

博士論文の要旨及び審査結果の要旨

氏名	大井 志穂
学位	博士（理学）
学位記番号	新大博（理）第 67 号
学位授与の日付	令和 2 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 2 項該当
博士論文名	Homomorphisms and isometries on Banach algebras of continuous functions (連続関数からなるバナッハ環の上の準同形写像と等距離写像)
論文審査委員	主査 教授・羽鳥 理 副査 教授・三浦 毅 副査 教授・渡邊 恵一 副査 准教授・星 明考 副査 准教授・應和 宏樹

博士論文の要旨

博士論文として提出された本論文では、リップシッツ環、連続的微分可能関数からなるバナッハ環（以下では $C^1$ 環と記載する）やそれを抽象化したバナッハ環の間の準同形写像と等距離写像に関する大井志穂氏により得られた結果について紹介している。

第 1 章で問題の背景と基本的な概念や定義について述べたあと、第 2 章ではベクトル値のリップシッツ環とベクトル値の $C^1$ 環を含むような **admissible quadruple** の定義を確認し、その上の準同形写像が典型的な形（BJ 型）をしていることが述べられている。これはリップシッツ環（あるいは $C^1$ 環）と可換  $C^*$ 環がバナッハ環として全く異なるものであることを主張したものでありこの方面の研究の原点となるような結果である。

第 3 章では、ベクトル値のリップシッツ環はじめ第 2 章で扱ったバナッハ環に対する同形写像が BJ 型であり、よってそれぞれの極大イデアル空間を分離することが述べられている。

第 4 章ではリップシッツ環や $C^1$ 環上の全射複素線形等距離写像の特徴付けを行っている。特に、リップシッツ環の間の全射複素線形等距離写像に関する 1971 年の Rao-Roy の予想に対して、それをより一般的なバナッハ環（L 型 **admissible quadruple**）についての問題としてとらえ肯定的な解決を得ている。その際に対象となるバナッハ環の双対空間の単位球の端点の様子を調べるのが重要な点となっている。Rao-Roy の問題の解決の困難さはこの端点の把握の難しさによっているが、ここでは端点のごく一部の様子を調べることで困難さを回避している。

第 5 章においては、関数環をベクトル値としたリップシッツ環と $C^1$ 環の間にエルミート作用素を定義し、その特徴づけを得ている。この章での方法はいわゆる Lumer の方法と呼ばれるものであり、このことは双対空間を用いる方法によらず、他にも全射複素線形等距離写像を決定する重要な方法があることを示唆したものであり、Lumer の方法の汎用性を確認したものである。

第 6 章においては、有限次元バナッハ空間に値をとるリップシッツ空間や $C^1$ 空間上のエルミート作用素の特徴づけている。エルミート作用素の形が得られたことで、Lumer の方法を適用することができ、よって行列環に値をとるリップシッツ環の間の単位的全射複素線形

等距離写像の形の決定に成功した。

第7章においては、関数環とバナッハ空間のテンソル積の上のエルミート作用素と全射複素線形等距離写像について述べられている。関数環と単位的因子  $C^*$ 環のテンソル積の上の単位的全射等距離写像が、関数環の極大イデアル空間上の位相同相写像を導くことを示している。これは Behrends による Banach-Stone property に関する結果と関係している。

第8章では単位的可換  $C^*$ 環に値をとるリップシッツ環の local surjective linear isometry は全射複素線形等距離写像であることを導いている。つまり、単位的  $C^*$ 環に値をとるリップシッツ環の全射複素線形等距離写像全体は代数的回帰性を有することを示した。また、行列環に値をとるリップシッツ環の間の単位的複素線形等距離写像全体の代数的回帰性も示されている。

第9章と Appendix A では 2-local isometry (複素線形性を仮定しない) は全射等距離写像かどうかという Molnár の問題を取り上げて、いくつかの肯定的な結果を述べている。

## 審査結果の要旨

バナッハ環の間の等距離写像の研究は 1932 年のバナッハによるものまで遡ることができ、今日ではバナッハ・ストーンの定理として広く知られているものが原点である。バナッハ・ストーンの定理では複素線形全射等距離写像はそれが定義されているバナッハ環の積の構造を保存する点に興味をもたれ、どのようなバナッハ環の等距離写像が積の構造にまで言及するかが現在まで問われ続けている問題である。等距離写像が積の構造に言及するといった現象は関数環においてはナガサワ等により古くから知られている一方でウイナー環では認められないものである。可換バナッハ環理論は、複素解析学を扱おうとする関数環理論とフーリエ解析や調和解析学を抽象的に扱おうとする理論の両輪により発展してきている。「積を保存する現象」は両輪の一方の関数環に対して起こり、もう一方のウイナー環では起こらないことから、この現象はどのような可換バナッハ環に対して起こるのかという問題意識がもたれ続けている。このような中でもう一つの重要なバナッハ環のクラスであるリップシッツ環に対する研究は 1960 年代ころに始まり、多くの数学者により現在まで活発に行われてきている。特に、閉区間  $[0,1]$  上のリップシッツ環上の全射複素線形等距離写像が積の構造を保存することがラオとロイにより 1971 年に示されて以来、一般のコンパクト距離空間の場合が基本的な問題として未解決のまま残っていた。

本論文は、ベクトル値のリップシッツ環や  $C^1$ 環、またそれらを抽象化したバナッハ環を対象として等距離写像や準同形写像を統一的にあつかうことを志向し、これらの写像を決定した結果をまとめたものである。手法は双対空間を用いるものからエルミート作用素を用いた Lumer の方法を拡張したものまで多彩である。本論文の内容は長年の予想の肯定的な解決を含んでいる。これは別記様式第2号の論文目録の参考論文6により出版されている。また新たな問題提起を行い、さらに今後の発展に期待できるような斬新な結果をたくさん含んでいることが特に評価できる。これらは、別記様式第2号の論文目録の参考論文にある10編の論文として Journal of Mathematical Analysis and Applications はじめ海外の雑誌から出版されている。本論文で述べられている結果はバナッハ環上の等距離写像の研究において大変重要な知見を与え、可換だけではなく非可換のバナッハ環に対する今後のこの方面の研究の発展に寄与するものであると考える。

研究成果の学術誌などへの掲載実績は以下のようなものである。

### 1. Shiho Oi

: Homomorphisms between algebras of Lipschitz functions with the values in function algebras

平成 28 年 12 月発行 Journal of Mathematical Analysis and Applications

Vol. 444, pp210~229 に発表

2. Osamu Hatori and Shiho Oi  
: Hermitian operators on Banach algebras of vector-valued Lipschitz maps  
平成 29 年 8 月発行 Journal of Mathematical Analysis and Applications  
Vol. 452, pp 378~387 に発表
3. Osamu Hatori and Shiho Oi  
: Corrigendum to "Hermitian operators on Banach algebras of  
vector-valued Lipschitz maps" [Journal of Mathematical Analysis and  
Applications 452 (2017) 378-387] [MR3628025].  
平成 29 年 9 月発行 Journal of Mathematical Analysis and Applications  
Vol. 453, pp 1151~1152 に発表
4. Osamu Hatori, Shiho Oi and Hiroyuki Takagi  
: Peculiar homomorphisms on algebras of vector-valued continuously  
differentiable maps  
平成 29 年発行 Linear and Nonlinear Analysis Vol.3, pp101~109 に発表
5. Osamu Hatori, Shiho Oi and Hiroyuki Takagi  
: Peculiar homomorphisms between algebras of vector-valued maps  
平成 30 年発行 Studia Math. Vol. 242, pp141~163 に発表
6. Osamu Hatori and Shiho Oi  
: Isometries on Banach algebras of vector-valued maps  
平成 30 年発行 Acta Sci. Math. (Szeged) Vol. 84, pp151~183 に発表
7. Osamu Hatori, Kazuhiro Kawamura and Shiho Oi  
: Hermitian operators and isometries on injective tensor products of  
uniform algebras and C\*-algebras  
平成 31 年 4 月発行 Journal of Mathematical Analysis and Applications  
Vol. 472, pp827~841 に発表
8. Shiho Oi  
: Algebraic reflexivity of isometry groups of algebra of Lipschitz maps  
平成 31 年 4 月発行 Linear Algebra and its Applications  
Vol. 566, pp167~182 に発表
9. Shiho Oi  
: Hermitian operators and isometries on algebras of matrix-valued  
Lipschitz maps  
発行予定 Linear and Multilinear Algebra (平成 30 年 8 月 online で発行)
10. Osamu Hatori and Shiho Oi  
: 2-local isometries on function spaces  
令和元年発行 Contemporary Mathematics  
Vol. 737, pp89~106 に発表

よって、本論文は博士（理学）の博士論文として十分であると認定した。