

だ円断面をもつトンネル内の基本波の伝搬特性

正員 山口 芳雄[†] 正員 清水 富男^{††} 正員 阿部 武雄[†]

Propagation Characteristics of the Dominant Mode in Tunnels with Elliptical Cross Section

Yoshio YAMAGUCHI[†], Tomio SHIMIZU^{††} and Takeo ABE[†], Regular Members

あらまし この論文はトンネル、地下街などにおける無線通信の電波伝搬特性に対する基礎資料を得る目的で、これらの空間を損失媒質で囲まれた中空だ円筒でモデル化し、その中における実用上最も重要な基本モードの伝搬特性を厳密に調べたものである。だ円筒を取り囲む媒質の導電率が高ければ、摂動法を用いて伝搬特性が解明できるが、コンクリートや岩のような導電率の低い媒質に対してこの方法は適用できない。ここでは、伝搬定数の満たすべき特性方程式を導き、それを数値計算で解くことにより伝搬定数を得ている。

だ円断面は二つの対称軸を有するため、奇、偶の基本モードが存在するが、実際のトンネルに近い中空だ円筒において、両モードの減衰定数は周波数の増加と共に減少すること、及び、偶モードより奇モードの方が減衰が少ないことを具体的な数値例で示した。又、媒質定数によって減衰量がどのように変化するかを調べ、導電率よりも誘電率に大きく依存することを明らかにした。更に、モデル実験によって減衰特性を実測し、解析結果とよく一致していることを確認している。

1. ま え が き

トンネルや地下街における無線通信について、陸上移動通信の立場から、あるいは災害時を考慮した通信系の確保という観点から、数多くの研究^{(1)~(4)}が行われている。トンネルや地下街は一種の導波路とみなすことができるが、一般に断面形状が複雑であり、又、媒質の電気的性質も場所によって異なるので、すべての境界条件を考慮して電波伝搬特性を明らかにすることは難しい。そのため、従来の研究ではトンネルなどを、損失媒質で囲まれた円形導波管^{(1),(2)}でモデル化したり、方形導波管^{(3),(4)}で近似して解析を行っている。

一方、円形導波管モデルの解析結果⁽¹⁾から、トンネルのような導波路においては、基本モードが最も伝搬しやすく、且つ、減衰が少ないことが判明している。本論文では基本モードに着目して、形状的によりトンネルに近い、損失媒質で囲まれた中空だ円筒導波管に

おける伝搬特性を考察する。中空だ円筒を仮定したとき、外部媒質の導電率が高ければ、金属導波管で用いられている摂動法⁽⁵⁾を用いて伝搬特性が解明できる。しかし、トンネルを取り囲むコンクリートや岩は周波数 500~1,000 MHz において、比誘電率 2~15、導電率 $5 \times 10^{-3} \sim 0.5 \text{ S/m}$ の損失をもつ誘電体として作用する^{(4),(6)}ので、このように導電率が低い場合には摂動法を適用できない。なお、導電率の低い誘電体を内装しただ円筒導波管や、誘電体表面波導波路に対して、位相定数については特性方程式を解き、減衰定数については摂動法を用いて解析を行った報告^{(7),(8)}もある。

本論文では伝搬定数の満たすべき特性方程式を導き、それを数値計算で解くことによって伝搬特性を求めている。だ円断面は、二つの対称軸をもつため、奇、偶の2種類の基本モードが存在する。以下に、実際のトンネルに近い中空だ円筒において、両モードの減衰定数は周波数の増加と共に減少すること、及び、偶モードより奇モードの方が減衰が少ないことを示す。又、減衰特性の媒質定数による変化を調べ、導電率よりも誘電率に大きく依存することを示す。

2. だ円筒内の基本モード

トンネルなどを、無限に広い損失ある誘電体で囲ま

[†]新潟大学工学部情報工学科, 新潟市

Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan

^{††}松下通信工業(株), 横浜市

Matsushita Communication Industrial Co. Ltd., Yokohama-shi, 226 Japan

論文番号: 昭 56-493[B-163]

れた中空だ円筒でモデル化し、その中における基本モードについて調べる。

2.1 だ円筒と波動方程式の解

図1に示すような誘電率 ϵ 、透磁率 μ_0 、導電率 σ (Conductivity) をもつ媒質で囲まれた長半径 a 、短半径 b の中空だ円筒を考える。但し、 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ であり、 ϵ_0 は自由空間の誘電率、 ϵ_r は比誘電率 (Relative dielectric constant) である。このだ円筒問題を解析するため、図2に示すような長軸 $2a$ 、短軸 $2b$ なるだ円断面をもち、 z 軸をだ円筒の軸とするだ円筒座標系 (ξ, η, z) を導入する。図2において、 G はだ円の焦点を表し、焦点間距離は $2c$ とする。又、 ξ_0 (定数) は内部と外部の境界を表し、次の関係がある。

$$\cosh \xi_0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (1)$$

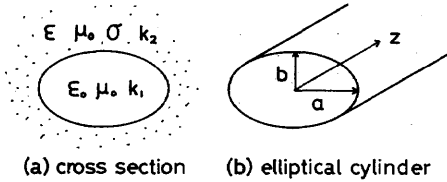


図1 損失媒質で囲まれた中空だ円筒
Fig.1-Hollow elliptical cylinder surrounded by dissipative medium.

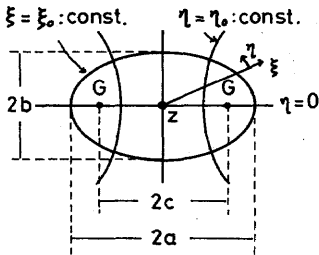


図2 だ円筒座標系 (ξ, η, z)
Fig.2-Elliptical coordinate system (ξ, η, z).

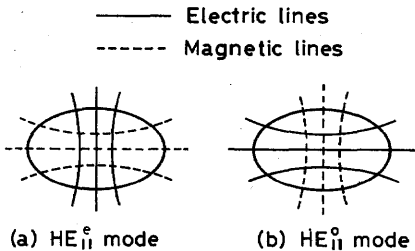


図3 基本モードの断面内電磁界分布
Fig.3-Field distribution of the dominant mode in cross section of the cylinder.

よく知られているように、だ円筒座標における波動方程式の解は変数分離可能であり、次のようなマッシュー関数を用いて表される⁽⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} & \text{半径マッシュー関数} \\ & R_{om}^{(i)}(c r_i, \cosh \xi) \\ & = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' e^{j(m-n)\frac{\pi}{2}} D_{en}^m Z_n(c r_i, \cosh \xi) \\ & R_{om}^{(i)}(c r_i, \cosh \xi) \\ & = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \xi \sum_n' e^{-j(m-n)\frac{\pi}{2}} n D_{on}^m Z_n(c r_i, \cosh \xi) \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{角マッシュー関数} \\ & S_{em}^{(i)}(c r_i, \eta) = \sum_n' D_{en}^m \cos n \eta \\ & S_{om}^{(i)}(c r_i, \eta) = \sum_n' D_{on}^m \sin n \eta \end{aligned} \right\} (3)$$

但し、 D_{en}^m 、 D_{on}^m は係数であり、 $Z_n(\cdot)$ は円筒関数を表し、だ円筒内部ではベッセル関数、外部では第2種ハンケル関数を表すものとする。 \sum_n' は n, m を整数として、 m が偶数であれば n の偶数、 m が奇数ならば n の奇数についての和を意味する。マッシュー関数系 $R_{e,om}^{(i)}$ 、 $S_{e,om}^{(i)}$ の下添字 e, om は偶、奇関数に対応したものであり、 $i=1, 2$ はそれぞれ、だ円筒の内部と外部を示すものとする。

2.2 特性方程式

円形トンネルモデルによる解析結果⁽¹⁾の類推から、実際のトンネルにおいても減衰が少なく、且つ、実在する可能性の高い基本モードに着目して特性方程式を導く。波動方程式の解は、だ円断面の二つの対称軸により2組存在し、式(2)、(3)のような偶あるいは奇のマッシュー関数系による積で表される。そのため、偶関数に対しては HE_{11}^e モード、奇関数に対しては HE_{11}^o モードなる2種類の基本モードが存在する。各モードの概略的な電磁界分布を図3に示す。

2.2.1 HE_{11}^e モード

式(2)、(3)を用いて電磁界の z 成分を次のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} & \text{だ円筒内部 } (0 \leq \xi \leq \xi_0) \\ & E_{z1} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m R_{om}^{(1)}(c r_1, \cosh \xi) S_{om}^{(1)}(c r_1, \eta) F \\ & H_{z1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m R_{om}^{(1)}(c r_1, \cosh \xi) S_{om}^{(1)}(c r_1, \eta) F \\ & \text{だ円筒外部 } (\xi_0 \leq \xi < \infty) \\ & E_{z2} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m R_{om}^{(2)}(c r_2, \cosh \xi) S_{om}^{(2)}(c r_2, \eta) F \end{aligned} \right\} (4)$$

$$H_{z1} = \sum_{m=0}^{\infty} D_m R_{em}^{(2)}(c_{r2}, \cosh \xi) S_{em}^{(2)}(c_{r2}, \eta) F$$

$$F = e^{j(\omega t - hz)}$$

ここで、 A_m, B_m, C_m, D_m は振幅係数であり、又、式(2)~(4)における変数には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1^2 &= k_1^2 - h^2, & \gamma_2^2 &= k_2^2 - h^2 \\ k_1^2 &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0, & k_2^2 &= \omega^2 \epsilon \mu_0 - j \omega \mu_0 \sigma \\ h &= \beta - j\alpha \\ \omega &= 2\pi f \end{aligned} \right\} (5)$$

f : 周波数 (Frequency)

h : 伝搬定数

α : 減衰定数 (Attenuation constant)

β : 位相定数 (Phase constant)

式(4)から他の電磁界成分を求め(付録1)、だ円筒の壁面($\xi = \xi_0$)における境界条件(接線成分の連続性)を適用すると、伝搬定数の満たすべき特性方程式は次のような無限次行列式となる¹⁰⁾。

$$\begin{vmatrix} g_{11} & h_{11} & g_{31} & h_{31} & \cdot & \cdot \\ t_{11} & s_{11} & t_{31} & s_{31} & \cdot & \cdot \\ g_{13} & h_{13} & g_{33} & h_{33} & \cdot & \cdot \\ t_{13} & s_{13} & t_{33} & s_{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

式(6)の各要素については付録2を参照されたい。

基本モードに対する特性方程式は、だ円が極度の扁平でなければ($\xi_0 > 0.5$)、次の2行2列の行列式で近似できる¹⁰⁾。

$$\begin{vmatrix} g_{11} & h_{11} \\ t_{11} & s_{11} \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

式(7)より、求める特性方程式は次式となる。

$$\left[\frac{R_{e1}^{(1)'}(c_{r1}, \cosh \xi_0)}{u^2 R_{e1}^{(1)}(c_{r1}, \cosh \xi_0)} - \frac{R_{e1}^{(2)'}(c_{r2}, \cosh \xi_0)}{v^2 R_{e1}^{(2)}(c_{r2}, \cosh \xi_0)} \right] \cdot \left[\frac{k_1^2 R_{o1}^{(1)'}(c_{r1}, \cosh \xi_0)}{u^2 R_{o1}^{(1)}(c_{r1}, \cosh \xi_0)} - \frac{k_2^2 R_{o1}^{(2)'}(c_{r2}, \cosh \xi_0)}{v^2 R_{o1}^{(2)}(c_{r2}, \cosh \xi_0)} \right] = -h^2 \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} \right)^2 x_{11} \nu_{11} \quad (8)$$

但し、式(8)における'は ξ に関する微分を表し、 x_{11}, ν_{11} については付録2を参照されたい。

2.2.2 HE₀₁^oモード

奇モードを考慮して、電磁界の z 成分は次のように展開できる。

だ円筒内部 ($0 \leq \xi \leq \xi_0$)

$$E_{z1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m R_{em}^{(1)}(c_{r1}, \cosh \xi) S_{em}^{(1)}(c_{r1}, \eta) F$$

$$H_{z1} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m R_{om}^{(1)}(c_{r1}, \cosh \xi) S_{om}^{(1)}(c_{r1}, \eta) F \quad (9)$$

だ円筒外部 ($\xi_0 \leq \xi < \infty$)

$$E_{z2} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m R_{em}^{(2)}(c_{r2}, \cosh \xi) S_{em}^{(2)}(c_{r2}, \eta) F$$

$$H_{z2} = \sum_{m=1}^{\infty} d_m R_{om}^{(2)}(c_{r2}, \cosh \xi) S_{om}^{(2)}(c_{r2}, \eta) F$$

ここで、 a_m, b_m, c_m, d_m は振幅係数を表す。

HE₀₁^oモードの場合と同様な方法で、HE₀₁^oモードに対する特性方程式を求めると次式ようになる。

$$\left[\frac{R_{o1}^{(1)'}(c_{r1}, \cosh \xi_0)}{u^2 R_{o1}^{(1)}(c_{r1}, \cosh \xi_0)} - \frac{R_{o1}^{(2)'}(c_{r2}, \cosh \xi_0)}{v^2 R_{o1}^{(2)}(c_{r2}, \cosh \xi_0)} \right] \cdot \left[\frac{k_1^2 R_{e1}^{(1)'}(c_{r1}, \cosh \xi_0)}{u^2 R_{e1}^{(1)}(c_{r1}, \cosh \xi_0)} - \frac{k_2^2 R_{e1}^{(2)'}(c_{r2}, \cosh \xi_0)}{v^2 R_{e1}^{(2)}(c_{r2}, \cosh \xi_0)} \right] = -h^2 \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} \right)^2 x_{11} \nu_{11} \quad (10)$$

3. 数値計算

式(8), (10)は伝搬定数 h に関する複素超越方程式であり、これを解けば、厳密な伝搬定数が得られる。ここでは、半径マッシュ関数に含まれる円筒関数の引数を

$$\left. \begin{aligned} c_{r1} \cosh \xi_0 &= \gamma_1 a = \sqrt{k_1^2 - h^2} a = u \\ c_{r2} \cosh \xi_0 &= \gamma_2 a = \sqrt{k_2^2 - h^2} a = v \end{aligned} \right\} (11)$$

とおき、 u を複素変数として、これらの特性方程式を

$$F(u) = 0 \quad (12)$$

の形に変形する。次に、ニュートン法を用いて根を求め、式(11)の関係から伝搬定数を得た。ニュートン法における収束判定条件は、絶対値が 10^{-6} 、虚数部が 10^{-3} 以下としている。

計算を行うに当たり、式(2), (3)の展開項数を何項までとるかが問題となるが、周波数800 MHzを例にとり、実際のトンネルを想定して

$$\begin{aligned} a &= 4 \text{ m} & b &= 3.2 \text{ m} & (\xi_0 &= 1.1) \\ \epsilon_r &= 5 & \sigma &= 0.01 \text{ S/m} \end{aligned}$$

とした場合、マッシュ関数の展開項数に対する基本モードの減衰定数と根の収束状況を表1に示す。減衰定数の有効けたを3けたとすれば、上記のパラメータでは、3項までとれば十分である。パラメータの変化によってとるべき項数は変るが、以下の計算では、4項までとり、且つ、根の収束を確かめた上で伝搬定数を求めた。

図4に減衰定数の周波数特性を示す。周波数の増加に伴い、減衰定数が減少してゆくことが分かる。又、HE₀₁^oモードの減衰量は、常にHE₁₁^oモードよりも少な

表1 展開項数に対する減衰定数と根の収束
($f = 800 \text{ MHz}$)

項数	HE_{11}^e		HE_{11}^o	
	α (dB/km)	u	α (dB/km)	u
1	4.6769	$2.60754 + j 0.055312$	3.4779	$2.60737 + j 0.041135$
2	6.4737	$2.71847 + j 0.073433$	4.2421	$2.71962 + j 0.048099$
3	6.5015	$2.71939 + j 0.073724$	4.2545	$2.72058 + j 0.048222$
4	6.5015	$2.71939 + j 0.073723$	4.2545	$2.72058 + j 0.048222$

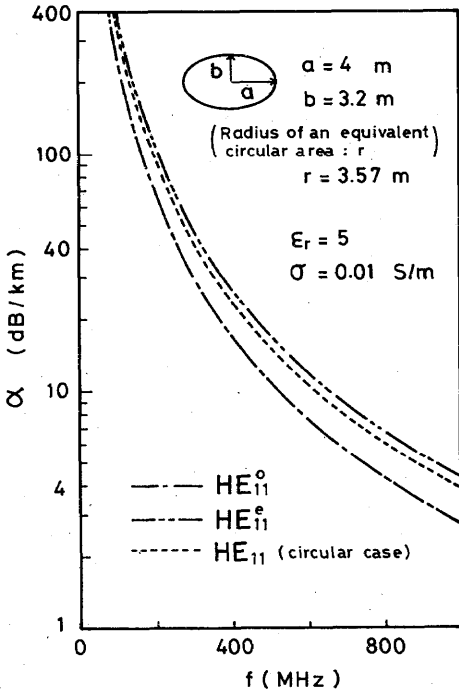


図4 減衰定数の周波数特性
Fig.4-Frequency characteristics of attenuation constant.

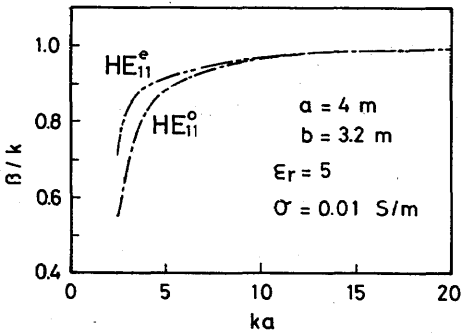


図5 分散特性
Fig.5-Dispersion relation.

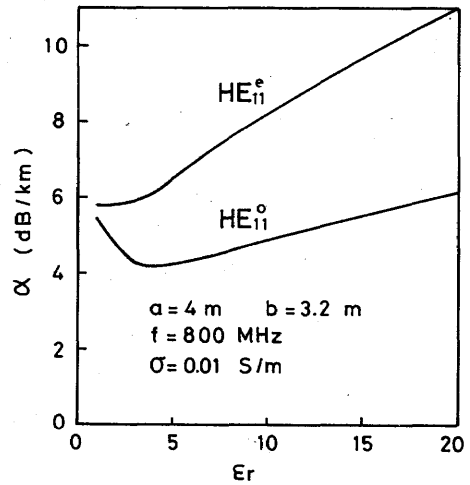


図6 減衰定数の比誘電率に対する依存性
Fig.6-Dependency of attenuation constant on relative dielectric constant.

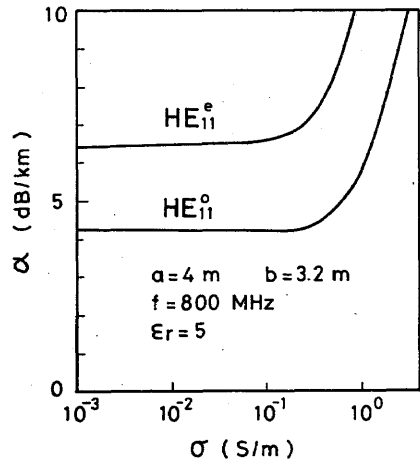


図7 減衰定数の導電率に対する依存性
Fig.7-Dependency of attenuation constant on conductivity.

くなっている。これは、図3に示した電界分布より分かるように、 HE_{11}^o モードに比べ HE_{11}^e モードの場合、等価的な導波路の寸法が大きくなっているためである。なお、比較のために、このだ円と等しい断面積をもつ円筒(半径 $r=3.57$ m)での減衰定数を計算すると、図4に示すように、 HE_{11}^e モードと HE_{11}^o モードの間に入る。

図5に分散特性を示す。両モードとも $ka > 10$ では、 $k = \beta$ とみなしてよい。

次に、媒質定数によって減衰定数がどのように変化するかを調べる。一般に、トンネルなどを囲むコンクリートは、周波数500~1,000 MHzにおいて、比誘電率2~15、導電率 $5 \times 10^{-3} \sim 0.5$ S/mの損失誘電体として作用するので、これらの値を用いて減衰定数の媒質定数に対する依存性について計算を行った。周波数800 MHzを例にとり、比誘電率 ϵ_r を変数とした場合の減衰定数を図6に示す。 $\epsilon_r > 5$ では ϵ_r の増加と共に、両モードの減衰定数は増加する。又、 HE_{11}^o モードでは $\epsilon_r \approx 4$ 付近で減衰定数が最小値をとる。図7は導電率 σ に対する減衰定数を示したものであり、 $\sigma < 10^{-1}$ S/mでは、 σ の変化にかかわらず、ほぼ一定である。

図6、7からトンネルのような媒質定数では、減衰定数は、導電率よりも誘電率に強く依存していることが分かる。それ故、減衰を引き起す原因は、定性的にオーム損よりも屈折損、放射損にあるといえる。

図8に、だ円断面内の短軸上における電磁界成分の相対強度を示す。各成分(付録1)は、短径方向における最大値で正規化してある。

4 減衰定数の測定

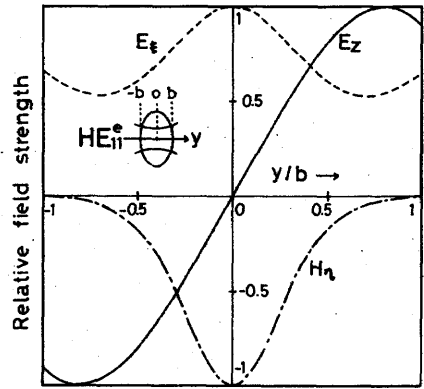
3.で得られた解析結果を確かめるために、5 g/lのカーボンを含んだ発ぼうスチロールからなる長半径5.7 cm、短半径5 cm、外径30 cm、長さ90 cmの中空だ円筒を用いて、だ円筒内の電界強度の測定を行い、減衰定数を求めた。図9に、その測定装置を示す。7 GHz帯におけるこの発ぼうスチロールの媒質定数は

$$\epsilon_r = 1.42$$

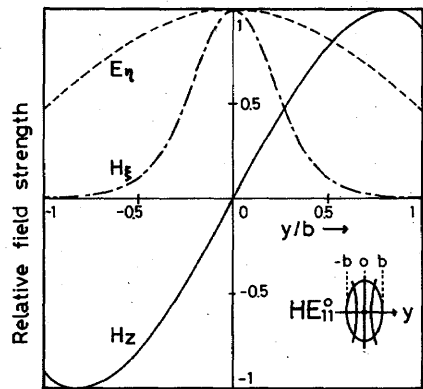
$$\sigma = 0.0938 \text{ S/m}$$

であり、測定周波数帯において発ぼうスチロールの厚さは、スキンドプス(約3 cm)に比べ十分厚いので無限大と仮定でき、又、実験的にもこれを確認している。

測定では、ホーンアンテナにより方形 TE_{10} モードをだ円筒内に伝送させ、微小ダイポールを用いて図3



(a) HE_{11}^e mode



(b) HE_{11}^o mode

$$a = 4 \text{ m}, b = 3.2 \text{ m}, f = 800 \text{ MHz}$$

$$\epsilon_r = 5, \sigma = 0.01 \text{ S/m}$$

図8 だ円断面短軸上の電磁界分布

Fig.8-Field distribution on the axis ($\eta = \pi/2, 3\pi/2$) of the elliptical cross section.

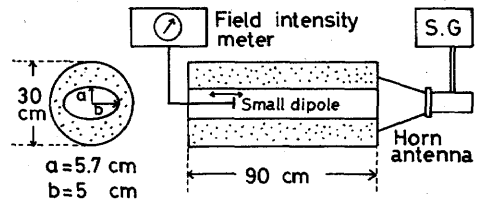


図9 測定装置

Fig.9-Measuremental setup.

に示すような電界分布を確認した上で、移動距離に対する電界強度を調べた。

図10に減衰定数の計算結果、および、測定結果を示す。広い周波数帯にわたり、実測値と計算値がよく

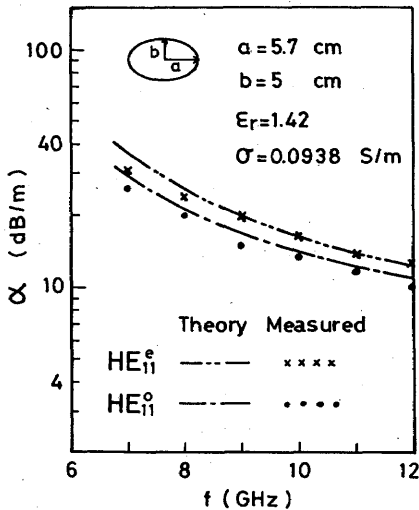


図10 減衰定数の周波数特性
Fig.10-Frequency characteristics of attenuation constant.

一致していることが分かる。

5. むすび

トンネルを損失媒質で囲まれた中空だ円筒でモデル化し、その中における基本モードの伝搬定数の厳密解を得た。だ円断面の二つの対称軸により、奇、偶の2種類の基本モードが存在するが、実際のトンネルに近い中空だ円筒では、奇モードの方が常に減衰が少ない。例えば、移動通信に使用される周波数800MHzで、比誘電率5、導電率 10^{-2} S/mの媒質で囲まれた長半径4m、短半径3.2mの中空だ円筒では、奇モードが4.25 dB/km、偶モードが6.5 dB/kmである。このことは、実際のトンネルや地下街で通信を行う場合、断面の長径方向に偏波するように電波を励振した方が減衰が少ないことを意味している。又、円形トンネルの場合と同様、周波数の増加と共に両モードの減衰量は少なくなる。

これらの解析結果を確かめるためにモデル実験を行い、減衰定数を実測したが、実測値も計算値とよく一致すると共に、上記の特徴を示している。

一方、コンクリートのような媒質定数に対する減衰定数の変化を調べ、導電率よりも誘電率に大きく依存するという結果が得られたが、これらの実験による検討は今後の課題である。

又、実際のトンネルや地下街などの具体的断面形状による伝搬特性については検討中である。

文 献

- (1) 山口, 関口: "損失媒質で囲まれた中空同筒内のモードの伝搬特性", 信学論(B), J62-B, 4, pp. 368-373 (昭54-04).
- (2) Chiba, Inaba, Kuwamoto, Banno and Sato: "Radio communication in tunnels", IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., MTT-26, 6, pp. 439-443 (June 1978).
- (3) 小園, 鈴木, 花沢: "方形断面トンネル内における電波伝搬特性の実験的検討", 信学論(B), J62-B, 6, pp. 565-572 (昭54-06).
- (4) Alfred, G.E., Robert, L.L. and Peter, F.S.: "Theory of the propagation of UHF radio waves in coal mine tunnels", IEEE Trans. Antennas & Propag., AP-23, 2, pp. 192-205 (March 1975).
- (5) Chu, L. J.: "Electromagnetic waves in elliptic hollow pipes of metal", J. Appl. Phys., 9, pp. 583-591 (Sept. 1938).
- (6) 秋田慶一: "コンクリートの電気定数とテレビの反射特性", 信学技報, EMCJ78-38 (1978-11).
- (7) Rengarajan, S.R. and Lewis, J.E.: "Dielectric loaded elliptical waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., MTT-28, 10, pp. 1085-1089 (Oct. 1980).
- (8) Rengarajan, S.R. and Lewis, J.E.: "The elliptical surface wave transmission line", ibid, pp. 1089-1095.
- (9) 清水, 山口, 阿部: "損失媒質で囲まれた中空だ円筒内の電波伝搬特性", 信学技報, A-P80-96 (1980-12).
- (10) Yeh, C.: "Elliptical dielectric waveguides", J. Appl. Phys., 33, 11, pp. 3235-3243 (Nov. 1962).
- (11) 若林, 三原: "誘電体テーブ線路の解析", 信学論(B), J61-B, 10, pp. 880-887 (昭54-10).

付 録

1. 他の電磁界成分

電界, 磁界のz成分から, 他の成分は次式によって求められる。

$$E_{\xi i} = -\Gamma_i \left(h \frac{\partial E_{z i}}{\partial \xi} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_{z i}}{\partial \eta} \right)$$

$$E_{\eta i} = -\Gamma_i \left(h \frac{\partial E_{z i}}{\partial \eta} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_{z i}}{\partial \xi} \right)$$

$$H_{\xi i} = -\Gamma_i \left(\frac{k_i^2}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_{z i}}{\partial \eta} - h \frac{\partial H_{z i}}{\partial \xi} \right)$$

$$H_{\eta i} = -\Gamma_i \left(\frac{k_i^2}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_{z i}}{\partial \xi} + h \frac{\partial H_{z i}}{\partial \eta} \right)$$

但し

$$\Gamma_i = \frac{j}{r_i^2 c \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}}$$

$i = 1, 2$

2. 無限次行列式(6)の各要素について

$m, n, r = 1, 3, 5, \dots$ として, 各要素は次式で与えられる.

$$g_{rn} = \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) R_{en}^{(2)}(c_{r_2}, \cosh \xi_0) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{rm} x_{mn}$$

$$h_{rn} = \frac{\beta_{rn}}{\omega \mu_0 h} \left\{ k^2 R_{0r}^{(2)}(c_{r_2}, \cosh \xi_0) \frac{R_{0n}^{(1)'}(c_{r_1}, \cosh \xi_0)}{R_{0n}^{(1)}(c_{r_1}, \cosh \xi_0)} - k^2 \frac{r_1^2}{r_2^2} R_{0r}^{(2)'}(c_{r_2}, \cosh \xi_0) \right\}$$

$$t_{rn} = \frac{\omega h_0}{h} \alpha_{rn} \left\{ R_{er}^{(2)}(c_{r_2}, \cosh \xi_0) \frac{R_{en}^{(1)'}(c_{r_1}, \cosh \xi_0)}{R_{en}^{(1)}(c_{r_1}, \cosh \xi_0)} - \frac{r_1^2}{r_2^2} R_{er}^{(2)'}(c_{r_2}, \cosh \xi_0) \right\}$$

$$S_{rn} = - \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) R_{0r}^{(2)}(c_{r_2}, \cosh \xi_0) \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{rm} \nu_{mn}$$

$$\alpha_{rm} = \frac{\int_0^{2\pi} S_{er}^{(2)}(c_{r_2}, \eta) S_{em}^{(1)}(c_{r_1}, \eta) d\eta}{\int_0^{2\pi} S_{em}^{(1)2}(c_{r_1}, \eta) d\eta}$$

$$\beta_{rm} = \frac{\int_0^{2\pi} S_{0r}^{(2)}(c_{r_2}, \eta) S_{em}^{(1)}(c_{r_1}, \eta) d\eta}{\int_0^{2\pi} S_{0m}^{(1)2}(c_{r_1}, \eta) d\eta}$$

$$x_{mn} = \frac{\int_0^{2\pi} S_{em}^{(1)'}(c_{r_1}, \eta) S_{0n}^{(1)}(c_{r_1}, \eta) d\eta}{\int_0^{2\pi} S_{0n}^{(1)2}(c_{r_1}, \eta) d\eta}$$

$$\nu_{mn} = \frac{\int_0^{2\pi} S_{0m}^{(1)'}(c_{r_1}, \eta) S_{en}^{(1)}(c_{r_1}, \eta) d\eta}{\int_0^{2\pi} S_{em}^{(1)2}(c_{r_1}, \eta) d\eta}$$

但し, 半径マッシュ関数 R の右上に付した' は ξ での微分を表し, 角マッシュ関数 S の右上に付した' は η での微分を示す.

(昭和56年2月23日受付, 5月2日再受付)