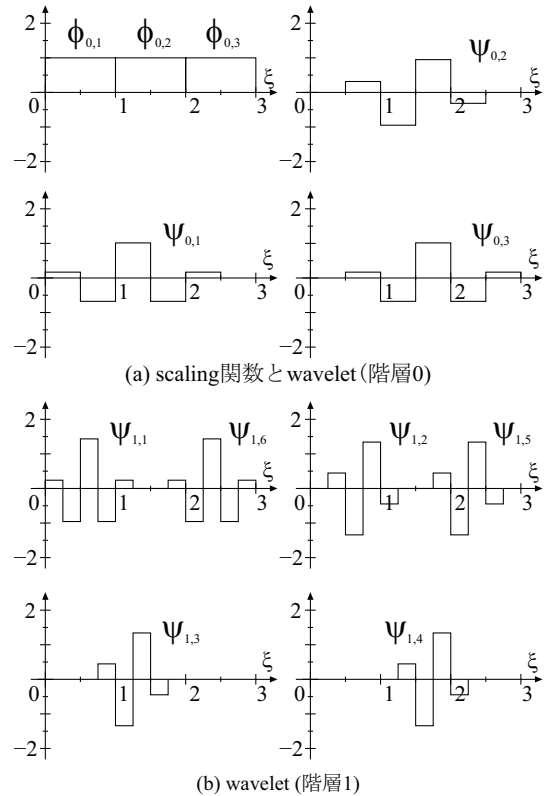
前節で示した係数行列 G, H の保存成分数 $\mathcal{N}(G), \mathcal{N}(H)$ の解析自由度依存性の評価結果の妥当性を確認する目的で、図-2 に示す混合境界値問題を対象に、非直交 wavelet を用いて境界要素解析を行なった。なお、当該問題は、 α を奇数に設定するとき、真の解は $\tilde{u} = \cos(\alpha x_1) + \sin(\alpha x_1)$ で与えられる。

5.1 解析条件

解析に際しては、波数を $\alpha = 1$ または $\alpha = 15$ のいずれかに設定した。非直交 wavelet には、区間一定でゼロモーメント次数 $n = 1, n = 3$ である 2 種類を用いた。面外変位等の境界上の未知量を近似するのに用いる wavelet 級数は、4 つの部分境界毎に独立に定義するものとし、級数の定義に用いる scaling 関数は必要最低数を使用することとした。級数を定義する際における部分境界上の基底の配置や、有界区間上で完全な wavelet 級数を定義するために必要となる境界 wavelet は、文献⁶⁾に示された方法で選択・配置した。解析に用



(i) 区間一定・1次ゼロモーメント性を有する wavelet.

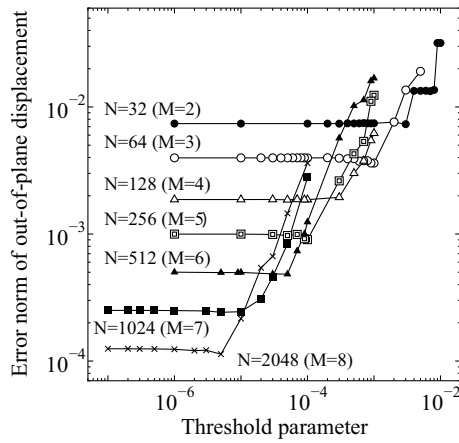


(ii) 区間一定・3次ゼロモーメント性を有する wavelet.

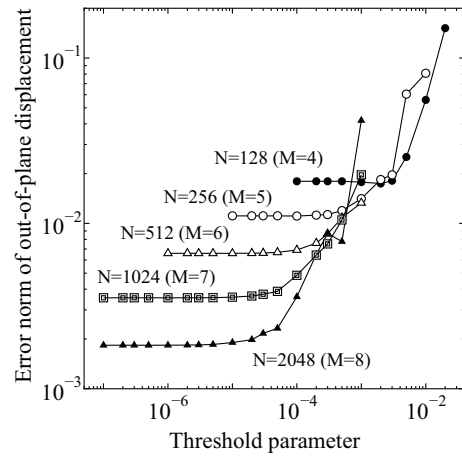
図-3 解析に用いた scaling 関数と wavelet の形状、および部分境界上での配置。

いた scaling 関数と wavelet の形状、および部分境界上での配置は、図-3 に示す通りである。

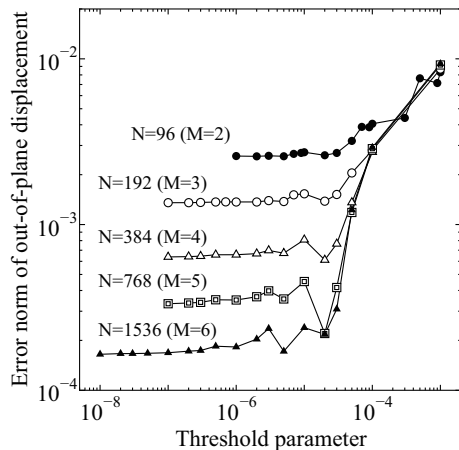
また、係数行列作成時の境界上の数値積分では、基本解の疑似特異性と空間波長の長さ起因した積分精度の低下を防止するために、必要に応じて積分区間を十分に細分割した上で計算処理した。被積分関数の特異性に起因する積分精度の低下は、特異積分を解析的に処理することで防止した。



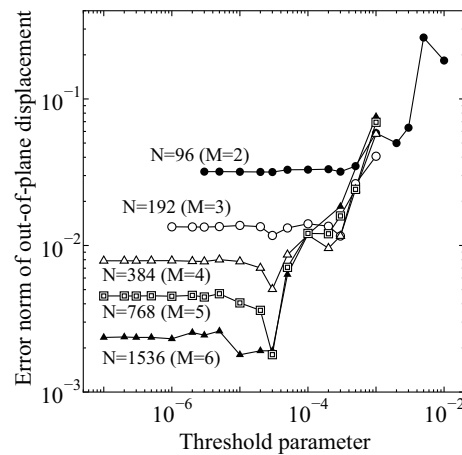
(a) ゼロモーメント次数 $n = 1$.



(a) ゼロモーメント次数 $n = 1$.



(b) ゼロモーメント次数 $n = 3$.



(b) ゼロモーメント次数 $n = 3$.

図-4 $\alpha = \omega/c = 1$ の場合における面外変位の誤差と解析自由度・切り捨て基準値の関係。

図-5 $\alpha = \omega/c = 15$ の場合における面外変位の誤差と解析自由度・切り捨て基準値の関係。

5.2 切り捨て基準値の解析自由度依存性の検証

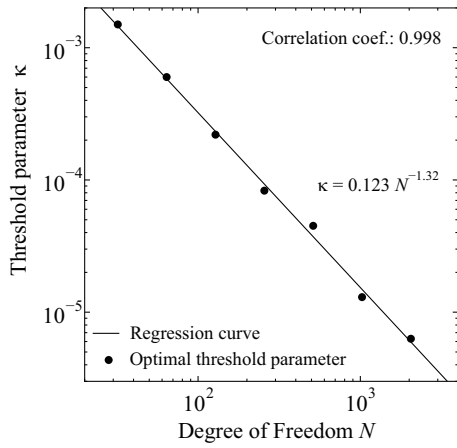
前節での議論では、係数行列の保存成分数 $\mathcal{N}(G)$, $\mathcal{N}(H)$ の解析自由度依存性を評価するにあたり、切り捨て基準値 κ の解析自由度依存性を $\kappa \approx \rho N^{-\beta}$ と仮定した。以下では、この仮定の妥当性について検討する。

まず、各解析自由度に対応する面外変位の誤差と微小な係数成分の切り捨てに用いる切り捨て基準値 κ との関係を図-4 ($\alpha = 1$), 図-5 ($\alpha = 15$) に示す。なお、面外変位の誤差は、計算により得られた面外変位に関する wavelet 展開係数を wavelet 逆変換により区間一定近似に再構成したものをベクトル u に収納した上で、このベクトルについての誤差を無限大ノルムの意味で評価したものである。この誤差指標は、当該問題における切り捨て基準値の実用的な事前決定法を文献²²⁾と同様なアプローチにより将来的に構成することを想定して、文献²²⁾で用いた指標と同じものとしている。

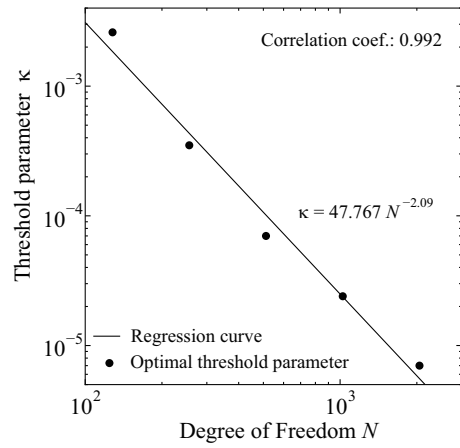
いずれの場合においても、切り捨て基準値を十分に小さく設定すると近似解の誤差は概ね一定値を示しており、この誤差は境界要素解の離散化誤差であるものと考えられる。一方、切り捨て基準値を次第に大きく

していくと、近似解の誤差が増加し始める。Wavelet を用いた境界要素解析では、近似解の誤差が一定から増加に転じる点では、近似解の離散化誤差が係数成分の切り捨て誤差と同等となっていると考えられる。そのため、実際に解析を行なう際には、この点に対応する切り捨て基準値(以下、最適な切り捨て基準値)を用いることが最も合理的である。しかし、図-4、図-5 からわかるように、切り捨て基準値は、wavelet 展開の最高階層 M または解析自由度 N に依存しているため、本研究では最適な切り捨て基準値の挙動として、 $\kappa \approx \rho N^{-\beta}$ を仮定したわけである。

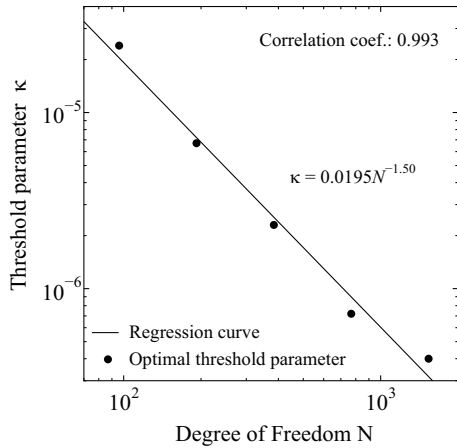
そこで、切り捨て基準値の解析自由度依存性 $\kappa \approx \rho N^{-\beta}$ の仮定の妥当性を定量的に検討する目的で、図-4、図-5 から抽出した最適な切り捨て基準値と解析自由度との関係を図-6、図-7 に示す。なお、図中の直線は、最小二乗法によって得られた κ と N についての回帰直線である。図-4、図-5 では、特に wavelet のゼロモーメント次数が 3 次の場合、近似解の誤差が最適な切り捨て基準値の付近で上下に変動するため、解析者によ



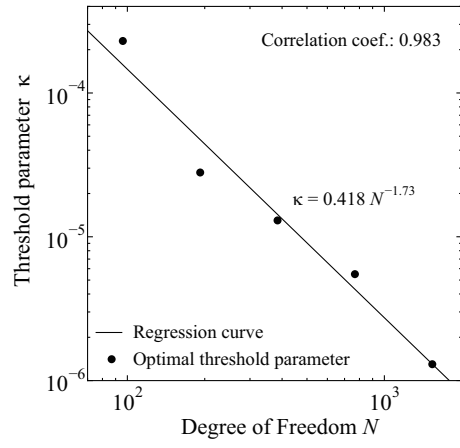
(a) ゼロモーメント次数 $n = 1$.



(a) ゼロモーメント次数 $n = 1$.



(b) ゼロモーメント次数 $n = 3$.



(b) ゼロモーメント次数 $n = 3$.

図-6 $\alpha = \omega/c = 1$ の場合における解析自由度と最適な切り捨て基準値との関係。

図-7 $\alpha = \omega/c = 15$ の場合における解析自由度と最適な切り捨て基準値との関係。

り抽出される最適な切り捨て基準値には若干の変動を示すことは予想される。しかし、いずれの場合についても、最適な切り捨て基準値について $\kappa \approx \rho N^{-\beta}$ なる回帰式を設定した場合、相関係数が 1 に非常に近い値を示しており、本研究で導入した切り捨て基準値の解析自由度依存性の仮定は妥当であると判断できる。また、このことから、実際の解析においては、実際の解析よりも規模の小さい (wavelet 展開の最高階層の小さい) 境界要素解析を実行して最適な切り捨て基準値 κ と解析自由度 N との関係を見出しておくことで、適切な切り捨て基準値の設定の下で境界要素解析を実行することができると考えられる。

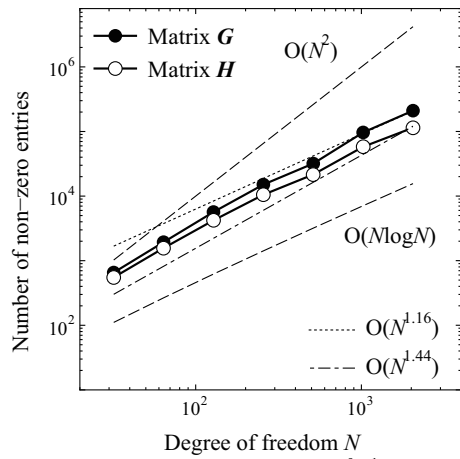
5.3 係数行列の保存成分数と解析自由度との関係

次に、最適な切り捨て基準値の下で境界要素解析を実行した際の、係数行列 G, H の保存成分数と解析自由度との関係について考える。 $\alpha = 1$ の場合の保存成分数を図-8 に、 $\alpha = 15$ の場合における保存成分数を図-9 にそれぞれ示す。なお、図には解析結果のほかに、 $O(N^2)$ 、 $O(N \log N)$ 、 $O(N^{1+(\beta-1)/2n})$ 、 $O(N^{1+\beta/(2n+1)})$ の挙

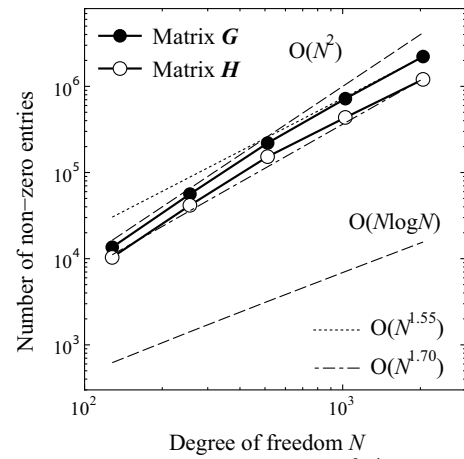
動を示す線も破線であわせて示している。

$\alpha = 1$ の場合、wavelet のゼロモーメント次数を $n = 1$ に定めると、行列 G, H ともに保存成分数は、解析自由度を大きくしていくとそれぞれ $N^{1+(\beta-1)/2n}$ 、 $N^{1+\beta/(2n+1)}$ に比例して増加する挙動に近づいていくことが分かる。一方、wavelet のゼロモーメント次数を $n = 3$ に定めた場合には、行列 G の保存成分数は解析自由度の小さい範囲でも $N^{1+(\beta-1)/2n}$ に比例する挙動を示している。しかし、行列 H の保存成分数は、解析自由度が小さい範囲では G の保存成分数とほぼ等しく、解析自由度の増大に応じて保存成分数の増加が鈍くなっており、この領域ではより低次の増加率を示す $N^{2\beta/(2n+1)}$ 、 $N^{2\beta/(2n+1)} \log N$ の挙動が発現している可能性がある。ただ、前節の考察から、解析自由度を十分大きくすると、 H については $O(N^{1+\beta/(2n+1)})$ の挙動を示すと考えられる。

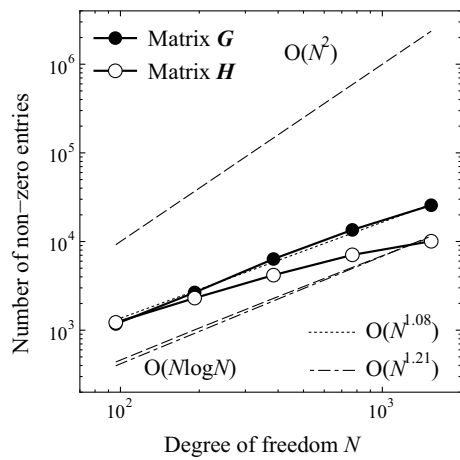
また、 $\alpha = 15$ に設定した場合には、係数行列 G, H の保存成分数ともに $\alpha = 1$ の場合とほぼ同様の解析自由度依存性の傾向を示している。ただし、保存対象となる係数成分の総数は、 $\alpha = \omega/c$ (ω : 円振動数, c : 波動



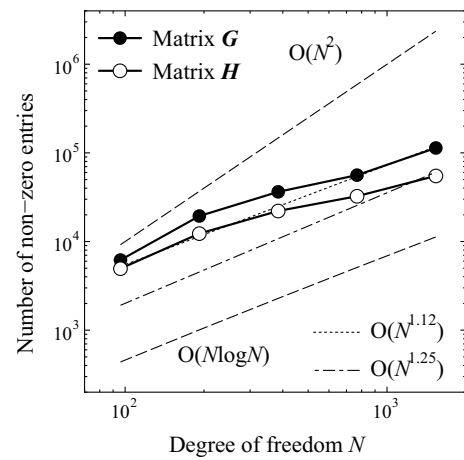
(a) $n = 1$ の場合 ($\beta = 1.32$, $N^{1+\frac{\beta-1}{2n}} = N^{1.16}$, $N^{1+\frac{\beta}{2n+1}} = N^{1.44}$).



(a) $n = 1$ の場合 ($\beta = 2.09$, $N^{1+\frac{\beta-1}{2n}} = N^{1.55}$, $N^{1+\frac{\beta}{2n+1}} = N^{1.70}$).



(b) $n = 3$ の場合 ($\beta = 1.50$, $N^{1+\frac{\beta-1}{2n}} = N^{1.08}$, $N^{1+\frac{\beta}{2n+1}} = N^{1.21}$).



(b) $n = 3$ の場合 ($\beta = 1.73$, $N^{1+\frac{\beta-1}{2n}} = N^{1.12}$, $N^{1+\frac{\beta}{2n+1}} = N^{1.25}$).

図-8 $\alpha = \omega/c = 1$ の場合における解析自由度と最適な切り捨て基準値の下で得られた係数行列成分数 $\mathcal{N}(G)$, $\mathcal{N}(H)$ との関係.

図-9 $\alpha = \omega/c = 15$ の場合における解析自由度と最適な切り捨て基準値の下で得られた係数行列成分数 $\mathcal{N}(G)$, $\mathcal{N}(H)$ との関係.

の伝播速度)を大きくすることで明確に増加しており、wavelet BEM では α の値が大きくなるにつれて計算負荷の軽減効果が次第に小さくなるのが懸念される。

なお、いずれの解析条件下でも、係数行列のスパース性は wavelet 基底のゼロモーメント次数を高次に設定するほど、係数行列の保存成分数は明らかに少なくなっている。特に、高周波数条件下ではゼロモーメント次数が小さいと係数行列のスパース化がほとんど期待できない。そのため、非直交 wavelet を用いた定常波動場の境界要素解析では、静的問題と同様、ゼロモーメント次数の高次化が解析時の使用メモリの削減に有効であることが確認できる。

6. おわりに

本研究では、面外定常波動問題を対象に、非直交 wavelet を用いた境界要素法の定式化を示し、係数行

列成分の切り捨てを Laplace 問題の場合と同様、係数成分の生成に用いた階層レベルに依存しない閾値を用いて実行した。切り捨ての閾値(切り捨て基準値)は、近似解の離散化誤差と係数成分の切り捨て誤差とが同等になることを条件に設定することとした。簡単な数値実験結果から、切り捨て基準値 κ を $\kappa \approx \rho N^{-\beta}$ (ρ, β : 正の定数, $N \sim 2^{M+1}$: 解析自由度) なる関係で与えることができることがわかった。このことは、対象とする例題と同様の問題設定の下で離散化に用いる wavelet 級数の最高階層のみを小さく設定した解析を事前に複数行なうことにより、実際の解析で用いる切り捨て基準値が事前に設定できることを意味している。

また、本研究では、当該の wavelet を適用した際における 2 種類の係数行列 G, H の保存成分数 $\mathcal{N}(G)$, $\mathcal{N}(H)$ の解析自由度依存性を理論的に考察した。その結果、解析自由度 N を wavelet 級数の最高階層 M を大きく設定することで増大させた場合、 G, H の保存成

分数ともに Laplace 問題と同様, $O(N^{1+\gamma})$ ($0 < \gamma < 1$) または $O(N \log N)$ の挙動を示すことがわかった. なお, wavelet BEM における係数行列の圧縮性能は, $\alpha = \omega/c$ (ω : 円振動数, c : 波動の伝播速度) が大きくなるほど低下するものの, 離散化に用いる wavelet のゼロモーメント次数を高次化することでその低下をある程度抑制することができる. 本研究で用いた非直交 wavelet は, 境界積分方程式における境界上の変数の補間次数とゼロモーメント次数を独立に設定でき, 補間次数を変えずにゼロモーメント次数のみを変更して境界上の離散化を行なうことができる. そのため, 非直交 wavelet を用いることで, 高周波数条件下でも係数行列のスパース性をある程度確保した境界要素解析が実現可能となる. この点は, 非直交 wavelet の利点として考えることができる.

最後に, 本研究では, wavelet BEM の適用による係数行列の保存成分数の削減効果に限定して考察と議論を進めてきた. しかし, wavelet BEM は係数行列のスパース化による計算時間の短縮効果も期待して適用される手法である. 特に, wavelet BEM では, 解析時の計算時間の大半が係数行列成分の作成に費やされることから, 計算時間の短縮効果の考察について今後検討する必要がある.

参考文献

- 田中正隆, 中村正行, 松本敏郎著: 境界要素法 (計算力学と CAE シリーズ), 培風館, 1991.
- 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法. 京都大学学術出版会, 2000.
- Nishimura, N.: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, Vol.55, No.4, pp.299–324, 2002.
- Liu, Y.: Fast multipole boundary element method. Cambridge University Press, 2009.
- Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.44, pp.144–183, 1991.
- Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149–164, 2001.
- Dahmen, W., Prössdorf, S. & Schneider, R.: Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations II: Matrix compression and fast solution. *Adv. Comput. Math.*, Vol.1, pp.259–335, 1993.
- von Petersdorff, T. & Schwab, C.: Wavelet approximations for first kind boundary integral equations on polygons. *Numer. Math.*, Vol.74, pp.479–519, 1996.
- von Petersdorff, T., Schwab, C. & Schneider, R.: Multi-wavelets for second-kind integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.34, No.6, pp.2212–2227, 1997.
- Schneider, R.: Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme. B.G.Teubner, Stuttgart, 1998.
- Rathsfeld, A.: A wavelet algorithm for the boundary element solution of a geodetic boundary value problem. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.157, pp.267–287, 1998.
- Huybrechs, D., Simoens, J. & Vandewalle, S.: A note on wave number dependence of wavelet matrix compression for integral equations with oscillatory kernel. *J. Comp. Appl. Math.*, Vol.172, pp.233–246, 2004.
- Hawkins, S.C., Chen, K.E., & Harris, P.J.: On the influence of the wavenumber on compression in a wavelet boundary element method for the Helmholtz equation. *Int. J. Numer. Anals. Model.*, Vol.4, No.1, pp.48–62, 2007.
- Huybrechs, D. & Vandewalle, S.: A two-dimensional wavelet-packet transform for matrix compression of integralequations with highly oscillatory kernel. *J. Comp. Appl. Math.*, Vol.197, pp.218–232, 2006.
- Goswami, J.C., Chan, A.K. & Chui, C.K.: On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol.43, No.6, pp.614–622, 1995.
- Wang, G.: Application of wavelets on the interval to numerical analysis of integral equations on electromagnetic scattering problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.40, pp.1–13, 1997.
- Golik, W.L.: Wavelet packets for fast solution of electromagnetic integral equations. *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol.46, No.5, pp.618–624, 1998.
- Deng, H. & Ling, H.: Fast solution of electromagnetic integral equations using adaptive wavelet packet transform. *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol.47, No.4, pp.674–682, 1999.
- Harbrecht, H., Paiva, F., Pérez, C., Schneider, R.: Biorthogonal wavelet approximation for the coupling of FEM-BEM. *Numer. Math.*, Vol.92, pp.325–356, 2002.
- Harbrecht, H., Paiva, F., Pérez, C. & Schneider, R.: Multiscale preconditioning for the coupling of FEM-BEM. *Numer. Linear Algebra and Appl.*, Vol.10, pp.197–222, 2003.
- 紅露一寛, 阿部和久: 2次元定常スカラー波動問題における wavelet 境界要素法と有限要素法との結合解法. 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.68, No.2, L237–L248, 2012.
- Koro, K., Abe, K.: A practical determination strategy of optimal threshold parameter for matrix compression in wavelet BEM. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.57, pp.169–191, 2003.
- 紅露一寛, 阿部和久: Wavelet 基底を用いた境界要素解析の効率化のための wavelet 重み付き Gauss 積分公式. 土木学会応用力学論文集, Vol.4, 2001.
- 紅露一寛, 阿部和久: Wavelet BEM における Beylkin 型係数切り捨て手法の行列圧縮効果に関する検討. 土木学会応用力学論文集, Vol.6, pp.301–310, 2003.
- 紅露一寛, 五十嵐和希, 阿部和久: 拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法における wavelet 基底の適用とその計算効率. 計算数理工学論文集, Vol.9, pp.73–78, 2009.
- 紅露一寛, 阿部和久: Haar wavelet を用いた 2次元拡散問題時間域境界要素法における係数行列保存成分数の解析自由度依存性. 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.67, No.2, L95–L106, 2011.
- 紅露一寛, 菅波祐太, 古川 陽, 阿部和久: 2次元スカラー波動方程式のための非直交スプライン wavelet を用いた時間域境界要素法. 土木学会応用力学論文集, Vol.13, pp.241–252, 2010.
- Ravnik, J., Škerget, L., Hriberšek, M.: The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.28, pp.1303–1314, 2004.
- Ravnik, J., Škerget, L., Žunič, Z.: Comparison between wavelet and fast multipole data sparse approximations for Poisson and kinematics boundary-domain integral equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.198, pp.1473–1485, 2009.

(2013年3月18日受付)