博士論文の要旨及び審査結果の要旨

氏　　　　　名	近藤　俊樹
学　　　　　位	博士（理学）
学 位 記 番 号	新大院博（理）第449号
学位授与の日付	令和２年３月23日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
博 士 論 文 名	Propagation behavior of spreading geodesic circles in geodesically convex Finsler surfaces （測地的に凸なフィンスラー曲面上で広がる測地円の伝搬挙動）
論 文 審 査 委 員	主査　　教授・印南　信宏 副査　　教授・三浦　毅 副査　　教授・小島　秀雄 副査　　准教授・鈴木　有祐 副査　　准教授・應和　宏樹

博士論文の要旨

曲面Mが閉曲面から有限個の開円板や点を除いた部分と同相であるとき有限連結であるという。向き付け可能な有限連結曲面の種数 g が 1 以上であれば，g 個の互いに交わらない単純閉曲線の組でMからその g 個の閉曲線を取り除いても連結であるものが存在する。このとき，g - 1 個の閉曲線を取り除いた場合は，種数１の曲面であるので，トーラスから有限個の点と円板を取り除いた曲面と同相である。

(M, F) をフィンスラー曲面とする。M上の曲線の長さ関数のオイラー・ラグランジュ方程式の解を測地線という。Mの任意の２点が最短測地線で結べるとき測地的に凸という。境界を持たない前方向き測地的に完備なフィンスラー多様体は測地的に凸である（ホップ - リノウの定理）。この論文の主定理は，「M は，向き付け可能，有限連結，測地的に凸なフィンスラー曲面で，種数gは１以上とする。g - 1 個の可逆な単純閉測地線で，Mから取り除いても連結であるものが存在するとする。そのとき，任意の正数 ε と，M の任意の 2 点 p, q に対して，正数Rが存在し，中心p半径 $t > R$ の測地円 S(p, t)と中心q半径 ε の円板は交わる。」である。粒子の運動の軌跡を記述するのが測地線であるのに対して，この結果は，測地円を波面と見ての伝搬の様子を表している。pから出た波面の一部分は，時刻Rを過ぎると，q の ε -近傍に常に存在していることを主張している。

S(p, t)と K(p, t)をそれぞれpから出て長さtの測地線と最短測地線の端点の集合とする。S(p, t)と K(p,t)をそれぞれ中心p半径tの測地球と距離球と呼ぶ。$t > 0$ が十分小さいと S(p, t)=K(p, t)が成り立つが，t が大きい（p の単射半径を超える）と S(p,t)と K(p, t)は一致しなくなり，S(p, t)－K(p, t)の部分は距離関数の幾何学では扱い難くなる。そこで，主定理のMに対しては，Mから g - 1 個の可逆な単純閉測地線を取り除いて，できた曲面の穴をいくつかの円板と点で埋めるとトーラスになることに注意する。その普遍被覆空間は平面になり，その平面から埋めるのに使った円板や点の持ち上げを取り除くと，Z×Z と同型な等長変換群Φが作用する被覆空間Nができる。Nでは，ジョルダンの曲線定理も成り立ち，平面の場合に成り立つ曲線の性質を使った議論が可能になる。これにより，Φに属する等長変換に対して，axis の存在が証明でき，その Busemann 関数の性質を利用して定理が証明できる。Busemann 関数のレベル集合は測地円の極限になっている。

博士論文は，5 個の章と付録の章からなっている。付録の章で，Finsler 多様体と測地線に関して簡単に復習している。

第 1 章は，紹介の章で，内部距離の距離円とホイヘンスの原理の関係から始まり，証明の重要点，先行結果との関係などが述べられている。また，ポアンカレの回帰定理，単位接束上の測地流に関する位相混合性，エネルギー関数の臨界点の ε － 稠密性，ガウスの円問題との関係なども述べられている。

第 2 章では，定理の条件を満たす曲面から，ジョルダンの曲線定理と Z×Z が作用する被覆空間 N の構成を行っている。片方の性質だけを満たす被覆空間はよく使われるが両方を満たす被覆空間を構成するは新しいアイデアである。

第 3 章では，被覆変換群の要素である等長変換で不変な両側に無限に伸びる測地線（直線と呼ばれる）の存在を証明している。この最短測地線は axis と呼ばれ定理の証明に重要な役割を果たす。

第 4 章では，N に 2 重周期を持つ適当な座標を導入しその座標に関して，直線の傾きを定義し直線を区別するのに使われている。また，その直線にそって，点を発散させたときの距離円の極限がレベル集合となる Busemann 関数を導入し，レベル集合の性質を調べている。

第 5 章では, 平行な直線族と Busemann 関数のレベル集合でつくられる細長い四辺形で曲面 M をカバーする領域を見つける。Busemann 関数の 2 つのレベル集合の間隔は一定なのでこの幅を ε より小さくとれば定理の証明が完結する。

審査結果の要旨

ユークリッド平面を整数 Z の 2 乗 Z×Z で割って，平坦トーラスを作る。その時，傾きが有理数の直線は平坦トーラス上で閉測地線になる。一方，傾きが無理数の直線は平坦トーラス上では稠密な曲線になる。直線上に中心を置き，ある定点を通る円は，中心を無限遠に飛ばすと直線に収束する。したがって，特に，傾きが無理数であれば平坦トーラスで稠密な曲線になる。トーラスが平坦ではなくなるとどうなるか。最短測地線はトーラス上に稠密に入り込むとは限らないが，測地円の極限として現れる曲線はトーラスで稠密になる。定理はこれを主張している。一般の曲面上で，測地円の計量に対するこの不変的な性質を距離関数の三角不等式だけを頼りに証明した。

以下の点が新しく，この論文の価値のあるところである。

１．ユークリッド原論の平行線の公理と呼ばれている公理の研究が幾何学を発展させ，空間概念の拡張に結びついた。その後，新しい平行線の概念が Busemann によって提起され，無限遠点の幾何や測地流の研究に使われた。その立場から，曲面上の測地線の研究は，球面，トーラス，それ以外の曲面でテーマおよび研究で使われる方法が異なっている。トーラス上の幾何学で使われる方法をそれ以外（球面を除く）の曲面上の幾何学に適用したのは新しい試みである。

２．測地線は内部距離に関して局所的に最短線になっている。それゆえ距離関数を用いた測地線の研究が盛んになされている。この論文では，最短線になっていない測地線に対して，新しい距離を定義し最短線として扱う方法を提案している。その方法は，ある部分を通らない測地線の研究へとつながると予想される。

３．歴史的にエルゴード仮説は否定されたが，それ以降，エルゴード的な性質を満たす系の例を見つけることが盛んに研究された。これに対して，統計力学に拘らずに，いかなる性質がどんなときにも成り立つかという問題が設定できる。本論文では，位相的部分混合性なる概念を導入して，この問題の解決に一つの案を提供している。

いずれも今後が期待できる内容を含んでいる。よって，本論文は博士（理学）の博士論文として十分であると認定した。