

## 損失媒質で囲まれた中空円筒内のモードの伝搬特性

正 員 山口 芳雄<sup>†</sup>      正 員 関口 利男<sup>††</sup>Propagation Characteristics of Normal Modes  
in Hollow Circular Cylinder Surrounded  
by Dissipative MediumYoshio YAMAGUCHI<sup>†</sup> and Toshio SEKIGUCHI<sup>††</sup>, Regular Members

あらまし この論文はトンネル、地下街などにおける無線通信の電波伝搬特性に対する基礎資料を得る目的で、トンネルなどを損失媒質で囲まれた中空円筒でモデル化し、その中における伝搬モードに対する伝搬特性を厳密に調べたものである。中空円筒の外側の媒質の導電率が高ければ、導波管での伝搬定数解析に用いられている導体近似法を用いて伝搬特性が解明できるが、導電率が低い場合には適用できない。ここでは、伝搬定数の満たすべき特性方程式を数値計算で解くことにより伝搬定数を得ている。実際のトンネルに近い中空円筒において、種々のモードの減衰特性を比較するとTE<sub>01</sub>モードの減衰量が最も少なく、次にEH<sub>11</sub>モードとなっている。又、導体近似法と比較し、この近似法がどの程度の導電率まで有効か具体的な数値例で示した。

次に、TE<sub>01</sub>モードの減衰を少なくするために、中空円筒の壁に導体リングを軸方向に周期的に配列する方法を提案し、フロケの定理を用いて解析した結果、カットオフに近い周波数ほど減衰量が改善されることが明らかになった。又、これらの解析結果はモデル実験により、よく一致していることが確かめられた。

## 1. ま え が き

陸上移動通信においてトンネル内の電界強度の低下が大きな問題となっている。実際のトンネルは形状が複雑であり、内部に車があることや媒質の電気的性質も場所によって異なるので、すべての境界条件を考慮して電波伝搬特性を明らかにすることは難しい。又、地下街や炭鉱でも同様である。しかし、今後増加する移動通信の立場から、このような空間での伝搬特性を明らかにしておく必要がある。

ここでは、これらの空間を損失媒質で囲まれた中空円筒とモデル化して考察する。中空円筒を仮定したとき、外側の媒質の導電率が高ければ、金属導波管で用いられている導体近似法を用いて種々のモードの伝搬特性が解明できる。しかし、トンネルなどを囲むコンクリートや岩は200～4,000 MHzの周波数帯におい

て比誘電率が5～10、導電率が $10^{-1} \sim 10^{-2}$  Ω/mの損失のある誘電体として作用するので、このような導電率が低い場合には導体近似法を適用できない。今まで、このモデルでの伝搬特性の解析は、導体近似法<sup>(1)</sup>のはかに特性方程式を解く方法<sup>(2)~(4)</sup>などいろいろ行われているが、計算の困難さのために近似をしたり、モードを制限したり、減衰定数の周波数特性など未解決の点も多いように思われる。又、考察対象は少し異なるが、中空円筒のトンネル内で軸方向に張られた表面波伝送線路に沿う電磁波の減衰特性に関する研究も行われている<sup>(5)</sup>。

この論文では、損失媒質で囲まれた中空円筒内における伝搬特性を取上げる。2.では、いままでの未解決な点を含めて種々のモードに対する伝搬特性、特に減衰特性について調べた。特性方程式を数値計算で解くことにより、種々のモードの伝搬定数を厳密に求めた結果、トンネルのような媒質定数では、TE<sub>01</sub>モードの減衰量が最も少なく、又、すべてのモードの減衰量は周波数が高くなるにつれて少なくなることが明らかになった。そして、導体近似法による解と厳密解とを比較し、導体近似法が有効な導電率の範囲を具体的な数値例で示した。3.では、減衰の少ないTE<sub>01</sub>モード

<sup>†</sup>新潟大学工学部電子工学科, 長岡市  
Faculty of Engineering, Niigata University, Nagaoka-shi, 940 Japan

<sup>††</sup>東京工業大学工学部電気工学科, 東京都  
Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 152 Japan

論文番号: 昭 54-182[B-65]

に着目して、抵抗損の立場からその減衰量を少なくするために中空円筒の壁に導体リングを周期的に配列した場合を解析し、カットオフに近い周波数ほど減衰量が改善されること、管内波長が周期間隔の1/2の整数倍の近くで減衰量が特に少なくなることなどを明らかにした。

2. 損失媒質で囲まれた中空円筒

トンネルを、無限に広げ、損失のある誘電体で囲まれた中空円筒でモデル化して、その中における伝搬モードの伝搬定数を求める。

2.1 特性方程式

座標系は円筒座標  $(\rho, \varphi, z)$  を用い、図1に示すような誘電率  $\epsilon$ 、透磁率  $\mu_0$ 、導電率  $\sigma$  をもつ媒質で囲まれた半径  $a$  の中空円筒を考える。但し、 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  であり、 $\epsilon_0$  は自由空間の誘電率、 $\epsilon_r$  は比誘電率である。

この構造におけるモードは、零次の軸対称  $TE_{0m}$ 、 $TM_{0m}$ 、ハイブリッド  $HE_{nm}$ 、 $EH_{nm}$  モードの4種類がある。円筒の壁  $(\rho = a)$  における電界、磁界の境界条件から、伝搬定数の満たすべき特性方程式は次式で与えられる<sup>(6)</sup>。

$$\left[ \frac{J'_n(u)}{uJ_n(u)} - \frac{H'_n(v)}{vH_n(v)} \right] \left[ \frac{k^2 J'_n(u)}{uJ_n(u)} - \frac{k_e^2 H'_n(v)}{vH_n(v)} \right] = n^2 h^2 \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} \right)^2 \tag{1}$$

但し、 $J_n(u)$  :  $n$  次ベッセル関数

$H_n(v)$  : 第2種  $n$  次ハンケル関数

' : 変数での微分

$n$  : 整数で  $\varphi$  方向の変化回数

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= (k^2 - h^2)a^2, & v^2 &= (k_e^2 - h^2)a^2 \\ k^2 &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0, & k_e^2 &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - j\omega \mu_0 \sigma \\ h &= \beta - j\alpha \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

$\omega$  : 角周波数 ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  : 周波数)

$h$  : 伝搬定数,  $\alpha$  : 減衰定数,  $\beta$  : 位相定数

ここで、 $n = 0$  (零次の軸対称モード) のとき、式

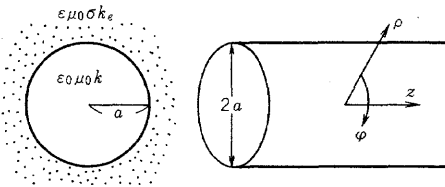


図1 中空円筒と座標系

Fig.1-Hollow circular cylinder and coordinate system.

(1)は  $TE_{0m}$  モードと  $TM_{0m}$  モードの特性方程式に分離できる。

$TE_{0m}$  モード

$$\frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} = \frac{H_1(v)}{vH_0(v)} \tag{3}$$

$TM_{0m}$  モード

$$\frac{k^2 J_1(u)}{uJ_0(u)} = \frac{k_e^2 H_1(v)}{vH_0(v)} \tag{4}$$

一方、 $n \neq 0$  のとき、式(1)は分離できず、 $HE_{nm}$  モード、 $EH_{nm}$  モードに対する特性方程式は式(1)である。

2.2 計算結果

式(1)~(4)は伝搬定数  $h$  に関する複素超越方程式であり、これを解けば厳密な伝搬定数が得られる。ここでは、 $u$  を複素変数として、これらの特性方程式を、

$$F(u) = 0 \tag{5}$$

の形に変形し、ニュートン法により根を求め、式(2)の関係から伝搬定数を得た。ニュートン法における収束判定条件は、絶対値が  $10^{-7}$ 、虚数部が  $10^{-3}$  以下としている。

数値計算の一例として、実際のトンネルを想定して、

$$a = 4\text{m}, \quad \epsilon_r = 5, \quad \sigma = 10^{-2} \text{ U/m}$$

のときの減衰定数の周波数特性を図2に示す。図2から、周波数が高くなるにつれ、すべてのモードの減衰

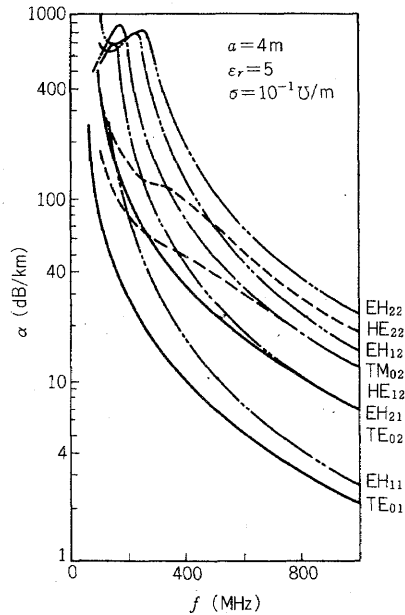


図2 減衰定数の周波数特性

Fig.2-Frequency characteristics of attenuation constants.

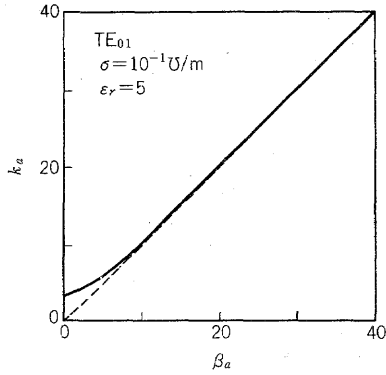


図3 TE<sub>01</sub>モードの分散特性  
Fig.3-Dispersion relation for TE<sub>01</sub> mode.

定数が少なくなることが分かる。又、各モードを比較すると、TE<sub>01</sub>モードの減衰量が最も少なく、次にEH<sub>11</sub>モードとなっている。なお、後に実験で示すようにパラメータによって最小の減衰量をもつモードは変る。図3にTE<sub>01</sub>モードの分散特性を示す。

EHモードとHEモードの区別について、次式で与えられる電界のz成分E<sub>z</sub>と磁界のz成分H<sub>z</sub>との比で調べる方法がある。

$$Q = |E_z / \eta H_z| \quad (6)$$

但し、 $\eta = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ であり、

Q > 1 に対して EHモード

Q < 1 に対して HEモード

円筒の外側の媒質の導電率を変数としてQの値を計算した結果を図4に示す。図4(a)はka、ε<sub>r</sub>が大きい

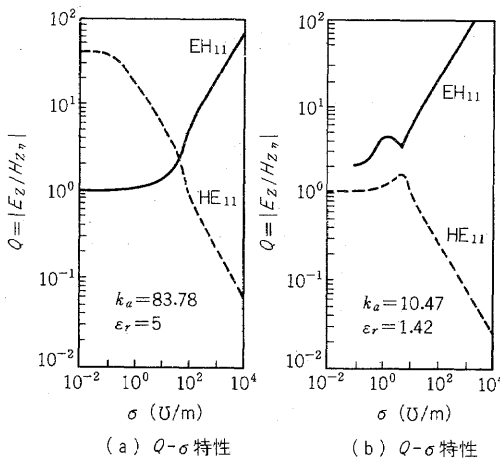


図4 Qの値と導電率の関係  
Fig.4-Values of Q versus conductivity.

とき、(b)はそれらが小さいときであるが、いずれの場合も導電率が10<sup>-1</sup>U/m以下では、Qの値からモードを区別することは難しい。ここでは特性方程式の導電率に対する根軌跡からモードの区別をしている。

### 2.3 導体近似法との比較

導体近似法は、金属導波管の伝搬定数解析に用いられている方法で、金属の導電率が無限に高いと仮定して位相定数を求め、その後、導電率は有限であるが非常に高いという条件から摂動的に減衰定数を求める方法である。導体近似法による導電率σをもつ円筒導波管の伝搬定数は、よく知られているように次式で与えられる。

TE<sub>nm</sub>モード

$$\alpha = \frac{R_s}{a \eta \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \left\{ \left( \frac{f_c}{f} \right)^2 + \frac{n^2}{x'_{nm}{}^2 - n^2} \right\} \quad (\text{Np/m}) \quad (7)$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - (x'_{nm}/a)^2} \quad (\text{rad/m}) \quad (8)$$

$$x'_{nm} : J'_n(x'_{nm}) = 0$$

$$f_c = x'_{nm} \cdot c / 2\pi a, \quad R_s = \sqrt{\pi f \mu_0 / \sigma}, \quad c : \text{光速}$$

TM<sub>nm</sub>モード

$$\alpha = \frac{R_s}{a \eta \sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (\text{Np/m}) \quad (9)$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - (x_{nm}/a)^2} \quad (\text{rad/m}) \quad (10)$$

$$x_{nm} : J_n(x_{nm}) = 0$$

$$f_c = x_{nm} \cdot c / 2\pi a$$

この導体近似法がどの程度の導電率まで有効か調べ

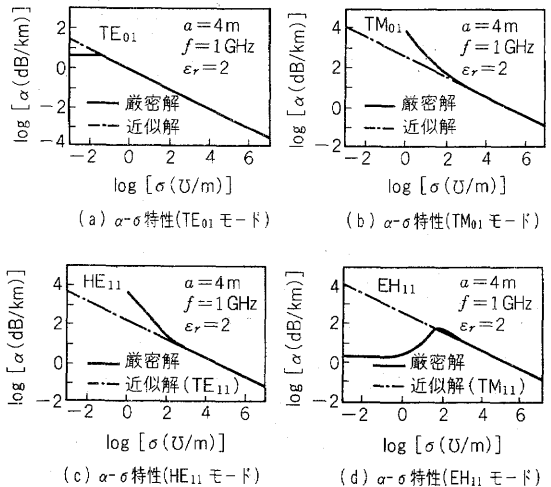


図5 各モードに対する減衰定数と導電率の関係  
Fig.5-Attenuation constant versus conductivity for each mode.

るために減衰定数を例にとりて、特性方程式による厳密解と比較した結果を図5に示す。違いの出る導電率の値はモードによって異なるが、例えばTE<sub>01</sub>モードの場合、10<sup>-1</sup>Ω/m位まで有効である。この近似法は摂動法であるにもかかわらず、比較的広範囲まで使用できる。

2.4 測定結果

5g/lのカーボンを含んだ発ぼうスチロールからなる内径9.7cm、外径30cm、長さ90cmの中空円筒を用いて円筒内におけるTE<sub>01</sub>、TM<sub>01</sub>、HE<sub>11</sub>モードの電界強度の測定を行い、減衰特性を調べた。図6に測定系を示す。この発ぼうスチロールの媒質定数は、

比誘電率  $\epsilon_r = 1.42$

導電率  $\sigma = 0.0938 \Omega^{-1}/m$

であり、測定周波数において発ぼうスチロールの厚さは

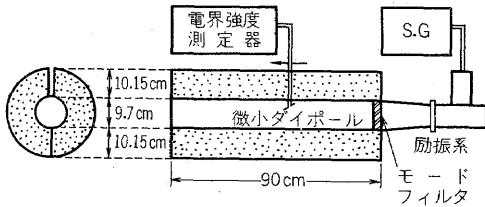


図6 測定系

Fig.6-Experimental arrangement.

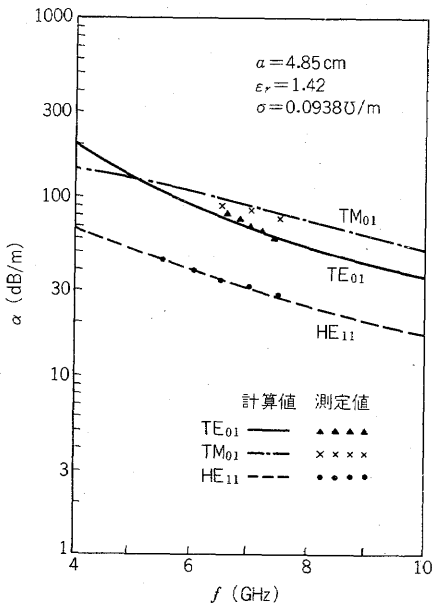


図7 減衰定数の周波数特性

Fig.7-Frequency characteristics of attenuation constants.

はスキンドープス(約3cm)に比べて十分厚いので、無限大と仮定してよい。

測定方法は、励振系からモードフィルタを通して所望のモードを中空円筒に伝送させ、微小ダイボールを用いてモードの電磁界分布を確かめながら、移動距離に対する電界強度を測定した。

図7に測定結果と計算結果の減衰定数の周波数特性を示す。図7から測定値と計算値が非常によく一致していることが分かる。

3. 導体リングによるTE<sub>01</sub>モード減衰定数の改善

ここでは、前章で得られた減衰の少ないTE<sub>01</sub>モードに着目し、その減衰量を少なくする方法を示す。減衰量を決定する要因はいろいろあるが、最も主要なのは円筒の外側の媒質の不完全導電性による抵抗損である。それ故、導電率が高ければ減衰量が少なくなると考えられるので、ここでは等価的に導電率が高くなるよう、円筒の壁に導体リングを軸方向に周期的に配列した場合を解析する。図8に幅δの導体リングを周期間隔pで配列したモデルを示す。

3.1 特性方程式

電気形、および磁気形のヘルツベクトルをπ<sub>z</sub>、π<sub>z</sub><sup>\*</sup>とすると、波源のない場合、次の波動方程式を満たす。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \pi_z + k^2 \pi_z &= 0 \\ \nabla^2 \pi_z^* + k^2 \pi_z^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、円筒内部では  $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$

円筒外部では  $k^2 = k_e^2 = \omega^2 \epsilon \mu_0 - j\omega \mu_0 \sigma$

無限周期構造における界成分はフロケの定理から空間高調波の和で表されるが、この場合、z方向に無限周期となっているので、z方向の空間高調波の和で表され、z方向の伝搬定数h<sub>m</sub>は次式で与えられる。

$$h_m = h + \frac{2\pi m}{p} \quad (12)$$

m : 整数

式(12)を用いて波動方程式(11)の解を次のようにおく。

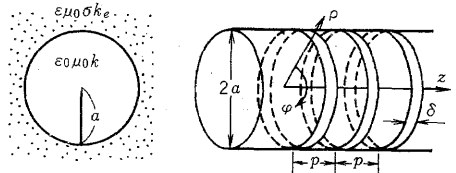


図8 導体リングの周期構造

Fig.8-Periodic structure with metallic rings.

但し、共通時間因子  $e^{j\omega t}$  は省略する。

$$\left. \begin{aligned} \pi_z^i &= \sum_{nm} A_{nm}^i J_n \left( u_m \frac{\rho}{a} \right) e^{jn\varphi} e^{-jh_m z} & (0 < \rho < a) \\ \pi_z^e &= \sum_{nm} A_{nm}^e H_n \left( v_m \frac{\rho}{a} \right) e^{jn\varphi} e^{-jh_m z} & (a < \rho) \\ \pi_z^{*i} &= \sum_{nm} B_{nm}^i J_n \left( u_m \frac{\rho}{a} \right) e^{jn\varphi} e^{-jh_m z} & (0 < \rho < a) \\ \pi_z^{*e} &= \sum_{nm} B_{nm}^e H_n \left( v_m \frac{\rho}{a} \right) e^{jn\varphi} e^{-jh_m z} & (a < \rho) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、  
 $u_m^2 = (k^2 - h_m^2)a^2, \quad v_m^2 = (k^2 - h_m^2)a^2 \quad (14)$

式(13)において、添字  $i$  は円筒内部、 $e$  は円筒外部を示し、 $A_{nm}^i, B_{nm}^i$  は未定定数、総和の  $n$  はモードについての和、 $m$  は空間高調波の和を示している。式(13)のヘルツベクトルにより、円筒内部および外部の電界、磁界の各成分が求められる。

TEモードを考慮して、図8の  $\rho = a$  において、 $z$  方向の電流は無視し、 $\varphi$  方向の電流のみを仮定する。これを  $K_\varphi$  とおくと、この電流は界成分と同じ形をしていると考えられるので次式のように展開できる。

$$K_\varphi = \sum_{nm} K_{\varphi nm} e^{jn\varphi} e^{-jh_m z} \quad (15)$$

$\rho = a$  における境界条件から、次の四つの式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi^i &= E_\varphi^e, & E_z^i &= E_z^e \\ H_\varphi^i &= H_\varphi^e, & H_z^i - H_z^e &= K_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式(13)から得られる電界、磁界を代入すれば未定定数  $A_{nm}^i, B_{nm}^i$  を  $K_{\varphi nm}$  に移すことができ、 $K_{\varphi nm}$  が分かれば界成分が決定できる。ここで、 $K_{\varphi nm}$  は各モード  $n$  に対し、図9のようにリングの上で振幅が一定で、位相が一様に変化すると仮定してフーリエ級数展開すれば、

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{\varphi nm} e^{-jh_m z} = \begin{cases} I_n e^{-jh_m z} & (0 < z < \delta) \\ 0 & (\delta < z < p) \end{cases} \quad (17)$$

ここで、 $I_n$  はモード  $n$  に対する電流を表す。

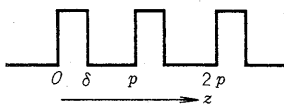


図9 電流分布  
 Fig.9 - Current distribution.

$$K_{\varphi nm} = \frac{I_n \delta}{p} \frac{\sin(m\pi\delta/p)}{m\pi\delta/p} e^{j\frac{m\pi\delta}{p}} \quad (18)$$

$E_\varphi$  はリングの上で零となるので、式(18)を用いて、  

$$E_\varphi^i \left( \rho = a, z = \frac{\delta}{2} \right) = 0 \quad (19)$$

とおくと伝搬定数の満たすべき特性方程式<sup>(7)</sup>が得られる。TE<sub>01</sub>モードに対する特性方程式は、 $n = 0$  とおくことにより次式で与えられる。

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u_m \frac{J_0(u_m)}{J_1(u_m)} - v_m \frac{H_0(v_m)}{H_1(v_m)}} \frac{\sin\left(\frac{m\pi\delta}{p}\right)}{\frac{m\pi\delta}{p}} = 0 \quad (20)$$

### 3.2 計算結果と測定結果

2.2と同様にニュートン法を用いて計算を行い、伝搬定数を求めた。一例として具体的な構造を考慮し、半径  $a = 4$  m、リング幅  $\delta = 10$  cm、周期間隔  $p = 50$  cm とした場合の計算結果をリングを入れない場合と比較して図10に示す。この図から、リングを入れることにより減衰量が改善され、又、周波数が低い程、つまりカットオフに近い周波数ほど大きく改善されていることが分かる。

更に、これらの減衰特性を詳細に検討するためにモ

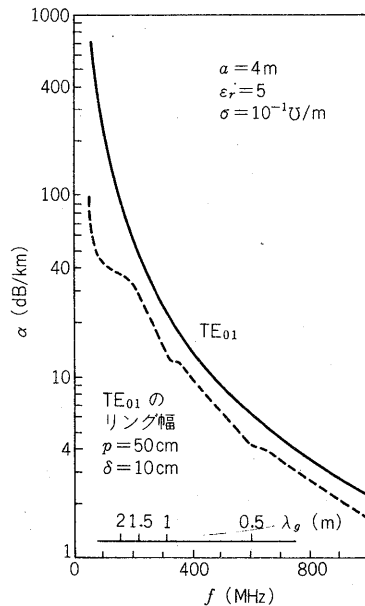


図10 減衰定数の周波数特性  
 Fig.10 - Frequency characteristics of attenuation constants.

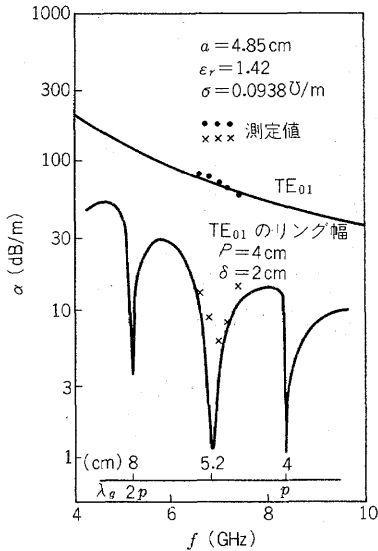


図11 減衰定数の周波数特性  
Fig.11-Frequency characteristics of attenuation constants.

デル実験を行った。半径  $a = 4.85 \text{ cm}$  とし、周波数  $4 \sim 10 \text{ GHz}$  でリング幅  $\delta = 2 \text{ cm}$ 、周期間隔  $p = 4 \text{ cm}$  とした場合の計算結果、および測定結果を図11に示す。図11の計算結果から、管内波長が周期間隔の  $1/2$  の整数倍の近くで、減衰量が著しく改善されていることが分かり、測定結果もこの特徴を示している。このような特性は図10でも  $\lambda_g = 0.5, 1, 2 \text{ m}$  付近でその傾向がうかがえるが、定量的に図11の場合ほど顕著な改善になっていない。このことは円筒半径や周期間隔、リング幅によって大きな影響を受けることを意味している。

#### 4 むすび

トンネルを損失媒質で囲まれた中空円筒でモデル化して、その中における伝搬モードの伝搬定数を厳密に求めた。その結果、実際のトンネルに近い中空円筒では、周波数が高くなるにつれてすべてのモードの減衰量が少なくなること、又、各モードを比較すると、 $TE_{01}$  モードの減衰量が最も少なく、次に  $EH_{11}$  モードとなっていることが分かった。例えば移動通信に使用される周波数  $800 \text{ MHz}$  で、比誘電率  $5$ 、導電率  $10^{-2} \text{ U/m}$  の媒質で囲まれた半径  $4 \text{ m}$  の中空円筒では、 $TE_{01}$  モードが  $3.6 \text{ dB/km}$ 、 $EH_{11}$  モードが  $4.2 \text{ dB/km}$  で

ある。又、導体近似法と比較した結果、この方法は摂動法であるにもかかわらず比較的広範囲まで使用でき、モードによって厳密解と違いの出る導電率の値は異なるが、上のパラメータの場合  $TE_{01}$  モードでは  $10^{-1} \text{ U/m}$  位まで有効である。

次に、減衰の少ない  $TE_{01}$  モードの減衰量を改善するために、円筒の壁に導体リングを周期的に配列した場合を解析した。その結果、カットオフに近い周波数ほど減衰量が改善されることや、円筒半径と周期、リング幅など構造上のパラメータによっては、管内波長が周期間隔の  $1/2$  の整数倍の近くで特に減衰量が少なくなるという特徴が得られた。

具体的なトンネルを対称にしたときのリングによる改善策やその構成法、および半円、半だ円などの断面形状による伝搬特性については検討中である。

謝辞 この研究を行うに当たり、御助言を頂いた東京工業大学、後藤尚久、内藤喜之助教授に厚く感謝申し上げます。

#### 文 献

- (1) 千葉, 佐藤: “トンネルにおける電磁波の伝搬”, 電学会電磁界理論研資, EMT 76-51 (昭51-10).
- (2) Marcatili, E. A. J. and Schmeltzer, R. A.: “Hollow metallic and dielectric waveguides for long distance optical transmission and lasers”, Bell Syst. Tech. J., 43, 2, p.1783 (July 1964).
- (3) Glaser, J. I.: “Attenuation and guidance of modes on hollow dielectric waveguides”, IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., MTT-17, p.173 (1969).
- (4) 稲葉, 千葉, 桑本, 坂野, 佐藤: “トンネル内の電磁波の伝搬(II)”, 電学会電磁界理論研資, EMT-77-43 (昭52-10).
- (5) Wait, J. R. and Hill, D. A.: “Electromagnetic fields of a dipole source in a circular tunnel containing a surface wave line”, Int. J. Electronics, 42, 4, p.377 (1977).
- (6) Stratton, J. A.: “Electromagnetic theory”, p.524, McGraw-Hill (1941).
- (7) 山口, 関口: “損失媒質で囲まれた中空円筒内の伝搬特性の改善”, 信学技報, AP 77-62 (1977-10).
- (8) 山口, 植野, 関口: “損失媒質で囲まれた中空円筒内の伝搬特性”, 昭53信学総全大, 511.
- (9) 小園, 新宅, 中谷: “移動通信におけるトンネル内の電波伝搬特性について”, 昭52信学総全大, S5-4.

(昭和53年8月24日受付, 11月8日再受付)