

自由水面をもつ定常浸透流の有限要素法による新簡易解析法

A New Simple Analysis of Steady Darcy Flow
with a Free Surface using Finite Element Method

吉田 昭 治 (よしだ しょうじ)
新潟大学教授 農学部農業工学科

稲 葉 一 成 (いなば かずなり)
新潟大学大学院自然科学研究科

竹 内 伸 一 (たけうち しんいち)
関組(株)土木部

中 野 俊 郎 (なかの としろう)
新潟大学助教授 農学部農業工学科

1. はじめに

自由地下水面のある不圧浸透流の解析は、種々の土堰堤や盛土斜面、地すべり斜面などの浸透流の解析に不可欠である。

現在、この不圧浸透流の数値解析法の一つは、地下水面を最上限の流線として、それ以下の流れを飽和流として、ポテンシャル $h = z + p/\gamma_w$ (z は高さ, p は水圧, γ_w は水の単位体積重量) についてのラプラスの式 $\nabla^2 h = 0$ (後述) を解く飽和解析法である。しかし、この方法には基本的な問題点が二つある。その一つは、自由水面形を仮定して得られた解が、自由水面の条件 (水圧 = 大気圧, あるいはこれを横切るフラックスがないこと) を満足しているか否かによって、自由水面形を仮定し直していく方法をとらねばならない。この方法で、差分法で解く場合は、特に問題はないが、FEM (有限要素法) で解くときは、自由水面形を修正するたびにメッシュの組替えを必要とし、FEM 解析の特徴 (1度メッシュを組めば、プログラムそのものの変更を要せず、境界条件や浸透特性の条件の変更は入力値の変更のみで可能) が失われる。このため要素の組替えを自動的に修正するプログラムが開発¹⁾ されたりしているが、これは一般には面倒である。さらに、この方法で、斜面安定など、浸透流解析と応力-変形解析とのカップリング問題を扱うときは、浸透流解析のメッシュが応力解析のメッシュと異なってくるため、その解析は大変面倒なものとなる²⁾。第2の問題点は、実際には自由水面の上に毛管流が存在するのにこれを無視している点である。すでに毛管流の存在

が自由水面形自体に影響することが細山田³⁾ によって実験的に、また吉田^{4), 5)} によって理論的、数値解的にも明らかにされているように、自由水面以下の飽和流のみを解析対象とするのは、本来は、実在する毛管流を無視した近似解析であるにもかかわらず、多くの場合このような理解がうすく、これから得られる自由水面形とそれ以下の飽和領域のポテンシャル解は実体に即した解であるとみなされてきた点である。これらの欠点を克服する方法として、飽和-不飽和解析が行われるようになり、これによって、例えば、Freeze (フリーズ) によって自由水面と流線とは一致しないことが確認された⁶⁾ (このことは、Freezeとは独立に、著者の1人もすでにサンドタンクによる実験と、以下に示す新簡易法によって差分緩和法で求めた数値解の両面から示している^{5), 7)})。

この飽和-不飽和の FEM 解析は、メッシュの組替えを必要としない上に、現在最も実体に即した数値解が得られるものと考えられる。ただ、この方法では、少なくとも不飽和透水係数 k と水分 θ との関係: $k = k(\theta)$ と水分と負圧の関係: $\theta = \theta(\psi)$ ($\psi = p/\gamma_w$) の2条件か、両条件を連結して得られる k と ψ の直接的関係: $k = k[\theta(\psi)]$ を必要とし、その物性条件を実験か仮定によって特定しなければならない。しかし、この二つの特性を実験で正確に求めるのは結構面倒であり、また実験によらず特性曲線を仮定する場合は、それだけ不確定性が入ってくるようになるという問題がある。

以上の2方法に対して、本報で提案する解析法は、 $\nabla^2 h = 0$ を、自由水面上部の不飽和領域を含む全領域に適用するという方法である。この方法を飽和解

析法と比較すると、飽和解析法のように解析領域を自由水面以下に限定しないから、自由水面形を求めるのに、FEMによる場合でもメッシュの組替えを必要としないで、かつ、不飽和領域を含む全領域にわたってポテンシャル解が得られる。また飽和-不飽和解析と比較すると、不飽和透水係数-水分の関係も、水分-負圧の関係も必要としていないのに、飽和-不飽和解析と同様に、不飽和領域を含む全領域でポテンシャル解が得られるという利点がある。しかも、これを解くためのFEMプログラムは、一般の普及書で示されているラプラスの式を解くプログラム⁸⁾で事足りるといふ簡便さがある。しかし、方法は簡単とはいえ、それによる解が飽和解析法によるものより実体により近い解が得られ、飽和-不飽和解析法による解にもよく近似した結果が得られないと、実用的な数値解析法とはなり得ない。以下にこの点を検討するために、単純な堤体浸透流についてこの新簡易解析法によるものとほかの方法によるものとを比較し、なぜよい解が得られるのか、その理論的根拠を検討し、さらに、それに基づく地すべり斜面などの複雑な実際の浸透流の具体的解析例を示す。なお、本稿では、すべて二次元鉛直断面の解析とする。

2. 不圧浸透流の新簡易解析法

説明を簡単にするために、図-1の矩形堤体を例にとりて、本法を説明する。堤体の透水性は等方である(以下同じ)とすると、不飽和領域を含む浸透流に成り立つDarcy則は、透水係数 k を水分 θ のあるいは負圧 $\psi = p/\gamma_w$ の関数として、

$$v = -k\gamma h, \text{ または}$$

$$v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y} \dots\dots\dots(1)$$

で与えられる(ここで、 x, y は直交座標、 (v_x, v_y) はフラックス(流束)、 ∇ はナブラ記号で $\nabla h = \text{grad } h$)。

湧出しがない定常浸透流では、不飽和領域でも水

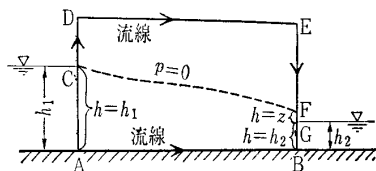


図-1 境界条件

分 θ の時間的变化はないから、その連続式は、不飽和領域を含め

$$\nabla \cdot v = 0, \text{ または } \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

となる(ここで、 \cdot はベクトルの内積を示す)。(2)式に(1)式を代入して得られる

$$\nabla \cdot (k \nabla h) = 0, \text{ または}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

が、周知の定常浸透流の飽和-不飽和解析の基礎式である。

飽和解析では、自由水面以下の飽和領域のみを対象とするから、(3)式で k =一定として得られる

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

が基礎式となる。

本簡易法は、不圧浸透流の場合も、自由水面の上方の不飽和領域を含む全領域を連続した一つの系として解析の対象とし、この不飽和領域では透水係数 $k(\theta) \neq$ 一定であるにもかかわらず、飽和解析と同じ基礎式である(4)式の $\nabla^2 h = 0$ を、不飽和領域を含む全領域に適用するものである。本法では、(4)式の境界条件のとり方は、次に示すように、飽和-不飽和解析の場合と全く同じである。すなわち、図-1に示す矩形堤体の浸透流の場合、

(1) 静水に接している面A-C, B-Gは等ポテンシャル線となり、A-Cでは $h = h_1$, B-Gでは $h = h_2$ となるディリクレの(または基本)境界条件である。

(2) 不透水層A-Bおよび地表面C-D-E-F(Fは浸出点)は流線ゆえ、これに外向きの垂直方向を n とすると、この垂直フラックス v_n について

$$v_n = -k \frac{\partial h}{\partial n} = 0, \text{ すなわち } \frac{\partial h}{\partial n} = 0$$

となるノイマンの(または自然)境界条件となる。

飽和解析法では、自由水面を最上限の流線と仮定するから、自由水面から地表面C-D-E-Fまでは解析の対象外であるのに対し、本法ではこの不飽和領域にも毛管流が存在するものとして扱うから、地表面C-D-E-Fが最上限の流線と仮定される点が飽和解析法と基本的に異なる点である。

(3) 浸出面をF-G(その上限の浸出点をF)と

すると、F—Gでは、 $p = \text{大気圧} = 0$ ゆえ $h = z$ となる。浸出点Fは、予想される点よりやや下方に仮定して数値解を求める。その解の結果、不飽和領域と仮定したE—F面で $p < 0$ ならよいが、 $p > 0$ ならばF点を順次上方に仮定し直して、再び解を求める。これを繰り返して、新しいF点より上方のE—F上のすべての点で $p < 0$ になったとき正しい浸出点が出たが、したがって自由水面形を含む全体のポテンシャルについても正しい解が得られたものとする⁵⁾。

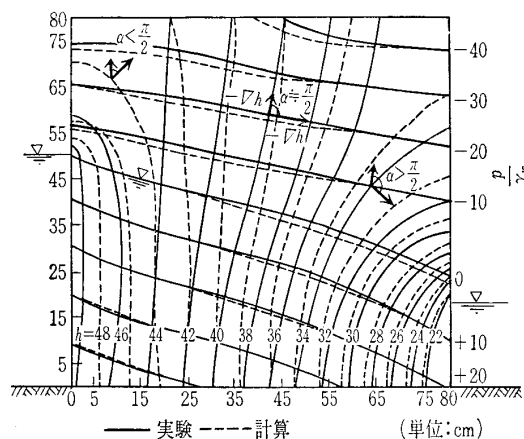
飽和解析では、試行錯誤によって自由水面形全体を仮定して求める必要があるのに対し、本法では飽和—不飽和解析と同様、浸出点Fという1点を求めるだけでよい。すなわち、本法によると、飽和解析よりも自由水面を求めることはかえって簡単になる(自由水面は得られたポテンシャル解から $p = 0$ となる等圧線の一つとして直接簡単に求められる)。

次に、まず、この方法で解いた具体例を示し、飽和解析や飽和—不飽和解析例と比較する。

3. 簡易法による解析例

例 1: 矩形堤体の浸透流 (飽和—不飽和解析との比較)

図—2は、かつてこの方法によって、すなわち、 $p^2h = 0$ を不飽和領域を含む堤体の全断面に適用し、差分緩和法によって解いたものである^{5), 7)}。これには、サンドモデルによる実験値から求めた等ポテンシャル線と等圧線も示してあるが、数値解とはよく一致している。両者には多少のずれがあるが、実験値自体、同様の実験を繰り返しても砂のつまり方の違いによってこの程度のずれがあるのが普通であるから、この両者のずれの主要因は、計算法の近似的

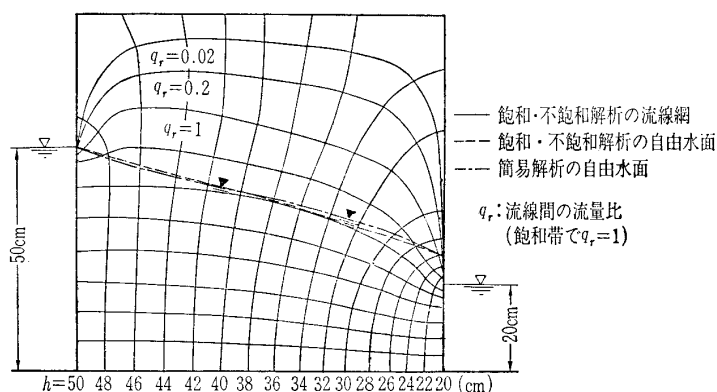


図—2 等ポテンシャル線と等圧線

手法によるものではないと考えられる。また、このポテンシャル解から求めた等圧線^{注1)}は、負圧領域を含めて実験値と大体よく近似している。この等圧線群のなかの一つである $p/\gamma_w = 0$ となる等圧線、すなわち自由水面は、等ポテンシャル線群とは明らかに直交していない(特に上流側と下流側で)。すなわち Freeze の指摘⁶⁾と同様に、自由水面は流線にはならない。このことは、本法のような簡易法によっても、不飽和領域の毛管流の存在を考慮すれば、飽和解析の誤った仮定である自由水面は流線と一致するという仮定をただせることを示している。この解析例は、飽和—不飽和解析の式である(3)式でなく、飽和解析と同じ(4)式について、不飽和領域を含む全領域を解析の対象として解くと、自由水面を含む飽和—不飽和の全領域で実体(実験値)とよく近似したポテンシャル解が得られることを示している。面白い点は、このようにポテンシャルを求めるには、地層の不飽和特性を特に考慮しなくてもよい近似解が得られる、すなわちポテンシャル解は不飽和の透水性に影響されることは少ないことである。ただ注意すべき点は、不飽和領域のフラックス (v_x, v_y) を求めるには、Darcy の(1)式において、

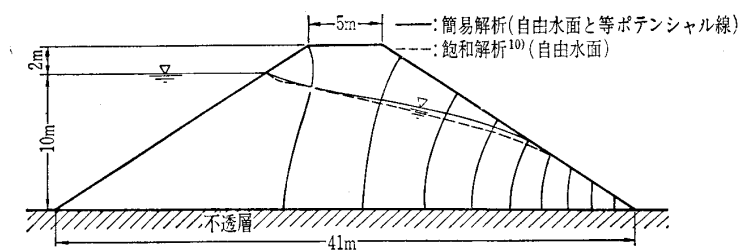
$$\text{ポテンシャル勾配} \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \text{は}$$

本簡易法から求めたものを用いて十分であるが、透水係数 k は水分あるいは負圧によって大きく変わるから、ポテンシャル解から求まる負圧を引数として、 k の値を求めることが必要であるという点である。



図—3 緩和法による飽和—不飽和解析の流線網、自由水面と簡易解析による自由水面の比較

注 1) $p = p_i$ である等圧線は、その値が h である等ポテンシャル線上ごとに、 $p = p_i$ を満たす点 $z_i = h - p_i/\gamma_w$ を求めていけばよい。



図—4 飽和解析¹⁰⁾と簡易解析による自由水面の比較

同様な方法($\nabla^2 h = 0$ を全領域に適用する)でFEMで解く場合には、飽和解析のように自由水面形全体を試行錯誤で求める必要もなく、したがってメッシュの組替えを必要とせず、ただ浸出点F(浸出面の上限の点)のみを試行錯誤で決定すればよいことになり、極めて簡単になる。

図—3は、矩形堤体の浸透流について、以前に飽和-不飽和解析を差分緩和法で解いた結果¹⁰⁾と比較のため、このFEM簡易解析法から求めた自由水面を示したものである。これには、飽和-不飽和解析の結果から、不飽和領域にも流線網を描いてある¹⁰⁾が、これは(1)式においても k がスカラー変数であることから、不飽和流においても等ポテンシャル線と流線が直交する⁴⁾ことに基づいたものである。この例では、自由水面は流線と一致しないことなどがよく解析されている。また、本簡易法による自由水面形は、この飽和-不飽和解析の結果と大体よく一致していることを読みとることができる。

例 2：台形堤体の浸透流

よく代表的な例として扱われる台形堤体の浸透流について、飽和解析⁹⁾と本法による解析結果とを比較する。図—4の堤体の諸元は比較のため同じにした。飽和解析から得られた自由水面⁹⁾を破線で示してある。本法によった方が、毛管流を考慮した分だけ下流側で自由水面が高くなっている。ここで、そのずれはわずかではあるが、本質的に食い違っていることを示しているのが、上流側の流入点の自由水面形である。ここでは、本法による実線は、上流側法面に直交していないのに対し、飽和解析による破線は直交している。これは、飽和解析では、実体と違って自由水面を上限の流線と仮定していることによる当然の帰結(一般に流線と等ポテンシャル線は直交するから、等ポテンシャル線の一つとなっている上流側法面に、法線と仮定した自由水面が直交す

る)であるが、本法による方は、実体に即して自由水面が流線の一つとはならないことをよく示している。

4. 考 察

以上で、(3)式による飽和-不飽和解析によらなくて、飽和解析の式と全く同じである(4)式を不飽和領域を含む全領域に適用して解けば、ポテンシャル解については、飽和-不飽和解析の結果と極めて近似した解が得られることが示された。

ここで、なぜ $\nabla^2 h = 0$ なる式を不飽和領域を含む全領域に適用しても、よいポテンシャル解が得られるのかを検討する。

(3)式について、自由水面より上方の不飽和帯では $k \neq$ 一定、すなわち $k = k(\theta)$ が場所 (x, y) の関数であることを考慮して、微分を実行すると

$$\nabla \cdot (k \nabla h) = k \nabla^2 h + \nabla k \cdot \nabla h = 0 \dots\dots\dots(5)$$

となる。ここで、 ∇k は不飽和領域における透水係数 k の勾配(ベクトル)を表し、 ∇h は h の勾配(ベクトル)を表す。

(5)式は、 $\nabla^2 h \neq 0$ とすると、

$$k \nabla^2 h \left(1 + \frac{\nabla k \cdot \nabla h}{k \nabla^2 h} \right) = 0 \dots\dots\dots(6)$$

と書き直される。ベクトル ∇k と ∇h の夾角を α とすると $\nabla k \cdot \nabla h = |\nabla k| \cdot |\nabla h| \cos \alpha$ ($|\cdot|$ はベクトルの絶対値)ゆえ、(6)式において

$$A = \frac{|\nabla k \cdot \nabla h|}{k |\nabla^2 h|} = \frac{|\nabla k|}{k} \cdot \frac{|\nabla h|}{|\nabla^2 h|} |\cos \alpha| \ll 1 \dots\dots\dots(7)$$

ならば(6)式、したがって(5)式は $k \nabla^2 h = 0 (\neq 0)$ 、すなわち

$$\nabla^2 h \doteq 0 \dots\dots\dots(8)$$

で近似されることになる。ここで(7)式の条件がどのような条件の下に成り立つかを検討する。

不飽和透水係数 k は水分 θ あるいは負圧 ϕ の関数であるから、自由水面上部の不飽和領域では k の値が等しい点を連ねた等 k 線は等水分線と、したがって等負圧線とも一致する。一方、負圧毛管水帯では、図—2からわかるように、実体においては等負圧線の方法は、堤体の中央部では特に、ほぼ流線と一致する(このことは、後に示すように、斜面長の大きい実際の地すべり斜面などにおいては、いっそう広

い領域で成り立つ)。以上から等 k 線と流線がほぼ一致することになる。ここで、ベクトル ∇k は数学的に等 k 線に垂直であるから、結局 ∇k は流線にほぼ垂直なベクトルになる。一方、ベクトル ∇h は、Dracy 則(1)式から流速と同方向、すなわち流線に平行であるから、 ∇k と ∇h の二つのベクトルはほぼ垂直で、その夾角 $\alpha \approx \pi/2$ となる(図-2参照)。したがって、 $\cos \alpha \approx \cos \pi/2 = 0$ となり、(5)、(6)式の $\nabla k \cdot \nabla h$ が小さくなり、(7)式の $A \ll 1$ が成り立つ可能性が大きくなり、 $\nabla^2 h = 0$ が(5)式の近似式となり得ることになる。これが、不飽和領域に(3)式でなく、(4)式を適用してもよい解が得られることの不十分ながらもある程度の理論的根拠であると考えられる注2)。実際、図-2の矩形堤体の場合、上流側と下流側では α が 90° との差が大きくなるので、この部分で簡易法による解は実験値との一致が悪くなる。しかし、台形堤体(図-4)や実際の地すべり斜面(後述)のように、不飽和帯において不飽和流の流線が自由地下水面と平行となる領域が広いほど $\alpha \approx \pi/2$ の流れの部分が多くなり、全体としても近似がよくなる。このように、透水係数に不飽和特性を考慮しないのに不飽和領域でもよいポテンシャル解が得られるのは、適用式 $\nabla^2 h = 0$ が、飽和解析の場合のように $k = k_{sat} = \text{一定}$ ゆえ $\nabla k = 0$ になるのではなく、(7)式の $A \ll 1$ による近似の結果、 $\nabla^2 h = 0$ に k が含まれない、したがってそのポテンシャル解が k と独立(無関係)になることによる。

5. 本法による実用的解析例

(1) ゾーン型フィルダムの浸透流解析

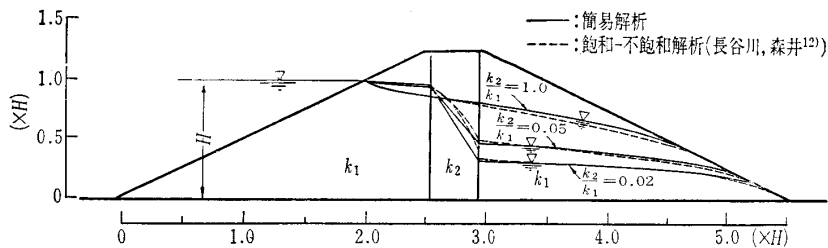


図-5 簡易解析と飽和-不飽和解析¹²⁾によるロックフィルダムの自由水面についての比較(長さの単位Hは上流側法面境界にかかる全水頭)

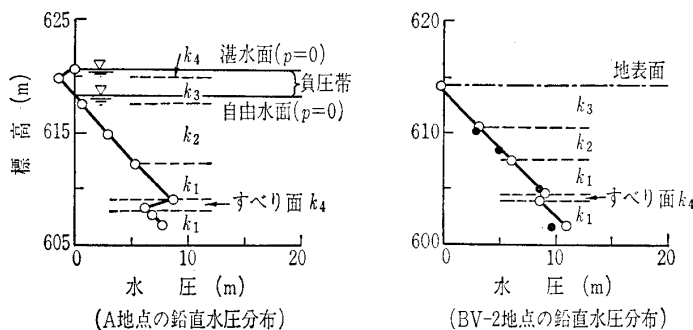
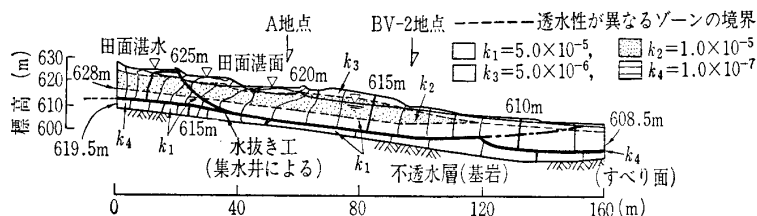


図-6 松之山地すべり斜面の等ポテンシャル線と自由水面(A地点では水田湛水面の下方に負圧浸透と地下水面が得られた)

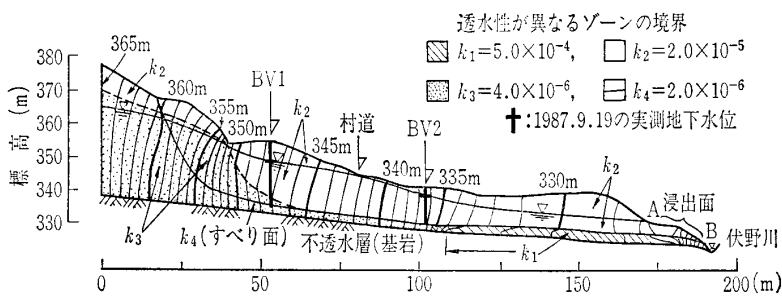


図-7 東虫亀地すべり斜面の等ポテンシャル線と自由水面(下流法面A-Bが浸出面)

ゾーン型フィルダムのように、透水係数の異なる複数のゾーンからなる地盤の浸透流をFEMで飽和解析を行うには、透水係数の異なるゾーンに沿ってメッシュを組み替えながら¹¹⁾、自由水面を決めていく必要がある。本簡易法によってこの問題をFEMで解く場合には、自由水面でのメッシュの組替えを必要としない。この方法による精度を確かめるために、ゾーン型フィルダムの浸透流解析について、長

注2) $A \ll 1$ の証明には、 $\cos \alpha < 1$ であるから、少なくとも $(|\nabla k|/k) \cdot (|\nabla h|/|\nabla^2 h|)$ が1以下のオーダーであることを示す必要がある。 $|\nabla k|/k$ については、 $k = k_{sat}(a/\psi)^n$ (k_{sat} は飽和透水係数、 a は定数)を仮定すると、 $|\nabla k|/k \sim |\partial \psi / \partial \phi|/k = n/|\psi|$ 、ここで細粒土では n は2~7ぐらいの数であるから、 $\psi \leq -100$ cmとすると、 $|\nabla k|/k < 10^{-2}$ cmとみなせる。しかし、 $|\nabla h|/|\nabla^2 h|$ については、一般に $|\nabla h| > |\nabla^2 h|$ であるが、その大きさを見積もる適切な方法が見つからないので、ここでの $A \ll 1$ の証明はまだ不十分である。

谷川らによる飽和-不飽和解析の結果¹²⁾と比較する(図-5)。本簡易法による解は、長谷川らの解に対してコア部での自由水面形が直線的になる点、下流側の自由水面形が少し高めに出る点以外は、実用上は十分な精度の解が得られることがわかる。

(2) 地すべり斜面の浸透流解析

地すべり斜面の安定解析には、何らかの応力解析とともに、すべり面上の間隙水圧を求めることが不可欠である。このような自然斜面の地形は、一般に単純でなく、透水係数が異なる複数の土層からなるのが普通である。本法で、このようにやや複雑な自然斜面の一部を解析の対象とする時は、特殊な条件の流れでない限り、不圧帯における上下流側の鉛直境界線を、難透水層と仮定したすべり面または不透水性基盤から不飽和領域の地表面までとり、それぞれ1本の等ポテンシャル線(ディリクレの境界条件)で近似して十分である。そのポテンシャル値は、その境界で仮定した自由水面の標高値 z_f とすればよい。

(∵自由水面 $z=z_f$ では $p=0$ ゆえ $h=z+p/\gamma_w=z_f$)

地表面は不飽和の流線(ノイマンの境界条件)とする。FEMでは、この境界のように横切るフラックスがない場合(例:地表面に降雨などの供給を考えない場合など)には、周知のとおり、この境界条件に関して特別の入力を必要とせず、自動的に満たされるから簡単である。

このような方法で解いた例として図-6に新潟県の松之山地すべり地の場合を示した。現場での浸透流解析では、 $h=z+p/\gamma_w$ の高さ z は標高にとると便利である。よくみられるように、ポテンシャル値を0~100%で示すのは、 h の値から直接圧力水頭 p/γ_w などを求めることができないから、不適切である。なお、この例では、上流側の地表に水田湛水がある場合を扱っている。この例のように地表に正圧部があり、その下方に自由水面がある流れは、飽和解析では自由水面以下しか扱えないから、解析不能である。しかし、本解析法では、図-6のように、田面を負圧状態で降下浸透しつつ(表層土直下の土層の透水係数が表層土のそれより大きい場合には、

そこで負圧浸透を生ずる可能性がある)、下方に形成される自由水面に合流していく状態をよく表す解が得られている。

(3) 浸出面のある斜面浸透流解析

図-7に浸出面のある東虫亀地すべり斜面の解析例を示した。これも、透水係数が異なる数ブロックの土層からなるものとした。ブロックごとの透水係数は、斜面の上、下流部の2点の観測孔による実測地下水位を基準にして試行錯誤により同定した。この2点における地下水位の計算値と実測値(図-7)の差は1m以内となった。浸出面は末端の法面A-Bに現れた。

参 考 文 献

- 1) Finn, W.D.: Finite Element Analysis of Seepage through Dams, Proc. ASCE, SM, Vol. 93, No. 6, pp. 41~48, 1967.
- 2) 大野 研・近藤 武: 層状不均質媒体内の不圧浸透流の有限要素法による浸透流解析, 農土論集, 119号, pp. 57~63, 1985.
- 3) 細山田健三: 自由水面を有する模型堤防の浸透について(I), (II), 農土研, 別冊4号, pp. 37~46, 1962.
- 4) 吉田昭治: 浸透流の相似率—自由表面がある場合—, 農土論集, 15号, pp. 12~15, 1966.
- 5) 吉田昭治: 浸透流の基礎的研究—浸透流の力学—, 山形大学紀要, 5巻3号, pp. 257~329, 1968.
- 6) Freeze, R.D.: Influence of the Unsaturated flow Domain on seepage through Earth Dams, Water Resour. Res., Vol. 7, No. 3, pp. 929~941, 1971.
- 7) 吉田昭治: 自由表面のある浸透流とその相似率, 土と基礎, Vol. 17, No. 3, pp. 20~22, 1969.
- 8) 戸川隼人: BASICによる有限要素法の基礎, サイエンス社, 1980.
- 9) Yoshida, S. and Fukuzawa, D.: Influence of the Unsaturated Capillary Flow on Total Steady Flow through Banks and Saturated-Unsaturated Flow Net, 農土論集, 109号, pp. 27~36, 1984.
- 10) 川本眺万・駒田広也・宮口友延: 堤体および基礎における浸透流の有限要素解析について, 土と基礎, Vol. 18, No. 12, pp. 19~26, 1970.
- 11) Taylor, R.L., Brown, C.B.: Darcy Flow Solutions with Free Surface, Proc. ASCE, HY, Vol. 93, No. 2, pp. 25~33, 1967.
- 12) 長谷川高士・森井俊広: 飽和-不飽和浸透流解析法とその適用上の問題について—フィルダムの飽和-不飽和浸透特性(I), 農土論集, 105号, pp. 69~75, 1983.

(原稿受理 1992. 9. 10)