

CORDIC による周波数可変デジタル正弦波対発振器

正員 中静 真[†] 正員 菊池 久和^{††} 正員 渡辺 弘道^{††}

Variable-Frequency Sinusoidal-Pair Oscillator Based on a CORDIC

Makoto NAKASHIZUKA[†], Hisakazu KIKUCHI^{††} and
Hiromichi WATANABE^{††}, *Members*

あらまし CORDIC アルゴリズムは、2次元ベクトルの平面回転を実現するアルゴリズムとして知られている。本論文では、このCORDIC アルゴリズムの平面回転を利用した正弦波対発振器を提案している。この発振器は、1サンプルごとにベクトルを回転させることで発振出力を得るために、回転角を変更することで発振周波数を容易に変更することができ、正弦波と余弦波を同時に得ることができる。本論文では、CORDIC アルゴリズムによる正弦波対発振器の構成を示し、その発振出力に生じる誤差を解析している。次に、誤差解析の結果より、CORDIC アルゴリズムで生じる2種類の演算誤差に対して、それぞれ誤差フィードバックを適用している。また、シミュレーションにより、誤差フィードバックを付加したCORDIC形発振器の発振精度が、従来の正弦波対発振器よりも高いことを確認している。更に、FM変調波発生のシミュレーションにより、周波数可変の発振器として動作することを確認している。

キーワード：CORDIC アルゴリズム、平面回転、正弦波対発振器、可変周波数発振器

1. ま え が き

デジタル信号処理で用いられる信号源の中で、離散値系列の正弦波信号は最も基本的な信号源であり、広範な分野で使用されている。信号源として用いるために、多くの正弦波発振器が提案されている^{(1)~(10)}。これらの正弦波対発振器は、ROM テーブルによる方法^{(1)~(2)}と、差分方程式を実現する方法^{(3)~(10)}に分類することができる。

これら従来の正弦波発振器では、発振周波数は発振器の設計時に設定される。ROM テーブルによる方法では、発振周波数によりROMに記憶する正弦波値を求めシミュレーションしている。また、差分方程式による正弦波発振器では、発振開始前に発振周波数より正弦値若しくは余弦値を求めて、差分方程式の乗算係数として与えている。従って、これらの発振器の発振周波数は、発振開始前に決定された周波数以外の値以外をとることはできない。

ところで、数値演算法の一種にCORDIC アルゴリズム^{(11)~(13)}がある。CORDIC アルゴリズムは、与えられた回転角により入力された2次元ベクトルを回転させるアルゴリズムである。CORDIC アルゴリズムの回転角を決定する入力の一つで、その入力は回転角と線形な関係で結ばれている。また、1回の回転ごとに任意に変更することができる。そこで、CORDIC アルゴリズムにより、2次元ベクトルを1サンプルごとに回転させることで、位相が異なる二つの正弦波出力する正弦波対発振器を提案する^{(14),(15)}。

CORDIC 形正弦波発振器の二つの発振出力は、位相が $\pi/2$ だけ異なったものとなるため、正弦波の解析信号⁽¹⁶⁾と等価である。その解析信号の瞬時周波数は、CORDIC アルゴリズムの回転角に一致する。従って、回転角を指定することにより、1サンプルごとに発振出力の瞬時周波数を変更することができる。瞬時周波数が可変であり、解析信号を発生することから、周波数変調、位相変調⁽¹⁷⁾への応用が期待できる。

このようにCORDIC アルゴリズムによって、瞬時周波数可変の正弦波対発振器が構成できるが、CORDIC アルゴリズムの演算誤差のため、時間経過に伴う発振出力の振幅の変動と位相のずれ、および出力雑音が問題となる。

[†] 新潟大学大学院自然科学研究科, 新潟市

The Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan

^{††} 新潟大学工学部電気電子工学科, 新潟市

Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan

CORDIC アルゴリズムの演算誤差は、有限操作誤差と有限語長誤差に分類される⁽¹³⁾。有限操作誤差は、アルゴリズムを構成するビットシフトと加減算の回数が制限されるために生じる誤差で、出力ベクトルのノルムと回転角に生じる。有限語長誤差は、演算途中で拡張された語長を失うために生じる誤差であり、出力ベクトルの要素に加算的に生じる。これらの演算誤差の中で、有限語長誤差と回転角に生じる有限操作誤差の値は1サンプルごとに知ることができる。また、CORDIC アルゴリズムの基本演算操作を拡張することで、ノルムに生じる有限操作誤差の値も1サンプルごとに知ることができる。

そこで、1サンプルごとに得られる有限語長誤差と有限操作誤差の値を利用して、発振器に誤差のフィードバックを適用する。誤差フィードバックにより演算誤差を除去し、発振精度の高い瞬時周波数が可変のデジタル正弦波対発振器を構成する。

2.ではCORDICアルゴリズムの原理について説明し、CORDICアルゴリズムによる正弦波対発振器を提案する。3.ではCORDIC形発振器の出力に生じる誤差について論じる。4.ではCORDICアルゴリズムの演算誤差の除去を目的として、演算誤差にフィードバックを適用する。5.では、従来の発振器とCORDIC形発振器の比較を行い、シミュレーションにより、CORDIC形正弦波対発振器の有効性を確認する。

2. CORDIC 形正弦波対発振器

2.1 CORDIC アルゴリズムの原理

CORDIC アルゴリズムはVolder⁽¹¹⁾により導入されたベクトルの平面回転を目的とした数値演算法である。その後、Walterが拡張、整理し、初等関数を统一的に計算する演算法に拡張した。本論文ではCORDICをデジタル正弦波対発振器へ応用するため、CORDICアルゴリズムの平面回転演算についてのみ言及する。

さて、CORDICアルゴリズムによるパイプライン平面回転アルゴリズムとしてPNアルゴリズムがある⁽¹³⁾。

このアルゴリズムは、Haviland, TuszinskiのCORDICアルゴリズム⁽¹²⁾をパイプライン実現に向くアルゴリズムに修正したものである。PNアルゴリズムは、等価出力雑音を最小化し得るという利点もあり、正確な演算が望まれるCORDIC形発振器のためのアルゴリズムとして最適である。そこで、PNアルゴリズムに

よってデジタル正弦波対発振器を構成する。以下、PNアルゴリズムについて説明する。

[PNアルゴリズム] 初期値としてベクトル $[x_0, y_0]^T$ と回転角 z_0 を得た後、以下の計算を $i=0$ から繰り返す。 $i=0$ から $i=L-1$ までは

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -u_i 2^{-r(i)} \\ u_i 2^{-r(i)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$z_{i+1} = z_i - u_i \tan^{-1} 2^{-s(i)} \quad (2)$$

で示される計算を行う。ここで u_i は

$$u_i = \text{sign}(z_i) \quad (3)$$

で示される値をとる。sign(z_i) は z_i の符号を現し、1 または -1 となる。

$i=L$ から $i=M-1$ までは

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = (1 - 2^{-c(i)}) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$z_{i+1} = z_i \quad (5)$$

で示される計算を行う。式(1)と式(2)は回転操作の基本演算操作であり、式(4)と式(5)は規格化操作の基本演算操作である。 L は回転操作の回数を示し、 M は規格化操作と回転操作の回数の合計を示す。アルゴリズムの演算が固定小数点で行われる場合、式(1)と式(4)で2のべき乗を係数とする乗算は、 x_i と y_i の右方向ビットシフトで実現される。回転操作でのシフトビット数と、規格化操作でのシフトビット数は、2種類のシフト数列 $r(i)$, $c(i)$ によって、それぞれ与えられている。

CORDICアルゴリズムの基本演算操作を実現する回転操作セル、規格化操作セルの構成を図1に示す。この図では、ビットシフトはシフト器により実現されている。また、CORDICアルゴリズムの構成の一例として、2種類の操作セルの継続接続によって構成した

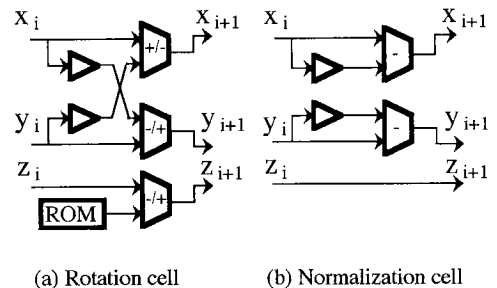


図1 CORDICアルゴリズムの基本操作セル
Fig.1 Two configurations for the cell of a CORDIC processor.

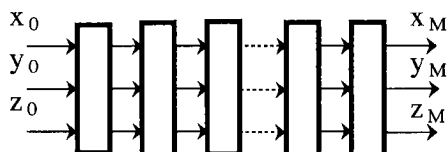


図 2 パイプライン CORDIC プロセッサのブロックダイアグラム

Fig. 2 Block diagram of a pipelined CORDIC processor.

パイプライン CORDIC プロセッサ⁽¹³⁾を図 2 に示す。

M 回の演算の後、CORDIC アルゴリズムの演算結果として、出力ベクトル $[x_M, y_M]^T$ と出力角度 z_M が、それぞれ

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \left(\prod_{i=L}^M (1 - 2^{-c(i)}) \prod_{j=0}^{L-1} \begin{bmatrix} 1 & -u_j 2^{-r(j)} \\ u_j 2^{-r(j)} & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$z_M = z_0 - \sum_{i=0}^{L-1} u_i \tan^{-1} 2^{-s(i)} \quad (7)$$

と得られる。これを、入力ベクトルの原点を中心とした極座標により表せば、出力ベクトルは

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

と現され、出力角度は

$$z_M = z_0 - \theta \quad (9)$$

となる。ここで、 θ は CORDIC アルゴリズムによるベクトルの回転角を表し

$$\theta = \sum_{i=0}^{L-1} u_i \tan^{-1} 2^{-r(i)} \quad (10)$$

である。 K は CORDIC アルゴリズムの入出力ベクトルと

$$K = \frac{\| [x_M, y_M]^T \|}{\| [x_0, y_0]^T \|} \quad (11)$$

の関係がある。記号 $\|\cdot\|$ は、ベクトルのノルムを表し、ベクトル $[x, y]^T$ に対して

$$\| [x, y]^T \| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (12)$$

と定義される。そこで、 K をノルム増加率と呼ぶ⁽¹³⁾。また、 K はシフトビット数 $r(i)$ 、 $c(i)$ と回転操作数 L 、および全操作数 M から、

$$K = \prod_{i=L}^{M-1} (1 - 2^{-c(i)}) \prod_{j=0}^{L-1} \sqrt{1 + 2^{-2r(j)}} \quad (13)$$

と計算される。理想的には $z_M = 0$ で $K = 1$ となり、CORDIC アルゴリズムは、入力角度 z_0 での入力ベクトル $[x_0, y_0]^T$ の平面回転を実現する。

2.2 CORDIC 形正弦波対発振器の原理

前章で説明した CORDIC アルゴリズムにより、図 3

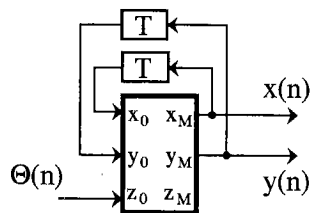


図 3 CORDIC 形デジタル正弦波対発振器
Fig. 3 CORDIC-based digital oscillator.

に示すデジタル正弦波対発振器を構成する。今、CORDIC アルゴリズムが理想的で、ノルム増加率 K は 1 に等しく、時刻 n で角度 $\theta(n)$ による平面回転を実現するものと仮定する。ある時刻 n での発振器出力 $x(n), y(n)$ と 1 サンプル前の発振器出力 $x(n-1), y(n-1)$ の関係は、

$$\begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(n)) & -\sin(\theta(n)) \\ \sin(\theta(n)) & \cos(\theta(n)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-1) \\ y(n-1) \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる。発振出力の振幅を A 、初期位相角 $\phi(-1)$ とするならば、遅延器の初期値として

$$\begin{bmatrix} x(-1) \\ y(-1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos(\phi(-1)) \\ \sin(\phi(-1)) \end{bmatrix} \quad (15)$$

を与えれば、 $n=0$ から

$$\begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos(\phi(n)) \\ \sin(\phi(n)) \end{bmatrix} \quad (16)$$

で示される発振出力を得ることができる。ここで、 $\phi(n)$ は

$$\phi(n) = \sum_{i=0}^n \theta(i) + \phi(-1) \quad (17)$$

により与えられる。

式(16)の出力 $x(n)$ と $y(n)$ は、互いに位相が $\pi/2$ 異なる正弦波であり、互いにヒルベルト変換の関係にある。従って、 $x(n)$ と $y(n)$ のいずれかを解析信号の実部とし、他方を解析信号の虚部とすれば、式(16)は正弦波の解析信号を与える⁽¹⁷⁾。その解析信号の瞬時位相は $\phi(n)$ と一致し、瞬時振幅は A で一定となる。

さて、連続時間系では解析信号の瞬時周波数は瞬時位相の時間微分として定義されている⁽¹⁶⁾。離散時間系の解析信号において、瞬時位相 $\phi(n)$ の時間微分 $D_\phi(n)$ を後方差分によって

$$D_\phi(n) = \phi(n) - \phi(n-1) \quad (18)$$

と定義すれば、時刻 n における本発振器の出力の瞬時周波数は入力角度 $\theta(n)$ と一致する。本発振器では、入

力角度 $\theta(n)$ を1サンプル時間ごとに変更することができるため、出力の瞬時周波数も1サンプル時間ごとに変更することができる。

また、図3の構成によるCORIDCプロセッサでは、 x_M と y_M が同時に得られるため、本発振器は正弦波の解析信号の実部と虚部を同時に出力することができる。

3. 発振出力に生じる誤差

CORDIC形正弦波対発振器では、CORDICアルゴリズムの演算誤差により、式(16)で示した理想的な出力を得られない。そこで、本章ではCORDIC形発振器の出力に現れる誤差を、出力雑音および瞬時位相と瞬時振幅に生じる誤差に分類し、それらの誤差とCORDICアルゴリズムの演算誤差の関係を説明する。

3.1 瞬時位相角と振幅に現れる誤差

発振周波数を指定する $\theta(n)$ は、量子化されて入力角度 z_0 としてCORDICアルゴリズムに与えられる。当然、量子化の結果として誤差が生じ、CORDICアルゴリズムに与えられる入力角度 $z_0(n)$ と $\theta(n)$ には差が生じる。このCORDICアルゴリズムの入力角度の量子化により生じる量子化誤差を $\Delta\theta(n)$ とすると、

$$\Delta\theta(n) = \theta(n) - z_0(n) \tag{19}$$

で示される関係がある。

さて、CORDICアルゴリズムは入力角度 $z_0(n)$ により回転を行うわけであるが、CORDICアルゴリズムの有限操作誤差のために、実現される回転角と入力角度の間には差が生じることになる。

有限操作誤差は、CORDICアルゴリズムが有限回の操作から構成されるために生じる誤差であり、回転角とベクトルのノルムに生じる。回転角に生じる有限操作誤差 $\Delta\theta(n)$ は、CORDICへの入力 $z_0(n)$ と回転角 $\theta(n)$ により

$$\Delta\theta(n) = z_0(n) - \theta(n) \tag{20}$$

と導出される。理想的には $\Delta\theta(n) = 0$ であり、 $\theta(n)$ は $z_0(n)$ と一致する。有限の操作セル数によって実現されたCORDICアルゴリズムの発振出力の瞬時位相には、時間経過と共に、回転角 $z_0(n)$ と共に有限操作誤差 $\Delta\theta(n)$ が累積される。従って時刻 n での瞬時位相角の真値 $\bar{\phi}(n)$ とCORDIC形発振器の瞬時位相角 $\phi(n)$ の差を $\Delta\phi(n)$ とすれば

$$\begin{aligned} \Delta\phi(n) &= \bar{\phi}(n) - \phi(n) \\ &= \sum_{i=0}^n \Delta\theta(i) + \Delta\theta(i) \end{aligned} \tag{21}$$

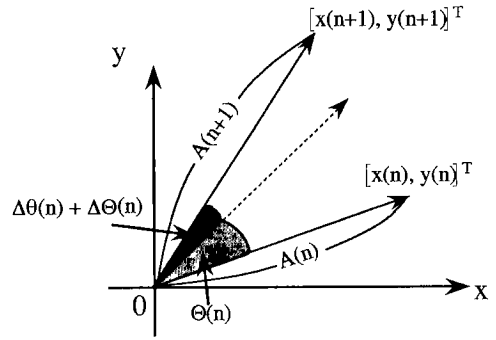


図4 位相と振幅に生じる誤差
Fig. 4 Output error in amplitude and phase.

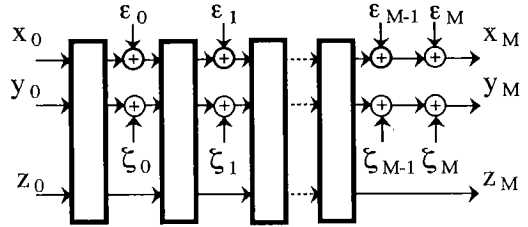


図5 有限語長誤差モデル
Fig. 5 A model of finite wordlength error.

となり、時間経過に伴いその値のとり得る範囲は大きくなることわかる。

また、出力ベクトルのノルムに現れる有限操作誤差は式(13)で示した K により与えられる。時刻 n で発振出力に現れる有限操作誤差 K と $\Delta\theta$ を図4に示す。

図4からわかるとおり、発振器出力の振幅は1サンプルごとに有限操作誤差により K 倍されることになる。発振開始前に、初期値によって与えられた振幅を A とすれば、時刻 n での振幅 $A(n)$ は

$$A(n) = K^{n+1}A \tag{22}$$

となる。従って、発振出力の振幅は K の値により時間経過と共に減衰、若しくは増大することがわかる。

3.2 出力雑音

CORDIC形正弦波対発振器の発振出力に加わる出力雑音は、CORDICアルゴリズムの有限語長誤差によって生じる。有限語長誤差は、CORDICプロセッサ内部で数値の丸め、若しくは切捨ての結果生じる誤差であり、各操作セルのシフト器とプロセッサの出力での数値の量子化により生じる。

CORDICプロセッサの等価雑音モデル⁽¹³⁾ を図5に示す。この等価雑音モデルでは、誤差は図2に示した

CORDIC プロセッサの演算セルに加えられた雑音源から発生すると仮定している。

ε_0, ζ_0 から、 $\varepsilon_{M-1}, \zeta_{M-1}$ までの雑音源は、シフト器によって生じる有限語長誤差を出力する雑音源である。この有限語長誤差は、シフト器で拡張されたビットの切捨て、若しくは丸めによって生じる誤差である。

また、 ε_M, ζ_M は、出力端で生じる有限語長誤差を発生する雑音源である。CORDIC アルゴリズムの演算精度を向上させるために、CORDIC プロセッサ内部の数値表現は、CORDIC プロセッサ外部の数値表現の LSB 以下を拡張したものとなっている。従って、出力端で内部語長と出力語長を一致させる際に、内部の数値表現の切捨て誤差、あるいは丸め誤差が生じる。

さて、CORDIC 形発振器の出力雑音を評価するために、各雑音源からの出力を白色雑音で近似して、出力雑音の分散を求める。各雑音源に対して、以下の仮定をおく。

(1) 雑音源 ε_i の出力 $\varepsilon_i(n)$ と、 ζ_i の出力 $\zeta_i(n)$ は白色雑音であり、互いに無相関である。

(2) $\varepsilon_i(n)$ と $\zeta_i(n)$ は、 $x(n), y(n)$ と無相関である。

(3) $\varepsilon_i(n)$ と $\zeta_i(n)$ は無相関である。

(4) $\varepsilon_i(n)$ と $\zeta_i(n)$ の分散は等しく σ_i^2 である。

以上の仮定に基づき、出力 $x(n)$ と $y(n)$ に現れる出力雑音の分散を計算する。CORDIC 形デジタル正弦波対発振器の状態遷移に、各操作セルで生じる有限語長誤差を加えると、

$$\begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos(\theta(n)) & -\sin(\theta(n)) \\ \sin(\theta(n)) & \cos(\theta(n)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-1) \\ y(n-1) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^M a_i P_i \begin{bmatrix} \varepsilon_i(n) \\ \zeta_i(n) \end{bmatrix} \quad (23)$$

ここで、 $a_i P_i$ は有限語長誤差ベクトル $[\varepsilon_i(n), \zeta_i(n)]^T$ が出力に現れるまでに CORDIC アルゴリズム内部で受ける演算を示す。 P_i は

$$P_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix} \quad (24)$$

であり、 $0 < i < L-1$ で、すなわち回転操作での雑音源では

$$\varphi_i = \sum_{j=i+1}^{L-1} u_j \tan^{-1} 2^{-r(j)} \quad (25 a)$$

$L-1 < i < M-1$ で、すなわち規格化操作での雑音源では

$$\varphi_i = 0 \quad (25 b)$$

となる。また、 a_i は $0 < i < L-1$ で

$$a_i = \prod_{j=i+1}^{L-1} \sqrt{1+2^{-r(j)}} \prod_{k=L-1}^{M-1} (1-2^{-c(k)}) \quad (26 a)$$

であり、 $L-1 < i < M-1$ では

$$a_i = \prod_{k=i+1}^{M-1} (1-2^{-c(k)}) \quad (26 b)$$

となる。

インデックスが $i=M$ と $i=M-1$ の雑音源出力は、回転操作と規格化操作を受けないため

$$a_i = 1 \quad (27 a)$$

$$\varphi_i = 0 \quad (27 b)$$

となる。式(21)より各雑音源から出力端のインパルス応答が計算でき、時刻 n での出力雑音の分散を計算することができる^{(6),(8)}。出力端 x に現れる雑音の分散を $\sigma_x^2(n)$ とし、出力端 y に現れる雑音の分散を $\sigma_y^2(n)$ とすれば、それぞれ

$$\sigma_x^2(n) = \sum_{i=0}^n K^2 \sum_{j=0}^M a_j^2 \sigma_j^2 \quad (28 a)$$

$$\sigma_y^2(n) = \sum_{i=0}^n K^2 \sum_{j=0}^M a_j^2 \sigma_j^2 \quad (28 b)$$

と導出することができる。

さて、以上の誤差解析により、CORDIC 発振器の出力は

$$\begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} = A(n) \begin{bmatrix} \cos(\phi(n) + \Delta\phi(n)) \\ \sin(\phi(n) + \Delta\phi(n)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_x(n) \\ e_y(n) \end{bmatrix} \quad (29)$$

と表すことができる。 $e_x(n)$ と $e_y(n)$ は有限語長誤差による出力雑音を示す項であり、その分散は式(28)の σ_x^2 と σ_y^2 により与えられる。

4. 誤差フィードバックの適用

文献(6)、(10)では、乗算器の出力の量子化誤差に対して誤差フィードバックを適用し、発振器の出力雑音を軽減する方法が提案されている。このフィードバックは、発生した誤差の値を得て、それを後の量子化前の発振器出力に加える回路である。

そこで、本論文の CORDIC 形発振器においても、CORDIC アルゴリズムの有限語長誤差と有限操作誤差の値を得て、それぞれの演算誤差に対するフィードバック回路を構成する。

これにより出力雑音の削減を図ると同時に、瞬時位相角 $\phi(n)$ の真値からのずれと、振幅 $A(n)$ の変動も減少させる。

4.1 有限操作誤差のフィードバック

回転角に生じる有限操作誤差に対してフィードバック

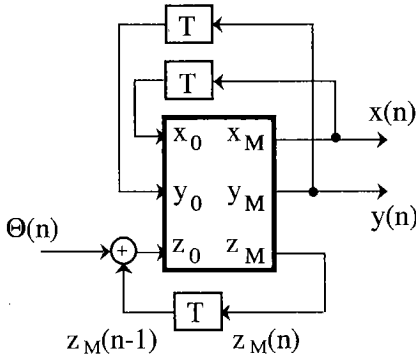


図 6 角度に生じる有限操作誤差に対するフィードバック回路

Fig. 6 An error-feedback circuit against finite cell error in angle.

クを適用する。CORDIC アルゴリズムの出力角度 $z_M(n)$ は、式(9)および式(20)より、有限操作誤差 $\Delta\theta(n)$ と一致することがわかり

$$z_M(n) = \Delta\theta(n) \quad (30)$$

となる。そこで、出力角度を利用して、発振器に、時刻 n での入力角度に時刻 $n-1$ での角度に生じる有限操作誤差を加える回路を付加し、誤差フィードバックを行う。このフィードバック回路を加えた CORDIC 形発振器を図 6 に示す。このフィードバックにより、時刻 n での入力角度と出力角度は

$$z_M(n) = z_0(n) + z_M(n-1) - \theta(n) \quad (31)$$

で示される関係になる。出力角度 $z_M(n)$ のフィードバックにより、時刻 0 から時刻 n までの回転角の和は

$$\sum_{i=0}^n \theta(i) = \sum_{i=0}^n z_0(n) - z_M(n) + z_M(n-1) \quad (32)$$

となる。従って、位相角 $\phi(n)$ と位相角の真値 $\bar{\phi}(n)$ との差 $\Delta\phi(n)$ は

$$\begin{aligned} \Delta\phi(n) &= \sum_{i=0}^n \Delta\theta(i) + \Delta\theta(i) \\ &= \sum_{i=0}^n \theta(i) - \sum_{i=0}^n z_0(i) + \sum_{i=0}^n \Delta\theta(i) \end{aligned} \quad (33)$$

となる。ここで、式(30)、(31)より、 $z_M(-1)=0$ とすれば

$$\Delta\phi(n) = \Delta\theta(n) + \sum_{i=0}^n \theta(i) \quad (34)$$

となる。有限操作誤差 $\Delta\theta(n)$ の絶対値は

$$|\Delta\theta| \leq \tan^{-1} 2^{-r(L)} \quad (35)$$

となることが知られている⁽¹³⁾。従って、式(34)と式(21)を比べると、出力角度のフィードバックが瞬時位相 $\phi(n)$ の真値との差を減少させることがわかる。

ノルムに生じる有限操作誤差 K は、式(11)からわかるとおり、ベクトルに対して乗法的に生じる誤差であり、誤差の値を知ることができない。そこで、CORDIC

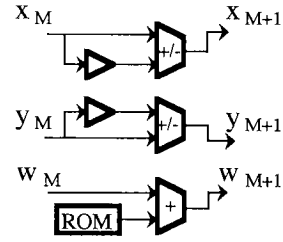


図 7 ノルム補正操作セル

Fig. 7 A configuration of a norm adjusting cell.

アルゴリズムの演算を拡張し、ノルムに生じる有限操作誤差に関する情報を得る。ノルムの大きさに関する変数として w_i を加え、式(1)~(5)で示される CORDIC アルゴリズムと並列に

$$w_M = w_0 + \log K \quad (36)$$

の演算を行う。この演算により CORDIC アルゴリズムの有限語長誤差 K の対数の値を知ることができる。 w_0 を 0 とすると、 w_M が 0 以上であれば CORDIC アルゴリズムによりベクトルが伸ばされたことに、また、 w_M が 0 以下であればベクトルが縮められたことになる。そこで、ベクトルの長さの伸縮を表す w_M を利用して、CORDIC アルゴリズムの演算が終了した後、ベクトルのノルムを補正する操作を行う。補正操作として、CORDIC アルゴリズムの演算終了後にベクトルに対して

$$\begin{bmatrix} x_{M+1} \\ y_{M+1} \end{bmatrix} = (1 - u_M 2^{-s}) \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} \quad (37)$$

の演算を行い、 w_M に対して

$$w_{M+1} = w_M + \log(1 - u_M 2^{-s}) \quad (38)$$

で示される演算を行う。ここで、 u_M は

$$u_M = \text{sign}(w_M) \quad (39)$$

で示される値をとる。 s はノルム補正操作における右方向シフトビット数を示す。 $\log(1+2^{-s})$ と $\log(1-2^{-s})$ の値を ROM に記憶することで、回転操作セル、規格化操作セルとほぼ同一のハードウェア構成でノルム補正操作を実現できる(図 7)。

さて、ベクトルの伸縮に生じる有限操作誤差についても情報を得ることができた。回転角に生じる有限操作誤差を表す z_M と同様に、 w_M に対してフィードバックを適用する。このフィードバック回路を加えた発振器を図 8 に示す。ノルム補正操作を適用した CORDIC アルゴリズムを用いた正弦波対発振器で、時刻 n での w_0 、 w_{M+1} を $w_0(n)$ 、 $w_{M+1}(n)$ と書く。フィードバック

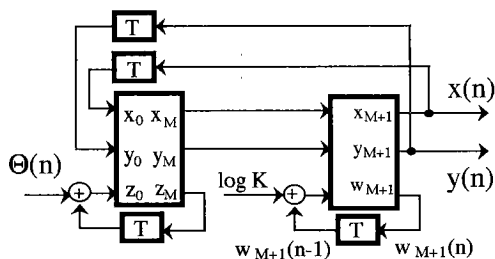


図 8 有限操作誤差にフィードバックを適用した CORDIC 形デジタル正弦波対発振器

Fig. 8 A CORDIC-based digital sinusoidal oscillator with error-feedback circuits against finite cell error.

回路により, $w_{M+1}(n)$ と $w_0(n)$ を

$$w_0(n) = w_{M+1}(n-1) \quad (40)$$

で示される関係となる。ベクトル伸縮情報 w_M をフィードバックすることにより, $w_M(n+1)$ は

$$w_{M+1}(n) = w_{M+1}(n-1) + \log K + \log(1 + u_{M+1}(n)2^{-s}) \quad (41)$$

となり, $w_{M+1}(0) = 0$ である。ここで, $u_{M+1}(n)$ は時刻 n での u_{M+1} の値である。式(41)の演算により, $w_{M+1}(n)$ と発振器出力の振幅 $A(n)$ の関係は,

$$w_{M+1}(n) = \log\left(\frac{A(n)}{A}\right) \quad (42)$$

で与えられる。フィードバックにより, $\log K > 0$ の場合,

$$\log K \leq -\log(1 - 2^{-s}) \quad (43)$$

を満たすようにビットシフト数 s を決めれば, $w_{M+1}(n)$ は

$$\log(1 - 2^{-s}) \leq w_{M+1}(n) \leq \log(1 + 2^{-s}) + \log K \quad (44)$$

で示される範囲の値となる。 $\log K < 0$ の場合,

$$\log K \geq -\log(1 + 2^{-s}) \quad (45)$$

を満たすようにビットシフト数 s を決めれば, $w_{M+1}(n)$ は

$$\log K + \log(1 - 2^{-s}) \leq w_{M+1}(n) \leq \log(1 + 2^{-s}) \quad (46)$$

で示される範囲の値となる。従って, 発振器出力の振幅 $A(n)$ は一定の範囲の値となり, 時間経過による振幅の増大若しくは減衰を防ぐことができる。

4.2 有限語長誤差に対するフィードバックの適応

図 4 で示した雑音源に対してフィードバックを適用するが, すべての雑音源に対してフィードバックを適用することは, 回路構成が複雑になる。そこで, 各雑音源出力の分散 σ_i^2 を比較し, 出力雑音の主な原因となる雑音源に対してだけ, フィードバックを適応する。

各シフト器で, 演算結果を丸めた場合, $i=0$ から $i=$

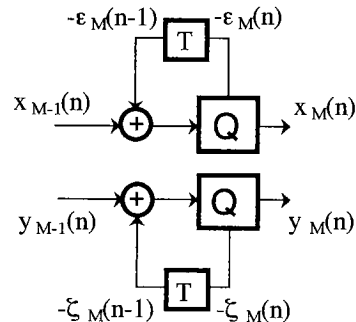


図 9 有限語長誤差フィードバック回路

Fig. 9 An error-feedback circuit against finite word-length error.

$M-1$ までの雑音源出力 ϵ_i と ζ_i の分布範囲は,

$$|\epsilon_i| \leq \frac{1}{2}q \quad (47 a)$$

$$|\zeta_i| \leq \frac{1}{2}q \quad (47 b)$$

で示される範囲に分布する。ここで q は, アルゴリズム内部で, x_i, y_i を表す数値表現の LSB が表す数値である。3.2 での仮定より, 式(47)の範囲内で均一に分布するならば, 分散 σ_i^2 は

$$\sigma_i^2 = \frac{q^2}{12} \quad (48)$$

となる。これに対して, $i=M$, すなわち内部語長と外部語長の不一致による有限語長誤差 ϵ_M と ζ_M の分布範囲は,

$$|\epsilon_M| \leq 2^{N-1}q \quad (49 a)$$

$$|\zeta_M| \leq 2^{N-1}q \quad (49 b)$$

で表すことができる。ここで N は内部語長と外部語長の差を表し, $N \geq 1$ である。仮定より分散は

$$\sigma_M^2 = \frac{(2^N q)^2}{12} \quad (50)$$

と導出され, σ_M^2 は他の雑音源出力の分散に比べて $(2^N)^2$ 倍大きいことがわかる。そこで, 外部語長と内部語長の不一致による有限語長誤差 ϵ_M, ζ_M に対してのみフィードバックを適用する。

外部語長と内部語長の不一致による有限語長誤差に対するフィードバック回路を図 9 に示す。図 9 では, 内部語長の量子化操作を Q で表している。また, 時刻 n で生じる有限語長誤差を $\epsilon_M(n), \zeta_M(n)$ によって表している。

有限語長誤差 ϵ_M, ζ_M に対してフィードバックを適用した CORDIC 形発振器の出力は

$$\begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos \theta(n) & -\sin \theta(n) \\ \sin \theta(n) & \cos \theta(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-1) \\ y(n-1) \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^M a_i P_i \begin{bmatrix} \varepsilon_i(n) \\ \zeta_i(n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_i(n-1) \\ \zeta_i(n-1) \end{bmatrix} \quad (51)$$

である。これより、応答を計算し、 n サンプルで出力端 x に現れる雑音の分散を計算すると

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sum_{i=0}^n \left[4 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \theta(i) \right) \sigma_M^2 + K^2 \sum_{j=0}^{M-1} a_j^2 \sigma_j^2 \right] \quad (52)$$

が得られる。出力端 y に現れる雑音の分散 σ_{ε}^2 もこれと等しい。式(28)と比べると有限語長誤差に対するフィードバックが、CORDIC 形発振器の出力雑音の分散を減少させることがわかる。

5. CORDIC 形発振器の構成例

本章では、CORDIC アルゴリズムを設計し、得られたアルゴリズムにより CORDIC 形正弦波対発振器を構成しシミュレーションを行う。また、CORDIC 形正弦波対発振器を、同じ条件により構成した従来の正弦波対発振器と比較し、本論文で提案した CORDIC 形正弦波対発振器の有効性を確認する。

5.1 CORDIC 形発振器の例

CORDIC アルゴリズムとして、 $r(i)$ と $c(i)$ が表 1 で示されるものを用いて、図 9 に示した CORDIC 形正弦波対発振器を構成した。この CORDIC アルゴリズムの特性を表 2 に示す。有限操作誤差 K の値より、ノルム補正セルでのシフトビット数 s は 22 とした。

この発振器の語長は出力語長 24 ビット、内部語長 32 ビットとした。CORDIC 内部では外部の語長に対して上位 1 ビットまた、下位 7 ビットを拡張している。入力 x_0, y_0 の数値表現は、2 の補数による固定小数点の整数とした。また、 z_0, w_0 と ROM の数値表現も 2

表 1 発振器に使用した CORDIC アルゴリズム

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$r(i)$	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16	-17	-18	-19

i	15	16	17	18	19	20
$c(i)$	-22	-19	-17	-15	-13	-11

表 2 正弦波対発振器の特性

入力角度 z_0 の範囲	$ z_0(n) \leq 0.01989 \pi \text{ (rad/s)}$
有限操作誤差 K の範囲	$K = 1.0000000160$
有限操作誤差 $\Delta \theta$ の範囲	$ \Delta \theta \leq 0.6071 \times 10^{-6} \pi \text{ (rad/s)}$
角度の量子化誤差 $\Delta \Theta$ の範囲	$ \Delta \Theta \leq 0.125 \times 10^{-7} \text{ (rad/s)}$

の補数による固定小数点とし、最大値が z_0, w_0 の最大値と一致するように数値表現を決めた。

この CORDIC 形デジタル正弦波対発振器と比較するために、図 10 に示す B. Gold らによる正弦波・余弦波発生器⁽⁸⁾を比較対象として選んだ。この発振器は、本論文で提案した正弦波対発振器の平面回転演算の部分、四つの乗算器により実現した構成となっている。

シミュレーションでは、語長に関して CORDIC 形正弦波対発振器と等しくなるように、乗算器の語長を 24 ビットとしている。係数 A, B, C, D は、それぞれ $A=D=\cos \theta$
 $B=-C=\sin \theta$

であるが、それぞれ 24 ビットで量子化したものを用いている。乗算器の出力語長は 48 ビットとなるが、加算を終えた後、出力語長である 24 ビットに丸めている。従って、CORDIC 形正弦波対発振器の内部では、信号語長は最大 32 ビットであるのに対して、比較対象とする Gold らの発振器では最大 48 ビットとなる。

5.2 シミュレーション

前節で述べた 2 種類の発振器のシミュレーションを行い、発振出力を比較する。また、CORDIC 形発振器は、誤差フィードバック回路の有効性を確認するために、フィードバックの有無により二つの発振器を構成した。これら三つの発振器は以下の条件で発振出力を得た。

- 初期値 $x(-1)=8388607, y(-1)=0$
- 振幅 $A=8388607$
- 初期位相 $\phi(0)=0(\text{rad})$
- 規格化発振周波数 $\Theta=1 \times 10^{-2} \pi(\text{rad/s})$
 $\Theta=1 \times 10^{-3} \pi(\text{rad/s})$
 $\Theta=1 \times 10^{-4} \pi(\text{rad/s})$

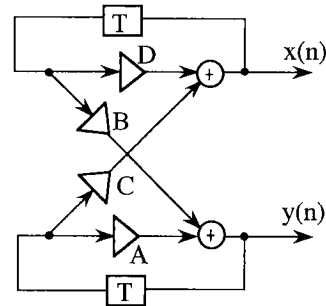


図 10 Gold らの正弦・余弦発振器⁽⁸⁾
Fig. 10 Sinusoidal-pair oscillator in Ref. (8).

表 3 発振開始から 2×10^6 サンプル後の出力振幅 $A(n)$

発振角周波数 $\Theta(n)$ (rad/s)	0.1×10^{-1}	0.1×10^{-2}	0.1×10^{-3}
フィードバックあり	99.98(%)	99.99(%)	100.01(%)
フィードバックなし	103.23(%)	103.25(%)	103.26(%)
B. Goldらの正弦・余弦発生器	107.05(%)	109.93(%)	110.37(%)

表 4 発振開始から 2×10^6 サンプル後の瞬時位相の誤差 $\Delta\phi(n)$

発振角周波数 $\Theta(n)$ (rad/s)	0.1×10^{-1}	0.1×10^{-2}	0.1×10^{-3}
フィードバックあり	-0.214×10^2	-0.325×10^2	-0.567×10^2
フィードバックなし	-0.400	-2.55	-1.06
B. Goldらの正弦・余弦発生器	0.105	0.108	-0.856×10^{-1}

表 5(a) 発振開始から 2×10^6 サンプル後の余弦波出力の SN 比

発振角周波数 $\Theta(n)$ (rad/s)	0.1×10^{-1}	0.1×10^{-2}	0.1×10^{-3}
フィードバックあり	66.36(dB)	57.91(dB)	52.82(dB)
フィードバックなし	15.71(dB)	1.033(dB)	7.472(dB)
B. Goldらの正弦・余弦発生器	25.62(dB)	24.42(dB)	25.24(dB)

表 5(b) 発振開始から 2×10^6 サンプル後の正弦波出力の SN 比

発振角周波数 $\Theta(n)$ (rad/s)	0.1×10^{-1}	0.1×10^{-2}	0.1×10^{-3}
フィードバックあり	66.36(dB)	57.91(dB)	52.82(dB)
フィードバックなし	15.71(dB)	1.034(dB)	7.483(dB)
B. Goldらの正弦・余弦発生器	25.62(dB)	24.42(dB)	25.22(dB)

振幅は、三つの発振器の数値表現で最大の値としている。発振周波数は、ROM テーブルによる方法ではハードウェア量が大きくなる低周波数とした。また、発振時間は発振開始から 2×10^6 サンプルまでとした。

発振開始から 2×10^6 サンプル後の発振出力の振幅 $A(n)$ と瞬時位相の真値との差 $\Delta\phi(n)$ 、および SN 比により、三つの発振器を比較する。表 3 では振幅を比較しており、初期振幅 $A(0)$ を 100% として発振終了時の振幅と初期振幅との比を示している。フィードバックをかけない発振器の変動は、Gold らの発振器に比べて 1/2 以下であることがわかる。更に、CORDIC 発振器にフィードバックをかけることで、振幅の変動は 300 分の 1 程度に減少している。次に、瞬時位相の誤差を表 4 に示す。フィードバック回路を付加していない発振器の変動は、Gold らの発振器に比べて 10 倍程度であるが、フィードバックをかけることで、変動は 100

表 6 周波数変調波の発生

振幅	99.98(%)	
位相の誤差	-2.774×10^{-3} (rad/s)	
SN比	正弦	59.13(dB)
	余弦	59.13(dB)

分の 1 程度に減少している。

表 5(a) に余弦波出力の SN 比の表を、また、表 5(b) に正弦波出力の表を示す。発振出力の SN 比は、雑音電力と発振出力の真値の平均電力の比として求めている。発振出力の真値は計算機(富士通 S 4/1)の組み込み関数によって得られる三角関数の値としている。また、発振出力の真値と発振出力との差を雑音信号とし、この信号の 2 乗値の累積を発振時間で割ったものを雑音電力としている。正弦出力、余弦出力ともフィードバック回路のない発振器の SN 比は、Gold らの発振器に比べて 10 dB から 20 dB 程度低いが、フィードバックをかけることで 50 dB 程度向上することがわかる。以上の結果、フィードバック回路を適用した CORDIC 形発振器は、Gold らの発振器よりも、精度の高い発振を実現していることがわかる。

5.3 周波数変調波の発生

CORDIC 形正弦波対発振器が、瞬時周波数可変の正弦波対発振器として動作することを示すために、周波数変調波の発生シミュレーションを行った。本論文では、周波数変調の例として、正弦波による周波数変調波を CORDIC 形発振器によって出力する。

CORDIC 形正弦波対発振器の回転角 $\omega_0(n)$ 、時刻 n により

$$\omega_0(n) = \omega_c + \Delta\omega \cos(\omega n) \tag{53}$$

と変化させる。ここで ω_c は搬送波の角周波数を示し、 ω は変調角周波数を示している。実際にシミュレーションで用いた値は、

$$\omega_c : 0.75 \times 10^{-2}(\text{rad/s})$$

$$\omega : 0.5 \times 10^{-3}(\text{rad/s})$$

$$\Delta\omega = 0.25 \times 10^{-2}$$

である。この場合、変調指数 $\beta^{(17)}$ は ω と $\Delta\omega$ より

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega} = 5.0$$

である。発振開始から 2×10^6 サンプル時間後の瞬時位相の真値からのずれ $\Delta\phi(n)$ 、振幅の変動、SN 比を表 6 に示す。いずれの誤差も、周波数固定の場合とほぼ同じ程度の大きさとなっている。

6. むすび

CORDIC アルゴリズムにより、発振動作中に 1 サンプルごとに発振周波数を変更できる正弦波対発振器を構成し、発振出力に生じる演算誤差を解析した。解析の結果より、CORDIC アルゴリズムの演算誤差を減少させるフィードバック回路の構成を提案した。フィードバックにより、CORDIC アルゴリズムの有限操作誤差による振幅と位相の変動を減少させ、有限語長誤差による出力雑音を減少させることができた。

最後にシミュレーションにより、誤差フィードバックの有効性を確認した。シミュレーションの結果から、提案した発振器は、従来の発振器よりも振幅と位相の変動が小さく、また SN 比の発振出力が得られることを示した。また、可変周波数発振器として用いても、発振出力の精度が周波数固定の場合と変わらないことを確認した。

提案した発振器では、発振出力の精度が時間と共に劣化するため、実用に供するには参考文献(8)で提案されているような発振器のリセットが必要となる。本正弦波対発振器に適したリセット回路の提案が、今後の課題として挙げられる。

本論文では、CORDIC の演算誤差のフィードバック回路を提案したが、CORDIC による他の信号処理回路への適用についても興味深い課題である。

文 献

- (1) 辻井重男, 青山友紀, 友沢 淳: “デジタル信号処理の応用”, 電子通信学会 (1981).
- (2) Worley J. M.: “High-resolution digital sine wave generation”, *Electron. Lett.*, **19**, pp. 123-124 (Feb. 1983).
- (3) Furuno K., Mitra S. K., Hirano K. and Ito Y.: “Design of digital oscillators with absolute periodicity”, *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, **AES-11**, pp. 1286-1299 (Nov. 1975).
- (4) Thoen B. K.: “Practical aspects of digital sinewave generation using a second-order difference equation”, *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, **CAS-32**, 5, pp. 510-511 (May. 1985).
- (5) Acha J. I., Payan-Somet J. and Civit A.: “Design of very-low-frequency digital oscillators”, *IEE Proc.* **131**, G, 3, pp. 93-102 (June 1984).
- (6) Abu-El-Haija A. I. and Al-Ibrahim M. M.: “Improving performance of digital sinusoidal oscillators by means of error feedback circuits”, *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, **CAS-33**, 4, pp. 373-380 (April 1986).
- (7) 渡部英二, 井原 毅: “ラチス構造に基づくデジタル正弦波発振回路”, *信学論(A)*, **J70-A**, 9, pp. 1283-1290 (1987-09).

- (8) Gold B. and Rader C. M. 著, 石田訳: “電子計算機による信号処理”, 共立出版(1972).
- (9) Flieg N.: “Complex Digital Oscillator”, *Symp. Digest of 7th Kobe intern. Symp. of Electr. and inform. Sciences*, pp. 9. 1-9. 8, Kobe Japan (Nov. 1988).
- (10) Fliege N.: “Error Analysis and Statistical Data of Complex Digital Oscillators”, *Symp. Digest of 8th Kobe intern. Symp. of Electr. and inform. Sciences*, pp. 15. 1-15. 8, Kobe Japan (July 1989).
- (11) Volder J. E.: “The CORDIC trigonometric computing technique”, *IRE Trans. Electr. Comp.*, **EC-8**, 2, pp. 330-334 (Sept. 1959).
- (12) Haviland G. L. and Tuszinski A. A.: “A CORDIC arithmetic processor chip”, *IEEE Trans. Comput.*, **C-29**, 2, pp. 68-79 (Feb. 1980).
- (13) 菊池久和, 中静 真, 渡辺弘道: “パイプライン形平面回転アルゴリズムの誤差解析に基づく設計”, *信学論(A)*, **J73-A**, 11, pp. 1798-1807 (1990-11).
- (14) 中静 真, 菊池久和, 渡辺弘道: “CORDIC に基づくデジタル正弦波対発振器”, *信学技報*, **CAS88-32** (1988).
- (15) 中静 真, 菊池久和, 渡辺弘道, 仙石正和: “CORDIC 形デジタル正弦波対発振器に対する誤差フィードバックの適応”, *信学技報*, **DSP90-59** (1990-08).
- (16) 関口高志, 高橋進一: “複素デジタル信号処理”, *軽井沢回路とシステムワークショップ論文集*, pp. 1-8 (1988-05).
- (17) Bennett W. R. Davey J. R. 著, 甘利訳: “データ伝送”, ラティス (1966).

(平成 3 年 9 月 19 日受付)

中 静 真



昭 63 新潟大・工・電子卒。平 2 同大院修士課程了。現在、同大学院自然科学研究科在学中。デジタル信号処理、特に平面回転アルゴリズムとその応用に関する研究に従事。

菊 池 久 和



昭 49 新潟大・工・電子卒。昭 51 同大学院修士課程了。同年富士通(株)入社。昭 54 新潟大・工助手、同講師を経て平 1 同助教授(電気電子)。工博。デジタル信号処理、電子回路、光波フィルタの研究に従事。IEEE 会員。

渡 辺 弘 道



昭 42 東工大・工・電子卒。昭 49 同大学院博士課程了。工博。同年新潟大・工・電子助手、昭 53 助教授。現在、同電気電子助教授。能動 RC 伝送回路網、スイッチトキャパシタフィルタ等、電子回路、回路理論網の研究に従事。