論　説

安定マッチングの存在の非構成的証明について

高　宮　浩　司*

概 要

1 対多契約付きマッチングにおける安定マッチングの存在について非構成的かつ初頭的な証明を与える．これは Sotomayor (1996) による 1 対 1 マッチングにおける同様の証明を一般化したものである．

1　背景

2 部マッチングの種々のモデルにおける安定マッチングの存在の証明はいくつかの種類に大別できる．もっとも代表的かつ歴史が古いのは Gale–Shapley のアルゴリズムにもとづいた構成的な証明である (Gale and Shapley, 1962; Roth, 1984; Blair, 1988; Hatfield and Milgrom, 2005)．また比較的新しいものとして，束論における不動点定理を応用した証明 (Adachi, 2000; Fleiner, 2003; Echenique and Oviedo, 2004, 2006; Hatfield and Milgrom, 2005) がある．後者のタイプの証明は非構成的であり洗練された数学的技法にもとづく．なかんづく注目すべきは，非構成的かつ洗練された数学的技法にうったえない初頭的な証明である．著者の知る限りこのタイプの証明は Sotomayor (1996) のそれが唯一のものであるが，これは 1 対 1 マッチングについてのみなされており，より一般的なマッチングモデルには拡張されていないようである．本稿ではこの証明を一般化し，1 対多契約付きマッチングにおける安定マッチングの存在証明を与える．

2　予備知識

1 対多契約付きマッチングのモデルを以下に導入する．契約付きマッチングは多対多のかたちで Roth (1984) によって導入され，Blair (1988) によってより一般的に研究された．その特殊ケースである 1 対多契約付きマッチングは Hatfield and Milgrom (2005) によって再定式化された．本稿での定式化は後者の流儀にもとづく．

W, F, Θ をそれぞれ非空な有限集合とする．W を**人員**の集合，F を**企業**の集合とする．さらに X を $W \times F \times \Theta$ の非空な部分集合とし，これを**契約**の集合と

*新潟大学経済学部，950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地，takamiya@econ.niigata-u.ac.jp.

する．X の元 x に対して，x の W 成分と F 成分とをそれぞれ x_W，x_F と表記する．これはすなわち x とは人員 x_W と企業 x_F との間の契約であることを意味する．また x の Θ 成分は契約の内容を表わすものと解釈される．μ を X の部分集合とするとき，μ を**マッチング**と呼ぶ．マッチング μ と，W の元 w と, F の元 f とに対して $\mu(w)$ を $\{x \mid x \in \mu,\ x_W = w\}$，$\mu(f)$ を $\{x \mid x \in \mu,\ x_F = f\}$ とそれぞれ定義する．

各主体 $i \in W \cup F$ に対して，その選好が X 上の選択関数 $\mathscr{C}_i$ によって与えられているものとする[1]．これは以下の 3 条件をみたすものとする：(1) $\forall i \in W \cup F,\ \forall \mu \subset X,\ \mathscr{C}_i(\mu) \subset \mu(i)$. (2) $\forall w \in W,\ \forall \mu \subset X,\ |\mathscr{C}_w(\mu)| \leq 1$. (3) 各 $\mathscr{C}_i$ は整合的かつ代替的である[2]．以上．とくに条件 (2) はここで考えられているのが 1 対多マッチングであることを意味する．条件 (3) について，一般に選択関数が整合的かつ代替的であることとはそれが径路独立的[3] であることと同等である．

マッチング μ が**個人合理的**であるとは $\forall i \in W \cup F,\ \mathscr{C}_i(\mu) = \mu(i)$ であることをいう．個人合理的なマッチングの集合を $\mathscr{I}$ と表記する．

マッチング μ に対して，集合 $B(\mu)$ を $\bigcup_{(w,f)\in W\times F}\bigl\{x \mid x \in X \setminus \mu,\ x \in \mathscr{C}_f(\mu \cup \{x\}) \cap \mathscr{C}_w(\mu \cup \{x\})\bigr\}$ と定義する．マッチング μ が**安定**であるとは以下の 2 条件がみたされることをいう[4]：(1) μ が個人合理的である．(2) $B(\mu) = \emptyset$. 以上．安定マッチングの集合を $\mathscr{S}$ と表記する．

Roth (1984) および Blair (1988) により，選択関数についての上記の仮定がみたされる限り，つねに安定マッチングが存在することが知られている．この存在証明は Gale–Shapley のアルゴリズムの拡張版によるものである．さらに Hatfield and Milgrom (2005) は Adachi (2000) の論法を拡張し束論的不動点定理を応用した証明を与えている[5]．

3 結果

マッチング μ に対して集合 $\sigma(\mu)$ を $\{x \mid x \in X,\ \mu(x_W) = \emptyset\}$ と定義する．マッチング μ が**単純**であるとは以下の 2 条件がみたされることをいう：(1) μ が個人合理的である．(2) $B(\mu) \subset \sigma(\mu)$. 以上．単純マッチングの集合を $\mathscr{S}^0$ と表記する．

2^X 上の 2 項関係 $\succeq_F$ を以下のように定義する：任意の 2 つのマッチング μ, ν

---

[1]一般に，$\mathscr{C}$ が集合 S 上の**選択関数**であるとは，$\mathscr{C}$ が 2^S から 2^S への単価関数であり $\forall T \in 2^S$, $\mathscr{C}(T) \subset T$ がみたされることをいう．

[2]X 上の選択関数 $\mathscr{C}$ が**整合的**であるとは以下が成り立つことをいう：$\mathscr{C}(T) \subset S \subset T \subset X \Rightarrow \mathscr{C}(T) = \mathscr{C}(S)$. $\mathscr{C}$ が**代替的**であるとは以下が成り立つことをいう：$S \subset T \subset X \Rightarrow \mathscr{C}(T) \cap S \subset \mathscr{C}(S)$.

[3]X 上の選択関数 $\mathscr{C}$ が**径路独立的**であるとは，任意の $S, T \subset X$ に対して $\mathscr{C}(S \cup T) = \mathscr{C}(\mathscr{C}(S) \cup T)$ がみたされることをいう．

[4]本稿での安定性の定義は，契約付きマッチングの研究で標準的な Hatfield and Milgrom (2005) による定義と異なる．一般的にこの定義は Hatfield and Milgrom のそれよりも弱いが，(ここで仮定されているように) 選好が整合性および代替性をみたすときには，これらの定義は同等である (Klaus and Walzl, 2009).

[5]ただし Roth (1984) および Blair (1988) の証明は多対多マッチングでなされ，Hatfield and Milgrom (2005) の証明は 1 対多マッチングでなされている．

に対して，$\mu \succeq_F \nu \Leftrightarrow (\forall f \in F,\ \mu(f) = \mathscr{C}_f(\mu \cup \nu))$. 以上．このとき，選択関数についてのよく知られた結果により，$\mathscr{C}_f$ が整合的かつ代替的であることから，$\succeq_F$ は $\mathscr{I}$ 上の順序[6] となる．

補題 1 $\mathscr{S}^0$ における $\succeq_F$ 極大元[7] が存在する．

証明 $\emptyset \in \mathscr{S}^0$ であるので $\mathscr{S}^0$ は非空である．仮定により X は有限集合であるので当然 $\mathscr{S}^0$ も有限集合である．$\succeq_F$ は推移的であるので非循環的である．以上より標準的な論法により，$\succeq_F$ 極大元が存在する．□

補題 2 μ を $\mathscr{S}^0$ における $\succeq_F$ 極大元の 1 つとすると，μ は安定マッチングである．

証明 μ が安定ではないと仮定する．すると $\mu \in \mathscr{S}^0 \subset \mathscr{I}$ であるから，$B(\mu) \neq \emptyset$ がしたがう．いま集合 $B(\mu)$ から任意に元 x を取り出し，$x_W = \bar{w}$ とおく．すると明らかに $|\mathscr{C}_{\bar{w}}(B(\mu))| = 1$ であるから，$\mathscr{C}_{\bar{w}}(B(\mu)) = \{\bar{x}\}$ とおく．さらに $\bar{x}_F = \bar{f}$ とおく．$\mu \in \mathscr{S}^0$ であるから，$\bar{x} \in \sigma(\mu)$ であり，したがって $\mu(\bar{w}) = \emptyset$ である．いまマッチング $\tilde{\mu}$ を以下のように定める：$\tilde{\mu} = \bigcup_{f \in F} \mathscr{C}_f(\mu \cup \{\bar{x}\})$. このとき以下の 2 つの事実を注意する：第一に，$\bar{f}$ に対しては $\bar{x} \in \tilde{\mu}(\bar{f}) = \mathscr{C}_{\bar{f}}(\mu \cup \{\bar{x}\}) \neq \mu(\bar{f})$ である．($\bar{x} \in B(\mu)$ より $\bar{x} \in \mathscr{C}_{\bar{f}}(\mu \cup \{\bar{x}\})$ であるから．) 第二に，$f \neq \bar{f}$ なる f に対しては，$\tilde{\mu}(f) = \mu(f)$ である．

以下で $\tilde{\mu} \in \mathscr{S}^0$ がみちびかれることを示す．$\tilde{\mu} \notin \mathscr{S}^0$ と仮定する．すると，$\tilde{\mu} \in \mathscr{I}$ であるから，ある $y \in X$ が存在し，$y \in B(\tilde{\mu})$ かつ $y \notin \sigma(\tilde{\mu})$ が成り立つ．$y_W = \tilde{w}$ および $y_F = \tilde{f}$ とおく．このとき以下の (i) および (ii) の 2 つの場合が考えうる．

(i) $\tilde{w} \neq \bar{w}$ のとき．以下で，$y \in B(\mu)$ かつ $y \notin \sigma(\mu)$ となることで $\mu \notin \mathscr{S}^0$ となり矛盾をみちびくことを示す．まず，$y \notin \sigma(\tilde{\mu})$ なので $\tilde{\mu}(\tilde{w}) \neq \emptyset$ であり，かつ $\tilde{w} \neq \bar{w}$ と仮定されていることから，2 つの事実がしたがう：第一に $\mu(\tilde{w}) = \tilde{\mu}(\tilde{w})$ である．この事実は以下で繰り返し用いる．第二に $y \notin \sigma(\mu)$ である．これは $\tilde{\mu}(\tilde{w}) \neq \emptyset$ と第一の事実とからただちにしたがう．

いま $y \in B(\mu)$ を示すに，3 つの事実を示す．第一に $y \in X \setminus \mu$ を示す．$y \in B(\tilde{\mu})$ より $y \in X \setminus \tilde{\mu}$ であるから，$\{y\} \neq \tilde{\mu}(\tilde{w})$ である．$\mu(\tilde{w}) = \tilde{\mu}(\tilde{w})$ なので $\{y\} \neq \mu(\tilde{w})$ がしたがう．よって $y \in X \setminus \mu$ である．第二に $y \in \mathscr{C}_{\tilde{w}}(\mu \cup \{y\})$ を示す．$y \in B(\tilde{\mu})$ より $y \in \mathscr{C}_{\tilde{w}}(\tilde{\mu} \cup \{y\})$ である．$\mu(\tilde{w}) = \tilde{\mu}(\tilde{w})$ なので $y \in \mathscr{C}_{\tilde{w}}(\mu \cup \{y\})$ がしたがう．第三に $y \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{y\})$ を示す．$y \in B(\tilde{\mu})$ より $y \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\tilde{\mu} \cup \{y\})$ である．当然 $\tilde{f} \neq \bar{f}$ か $\tilde{f} = \bar{f}$ かのいずれかである．もし前者であるとすると，$\tilde{\mu}$ の構築より $\tilde{\mu}(\tilde{f}) = \mu(\tilde{f})$ であるので $y \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{y\})$ がしたがう．もし後者であるとすると，再び $\tilde{\mu}$ の構築により，$\tilde{\mu}(\tilde{f}) = \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{\bar{x}\})$ であるから，径路独立性により，

[6] 二項関係 $\succeq$ が**順序**であるとは，反射的 $(a \succeq a)$ かつ反対称的 $((a \succeq b \wedge b \succeq a) \Rightarrow a = b)$ かつ推移的 $((a \succeq b \wedge b \succeq c) \Rightarrow a \succeq c)$ であることをいう．

[7] 一般に順序 $\succeq$ の集合 S における**極大元**とは，$(\forall y \in S,\ y \succeq x \Rightarrow y = x)$ なる S の元 x のことをいう．

$y \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\tilde{\mu} \cup \{y\}) = \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{\bar{x}\}) \cup \{y\}) = \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{\bar{x}, y\})$．ここで代替性より $y \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{y\})$．以上，第一から第三により $y \in B(\mu)$ と結論する．これとすぐ前の段落の最後で指摘した事実 $(y \notin \sigma(\mu))$ とを合わせて $\mu \notin \mathscr{S}^0$ を得るが，これは矛盾である．

(ii) $\tilde{w} = \bar{w}$ のとき．$y \in B(\tilde{\mu})$ より，以下の 3 つの事実が成り立つ：第一に $y \in X \setminus \tilde{\mu}$．第二に $y \in \mathscr{C}_{\tilde{w}}(\tilde{\mu} \cup \{y\})$．第三に $y \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\tilde{\mu} \cup \{y\})$．以上．以下でこれら第一から第三の事実の含意を見る．$\tilde{\mu}(\tilde{w}) = \{\bar{x}\}$ なので，第一の事実より $y \neq \bar{x}$ である．この結論を事実 A と呼ぶ．第二の事実と径路独立性により $y \in \mathscr{C}_{\tilde{w}}(\mu \cup \{\bar{x}, y\})$ である．したがって代替性より $y \in \mathscr{C}_{\tilde{w}}(\mu \cup \{y\})$ である．これを事実 B と呼ぶ．同様に代替性より $y \in \mathscr{C}_{\tilde{w}}(\{\bar{x}, y\})$ でもある．これを事実 C と呼ぶ．$\tilde{f} \neq \bar{f}$ のとき，$\tilde{\mu}(\tilde{f}) = \mu(\tilde{f})$ であるので，第三の事実から $y \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{y\})$ がしたがう．$\tilde{f} = \bar{f}$ のとき，$\tilde{\mu}(\tilde{f}) = \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{\bar{x}\})$ であるので，第三の事実と径路独立性とから $y \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{\bar{x}, y\})$ である．よって代替性より $y \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{y\})$ を得る．したがって $\tilde{f}$ が $\bar{f}$ に等しいか否かにかかわらず $y \in \mathscr{C}_{\tilde{f}}(\mu \cup \{y\})$ であることが結論する．これを事実 D と呼ぶ．

ところで，この証明の第一段落で指摘したように $\mu(\tilde{w}) = \emptyset$ である．よって $y \in X \setminus \mu$ である．これと事実 B と D とにより $y \in B(\mu)$ がしたがう．ここで，そもそも $\bar{x}$ の定義により $\{\bar{x}\} = \mathscr{C}_{\tilde{w}}(B(\mu))$ であるから，代替性により $\{\bar{x}\} = \mathscr{C}_{\tilde{w}}(\{\bar{x}, y\})$ である．一方で，事実 C により $\{\bar{y}\} = \mathscr{C}_{\tilde{w}}(\{\bar{x}, y\})$ であるから，結局 $\bar{x} = y$ ということになるが，これは事実 A に矛盾する．

以上 (i) および (ii) より $\tilde{\mu} \in \mathscr{S}^0$ が結論する．ところで，$\tilde{\mu} \succeq_F \mu$ である．(なぜなら $f \neq \bar{f}$ なる f については $\tilde{\mu}(f) = \mu(f)$ であるし，$\bar{f}$ については，径路独立性により $\mathscr{C}_{\bar{f}}(\tilde{\mu} \cup \mu) = \mathscr{C}_{\bar{f}}(\mu \cup \{\bar{x}\}) = \tilde{\mu}(\bar{f})$ となるからである．) しかし μ は $\mathscr{S}^0$ における $\succeq_F$ 極大元であるので，$\tilde{\mu} = \mu$ でなければならないが，これは矛盾である．□

補題 1 および 2 より以下がしがたう．

定理 安定マッチングが存在する．

4 注意

1. 本稿における単純マッチングの概念は Sotomayor (1996) が 1 対 1 マッチングにおいて導入したものを直接拡張したものである．証明の全体的の流れも Sotomayor のそれにしたがっている．

2. よく知られているように $\mathscr{S}$ においては唯一の $\succeq_F$ 最大元[8] が存在する (Roth, 1984; Blair, 1988; Hatfield and Milgrom, 2005)．明らかに $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}^0$ であるから，$\mathscr{S}^0$ における $\succeq_F$ 極大元はこの最大元に他ならない．

[8] 一般に順序 $\succeq$ の集合 S における**最大元**とは，$(\forall y \in S,\ x \succeq y)$ なる S の元 x のことをいう．

3. 上の証明において W と F との役割を交換することはできない．また，この証明の論法をそのまま多対多マッチングに拡張することもできない．多対多マッチングにおける同様の証明は著者の知る限り未解決の問題である．これは 1 対 1 マッチングでの安定マッチングを計算する Gale and Shapley (1962) によるアルゴリズムが，より一般的なマッチングモデルに直接的に拡張しうることとは対照的である．

謝辞

科研費基盤研究 (C)26380234 による助成に謝意を表する．

参考文献

[1] Adachi, H. (2000) On a characterization of stable matchings. *Economics Letters* 68, 43–9.

[2] Blair, C. (1988) The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners. *Mathematics of Operations Research* 13, 619–28.

[3] Echenique, F. and Oviedo, J. (2004) Core many-to-one matchings by fixed point methods *Journal of Economic Theory* 115, 358–76.

[4] Echenique, F. and Oviedo, J. (2006) A theory of stability in many-to-many matching markets. *Theoretical Economics* 1, 233–73.

[5] Fleiner, T. (2003) A fixed-point approach to stable matchings and some applications. *Mathematics of Operations Research* 28, 103–26.

[6] Gale, D. and Shaley, L. S. (1962) College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly* 69, 9–15.

[7] Hatfield, J. W. and Milgrom, P. R. (2005) Matching with contracts. *American Economic Review* 95, 913–35.

[8] Klaus, B. and Walzl, M. (2009) Stable many-to-many matchings with contracts. *Journal of Mathematical Economics* 45, 422–34.

[9] Roth, A. E. (1984) Stability and polarization of interests in job matching. *Econometrica* 52, 47–57.

[10] Sotomayor, M. (1996) A non-constructive elementary proof of the existence of stable marriages. *Games and Economic Behavior* 13, 135–7.