

## マルチメディアシステム解析のためのコックス型分布による 確率分布の近似方法について

佐々木幸恵<sup>†</sup>      今井 博英<sup>†</sup>      角山 正博<sup>††</sup>      石井 郁夫<sup>†</sup>

Approximation of Probability Distribution Functions by Coxian Distribution  
to Evaluate Multimedia Systems

Yukie SASAKI<sup>†</sup>, Hiroei IMAI<sup>†</sup>, Masahiro TSUNOYAMA<sup>††</sup>, and Ikuo ISHII<sup>†</sup>

あらまし マルチメディアシステムにおけるタスクの発生間隔等が、従来用いられてきた指数分布では近似できないことが最近の研究で報告されている。このため、指数分布以外の多様な分布に従うタスクを処理するシステムの解析が必要になる。そこで本論文では、このようなタスクの統計的な性質を表すために、任意分布を近似可能であるコックス型分布を用いて確率分布を近似する方法を示す。このコックス型分布は直接的な近似が困難であるため、ここでは対象分布を指数分布の線形結合分布で近似した後、これをコックス型分布で表現する間接的な近似方法を示す。最後に、近似例を示し、提案する近似方法の有用性について述べる。

キーワード コックス型分布, マルチメディアシステム, システム評価, <sup>すそ</sup>裾の長い分布

### 1. ま え が き

従来の GSPN などを用いたシステム解析では、システムにおけるタスクの発生間隔、処理時間、制限時間等は指数分布に従うものと仮定されていた。しかし、インターネットや LAN 上のタスクの発生間隔等が指数分布では近似できないことが最近の研究で報告されている [1]~[4]。このため、指数分布以外の多様な分布に従うシステムの解析が必要となっている。

本研究では、システム解析にとって重要なモデルの状態数を考慮した近似を行うために、任意分布を近似可能であるコックス型分布を用いて多様な分布の近似を行うことにより、タスクの統計的な性質を指数分布で表せないマルチメディアシステムの解析を可能にすることを目的としている。

このコックス型分布を用いた確率分布の近似方法はいくつか提案されている [5], [6] が、これらの方法を用いて解析を行う際の解析精度や解析モデルの状態数の

増加等が十分に考慮されていない。そこで本論文では、コックス型分布が指数分布の直列結合、並列結合またはその組合せなどの線形結合分布と等しい確率分布を表すことが可能であることから [7]、任意の分布をまず指数分布の線形結合分布で近似した後、その結果得られた線形結合分布をコックス型分布で表現する間接的な近似方法を提案する。これにより、今まで行われてきた超指数分布やアーラン分布等を用いた近似方法をコックス型分布に統一して近似することが可能になるため、種々の統計的な性質をもつマルチメディアシステムを解析するためのモデル化が容易になる。

本論文では、まず、2. においてコックス型分布の定義を示す。次に、3. において考案した近似方法を示し、この近似方法による近似例を 4. で示すとともに、本研究の近似方法の有用性を述べる。最後に、5. において全体をまとめ、更に今後の課題について述べる。

### 2. コックス型分布

待ち行列ネットワークを用いて表現すると、コックス型分布は図 1 のような網の滞在時間で表される [7]。

まず、ノード  $l$  ( $1 \leq l \leq L$ ) に対して、 $a_l$  ( $0 \leq l \leq L-1$ ) をノード  $l$  からノード  $l+1$  への到着確率、 $b_l$  ( $1 \leq l \leq L$ ) をノード  $l$  からの退去確率、

<sup>†</sup>新潟大学大学院自然科学研究科情報理工学専攻, 新潟市  
Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Igarashi2-no-cho 8050, Niigata-shi, 950-2181 Japan

<sup>††</sup>新潟工科大学情報電子工学科, 柏崎市  
Niigata Institute of Technology, 1719 Fujinashi, Kashiwazaki-shi, 945-1195 Japan

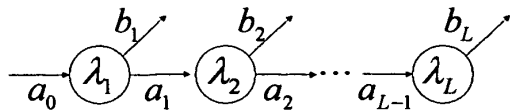


図1 コックス型分布  
Fig. 1 Cox distribution.

$1/\lambda_l$  ( $1 \leq l \leq L$ ) をノード  $l$  の平均滞在時間と呼ぶ。

客がノード 1 に到着すると、ここで平均  $1/\lambda_1$  の指数分布に従う時間滞在した後、確率  $a_1$  で次のノード 2 に進むか、確率  $b_1$  で網から退去する。そして、ノード  $L$  を終わると網から退去する。この網全体の滞在時間の確率分布がコックス型分布で表され、密度関数のラプラス変換式  $\mathcal{F}_c(s)$  は以下のように表される [7]。ここで  $A_l = a_0 \cdot a_1 \cdots a_{l-1}$  とする。

$$\mathcal{F}_c(s) = \sum_{l=1}^L A_l b_l \prod_{i=1}^l \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s} \quad (1)$$

### 3. 近似方法

#### 3.1 指数分布の線形結合分布による近似

##### 3.1.1 諸定義

以後、近似の対象とする分布を対象分布と呼び、その確率分布を  $F(x)$  と表す。また、近似の結果得られる分布を近似分布と呼び、その確率分布を  $H(x)$  と表す。

次に、補確率分布 (Complementary cumulative distribution function) を次のように定義する。

[定義 1] (補確率分布)

$F^c(x)$  を確率分布  $F(x)$  の補確率分布といい、次式で表す。

$$F^c(x) = 1 - F(x) \quad (2)$$

□

以下では、近似分布  $H(x)$  の補確率分布を  $H^c(x)$  で表す。

次に、平均相対誤差を定義する。

[定義 2] (平均相対誤差)

$\text{RE}(a, b)$  を区間  $[a, b]$  における対象分布の補確率分布  $F^c(x)$  と近似分布の補確率分布  $H^c(x)$  の平均相対誤差といい、次式で表す。

$$\text{RE}(a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{|F^c(x) - H^c(x)|}{\min(F^c(x), F(x))} dx \quad (3)$$

□

次に、対象分布  $F(x)$  を以下のように分類し、それぞれに対する近似方法を次項に示す。

[定義 3] (裾の短い分布)

$F(x)$  の密度関数  $f(x)$  が以下の式を満たす分布を裾の短い分布という。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f_e(x)) < 0 \quad (4)$$

ここで、 $f_e(x)$  は  $\lambda_e = f(0)$  の指数分布とする。また式 (4) を満たさない分布を裾の長い分布という。□

式 (4) の指数分布  $f_e(x)$  のパラメータ  $\lambda_e$  と、同様に  $x = 0$  における密度関数の値が対象分布と等しいノード数  $N_m$  の超指数分布  $h_{N_m}(x)$  のパラメータ  $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_m}$  ( $\lambda_{n-1} < \lambda_n$ ) は、以下の大小関係をもつ。

$$\sum_{n=1}^{N_m} p_n \lambda_n = \lambda_e \quad (5)$$

$$\lambda_1 < \lambda_e$$

ここで、 $p_n$  ( $n = 1, \dots, N_m$ ) は各ノードの選択確率であり、 $\sum_{n=1}^{N_m} p_n = 1$  である。つまり、超指数分布  $h_{N_m}(x)$  は指数分布  $f_e(x)$  よりも減衰が遅く裾が長いノードを必ず一つは含むため、 $f_e(x)$  よりも減衰の早い分布を近似することはできない。

このため、本論文では、近似対象分布を上記のように分類し、裾の長い分布は超指数分布、裾の短い分布は指数分布とアーラン分布の並列結合分布を用いて近似を行う。

##### 3.1.2 裾の長い分布の近似方法

裾の長い分布は、ノード数  $N_m$  の超指数分布  $H(x)$  を用いて近似する。

まず、超指数分布の  $n$  ( $n = 1, \dots, N_m$ ) 番目のノードの平均滞在時間を  $1/\lambda_n$ 、選択確率を  $p_n$  とすると、このノード  $n$  の補確率分布  $H_n^c(x)$  は以下のように表される。

$$H_n^c(x) = p_n e^{-\lambda_n x} \quad (\lambda_{n-1} < \lambda_n) \quad (6)$$

図 2 のように  $H^c(x)$  は  $H_n^c(x)$  の総和として表される。

$H_n^c(x)$  は、パラメータ  $\lambda_n$  の値が大きくなるにつれて減衰が早くなり裾が短くなる。このため、対象分布の裾の部分裾の長い分布  $H_n^c(x)$  で近似した後、対象分布から  $H_n^c(x)$  の値を引いた残りの分布の裾部分を  $H_n^c(x)$  の次に裾の長い  $H_{n+1}^c(x)$  を用いて近似する。同様の近似を繰り返して、対象分布全体を近似する超指数分布を求める。

この超指数分布の補確率分布  $H^c(x) = \sum_{n=1}^{N_m} H_n^c(x)$  を求める手順を次に示す。

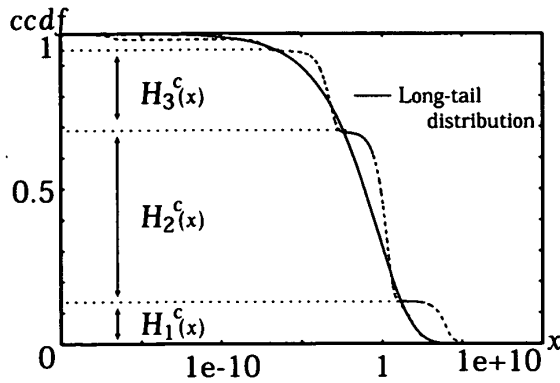


図2 裾の長い分布と超指数分布

Fig. 2 Long-tail distribution function and hyper-exponential distribution function.

[手順1] (裾の長い分布の近似)

(1)  $n = 1, \gamma = 1$  とし,

$$F_0^c(x) = F^c(x) \tag{7}$$

とする。

(2)  $H_n^c(x)$  のパラメータ  $\lambda_n$  及び  $p_n$  を, 2点  $x_1, x_2 (> x_1)$  において  $F_{n-1}^c(x)$  と  $H_n^c(x)$  の値が等しくなるように下式により決定する [11].

$$\lambda_n = \frac{\log(F_{n-1}^c(x_1)/F_{n-1}^c(x_2))}{x_1 - x_2}$$

$$p_n = F_{n-1}^c(x_1)e^{\lambda_n x_1} \tag{8}$$

(3)  $n = N_m - 1$  である場合には, 最も裾の短いノード  $H_{N_m}^c(x)$  のパラメータ  $\lambda_{N_m}, p_{N_m}$  を下式により決定して近似を終了する。

$$p_{N_m} = \gamma - p_{N_m-1}$$

$$\lambda_{N_m} = \frac{f_{(N_m-1)-1}(0) - p_{N_m-1}\lambda_{N_m-1}}{p_{N_m}} \tag{9}$$

そうでない場合には, 次のステップへ進む。

(4)  $F_n^c(x)$  を下式より求める。

$$F_n^c(x) = F_{n-1}^c(x) - H_n^c(x) \tag{10}$$

(5)  $p_r$  及び  $n$  を次のように更新してステップ2に戻る。

$$\gamma \leftarrow \gamma - p_n$$

$$n \leftarrow n + 1 \tag{11}$$

□

上記の手順の近似精度は, 式(8)で用いる2点  $x_1$  及び  $x_2 (> x_1)$  の選び方により大きく変化する。このため, 本方法では以下のように  $x_1, x_2$  を決定する。

まず,  $\epsilon_t$  を十分に小さな正の実数とし,  $F_{n-1}^c(x) = \epsilon_t$  となる  $x$  を  $x_2$  とする。これに対し,  $\text{RE}(x_r, x_{max})$  が最小となる  $x (\in [x_h, x_h(x_2/x_h)^{\frac{N_m-(n+1)}{N_m-n}}])$  を  $x_1$  とする。

ここで,  $\text{RE}(x_r, x_{max})$  は  $H_n^c(x) > F_{n-1}^c(x)$  となる最小の  $x$  である  $x_r$  から, 近似範囲の  $x$  の最大値  $x_{max}$  までの平均相対誤差である。また,  $x_h$  は指数分布  $H_e^c(x) = e^{-f_{n-1}(0)x}$  の値が  $\epsilon_t$  となる  $x$  であり,  $x_1$  の選択範囲の下限である。

上記のように  $x_1$  を決めることで, 誤差の累積される区間  $[x_r, x_{max}]$  の平均相対誤差を最小にする。また,  $H_n^c(x)$  によって近似される範囲は, 2点  $x_1, x_2$  の間隔が狭くなるに従って減少する。このため, 対象分布全体を均等に近似するために,  $x_1$  の上限を上記のように制限する。

### 3.1.3 裾の短い分布の近似方法

裾の短い分布は定義3で示したとおり, 指数分布の並列結合である超指数分布では近似できない。そこで,  $x = 0$  の部分と残りの凸型の部分を, それぞれ選択確率を掛けた指数分布  $H_e^c(x)$  とアーラン分布  $H_r^c(x)$  を用いて近似を行い, これら二つの分布の並列結合を近似分布とする。

$$H^c(x) = H_e^c(x) + H_r^c(x) \tag{12}$$

まず, 対象分布  $F^c(x)$  の値が  $\epsilon_t$  となる  $x$  を  $x_t$  とするとき, 同様に  $x_t$  において補確率分布の値が  $\epsilon_t$  である指数分布のパラメータは  $\lambda_e = -\log \epsilon_t / x_t$  である。定義3より, この指数分布の密度関数は  $x = 0$  において対象分布の値  $f(0)$  を上回ってしまう。このため,

$$f(0) = h_e(0) = p_e \lambda_e \tag{13}$$

を満たす選択確率  $p_e$  を掛けた指数分布を  $H_e^c(x)$  とする。更に, 近似対象分布から指数分布  $H_e^c(x)$  を引いて得られる対象分布の密度関数が, 凸型の分布を示すことから, これをアーラン分布  $H_r^c(x)$  を用いて近似する。

このため, まず, 対象分布の  $x = 0$  の部分を以下の二つの条件を満たす指数分布  $H_e^c(x)$  を用いて近似する。

[条件1] (指数分布  $H_e^c(x)$ )

(1)  $x = 0$  における指数分布の密度関数の値  $h_e(0)$  が対象分布の密度関数の値  $f(0)$  に等しい。

(2) 対象分布の補確率分布  $F^c(x)$  の値が  $\epsilon_t$  であ

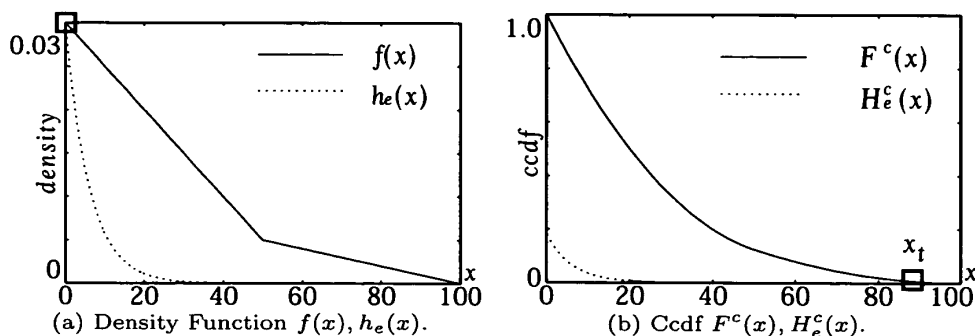


図3 対象分布と指数分布  
Fig. 3 Functions for the objective and exponential distributions.

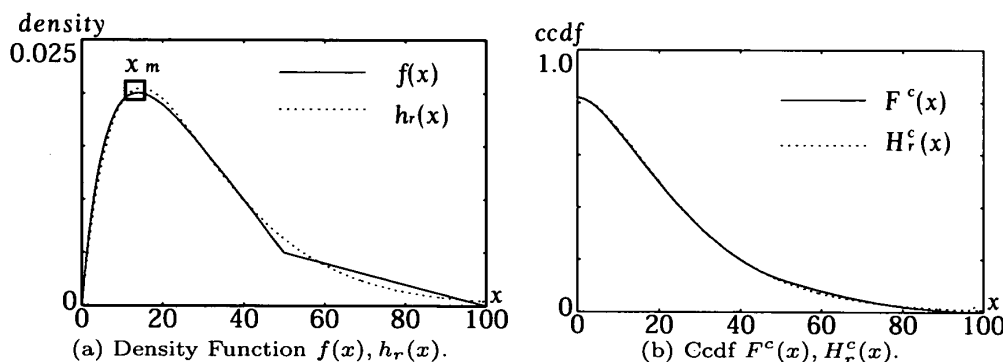


図4 対象分布の凸型部分とアーラン分布  
Fig. 4 Functions of the convex part of objective distribution and Erlang distribution.

る  $x_t$  において、同様に補確率分布  $H_e^c(x_t)$  の値が  $\varepsilon_t$  である。 □

条件1を満たしている例を図3に示す。左図の密度関数は  $f(0) = h_e(0) = 0.03$ 、右図の補確率分布は  $F^c(95) = H_e^c(95) = 0.00001$  となり上記の条件を満たしている。

次に、対象分布の残りの凸型の部分を以下の二つの条件を満たすアーラン分布  $H_r^c(x)$  で近似する。

[条件2] (アーラン分布  $H_r^c(x)$ )

(1)  $F^c(x)$  の密度関数  $f(x)$  の値が最大になる  $x_m$  において、同様に密度関数  $f_r(x)$  の値が最大となる。

(2) 区間  $(x_m, x_t]$  上において  $F^c(x)$  と等しい値をもつ。 □

条件2を満たしている例を図4に示す。左図の密度関数では、 $f(x)$ 、 $h_r(x)$  の頂点がほぼ等しく、右図の補確率分布は  $F^c(78) = H_r^c(78)$  となり上記の二つの条件を満たしている。

上記の指数分布  $H_e^c(x)$  と、アーラン分布  $H_r^c(x)$  を求める手順を次に示す。

[手順2] (裾の短い分布の近似)

(1) 指数分布  $H_e^c(x)$  のパラメータ  $\lambda_e$ 、 $p_e$  を下式により決定する。

$$f(0) = \lambda_e p_e \tag{14}$$

$$F^c(x_t) = p_e e^{-\lambda_e x_t} \tag{15}$$

(2) 対象分布の補確率分布  $F^c(x)$  から  $H_e^c(x)$  を引いた残りを、新たな対象分布  $F^c(x)$  とする。

$$F^c(x) \leftarrow F^c(x) - H_e^c(x) \tag{16}$$

(3) アーラン分布  $H_r^c(x)$  のパラメータ  $\lambda_r$ 、 $p_r$ 、 $n_r$  を、次のように決定する。

(a) パラメータ  $p_r$  を次式に基づいて決定する。

$$p_r = 1.0 - p_e \tag{17}$$

(b) 下式より、パラメータ  $n_r$  を決定する。

$$F^c(x) = p_r \sum_{i=0}^{n_r-1} \frac{((n_r-1) \frac{x}{x_m})^i}{i!} e^{-(n_r-1) \frac{x}{x_m}} \tag{18}$$

(c) 次式に  $n_r$  の値を代入してパラメータ  $\lambda_r$  を決定する。

$$\lambda_r = (n_r - 1)/x_m \quad (19)$$

(4) 指数分布  $H_e^c(x)$  とアーラン分布  $H_r^c(x)$  の和を近似分布  $H^c(x)$  とする。

$$H^c(x) = H_e^c(x) + H_r^c(x) \quad \square$$

### 3.2 コックス型分布による表現

ここでは、近似の結果得られた指数分布の線形結合分布  $H(x)$  と等しい確率分布を示すコックス型分布  $F_c(x)$  のパラメータを求める。

まず、コックス型分布のパラメータ  $A_l$  は次式で与えられる。

$$A_l = \frac{p_l \lambda_l^{n_l} - \sum_{i=l+1}^L A_i (\beta_{i,l} - \beta_{i-1,l})}{\beta_{l,l}} \quad (l = 1, \dots, L) \quad (20)$$

ここで、 $\beta_{i,l}$  は、式(1)における分数の積  $Y_i(s) = \prod_{j=1}^i \lambda_j / (s + \lambda_j)$  を部分分数に展開したときの  $1/(s + \lambda_l)^{n_l}$  の係数であり、各項の  $\lambda_l$  はノード  $l$  のパラメータ、 $n_l$  はノード  $1, \dots, l$  で  $\lambda_l$  と等しいパラメータをもつノードの個数とする。

次に、このようにして得られたパラメータ  $A_l$  に関する補題を示す。

[補題] (パラメータの条件)

コックス型分布のパラメータ  $\lambda_l$  を降順に並べたとき、 $A_l$  は次の条件を満たす。

(条件1)  $0 < A_l \leq 1$

(条件2)  $A_l \leq A_{l-1}$

(条件3)  $A_1 = 1$

(証明) 付録参照。 □

この補題に基づいて線形結合分布を表すコックス型分布が得られることを次の定理に示す。

[定理] (線形結合分布を表現するコックス型分布)

線形結合分布  $H(x)$  と等しい分布を示すコックス型分布は、 $H(x)$  のパラメータ  $\lambda_1, \dots, \lambda_h$  を降順に並べたものをパラメータ  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$  として、次式に基づいてノード  $l$  からノード  $l+1$  への到着確率  $a_l$  を決定することによって得られる。

$$a_l = A_{l+1}/A_l \quad (l = 1, \dots, L-1) \quad (21)$$

(証明) 補題より明らかである。 □

## 4. 近似例

### 4.1 近似結果

まず、裾の長い分布の近似例として、ネットワークトラヒックなどを近似するのに適する[11]ワイブル分布  $F^c(x) = e^{-(x/9.0)^{0.5}}$  (例1)、パレート分布  $F^c(x) = (1 + 0.8x)^{-1.2}$  (例2) の近似を行った結果、図5及び、図6のような近似結果が得られた。近似結果のコックス型分布を図9及び図10に示す。

次に、裾の短い分布の近似例として、QoS制御を行う際の待ち行列の制御や、ネットワーク階層の下位レベルを表現する際に用いられる一様分布  $f(x) = 0.05(0 \leq x < 20)$  (例3) と三角分布  $f(x) = -((0.03)^2/2)x + 0.03$  (例4) の近似を行った結果、図7及び、図8のような近似結果が得られた。近似結果のコックス型分布を図11及び、図12に示す。

### 4.2 近似精度

先に示した近似例の相対誤差を図13から図16に示す。

裾の長い分布については、平均相対誤差が5%以下に抑えられ、高い近似精度が得られているといえる。裾の短い分布は、平均相対誤差が非常に大きな値となっているが、これは、対象分布が裾の部分で極めて小さな値となるため、相対誤差が極めて大きくなって

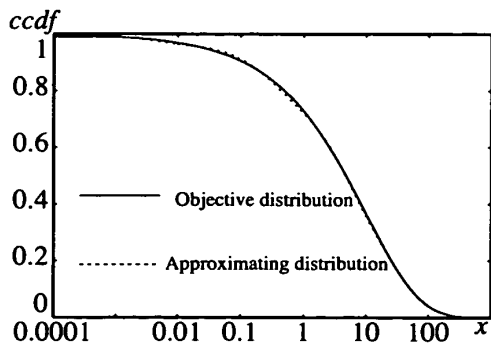


図5 例1の近似結果  
Fig. 5 The result for Example 1.

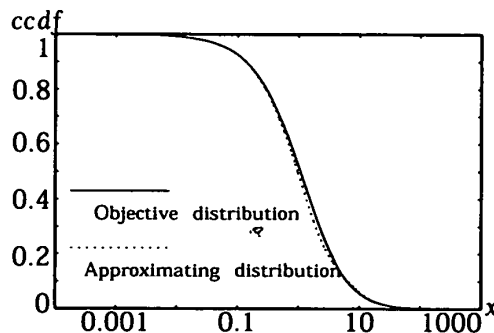


図6 例2の近似結果  
Fig. 6 The result for Example 2.

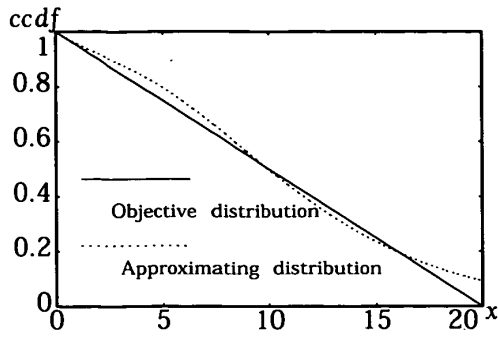


図7 例3の近似結果  
Fig. 7 The result for Example 3.

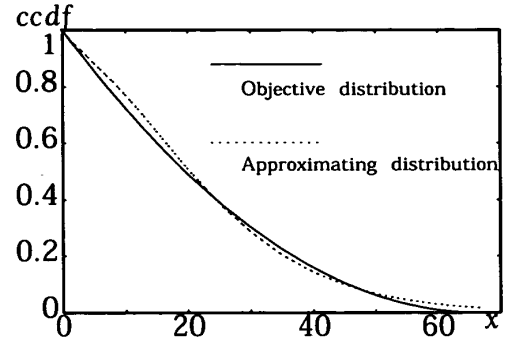


図8 例4の近似結果  
Fig. 8 The result for Example 4.

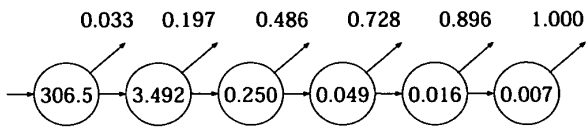


図9 例1の近似分布  
Fig. 9 Approximate distribution function in Example 1.

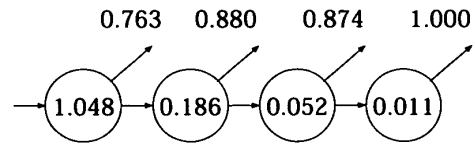


図10 例2の近似分布  
Fig. 10 Approximate distribution function in Example 2.

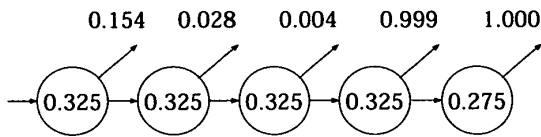


図11 例3の近似分布  
Fig. 11 Approximate distribution function in Example 3.

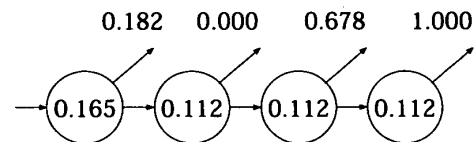


図12 例4の近似分布  
Fig. 12 Approximate distribution function in Example 4.

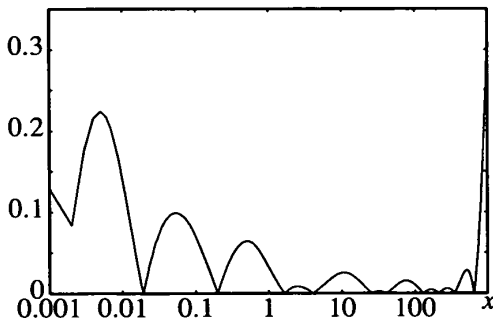


図13 例1の相対誤差  
Fig. 13 The relative error of Example 1. [mean 0.045]

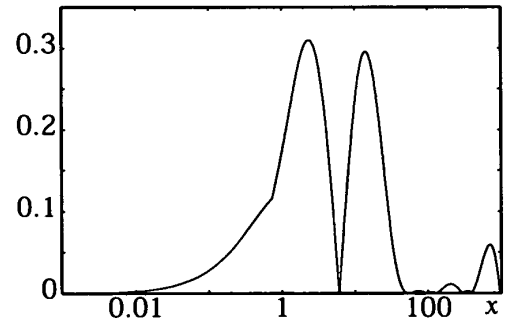


図14 例2の相対誤差  
Fig. 14 The relative error of Example 2. [mean 0.028]

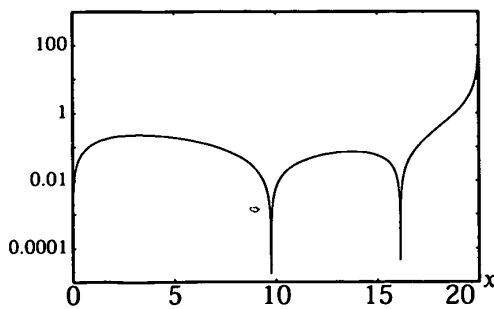


図15 例3の相対誤差  
Fig. 15 The relative error of Example 3. [mean 0.645]

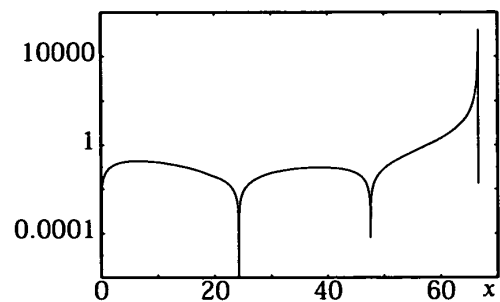


図16 例4の相対誤差  
Fig. 16 The relative error of Example 4. [mean 75.1]

しまうためと思われる。しかし、この部分は対象分布の密度関数の値も極めて小さいことから、解析への影響は少ないものと考えられる。

## 5. むすび

本論文では、タスクの統計的な性質が指数分布で表せないマルチメディアシステムの解析を可能にするために、まず、指数分布の線形結合分布を用いた対象分布の近似方法を示した。次に、その結果得られる指数分布の線形結合分布をコックス型分布で表現する方法を示した。以上の二つの方法を用いて、コックス型分布のみで裾の長い分布、裾の短い分布を含む単調減少分布の近似を実現し、その近似結果からその有用性を示した。

今後の課題としては、本論文で示した近似方法では単調減少分布以外の分布を近似することが困難であるため、凸型等の分布の近似方法を考案することが挙げられる。更に、ここで示した近似方法を用いてタスクの発生間隔等が任意分布に従う種々のマルチメディアデータを扱うシステムの解析を行い、近似方法の実際のシステムへの適用方法を検討する予定である。

## 文 献

- [1] W. Willinger, M.S. Taqqu, R. Sherman, and D.V. Wilson, "Self similarity through high variability: Statistical analysis on Ethernet LAN traffic at the source level," Proc. SIGCOMM Symp. Commun. Architectures and Protocols, pp.100-113, 1995.
- [2] W.T. Marshall and S.P. Morgan, "Statistics of mixed data traffic on a local area network," Computer Networks ISDN Systems, no.10, pp.185-195, 1985.
- [3] R. Caceres, P.B. Danzig, S. Jamin, and D.J. Mitzel, "Characteristics of wide-area TCP/IP conversations," Computer Communication Review, no.21, 1991.
- [4] J. Beran, R. Sherman, M.S. Taqqu, and W. Willinger, "Long-range dependence in variable-bit-rate video traffic," IEEE Trans. Commun., vol.43, no.2 to 4, 1995.
- [5] S. Asumussen, O. Nerman, and M. Olsson, "Fitting phase-type distributions via the EM algorithm," Scandinavian J. Statist., vol.23, pp.419-441, 1996.
- [6] M.C. Heijden, "On the three moment approximation of a general distribution by a Coxian distribution," Probability in the Engineering and Information Science, vol.2, pp.257-261, 1988.
- [7] E. Gelenbe, I. Mitranic (著), 秋丸春夫, 橋田 温 (監訳), 計算機システムの解析と設計, オーム社, 1988.
- [8] 佐々木幸恵, 今井博英, 角山正博, 石井郁夫, "コックス型分布による確率分布の近似方法について," 2001 信学総

大, D-10-1, 2001.

- [9] 小郷 博, 美多 勉, システム制御理論入門, 実教出版, 1979.
- [10] 岡田博美, 電子・情報工学講座 16 情報ネットワーク, 培風館, 1994.
- [11] A. Feldmann and W. Whitt, "Fitting mixtures of exponentials to long-tail distributions to analyze network performance models," Performance Evaluation, vol.31, 1998.

## 付 録

部分分数に展開した際に得られたパラメータ  $\beta_{i,j}$  を式 (20) に代入することによって次式が得られる。

$$A_l = \sum_{i=l}^L p_i F(l, i) \quad (\text{A.1})$$

ここで,

$$F(l, i) = \prod_{j=1, \lambda_j \neq \lambda_i}^{l-1} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right) \left(\sum_{k=0}^{n_{l,i}} M_k(l-1, \lambda_i)\right), \quad (\text{A.2})$$

$$M_k(l, \lambda_i) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \xi < k \\ \sum_{\substack{m_1 < \dots < m_k \\ \lambda_m \in \{\lambda_j | \lambda_j \neq \lambda_i, j \leq l\}}} \frac{\lambda_i}{\lambda_{m_1} - \lambda_i} \dots \frac{\lambda_i}{\lambda_{m_k} - \lambda_i} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

である。なお、式中の  $n_{l,i}$  はノード  $l, \dots, i-1$  の間で  $\lambda_i$  と等しい値の  $\lambda$  をもつノードの個数を表し、 $\xi$  は集合  $\{\lambda_j | \lambda_j \neq \lambda_i, j \leq l\}$  の要素数を表す。

$\lambda_i$  を降順に並べた場合の、パラメータ  $A_l$  の値が(条件1)から(条件3)を満たすことを次に示す。

(条件1)  $0 < A_l \leq 1$

すべての  $F(l, i) (i = 1, \dots, L)$  が  $0 < F(l, i) \leq 1$  を満たす場合には,

$$0 < A_l < \sum_{i=l}^L p_i \quad (\text{A.4})$$

となるため、上記の条件を満たすことは明らかである。

$\lambda_i$  が降順であるという仮定から、 $n_{l,i}$  の値が大きいくほど、 $F(l, i)$  の値も大きくなる。よって、最小の  $n_{l,i} = 0$  の場合と、最大の  $n_{l,i} = l-1$  の場合のそれぞれの  $F(l, i)$  について検討する。

(1)  $n_{l,i} = 0$  の場合

関数  $F(l, i)$  は

$$F(l, i) = \prod_{j=1}^{l-1} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \quad (\text{A.5})$$

となり, 降順に並べた場合  $\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}$  の値は  $\lambda_i$  以上であるため

$$0 < F(l, i) \leq 1$$

を満たす.

(2)  $n_{l,i} = l - 1$  の場合

関数  $F(l, i)$  は

$$F(l, i) = \prod_{j=1}^{l-1} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \left(\sum_{k=0}^{l-1} M_k(l-1, \lambda_i)\right) \quad (\text{A.6})$$

となる.

ここで, 次の関数を定義する.

$$T_k(l, \lambda_i) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \sum_{t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq l} \frac{\lambda_i}{\lambda_{t_1}} \frac{\lambda_i}{\lambda_{t_2}} \dots \frac{\lambda_i}{\lambda_{t_k}} & \\ \lambda_i \in \{\lambda | \lambda \neq \lambda_i\} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

これを用いて式  $F(l, i)$  を展開する.

$$\begin{aligned} F(l, i) &= \prod_{j=1}^{l-1} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \left(\sum_{k=0}^{l-1} M_k(l-1, \lambda_i)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j T_j(l-1, \lambda_i) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \sum_{j=k}^{l-1} (-1)^{j-k} {}_j C_k T_j(l-1, \lambda_i) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + T_{l-1}(l-1, \lambda_i) \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} T_j \left(\sum_{k=0}^j (-1)^k {}_j C_k\right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ここで

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k {}_j C_k = 0 \quad (j > 0)$$

であることから, 関数  $F(l, \lambda_i)$  の値は

$$F(l, \lambda_i) = T_0(l-1, \lambda_i) = 1 \quad (\text{A.9})$$

となり,  $F(l, i)$  の値は最大で 1 となることがいえる. (1), (2) よりすべての  $F(l, i)$  が条件を満たすため,  $0 < A_l \leq 1$  が成り立つ.

(条件 2)  $A_{l-1} \geq A_l$

パラメータ  $A_l$  と  $A_{l-1}$  の関数  $F(l, i)$ ,  $F(l-1, i)$  を比較する.

(1)  $\lambda_{l-1} = \lambda_i$  である場合

このとき, 集合  $\{\lambda_j | \lambda_j \neq \lambda_i, j \leq l-1\}$  と  $\{\lambda_j | \lambda_j \neq \lambda_i, j \leq l-2\}$  が等しく, かつ  $n_{l-1,i} > n_{l,i}$  であることから  $F(l-1, \lambda_i) \geq F(l, \lambda_i)$  である.

(2)  $\lambda_{l-1} \neq \lambda_i$  である場合

パラメータ  $A_l$  の関数  $F(l, i)$  は以下のように展開される.

$$\begin{aligned} F(l, i) &= \prod_{j=1, \lambda_j \neq \lambda_i}^{l-1} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \left(\sum_{k=0}^{n_{l,i}} M_k(l-1, \lambda_i)\right) \\ &= \prod_{j=1, \lambda_j \neq \lambda_i}^{(l-1)-1} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \\ &\quad \cdot \left( \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{l-1}}\right) \sum_{k=0}^{n_{l,i}} M_k((l-1)-1, \lambda_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_i}{\lambda_{l-1}} \sum_{k=0}^{n_{l,i}-1} M_k((l-1)-1, \lambda_i) \right) \\ &= \prod_{j=1, \lambda_j \neq \lambda_i}^{(l-1)-1} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \\ &\quad \cdot \left( \sum_{k=0}^{n_{l,i}} M_k((l-1)-1, \lambda_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_i}{\lambda_{l-1}} M_{n_{l,i}}((l-1)-1, \lambda_i) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

ここで,  $n_{l,i} = n_{l-1,i}$  であることから,  $F(l-1, \lambda_i) \geq F(l, \lambda_i)$  であることがいえる.

したがって, (1), (2) から (条件 2) が成り立つ.

(条件 3)  $A_1 = 1$

式 (A.1) から



$$A_1 = \sum_{i=1}^L p_i = 1 \quad (\text{A}\cdot 11)$$

となり, 成り立つ.

よって補題が成り立つ.  $\square$

(平成13年12月3日受付, 14年3月8日再受付)



佐々木幸恵 (学生員)

平11新潟大・工・情報卒. 現在, 同大大学院博士後期課程在学中.



今井 博英 (正員)

平5新潟大・工・情報卒. 平7同大大学院修士課程了, 平10同大大学院自然科学研究科博士後期課程了. 現在, 同大大学院自然科学研究科助手. リアルタイムシステムの研究に従事. 平10工博.



角山 正博 (正員)

昭44新潟大・工・電子卒. 同年東京芝浦電気(株)入社. 昭46横河ヒューレットパッカード(株)入社. 主に測定器の研究開発に従事. 長岡技術科学大学教務職員, 助手, 長岡工業高等専門学校教授を経て, 現在, 新潟工科大学教授. フォールトトレラントシステム, コンピュータネットワークの性能評価と高信頼化, リアルタイムシステム等の研究に従事. 平2工博. 日本信頼性学会, 情報処理学会, IEEE等各会員.



石井 郁夫 (正員)

1963新潟大・工・電気卒. 同大・助手, 助教授を経て, 現在, 同大・大学院自然科学研究科教授. 人工現実感, ロボットビジョン, 画像処理, マルチメディア通信などの研究に従事. 工博. 情報処理学会, 日本VR学会, 日本ME学会各会員.