博士論文の要旨及び審査結果の要旨

氏名	長谷川　寿人
学位	博士（理学）
学位記番号	新大院博（理）第 450 号
学位授与の日付	令和２年３月 23 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
博士論文名	On the rationality problem for norm one tori (ノルム１トーラスに対する有理性問題について)
論文審査委員	主査　教授・小島　秀雄 副査　教授・印南　信宏 副査　教授・三浦　毅 副査　准教授・星　明考 副査　准教授・山崎　愛一

博士論文の要旨

本博士論文は，参考論文[1]の内容をまとめたものである．

代数多様体が与えられたとき，その多様体が有理的であるか，すなわち射影空間 P^n と双有理同値かという問題は有理性問題と言われ，代数幾何，とりわけ双有理幾何学において重要な問題である．しかし，有理的であるかどうかを判定するのは非常に困難であり，有理性を弱めた安定有理性，レトラクト有理性という概念が重要になってくる．

本論文では，代数的トーラス，とりわけノルム１トーラスについての有理性問題を扱っている．代数的トーラスの有理性問題は，基礎体 k が代数体のとき，ガロア逆問題や拡大体 K/k に対するハッセノルム原理などの数論的な問題への応用がある. また k が有限体のときには, 代数的トーラスの有理点の離散対数問題に基づく暗号理論への応用もある．

n 次元の代数的トーラスは, 1 次のコホモロジー集合 $H^1(G,GL_n(\mathbb{Z}))$と一対一の対応がある．ここで，$G=Gal(k_{sep}/k)$は k の絶対ガロア群．これにより，n 次元の代数的トーラスは整数連続表現 $h: G \to GL_n(\mathbb{Z})$により決まり，とくに h(G)は有限群である．さらに，代数的トーラスの安定有理性，レトラクト有理性は，h(G)の $GL_n(\mathbb{Z})$における共役類により決定される．

ノルム１トーラスは代数的トーラスにおける特別なクラスである．K/k を n 次分離拡大，L/k をそのガロア閉包とし，ガロア群を G とすると，それに対しノルム１トーラス $R^{(1)}_{K/k}(G_m)$が定まる．K/k がガロア拡大の場合には，1975 年の遠藤静男氏と宮田武彦氏, 1977 年の Colliot-Thélène と Sansuc, 1984 年の Saltman らの結果より, 群 G の構造によって，ノルム１トーラスの安定有理性，レトラクト有理性が特徴づけられている．しかしながら，K/k が非ガロア拡大の場合には，群 G が特別な場合でしかノルム１トーラスの安定有理性，レトラクト有理性が知られていなかった．

2018 年に新潟大学の星明考氏と京都大学の山崎愛一氏は, 数式処理システム GAP を用いて, 次元ごとにノルム１トーラスの安定有理性, レトラクト有理性の分類を行った．そこでは，$n \leq 10$ と $n=p$ (p は素数) の場合のノルム１トーラスの安定有理性，

レトラクト有理性について，いくつかの例外を除き，分類が与えられた．星氏と山崎氏の手法では，ノルム 1 トーラスの安定有理性を示すために，flabby class と置換格子の間の同型写像を具体的に構成していた．しかし，この手法では次元が上がるにつれて，具体的に同型写像を作るための計算量が膨大となり，高次のノルム 1 トーラスの安定有理性を示すのは困難であった．

長谷川寿人君は，改良された flabby resolution のアルゴリズムを用いて，flabby resolution を繰り返し構成するという新しいアイデアで，次数 10 で未解決であった $G=A_5\times C_2$ に対するノルム 1 トーラスの安定有理性を示した．また，星氏と山崎氏の結果を一般化し，次の場合のノルム 1 トーラスの安定有理性，レトラクト有理性の分類を完成させた：

- $n=2^e$ $(e\geqq 1)$,
- $n=10,12,14,15$,
- $n=q+1$ ($q=l^e\equiv 1 \pmod 4$)は奇素数べき)，$PSL_2(F_q)\leq G\leq P\Gamma L_2(F_q)$,
- $G\leq S_{2p}$ (G は原始的で，p は素数),
- マシュー群 $G=M_n\leq S_n$ $(n=11,12,22,23,24)$.

本論文の構成は以下のとおりである．第 1 章は，導入として本論文の概要について述べられている．第 2 章は，まず代数的トーラスの安定有理性，レトラクト有理性を調べるための基本事項として G 格子や代数的トーラスの性質について簡潔にまとめられている．そこでは flabby resolution が代数的トーラスの有理性問題において重要な役割を果たすことが述べられている．さらに，代数的トーラスの有理性問題についての主要な結果がまとめられている．第 3 章は，第 2 章での結果を用いて，本論文の主結果の証明が与えられ，いくつかの具体例が紹介されている．

審査結果の要旨

代数多様体の有理性問題は，代数幾何学および双有理幾何学において，中心的かつ大変重要な問題である．本論文では代数的トーラス，特に，ノルム 1 トーラスの有理性問題が研究され，有理性を弱めた概念である安定有理性およびレトラクト有理性の分類が後述の場合に与えられている．安定有理的な代数的トーラスは有理的であろうという予想は Voskresenskii 予想と呼ばれ，未解決の予想ではあるが，本論文において安定有理性に対する分類がいくつかの場合に成功したという点は，大変興味深い．

長谷川寿人君は，改良された flabby resolution のアルゴリズムを用いて，flabby resolution を繰り返し構成するという新しいアイデアで，次数 10 で未解決であった $G=A_5\times C_2$ に対するノルム 1 トーラスの安定有理性を示した．さらには，次の場合のノルム 1 トーラスの安定有理性，レトラクト有理性の分類を完成させた：

- $n=2^e$ $(e\geqq 1)$,
- $n=10,12,14,15$,
- $n=q+1$ ($q=l^e\equiv 1 \pmod 4$)は奇素数べき)，$PSL_2(F_q)\leq G\leq P\Gamma L_2(F_q)$,
- $G\leq S_{2p}$ (G は原始的で，p は素数),
- マシュー群 $G=M_n\leq S_n$ $(n=11,12,22,23,24)$.

以上のように，本論文は代数幾何学および双有理幾何学における中心的かつ大変重要な問題である有理性問題において，新しいアイデアを導入し，本質的な新展開をもたらすとともに，論文の中で与えられた証明法自体にも高い独創性が認められる．これらの成果は代数学，特に代数幾何学および双有理幾何学の発展に大きな寄与をなすものである．よって，本論文は博士（理学）の博士論文として十分であると認定した．