

ビタビ識別器を含む受信系の最適化

正 員 小川 恭孝†

正 員 仙石 正和††

正 員 松本 正†

Optimization of a Receiver System with a Viterbi Detector

Yasutaka OGAWA†, Masakazu SENGOKU†† and
Tadashi MATSUMOTO†, Regular Members

あらまし 音声帯域電話回線を媒体として、伝送速度が1万bpsを超える高速なデータ通信系を構成する際にビタビ識別器を用いることが注目されている。本論文では、ビタビ識別器を実現可能なものとし、且つ、良好な伝送特性を得ることを目的として受信系を最適化する問題を論じている。まず初めに、与えられたDIRの長さについて、実効SN比を最大にする受信フィルタ特性とDIRを明らかにしている。次に、DIRの長さをどの程度の値に定めるならば良好な伝送特性が得られるかという問題に対して判断の規準を与えるため、DIRの長さが任意に大きくなりうるとしたときの実効SN比の上限を解析的に導いている。更に、数値計算を行い、得られた数値解を基に考察を行っている。その結果、伝送速度が1万数千bps程度のSSB伝送系においては、DIRの長さを3、ないしは、4に定めることにより、良好な特性が得られること、又、最適DIRは伝送路特性にそれほど依存しないことなどが明らかになった。そして、ビタビ識別器を含むデータ通信系を実現することへの見通しが得られた。

1. ま え が き

ビタビ(Viterbi)識別器⁽¹⁾を用いることにより、既存の音声帯域電話回線を伝送媒体として、伝送速度が1万bpsを超える高速なデータ通信系を実現する研究が行われている^{(7),(8)}。しかし、ビタビ識別器が単位時間当りに実行しなければならない演算の回数は、伝送系全体のインパルス応答列(次章で述べるように、これをDIRと呼ぶ)の長さが長くなるとき、指数関数的に増大する。そのため、ビタビ識別器を実現可能なものにするには、DIRの長さがごく小さな値を取るように、フィルタ特性を調整しなければならない。このとき、最適なフィルタ特性と最適なDIRを求めることは重要な問題である。この問題に関しては、これまでに幾つかの研究報告が行われている。Falconerらは、ビタビ識別器入力でのSN比を最大にする受信フィルタ特性とDIRを求めている⁽³⁾。又、Messer-

shmittは、DIRの先頭要素が1であるという拘束のもとで、ビタビ識別器入力における雑音成分の分散を最小にするDIRを導いている⁽⁴⁾。しかし、SN比、および、雑音成分の分散は、ビタビ識別器の特性を評価する上で適当な評価関数ではない。そのため、これらを目的関数として得られた上述の受信フィルタ特性、ならびに、DIRは必ずしも適切なものではない。一方、Fredricssonは、受信フィルタに白色化整合フィルタを用いるという拘束条件のもとで、実効SN比(effective signal-to-noise ratio)⁽¹⁾を最大にする送信フィルタ特性とDIRを求めている⁽⁵⁾。しかし、伝送路特性に適応させて送信フィルタを調整することは困難なことであり、通常、行われぬ。このように、従来の最適化法には何らかの欠陥があり、検討すべき点が残されていた。

本論文の第1の目的は、ビタビ識別器を含むデータ通信系において、送信フィルタ特性、伝送路特性、送信符号と伝送路雑音の統計的性質、および、DIRの長さが与えられているときに、実効SN比を最大にする受信フィルタ特性とDIRを求めることである。実効SN比は、ビタビ識別器の特性を評価する上で重要な目安になることから、実効SN比を目的関数にして得られる解は、先に述べたFalconerら、及び、Me-

†北海道大学工学部電子工学科, 札幌市
Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo
-shi, 060 Japan

††新潟大学工学部情報工学科, 長岡市
Faculty of Engineering, Niigata University, Nagaoka
-shi, 940 Japan

論文番号: 昭 54-26[B-9]

sserschmitt によって求められた解に比べ、より適切なものである。

本論文の第2の目的は、良好な伝送特性を得るために必要となる DIR の長さを求めることである。一般に、DIR の長さが長いほど、良い特性が得られる。しかし、ビタビ識別器を実現するには、この値をごく小さな値に定めなければならない。そこで、DIR の長さをどこまで短縮しても、実用上かまわないかという事は重要な問題である。この問題を解くために数値計算を行い、DIR の長さが任意に長くなりうるとしたときの特性の上限値と比較検討している。

2. 伝送系のモデル化と諸記号の定義

現実の伝送系を図1のようなデジタル PAM 基底帯域伝送系にモデル化する。そして、必要になる記号を以下のように定義し、幾つかの仮定を行う。

$F(f)$: 送信フィルタの周波数特性

$H(f)$: 伝送路の周波数特性

$h(t)$: 送信フィルタ入力から伝送路出力までのインパルス応答列

$h(t)$ は $\{F(f)H(f)\}$ のフーリエ逆変換である。

$G(f)$: 受信フィルタの周波数特性

$g(t)$: 受信フィルタのインパルス応答

T : 送信シンボルの時間間隔

x_m : 時刻 mT に送信されたシンボル値

送信側では、 x_m によって作られたインパルス系列 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \delta(t-mT)$ が送信フィルタを通して伝送路に送られていると考える。但し、 $\delta(t)$ はデルタ関数を表す。各 x_m は $(1-M)/2, (3-M)/2, \dots, (M-1)/2$ の異なる M 個の値を等確率で取り、 x_m からなる系列は定常確率過程であると仮定する。更に、 x_m の分散を σ_x^2 と表す。このとき、式(1)が成立する。

$$\sigma_x^2 \triangleq E\{x_m^2\} = (M^2-1)/12 \quad (1)$$

但し、 $E\{\cdot\}$ はアンサンブル平均を表す。次に、 x_m の自己相関関数を σ_x^2 で正規化して得られる系列を $\{r_l\}$

と表す。すなわち、

$$r_l \triangleq E\{x_0 x_l\} / \sigma_x^2 \quad (2)$$

明らかに、 r_l は l について偶関数である。

\hat{x}_m : ビタビ識別器によって得られた、 x_m に対する推定値

$\{s_i\}$: ビタビ識別器がみなしている伝送系全体のインパルス応答列

ビタビ識別器は、送信フィルタ入力から受信フィルタ出力までのインパルス応答列(インパルス応答を時刻 iT でサンプルして得られる数値列)が $\{s_i\}$ であるとみなして、符号の識別を行う。ここで、

$$s_i = 0 \quad (i < 0, \quad i \geq K) \quad (3)$$

$$s_0, s_{K-1} \neq 0 \quad (4)$$

が成立するものとする。そして、数値列 $\{s_0, s_1, \dots, s_{K-1}\}$ を DIR^(D)(Desired Impulse Response)、 K を DIR の長さと呼ぶことにする。更に、DIR ベクトルを式(5)で定義する。

$$s \triangleq [s_0 \ s_1 \ \dots \ s_{K-1}]^T \quad (5)$$

但し、 $[\dots]^T$ は転置を表す。

$n'(t)$: 伝送路雑音

$n'(t)$ はアンサンブル平均が0の定常確率過程であり、送信符号系列 $\{x_m\}$ と統計的に独立であると仮定する。 $n'(t)$ の自己相関関数を $R_n(t)$ 、電力スペクトルを $N'_0 N'(f)/2$ とする。すなわち、

$$R_n(t) \triangleq E\{n'(\tau) n'(\tau+t)\} \quad (6)$$

$$\frac{N'_0}{2} N'(f) = \mathcal{F}\{R_n(t)\} \quad (7)$$

但し、 $\mathcal{F}\{\cdot\}$ はフーリエ変換を表す。電力スペクトルの性質から、 $N'_0, N'(f)$ は実数である。次に、式(8)が成立することを仮定する。

$$N'(f) \neq 0 \quad (8)$$

つまり、雑音が脱落している周波数成分はないと仮定する。

z_i : 時刻 iT でのビタビ識別器入力信号値

z_i は式(9)で表される。

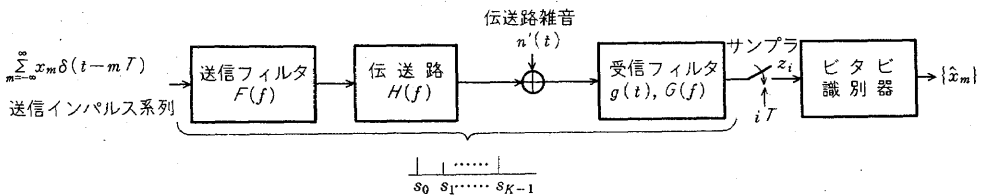


図1 デジタル PAM 基底帯域伝送系モデル
Fig.1-Digital PAM baseband transmission model.

$$z_i = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m h'(iT-mT-\tau) g(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n'(iT-\tau) g(\tau) d\tau \quad (9)$$

n_i : 時刻 iT でのビタビ識別器入力雑音成分
 n_i は式(10)で定義されている。

$$n_i \triangleq z_i - \sum_{j=0}^{K-1} s_j x_{i-j} \quad (10)$$

n_i は、伝送路雑音が受信フィルタを通過した成分と実際の伝送系 $(F(f)H(f)G(f))$ のインパルス応答列が完全には、DIR に等しくないために生ずる残留誤差成分からなっている。そして、系列 $\{n_i\}$ は、アンサンブル平均が0の定常確率過程である。ここで、 n_i の分散を σ_n^2 と表すことにする。

$$\sigma_n^2 \triangleq E\{n_i^2\} \quad (11)$$

DIR の長さが K であるときの実効 SN 比を $ESN^{(K)}$ と表す。文献(5)より、式(12)が成立する。

$$ESN^{(K)} = \sigma_n^2 \min_i \frac{s^T M_i s}{\sigma_n^2} \quad (12)$$

但し、 M_i は誤り事象 ϵ に対応して定まる K 行 K 列の正定行列であり、同時に、対称テプブリッツ行列である。 M_i の i 行 j 列要素 m_{ij} は以下のように定義されている。まず、誤り事象 ϵ について、 x_i と \hat{x}_i の間に関係があるものとする。

$$x_i = \hat{x}_i \quad (i \leq l, \text{ 又は, } i > l+N) \quad (13)$$

$$x_{l+1} \neq \hat{x}_{l+1}, \quad x_{l+N} \neq \hat{x}_{l+N} \quad (14)$$

$$\text{次に, } \epsilon_{xj} \triangleq x_{l+j} - \hat{x}_{l+j} \quad (1 \leq j \leq N) \quad (15)$$

からなる整数値列

$$\tilde{\epsilon}_x \triangleq \{\epsilon_{x1}, \epsilon_{x2}, \dots, \epsilon_{xN}\} \quad (16)$$

を定義し、これを ϵ に対応する入力誤り系列と呼ぶことにする。そして、同じ入力誤り系列を持つ誤り事象は同一であると考え、 $\tilde{\epsilon}_x$ の各要素を用いて m_{ij} は式(17)で定義される。

$$m_{ij} \triangleq \sum_{n=1}^N \epsilon_{x_n} \epsilon_{x(n-i+j)} \quad (17)$$

但し、式(17)を計算する上で、

$$\epsilon_{x_n} = 0 \quad (n \leq 0, \text{ 又は, } n > N) \quad (18)$$

が成立するものとする。各 ϵ_{x_n} が整数だから、 m_{ij} も整数である。

σ_n^2 が同じ系では、実効 SN 比が大きいほど、伝送特性は良好になる傾向がある。そのため、実効 SN 比を系の評価関数と考えることは妥当なことである。そこで、本論文では、実効 SN 比を目的関数に定め、受信フィルタ特性と DIR の最適化を行うことにする。

3. 受信フィルタの最適化

本章では、与えられた DIR $\{s_0, s_1, \dots, s_{K-1}\}$ について、実効 SN 比を最大にする受信フィルタ特性を求める。式(12)から明らかのように、DIR が与えられている場合には、 σ_n^2 を最小にする受信フィルタが SN 比を最大にする。送信符号系列と伝送路雑音が白色であるという条件のもとでは、このような受信フィルタ特性は既に得られているが⁽⁹⁾、ここでは、これらの制約条件を取除き、より一般的な場合について最適受信フィルタ特性を導くことにする。

式(9)、(10)を式(11)に代入し、送信符号系列と伝送路雑音が統計的に独立であることを用いると、式(19)が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 = & \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{x_l x_m\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) \\ & \cdot h'(iT-lT-\tau_1) h'(iT-mT-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) E\{n'(iT-\tau_1)n'(iT-\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \\ & - 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{K-1} E\{x_l x_{i-m}\} s_m \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h'(iT-lT-\tau) d\tau \\ & + \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{K-1} s_l s_m E\{x_{i-l} x_{i-m}\} \end{aligned} \quad (19)$$

式(2)、(6)を式(19)に代入する。

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau_1, \tau_2) g(\tau_1) g(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) g(\tau) d\tau \\ & + \sigma_n^2 \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{K-1} r_{l-m} s_l s_m \end{aligned} \quad (20)$$

但し、 $\alpha(\tau_1, \tau_2)$ 、 $\beta(\tau)$ は次のように定義されている。

$$\begin{aligned} \alpha(\tau_1, \tau_2) \triangleq & \sigma_n^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{l-m} h'(lT-\tau_1) h'(mT-\tau_2) \\ & + R_n(\tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\beta(\tau) \triangleq -2\sigma_n^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{K-1} r_{l-m} s_m h'(lT-\tau) \quad (22)$$

変分法を用いると、 σ_n^2 を最小にする $g(\tau)$ は式(23)の積分方程式を満たしていることが分かる。

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau, t) g(\tau) d\tau + \beta(t) = 0 \quad (23)$$

式(21)~(23)より式(24)が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_n'(t-\tau) g(\tau) d\tau = \frac{N'_0}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l h'(lT-t) \quad (24)$$

但し、 c_l は式(25)で定義されている。

$$c_l \triangleq \frac{2\sigma_n^2}{N'_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{l-m} \left(s_m \int_{-\infty}^{\infty} h'(mT-\tau) g(\tau) d\tau \right) \quad (25)$$

次に、 $w(\tau)$ を次の積分方程式の解とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{nl}(t-\tau)w(\tau)d\tau = \frac{N'_0}{2} \delta(t) \quad (26)$$

式(24)を満たす最適受信フィルタは、インパルス応答が $w(\tau)$ 、 $h(-\tau)$ で与えられるフィルタと、各タップ係数を c_l とするトランスバーサルフィルタの連続接続からなっている。 $w(\tau)$ のフーリエ変換を $W(f)$ と表すと、式(7)、(26)より、

$$W(f) = 1/N'(f) \quad (27)$$

が得られる。 $h(-\tau)$ のフーリエ変換は $F(f)^*H(f)^*$ であるから、上述のトランスバーサルフィルタの周波数特性を $C(f)$ とすると、最適受信フィルタ特性は次式で与えられる。但し、*は共役複素数を表す。

$$G(f) = \frac{F(f)^*H(f)^*C(f)}{N(f)} \quad (28)$$

式(28)より、最適受信フィルタは、次の3個のフィルタによって構成されていると考えることができる。

- (1) 伝送路雑音を白色化するフィルタ $N(f)^{-1/2}$
 - (2) 送信フィルタ、伝送路、および、上記(1)のフィルタに整合したフィルタ $(F(f)H(f)/\sqrt{N(f)})^*$ (先に述べたように $N(f)$ は実数である)
 - (3) トランスバーサルフィルタ $C(f)$
- このフィルタ構成を図2に示した。

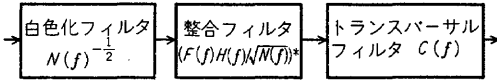


図2 最適受信フィルタ

Fig.2-Optimum receiver filter structure.

次に $C(f)$ を求める。 c_n をタップ係数とするトランスバーサルフィルタに関して、次式が成立する。

$$C(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j2\pi fnT} \quad (29)$$

一方、式(30)が成立することは明らかである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(mT-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)H(f)G(f)e^{j2\pi fmT}df \quad (30)$$

式(30)に式(28)、(29)を代入する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(mT-\tau)g(\tau)d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_{m-n} \quad (31)$$

但し、 ϕ_i は式(32)で定義されている。

$$\phi_i \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(f)H(f)|^2}{N(f)} e^{j2\pi fiT}df \quad (32)$$

式(31)を式(25)に代入する。

$$c_l = \frac{2\sigma_x^2}{N'_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{l-m} \left(s_m - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_{m-n} \right) \quad (33)$$

c_l からなる系列の両側z変換を $C'(z)$ と表す。

$$C'(z) \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l z^{-l} \quad (34)$$

同じく、 s_m 、 ϕ_m 、 r_m からなる系列の両側z変換を、それぞれ、 $S'(z)$ 、 $\Phi'(z)$ 、 $\Gamma'(z)$ と表す。次に、式(33)の両側z変換を計算し、 $C'(z)$ について解く。

$$C'(z) = \frac{\Gamma'(z)S'(z)}{\Gamma'(z)\Phi'(z) + N'_0/2\sigma_x^2} \quad (35)$$

式(29)、(34)、(35)より、式(36)が得られる。

$$C(f) = \frac{\Gamma(f) \sum_{n=0}^{K-1} s_n e^{-j2\pi fnT}}{\Gamma(f)\Phi'(e^{j2\pi fT}) + N'_0/2\sigma_x^2} \quad (36)$$

但し、 $\Gamma(f)$ は式(37)で定義されている。

$$\Gamma(f) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{-j2\pi fmT} \quad (37)$$

r_m が m に関して偶関数であるから、 $\Gamma(f)$ は実数である。更に、

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi flT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (38)$$

の関係、および、式(32)を用いて、 $\Phi'(e^{j2\pi fT})$ を計算する。

$$\begin{aligned} \Phi'(e^{j2\pi fT}) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_l e^{-j2\pi flT} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(f')H(f')|^2}{N(f')} \delta\left(f' - f - \frac{k}{T}\right) df' \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|F(f+k/T)H(f+k/T)|^2}{N'(f+k/T)} \end{aligned} \quad (39)$$

式(36)に式(39)を代入する。

$$C(f) = \frac{\Gamma(f) \sum_{n=0}^{K-1} s_n e^{-j2\pi fnT}}{\frac{\Gamma(f)}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|F(f+k/T)H(f+k/T)|^2}{N'(f+k/T)} + \frac{N'_0}{2\sigma_x^2}} \quad (40)$$

更に、受信フィルタが最適化されているときの σ_x^2 を求める。式(20)、(24)、(31)より、

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_x^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} c_{n_1} \phi_{l-n_1} \right) \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{l-m} \left(\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{n_2} \phi_{m-n_2} \right) \right\} \\ &\quad - 2\sigma_x^2 \sum_{l=0}^{K-1} s_l \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{l-n} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \phi_{m-n} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{N'_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_m \phi_{m-n} + \sigma_x^2 \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{K-1} r_{l-m} s_l s_m \end{aligned} \quad (41)$$

一方、式(3)より、式(4)が成立する。

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{r}_{l-m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_{m-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{r}_{l-n} s_m - \frac{N'_0}{2\sigma_s^2} c_l \quad (42)$$

\tilde{r}_l が l について偶関数であること、及び、式(42)を用いて式(41)の計算を行い、整理する。

$$\sigma_n^2 = \frac{N'_0}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l s_l \quad (43)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l s_l \text{ は、 } C'(z) S'(z^{-1}) \text{ の定数項だから、} \\ \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l s_l = \frac{1}{2\pi j} \oint C'(z) S'(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (44)$$

が成立する。式(44)に式(35)を代入する。

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l s_l = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{\Gamma'(z) S'(z) S'(z^{-1})}{\Gamma'(z) \Phi'(z) + N'_0/2\sigma_s^2} \frac{dz}{z} \quad (45)$$

$$\text{更に、} \quad z = e^{j2\pi f T} \quad (46)$$

と置くと、 f が $-1/2T$ から $1/2T$ まで動くときに、 z は単位円上を左回りに1周するから、

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l s_l = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \frac{\Gamma(f) S'(e^{j2\pi f T}) S'(e^{-j2\pi f T})}{\Gamma(f) \Phi'(e^{j2\pi f T}) + N'_0/2\sigma_s^2} df \\ = T \sum_{m=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{K-1} s_m s_n \\ \cdot \int_{-1/2T}^{1/2T} \frac{\Gamma(f) e^{j2\pi f(m-n)T}}{\Gamma(f) \Phi'(e^{j2\pi f T}) + N'_0/2\sigma_s^2} df \quad (47)$$

式(43)に式(47)を代入し、式(5)、(39)を用いると、 σ_n^2 は式(48)で与えられる。

$$\sigma_n^2 = s^T A s \quad (48)$$

但し、 A は K 行 K 列対称テプブリツ行列であり、その m 行 n 列要素 a_{mn} は次式で定義されている。

$$a_{mn} \triangleq \frac{N'_0 T}{2} \int_{-1/2T}^{1/2T} \frac{\Gamma(f) e^{j2\pi f(m-n)T}}{\Gamma(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|F(f+k/T)H(f+k/T)|^2}{N(f+k/T)}} df \\ * \frac{N'_0}{2\sigma_s^2} \quad (49)$$

本章では、DIR が与えられている場合について、実効 SN 比を最大にする受信フィルタ特性を導いた。次章で求められる最適 DIR を用いて、受信フィルタ特性を式(28)、(36)のように定めるならば、ビタビ識別器を含む受信系を、実効 SN 比の意味で最適化したことになる。

4. DIR の最適化

本章では、DIR の長さ K が与えられている場合に、

実効 SN 比を最大にする DIR を求める方法を明らかにする。与えられた DIR に関して、受信フィルタ特性が最適化されているときには、式(12)、(48)より、式(50)が成立する。

$$ESN^{(K)} = \sigma_s^2 \min_s \frac{s^T M_s s}{s^T A s} \quad (50)$$

ν を 0 でない任意の実数とすると、式(50)の s の代わりに νs を代入しても実効 SN 比の値は変わらない。そのため、式(50)を最大にする s は唯一に定まらない。しかし、本論文のように受信系の最適化を扱っている場合には、 s と、これをスケールして得られる νs とは、ビタビ識別器にとって、まったく同等である。ここでは、式(50)を最大化する s の中で、式(51)が成立するようにスケールされた DIR ベクトルを求めることにする。

$$s^T A s = 1 \quad (51)$$

以上より、次の定理1が得られる。なお、式(51)は、定理1を導くために便宜的に導入された条件であり、式(51)に特別な物理的意味はない。

[定理1] 式(51)の拘束条件のもとで、 $\min s^T M_s s$ を最大化する s は、実効 SN 比を最大化する最適 DIR ベクトルである。

式(51)を文献(5)で述べられている送信電力一定の条件に対応させることにより、Fredricsson が導いた計算法をそのまま用いて上述の解を求めることが可能である。

実効 SN 比を最大にする s について、 $s^T M_s s$ を最小にする誤り事象 $\tilde{\epsilon}$ が、ある1時刻で1レベルの誤りを生ずる事象であるとする。すなわち、

$$\tilde{\epsilon} = \{\pm 1\} \quad (52)$$

が成立しているとする。このとき、式(17)から明らかのように、 M_s は単位行列となる。そのため、最適 DIR は、Falconer らによって求められた解、すなわち、

$$s^T s = 1 \quad (53)$$

の条件下で、 $s^T A s$ を最小にする解に一致する⁽³⁾。

次に、実用上重要な、 $K=2, 3$ について、やや詳しい検討を行う。初めに、次の記号を定義する。

$$D(f) \triangleq \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|F(f+k/T)H(f+k/T)|^2}{N(f+k/T)} + \frac{N'_0}{2\sigma_s^2 \Gamma(f)} \\ (|f| \leq 1/2T) \quad (54)$$

$N(f)$ 、 $\Gamma(f)$ は、実数だから、 $D(f)$ も実数である。そして、 $D(f)$ は f に関して偶関数である。又、 A は対称テプブリツ行列であるから、その m 行 n 列要素を $a'_{|m-n|}$ と表すことができる。すなわち、

$$\alpha'_{|m-n|} = a_{mn} = a_{nm} \quad (55)$$

式(49), (54), (55)より,

$$\alpha'_l = \frac{N_0 T}{2} \int_{-1/2T}^{1/2T} \frac{e^{j2\pi f l T}}{D(f)} df \quad (l \geq 0) \quad (56)$$

(I) $K=2$ の場合

M_ε は正定行列であり、且つ、各要素は整数であることから、DIRの長さが2のときには、任意の s について $s^T M_\varepsilon s$ を最小にする誤り事象は、式(52)が成立する事象である。それ故に、実効 SN 比を最大にする DIR は文献(3)の解に一致する。文献(3)の結果は容易に拡張され、次の結論が得られる。まず、 $D(f)$ がナイキスト周波数付近に単一の減衰極を持つときには、最適 DIR は $\{1, 1\}$ なるクラス1のパーシャルレスポンス方式¹⁰⁾ のインパルス応答列となる。又、 $D(f)$ が直流付近に単一の減衰極を持つ場合には、 $\{1, -1\}$ が最適 DIR となる。

(II) $K=3$ の場合

[定理2] 行列 A において、

$$\alpha'_2 \geq |\alpha'_1| \quad (57)$$

が成立しているときには、 $\{1, 0, -1\}$ なるクラス4のパーシャルレスポンス方式のインパルス応答列が最適 DIR となる。

(証明) $(\alpha'_0 - \alpha'_2)$ は、行列 A の固有値であり、それに対応する固有ベクトルは $[1 \ 0 \ -1]^T / \sqrt{2}$ である。 $(\alpha'_0 - \alpha'_2)$ が A の最小固有値であるための必要十分条件は容易に求められ、それは式(57)が成立することである。このことから、式(57)が成立している場合には、

$$s_0 \triangleq [1 \ 0 \ -1]^T / \sqrt{2} (\alpha'_0 - \alpha'_2) \quad (58)$$

なる DIR ベクトルは、拘束条件式(51)を満たし、 $s^T s$ を最大にすることが分かる。一方、行列 M_ε は対称テプリティック行列だから、次式で表現できる。

$$M_\varepsilon = \begin{bmatrix} m'_0 & m'_1 & m'_2 \\ m'_1 & m'_0 & m'_1 \\ m'_2 & m'_1 & m'_0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

M_ε が正定行列であり、且つ、 m'_0, m'_1, m'_2 が整数であるから、式(60)が成立する。

$$s_0^T M_\varepsilon s_0 = \frac{m'_0 - m'_2}{\alpha'_0 - \alpha'_2} \geq \frac{1}{\alpha'_0 - \alpha'_2} \quad (60)$$

以上のことから、任意の誤り事象 ε 、及び式(51)を満たす任意の3行縦ベクトル s_1 について、

$$s_0^T M_\varepsilon s_0 \geq s_0^T s_0 \geq s_1^T s_1 \quad (61)$$

が成立する。 $s^T s$ は、先に述べたとおり、式(52)が成立する誤り事象 ε' に対応する2次形式 $s^T M_\varepsilon s$ であるから、式(58)で与えられる s_0 は定理1の解である。よって、式

(57)が成立しているとき、 $\{1, 0, -1\}$ は最適 DIR である。(証明終)

式(56)から分かるように、 $D(f)$ が $0 \sim 1/2T$ の周波数範囲で、 $1/4T$ に関して線対称、かつ、直流とナイキスト周波数付近に減衰極を持つとき、式(57)が成立する(図3)。 $D(f)$ が厳密には線対称でない場合でも、上述の特性に近い性質を持っているならば、式(57)が成立す。

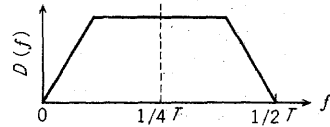


図3 $\{1, 0, -1\}$ を最適 DIR とする $D(f)$ の例
Fig.3-Example of $D(f)$ which gives the optimum DIR $\{1, 0, -1\}$.

このように、 K が2, 又は、3の場合には、 $D(f)$ に関して、上記の条件が成立している範囲では、伝送路特性が変動しても最適 DIR は変わらない。このことは重要な性質であり、実用上、好ましいことである。

5. 実効 SN 比の上限

DIRの長さ K をどの程度の値に定めるならば、良好な伝送特性が得られるかという問題に対して、判断の規準を与えるため、本章では、 K の値が任意に大きくなりうるとしたときの実効 SN 比の上限を解析的に導くことにする。

[定理3] 任意の K について、次式が成立する。

$$ESN^{(K)} \leq \max_{(1/T) \leq f \leq 1/2T} \left\{ \frac{2\sigma_s^2}{N_0 T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|F(f+k/T)H(f+k/T)|^2}{N(f+k/T)} + \frac{1}{\Gamma(f)} \right\} \quad (62)$$

(証明) 受信フィルタ、及び、DIR が最適化されているとき、式(63)が成立する。

$$ESN^{(K)} = \sigma_s^2 \max_s \min_{s^T A s} \frac{s^T M_\varepsilon s}{s^T A s} \quad (63)$$

式(52)が成立する誤り事象に対して、 M_ε は単位行列となるから、次式が得られる。

$$ESN^{(K)} \leq \sigma_s^2 \max_s \frac{s^T s}{s^T A s} \quad (64)$$

A は K 行 K 列行列であるので、その最小固有値を $\lambda_{\min}^{(K)}$ と表す。このとき、式(65)が成立する。

$$ESN^{(K)} \leq \sigma_s^2 / \lambda_{\min}^{(K)} \quad (65)$$

次に、 $B^{(n)}$ を n 行 n 列実対称行列とし、 $n \geq 2$ につ

いて、次の性質を持っているものとする。\$B^{(n)}\$ の \$n\$ 行要素、および、\$n\$ 列要素を除いて得られる \$(n-1)\$ 行 \$(n-1)\$ 列の小行列は、\$B^{(n-1)}\$ に等しい。ここで、\$B^{(n)}\$ の最小固有値を \$\mu_{\min}^{(n)}\$ と表すと、スターミアン分割定理⁽⁹⁾より、式(66)が得られる。

$$\mu_{\min}^{(n+1)} \leq \mu_{\min}^{(n)} \quad (66)$$

\$A\$ は実対称行列であるから、式(66)を用いると、

$$\max_K \frac{1}{\lambda_{\min}^{(K)}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{\min}^{(K)}} \quad (67)$$

が成立する。

更に、前章で定義した記号 \$\alpha'_l\$ を用いて、ローラン級数 \$\zeta_K(z)\$ を式(68)で定義する。

$$\zeta_K(z) \triangleq \alpha'_0 + \sum_{l=1}^{K-1} \alpha'_l (z^l + z^{-l}) \quad (68)$$

対称テータリッツ行列の性質から、\$\lim_{K \rightarrow \infty} \lambda_{\min}^{(K)}\$ の値は、\$z\$ が単位円上にあるときのローラン級数 \$\lim_{K \rightarrow \infty} \zeta_K(z)\$ の最小値に等しい⁽¹⁰⁾。すなわち、

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \lambda_{\min}^{(K)} = \min_{(|z|=1)} \left\{ \alpha'_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha'_l (z^l + z^{-l}) \right\} \quad (69)$$

単位円上の複素数の表現を容易にするため、式(46)の置換を行う。その結果、次式が得られる。

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \lambda_{\min}^{(K)} = \min_{(|f| \leq 1/2T)} \left\{ \alpha'_0 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \alpha'_l \cos 2\pi f l T \right\} \quad (70)$$

次に、\$\eta(f)\$ を式(71)で定義する。

$$\eta(f) \triangleq \frac{N'_0}{2} \cdot \frac{\Gamma(f)}{\frac{\Gamma(f)}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|F(f+k/T)H(f+k/T)|^2}{N'(f+k/T)}} \quad (71)$$

$$* \frac{1}{\frac{N'_0}{2\sigma_x^2}} \quad (|f| \leq 1/2T)$$

式(49)、(55)、(71)より、

$$\alpha'_l = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \eta(f) \cos 2\pi f l T df \quad (72)$$

式(72)より、\$\alpha'_l\$ は \$\eta(f)\$ のフーリエ係数であることが分かる。そして、\$\eta(f)\$ が \$f\$ に関して偶関数であることから、式(73)が得られる。

$$\eta(f) = \alpha'_0 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \alpha'_l \cos 2\pi f l T \quad (|f| \leq 1/2T) \quad (73)$$

式(70)、(73)より

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \lambda_{\min}^{(K)} = \min_{(|f| \leq 1/2T)} \eta(f) \quad (74)$$

式(65)、(67)、(71)、(74)より、任意の \$K\$ について式(62)が成

立する。

(証明終)

6. 数値計算

本章では、数値計算の結果を明らかにし、得られた数値解を基に考察を行うことにする。まず、伝送系の各パラメータを示す。

- 変調方式 SSB 振幅変調 (下側帯波伝送)
- 検波 同期検波
- 搬送波周波数 3,300 Hz
- ボーレート 6,000 ボー
- \$M\$ (1 シンボルの取りうるレベル数) 4
- 伝送速度 12,000 pbs
- 送信波形 クラス 4 のパーシャルレスポンス方式のインパルス応答波形、すなわち、

$$F(f) = \begin{cases} 2jT \sin 2\pi f T & (|f| \leq 1/2T) \\ 0 & (|f| > 1/2T) \end{cases} \quad (75)$$

次に、伝送系に関して以下の仮定を置く。

- 送信符号系列は白色である。
- \$\gamma_l = \begin{cases} 1 & (l=0) \\ 0 & (l \neq 0) \end{cases}\$
- 伝送路雑音は白色であり、ナイキスト帯域内の雑音電力に対する伝送路内の信号電力比は 30 dB である。すなわち、式(77)、(78)が成立する。

$$N'(f) = 1 \quad (77)$$

$$\frac{\sigma_x^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)H(f)|^2 df = 10^3 \frac{N'_0}{2T} = 10^3 \quad (78)$$

- 受信側では、完全な復調用キャリアが得られているものと仮定し、同期検波された基底帯域信号に対して、ろ波が行われているものとする。

伝送路特性を図 4、5 に示した。両者とも音声帯域電話回線の周波数特性であり、それぞれを伝送路 1、伝送路 2 と呼ぶことにする。

実効 SN 比を最大にする最適 DIR、そのときの実効 SN 比、および、式(62)で与えられる実効 SN 比の上限値を表 1 に示した。表 1 から次のことが分かる。

(i) \$K=3\$ の場合、最適 DIR は伝送路 1、伝送路 2 のいずれについても \$\{1, 0, -1\}\$ である。これは式(64)で与えられる \$D(f)\$ が 4. で述べたように、直流とナイキスト周波数付近に減衰極を持ち、且つ、\$1/4T\$ の周波数に関して、線対称に近い特性を持つためである。

(ii) 一般に最適 DIR は伝送路特性にそれほど依存しない。

(iii) 伝送路 1 のように、ほぼ平均的な特性を示す伝送路

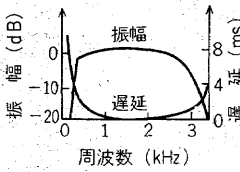


図4 伝送路1の振幅・遅延特性
Fig.4-Amplitude and delay characteristic of channel 1.

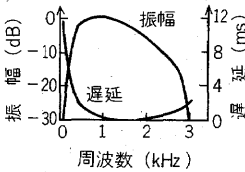


図5 伝送路2の振幅・遅延特性
Fig.5-Amplitude and delay characteristic of channel 2.

表1 最適DIRと実効SN比

DIRの長さ(K)	伝送路1		伝送路2	
	最適DIR	ESN ^(K) (dB)	最適DIR	ESN ^(K) (dB)
2	{1, -1}	15.1	{1, -1}	15.4
3	{1, 0, -1}	27.9	{1, 0, -1}	19.4
4	{1, -1, -1, 1}	29.9	{1.0148, -0.985, -0.985, 1.0148}	28.3
上限, 式(62)		33.6		34.5

においては、 $K=3$ とすることにより、良好な実効SN比が得られる。

(iv) 伝送路2のように、特性が悪い伝送路においても、 $K=4$ とすることによって、実効SN比は改善される。

7. むすび

ビタビ識別器を実現可能なものとし、且つ、良好な伝送特性を得るため、与えられたDIRの長さについて、受信フィルタ特性とDIRを最適化することを論じた。数値計算によって明らかにされたとおり、DIRの長さを比較的小きな値に定めても良好な特性が得られることから、ビタビ識別器を用いた高速なデータ通信系を構成することへの見通しが得られたと結論することができる。

今後は、ビタビ識別器入力雑音成分 n_i の相関がビタビ識別器の特性に与える影響について検討する予定である。又、本論文では取扱わなかったQAM伝送系には、チャンネル間干渉が存在し、伝送を行う上での妨害要因の一つになる。QAM伝送系におけるチャンネル間干渉の影響をも、ビタビ識別器によって救済することが今後に残された重要な検討課題である。

謝辞 本研究に関して御討論を頂いた国際電電(株) 研究所第1特別研究室の各位に感謝する。

文 献

- (1) Forney, G.D.Jr. : "Maximum-likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interference", IEEE Trans. Inform. Theory, IT-18, 3, p.363 (May 1972).
- (2) Qureshi, S.U.H. and Newhall, E.E. : "An adaptive receiver for data transmission over time-dispersive channels", IEEE Trans. Inform. Theory, IT-19, 4, p.448 (July 1973).
- (3) Falconer, D.D. and Magee, F.R. Jr. : "Adaptive channel memory truncation for maximum likelihood sequence estimation", Bell Syst. Tech. J., 52, 9, p.1541 (Nov.1973).
- (4) Messerschmitt, D.G. : "Design of a finite impulse response for the Viterbi algorithm and decision-feedback equalizer", Conf. Rec., Int. Conf. Commun., p.37 D-1 (June 1974).
- (5) Fredricsson, S.A. : "Optimum transmitting filter in digital PAM systems with a Viterbi detector", IEEE Trans. Inform. Theory, IT-20, 4, p.479 (July 1974).
- (6) Fredricsson, S.A. : "Joint optimization of transmitter and receiver filters in digital PAM systems with a Viterbi detector", IEEE Trans. Inform. Theory, IT-22, 2, p.200 (March 1976).
- (7) Magee, F.R. Jr. : "A comparison of compromise Viterbi algorithm and standard equalization techniques over band-limited channels", IEEE Trans. Commun., COM-23, 3, p.361 (March 1975).
- (8) Falconer, D.D. and Magee, F.R. Jr. : "Evaluation of decision feedback equalization and Viterbi algorithm detection for voiceband data transmission - part I", IEEE Trans. Commun., COM-24, 10, p.1130 (Oct.1976).
- (9) Bellman, R.E. : "Introduction to matrix analysis", New York, McGraw Hill (1970).
- (10) Grenander, U. and Szegö, G. : "Toeplitz forms and their application", Berkely, Univ. of California Press (1958).
- (11) Lucky, R.W., Salz, J. and Weldon, E. J. Jr. : "Principles of data communication", New York, McGraw Hill (1968).
- (12) 小川, 仙石, 松本 : "Viterbi 識別器を含むデータ通信系の最適化", 信学技報, CS 77-122 (1977-10).

(昭和53年5月2日受付, 8月24日再受付)