

時空間 MUSIC 法におけるパラメータ推定誤差について

原 六蔵[†] (学生員) 山田 寛喜[†] (正員)
山口 芳雄[†] (正員)

On Parameter Estimation Error of Space-Time MUSIC Algorithm

Rokuzou HARA[†], Student Member, Hiroyoshi YAMADA[†],
and Yoshio YAMAGUCHI[†], Regular Members

[†]新潟大学工学部 情報工学科, 新潟市

Department of Information Engineering, Niigata University
Niigata-shi, 950-2181 Japan

あらまし MUSIC 法, ESPRIT 法などが適用されている電波伝搬の時空間推定では, 入射波の相関の有無により, その特性が大きく変化する. 本論文では, 2次元 MUSIC 法を例にあげ, 入射波がコヒーレント, インコヒーレントな場合の時空間推定誤差特性と信号相関抑圧特性との関連について示した.

キーワード 時空間推定, MUSIC 法, 空間スムージング法, 伝搬遅延時間, 到来方向

1. まえがき

MUSIC 法 [1], ESPRIT 法 [2] などに基づく多次元スーパーレゾリューション法に関する研究が盛んに進められている [3], [4]. 特に, 伝搬遅延時間と到来方向の推定を目的とした時空間推定法 [5], [6] はその高分解能性から, センシングのみならず通信への応用が期待されている. しかしながら, 到来方向あるいは伝搬遅延時間のみの 1次元の場合における分解能特性に関しては, 多くの研究報告があるが, 2次元問題の場合の報告は少ない [7].

入射波がインコヒーレントな場合, MUSIC 法などのスーパーレゾリューション法は直接適用可能である. その場合の分解能特性・推定誤差特性は, 主に信号間の到来角度差・伝搬遅延時間差に依存する. この場合, 適用手法の分解能特性は比較的容易に把握できる. しかしながら, 近接するコヒーレントな信号が入射する場合, MUSIC 法, ESPRIT 法などは直接適用できず, 空間スムージング法 (SSP: Spatial Smoothing Preprocessing) [8], あるいは改良型空間スムージング法 (MSSP: Modified SSP, あるいは Forward/Backward SSP) [9] などの相関抑圧前処理法の適用が不可欠である.

これらの前処理法の相関抑圧特性は入射波相互の時空間位置関係に依存する. MUSIC 法, ESPRIT 法な

どの分解能特性・推定誤差特性は入射波間の相関に大きく依存する. 1次元の場合, 入射波間の推定パラメータ (伝搬遅延時間あるいは到来方向) が離れるほど相関は抑圧され推定精度が向上するが, 2次元問題の場合, 時空間距離が離れた場合であっても, 全く相関抑圧できない領域が存在するため, 推定の際には注意が必要となる.

本論文では, 時空間スーパーレゾリューション法として 2次元 MUSIC 法を取り上げ, 推定誤差の観点からその分解能特性を定量的に評価している. ここでは, まず入射波がコヒーレントでない場合を考え, その推定誤差特性を計算機シミュレーションにより評価し, 到来角度差及び伝搬遅延時間差からなる時空間距離差との対応関係を示す. 次に, SSP 法を併用するコヒーレントな場合に関する 2次元相関抑圧特性を導出し, その際の推定誤差特性と相関抑圧特性との関係について論じる. また, MSSP 法における 2次元相関抑圧特性も併せて述べる.

2. 問題の定式化

時空間の 2次元問題を等間隔直線アレーで推定することを考える. 周波数 f_i ($i = 1, \dots, L_f$), 受信アンテナ位置 x_l ($l = 1, 2, \dots, L_a$) で, k 番目の到来波の複素振幅, 到来方向, 遅延時間をそれぞれ s_k, θ_k, t_k とすると, 受信データは次式のようなになる.

$$r(f_i, x_l) = \sum_{k=1}^d s_k e^{-j2\pi f_i(t_k - (x_l/c) \sin \theta_k)} + n(f_i, x_l) \quad (1)$$

ここで, $n(\cdot)$ は平均 0, 分散 σ^2 の雑音成分, c は伝搬速度とする. 周波数を掃引するため, 式 (1) では各周波数における波長で規格化された素子間隔は異なる. 入射波がコヒーレントであるような場合, 相関抑圧法を用いるには, これらを一致させる必要がある. 実際には各周波数において, 次式に従い素子間隔の補間を行いデータを生成する [5].

$$\Delta g = \Delta x f_1 / c \quad (2)$$

ここでは純粋に相関による推定誤差のみを検討するため, 受信データは補間による誤差の影響を除き掃引周波数ごとに素子間隔が半波長 ($\lambda/2$) であるものとし, 次のようなベクトルで表す.

$$\mathbf{r} = \sum_{k=1}^d s_k \mathbf{a}(\theta_k, t_k) + \mathbf{n} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (3)$$

$$\mathbf{r} = [r(f_1, x_1), r(f_2, x_1), \dots, r(f_{L_f}, x_1), \dots, \dots, r(f_1, x_{L_a}), r(f_2, x_{L_a}), \dots, r(f_{L_f}, x_{L_a})]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{n} = [n(f_1, x_1), n(f_2, x_1), \dots, n(f_{L_f}, x_1), \dots, \dots, n(f_1, x_{L_a}), n(f_2, x_{L_a}), \dots, n(f_{L_f}, x_{L_a})]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{a}(\theta_k, t_k) = [e^{-j2\pi f_1(t_k - (x_1/c) \sin \theta_k)}, \dots, e^{-j2\pi f_{L_f}(t_k - (x_1/c) \sin \theta_k)}, \dots, e^{-j2\pi f_1(t_k - (x_{L_a}/c) \sin \theta_k)}, \dots, e^{-j2\pi f_{L_f}(t_k - (x_{L_a}/c) \sin \theta_k)}]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1, t_1), \mathbf{a}(\theta_2, t_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_d, t_d)] \quad (7)$$

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_d]^T \quad (8)$$

ここで、添字 T は転置である。

3. 2-D MUSIC 法

2-D MUSIC 法では相関波に対する前処理として、SSP 法、MSSP 法に基づく相関抑圧処理が用いられる。サブアレー平均の方法にはいくつかの改良手法もみられるが、ここでは最も簡単な相関抑圧を用いる。 $r(f_i, x_l)$, $n(f_i, x_l)$ をそれぞれ、 $r_{i,l}$, $n_{i,l}$ と表し、受信データより M 個のサブアレーを構成すると、 m 番目のベクトルは次式となる。

$$\mathbf{r}_m = [r_{m,m}, \dots, r_{m+N_f-1,m}, \dots, \dots, r_{m,m+N_a-1}, \dots, r_{m+N_f-1,m+N_a-1}]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{n}_m = [n_{m,m}, \dots, n_{m+N_f-1,m}, \dots, \dots, n_{m,m+N_a-1}, \dots, n_{m+N_f-1,m+N_a-1}]^T \quad (10)$$

$(N_f = L_f - M + 1, N_a = L_a - M + 1)$

$$\mathbf{r}_m = \sum_{k=1}^d s_k \mathbf{a}_m(t_k, \theta_k) + \mathbf{n}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{s} + \mathbf{n}_m \quad (11)$$

ここで \mathbf{a}_m , \mathbf{A}_m は、式 (4) と式 (9) の対応関係からわかるように、周波数に関して $m \sim m + N_f - 1$ 、空間に関して $m \sim m + N_a - 1$ の要素を用いて作られるサブアレーベクトル/行列である。

SSP 法による相関抑圧では、各 \mathbf{r}_m における相関行列をサブアレー全体で平均化を行う。スナップショット処理であるアンサンブル平均を $E[\cdot]$ とし、一連の

前処理を表現すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{SSP} &= E \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{r}_m \mathbf{r}_m^H \right] \\ &= \mathbf{A}_1 \mathbf{S}_{SSP} \mathbf{A}_1^H + E \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{A}_m \mathbf{s} \mathbf{n}_m^H \right] \\ &\quad + E \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{n}_m \mathbf{s}^H \mathbf{A}_m^H \right] \\ &\quad + E \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{n}_m \mathbf{n}_m^H \right] \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\simeq \mathbf{A}_1 \mathbf{S}_{SSP} \mathbf{A}_1^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (12b)$$

ここで、添字 H は複素共役転置である。

コヒーレントな 2 波 ($d=2$) が入射する場合、SSP 法で処理後の信号相関行列 \mathbf{S}_{SSP} は次のように与えられる。

$$\mathbf{S}_{SSP} = \begin{bmatrix} |s_1|^2 & \rho_{SSP} s_1 s_2^* \\ \rho_{SSP}^* s_1^* s_2 & |s_2|^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで、 ρ_{SSP} は実効相関係数、 $*$ は複素共役である。

同様にインコヒーレントな 2 波が入射する場合、SSP 法などの処理は不要であり、相関係数は時空間距離に依らず一定 (ρ_c) となる。この場合の信号相関行列 \mathbf{S}_c を次のように表す。

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} |s_1|^2 & \rho_c s_1 s_2^* \\ \rho_c^* s_1^* s_2 & |s_2|^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

このとき、データ相関行列は、次のように表される。

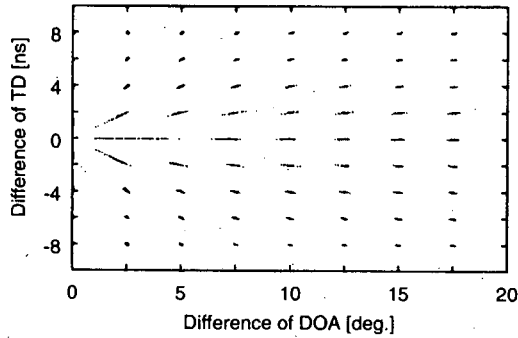
$$\mathbf{R}_c = \mathbf{A}_1 \mathbf{S}_c \mathbf{A}_1^H + E[\mathbf{A}_1 \mathbf{s} \mathbf{n}_1^H] + E[\mathbf{n}_1 \mathbf{s}^H \mathbf{A}_1^H] + E[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1^H] \quad (15a)$$

$$\simeq \mathbf{A}_1 \mathbf{S}_c \mathbf{A}_1^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (15b)$$

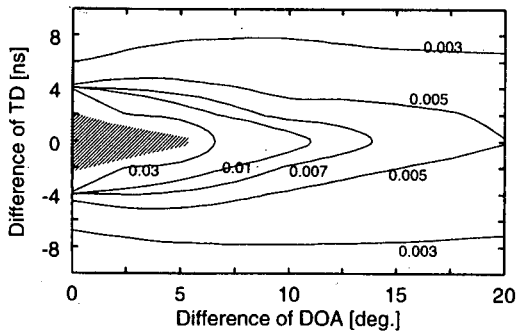
式 (12), (15) においてはスナップショット数が無限大ならば、式 (12b) と式 (15b) を得る。スナップショット数が少ない場合は式 (12a), (15a) に基づき分解能特性を評価しなければならない。本論文では、式 (12a) と式 (15a) を用いた特性評価を行う。

それぞれの相関行列を固有値解析の後用いる、2-D MUSIC 法の評価式は以下のとおりである。

$$P_{\text{music}}(\theta, t) = \frac{\mathbf{a}(\theta, t)^H \mathbf{a}(\theta, t)}{N^2 \sum_{h=d+1} |\hat{\mathbf{a}}(\theta, t)^H \mathbf{e}_h|^2} \quad (N^2 = N_f N_a) \quad (16)$$



(a) Detected signal locations



(b) Contour plot of RMSE

図1 無相関2波に対するシミュレーション結果 ($|\rho| = 0.0$, 信号#1($0^\circ, 10$ ns) 固定, $L_a = 3$, $L_f = 10$)

Fig. 1 Simulation results of uncorrelated two waves ($|\rho| = 0.0$, #1 signal is located at ($0^\circ, 10$ ns), $L_a = 3$, $L_f = 10$).

$e_h (h = d + 1, \dots, N^2)$ は雑音固有ベクトルである。

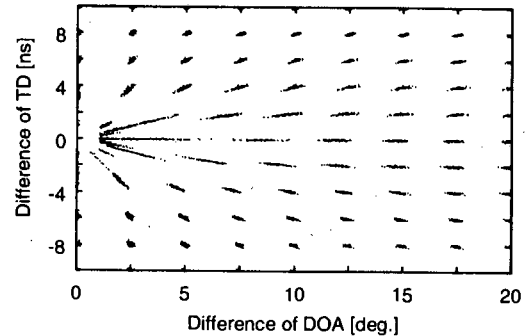
4. 誤差解析シミュレーション

ここでは信号#1を ($0^\circ, 10$ ns) に固定し, 信号#2を変化させ, 式(16)に基づく到来方向, 遅延時間推定を行う。また, 2波の受信電力は等しいものとし, SNR 20 dB のガウス雑音を加え, 100 スナップショットを取得するものとした。この状況における推定を100回 ($K = 100$) 繰り返し, 設定したパラメータ (θ_e, t_e) と推定されたパラメータ (θ_k, t_k) から, 次式を用いて RMSE を評価した。

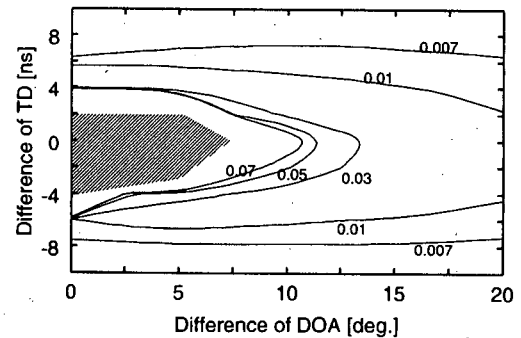
$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \{\mu_k\}^2}$$

$$(\mu_k = 2\pi(\Delta f |t_k - t_e| + \Delta g |\sin \theta_k - \sin \theta_e|))$$
(17)

インコヒーレントな場合 (相関係数1未満) では, 信号#2の変化に関係なく, 相関係数を一定とし, 信号パラメータを推定した。推定パラメータとしては, 半波長間隔3素子アレーにおいて, 周波数を 2.430~2.475 GHz を10ポイントでサンプリングしたとする。



(a) Detected signal locations



(b) Contour plot of RMSE

図2 相関を有する2波に対するシミュレーション結果 ($|\rho| = 0.9$, 信号#1($0^\circ, 10$ ns) 固定, $L_a = 3$, $L_f = 10$)

Fig. 2 Simulation results of correlated two waves ($|\rho| = 0.9$, #1 signal is located at ($0^\circ, 10$ ns), $L_a = 3$, $L_f = 10$).

信号#2の位置は, 到来方向 (DOA) を 2.5° , 遅延時間 (TD) を 2 ns 刻みで変化させ評価した。図1は無相関, 図2は高相関時のシミュレーション結果である。図1(a)と図2(a)は, 2波目の位置を様々に変化した場合の推定されたピーク位置をマーカで示した図である。2波目の信号は遅延時間, 到来方向とも図の軸の各グリッド位置上で推定を行った。この図から設定したパラメータに対する誤差の広がりがわかる。その推定結果を RMSE で評価したものが図1(b)と図2(b)である。誤差は信号#1に近接するほど大きくなっている。なお, 斜線の領域では2波が分離されなかったため, RMSE は評価していない。到来方向差が負の領域の誤差分布は, 信号#1に対して正領域の点対称となる。

これらの結果から, RMSE は信号#1との時空間距離が近いほど大きくなり, また, 相関係数が高くなると, 信号固有値の分離性が劣化し, RMSE が増大することがわかる。

コヒーレントな場合については, SSP法で相関抑圧

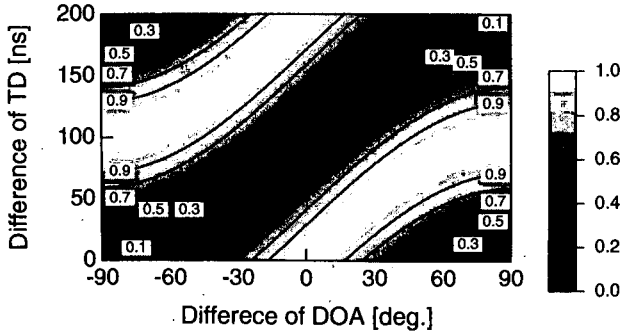


図3 SSP法による実効相関係数1 (信号#1(0°, 10 ns) 固定, $M = 2$)

Fig. 3 Effective signal correlation coefficient of the SSP1 (#1 signal is located at (0°, 10 ns), $M = 2$).

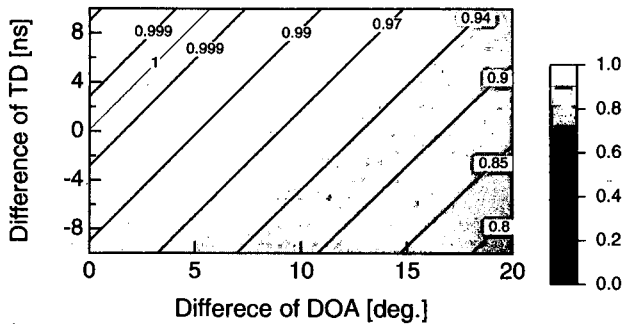


図4 SSP法による実効相関係数2 (信号#1(0°, 10 ns) 固定, $M = 2$)

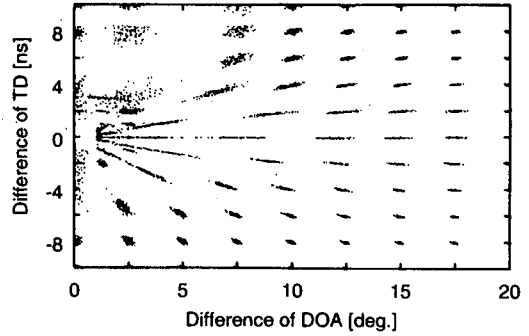
Fig. 4 Effective signal correlation coefficient of the SSP2 (#1 signal is located at (0°, 10 ns), $M = 2$).

を行い, RMSEを評価する. そのため, 半波長間隔4素子, 2.430~2.480 GHzの11ポイントのサンプリングとし, サブアレー数2で相関抑圧後のパラメータ(すなわち, サブアレーにおけるアレー長, 帯域幅, ポイント数)がインコヒーレントな場合と等しくなるように設定した. 図3と図4はサブアレー数2で抑圧した際の実効相関係数を式(18)を用いて計算した結果である.

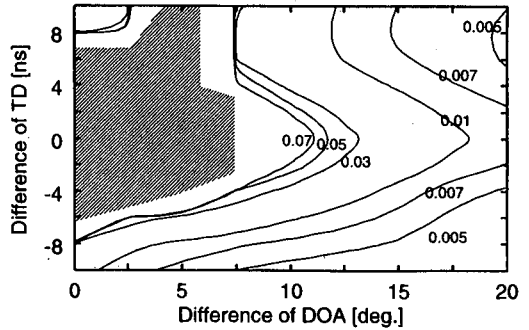
$$|\rho_{SSP}(i, j)| = \left| \frac{\sin[\pi M \{\Delta f dt - \Delta g ds\}]}{M \sin[\pi \{\Delta f dt - \Delta g ds\}]} \right| \quad (18)$$

$(dt = t_i - t_j, ds = \sin \theta_i - \sin \theta_j)$

図3のように相関係数は位置関係により変化し, また, 相関を抑圧できない領域 ($|\rho_{SSP}(1, 2)| = 1$) が連続的に出現する. 図4は図1, 図2に対応する領域を拡大したものである, 上記の条件による推定結果が図5(a)である. 同図において, 相関抑圧効果の得られない領



(a) Detected signal locations



(b) Contour plot of RMSE

図5 コヒーレント2波に対するシミュレーション結果 (SSP法適用, 信号#1(0°, 10 ns) 固定, $L_a = 4$, $L_f = 11$, $M = 2$)

Fig. 5 Simulation results of coherent two waves (the SSP is applied, #1 signal is located at (0°, 10 ns), $L_a = 4$, $L_f = 11$, $M = 2$).

域 ($|\rho_{SSP}(1, 2)| = 1$) では, 2波が分離されない. この場合のRMSEは図5(b)となる. 誤差分布は相関抑圧効果の変化と信号間の時空間距離双方の特徴を含む変化を示す.

更に, SSP法より高い相関抑圧効果を実現できるMSSP法は, 式(19)のように定義され, その抑圧効果は式(20)より求められる.

$$R_{MSSP} = \frac{R_{SSP} + JR_{SSP}^* J}{2} \quad (19)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\rho_{MSSP}(i, j)| = |\rho_{SSP}(i, j)| |\cos(\alpha - \beta)| \quad (20)$$

$$\alpha = \angle s_i - \angle s_j$$

$$\beta = \pi \{ (2f_1 + (L_f - 1)\Delta f) dt - (L_a - 1)\Delta g ds \}$$

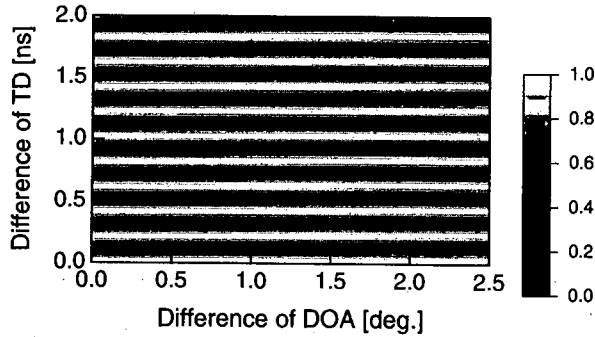


図6 MSSP法による実効相関係数(信号#1(0° , 10 ns)固定, $L_a = 4$, $L_f = 11$, $M = 2$, 信号間位相差 0°)

Fig. 6 Effective signal correlation coefficient of the MSSP (#1 signal is located at (0° , 10 ns), $L_a = 4$, $L_f = 11$, $M = 2$, phase difference of signals is 0°).

ここで, $\angle s_k$ は s_k の位相とする. 式(20)より, 図6が得られる. MSSP法の抑圧効果は信号間の位相差などによっても変化し, 同じ時空間距離でも分離可能な場合と分離不可能な場合が生じる. これは, MSSP法の相関抑圧効果が SSP法の相関抑圧効果を包絡線とする \cos 波で構成されるからである. この \cos 波は信号パラメータによって位相が変化するため, 場合によっては SSP法と同等の相関抑圧効果となる. つまり, MSSP法は SSP法より精度良い推定が期待できるが, すべての領域で SSP法を超える抑圧効果が得られるわけではない点に注意が必要である. したがって, MUSIC法, ESPRIT法などの相関抑圧前処理を必要とする手法を用いる際には, MSSP法を用い, いくつかのパラメータ設定 (L_a , L_f , M など) による推定が不可欠である.

5. むすび

インコヒーレントな問題では, 信号間の時空間距離さえ考慮すれば精度良い推定が可能である. しかし, SSP法などを必要とするコヒーレントな問題では信号間の時空間距離を考慮するだけでなく, 実効相関係数

が抑圧されるようなパラメータを選ばなければならない. また, 相関抑圧効果を高くするために MSSP法を用いれば誤差は減りうるが, SSP法と同様な考慮はしておく必要がある.

文献

- [1] R.O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.AP-34, no.3, pp.276-280, March 1986.
 - [2] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT - Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, vol.37, no.7, pp.984-995, July 1989.
 - [3] J. Fuhl, J.P. Rossi, and E. Bonek, "High-resolution 3-D direction-of-arrival determination for urban mobile radio," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol.45, no.4, pp.672-682, April 1997.
 - [4] N.D. Zoltowski, M. Haardt, and C.P. Mathews, "Closed-form 2-D angle estimation with rectangular arrays in element space or beamspace via unitary ESPRIT," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.44, no.2, pp.316-328, Feb. 1996.
 - [5] Y. Ogawa, N. Hamaguchi, K. Ohshima, and K. Itoh, "High-resolution analysis of indoor propagation structure," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E78-B, no.11, pp.1450-1457, Nov. 1995.
 - [6] 菊地秀生, 菊間信良, 稲垣直樹, "2D Unitary ESPRITを用いた多重波の到来方向と伝搬遅延時間の同時推定," *信学技報*, A-P97-78, no.7, pp.53-60, July 1997.
 - [7] G.G. Raleigh and T. Boros, "Joint space-time parameter estimation for wireless communication channels," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.46, no.5, pp.1333-1343, May 1998.
 - [8] T.J. Shan, M. Wax, and T. Kailath, "On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals," *IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, vol.ASSP-33, no.4, pp.806-811, Aug. 1985.
 - [9] R.T. Williams, S. Prasad, A.K. Mahalanabis, and L.H. Sibul, "An improved spatial smoothing technique for bearing estimation in a multipath environment," *IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, vol.ASSP-36, no.4, pp.425-432, April 1988.
- (平成12年5月11日受付, 8月1日再受付)