小学校における「図形の面積公式」指導の系統と学習の困難点
―「学校数学における知識の再体系化の３類型」による分析―

Teaching Sequence and Learning Difficulties of "Area Formulas for Geometric Figures" in Elementary School: Analysis from "3 Types of the Re-systematization of Knowledge in School Mathematics"

井　口　　　浩

１　はじめに

図形の面積公式は，対象図形を，面積公式の分かる既習の図形に変形して考え出される。この学習は，比較的児童が意欲的に取り組む。一方，第５学年から第６学年に上がり，「円の面積」の学習となると，大変難しく感じられる場面があると思われる。研究授業で「円の面積公式づくり」が取り上げられると，「とても難しい題材に挑戦しましたね。」という声がよく聞かれる。果たしてその難しさとは何であろうか。授業者はその難しさやその背景を自覚して授業改善に取り組んでいるだろうか。

文部科学省は，「主体的・対話的で深い学び」の実現を新学習指導要領の理念に位置付け，それを授業改善の視点としている。[1)] この学びが児童・生徒一人一人に成立する授業へ改善するためには，一つ一つの単元で，上述の学びの三側面を具体的に捉える必要がある。学校数学における「深い学び」は，数学の本質（価値，面白さ）を数学的推論によって捉えることであると考えられるが，例えば「図形の面積公式」の学習で「深い学び」が成立するとはどういうことなのであろうか。

「図形の面積公式」について指導する際，新学習指導要領の指導事項における次の二つの変更点を踏まえる必要がある。一つは，思考力・判断力・表現力として，「図形を構成する要素などに着目し，基本的な図形の面積の求め方を見いだすとともに，その表現を振り返り，簡潔かつ的確な表現に高め，公式として導くこと」が具体的に示されたことである。もう一つは，「面積の求め方」について，「考える」が「理解する」に改訂されたことである。これらの変更点や学習の困難点は，「深い学び」とどう関係するのであろうか。

2018.6.5　受理

２　本稿の目的及び目標

筆者は, 平成 30 年に, 神林信之氏（鎌倉女子大学）と星野将直氏（愛知淑徳大学）と共に，学校数学における「深い学び」概念を理論的かつ具体的に検討し, それに対する一つの考えを論文[2)]で発表した（cf. 本稿末掲載資料）。その際，主に金子忠雄氏（故新潟大学名誉教授）の学校数学における数学的諸活動と問題との関係に関する研究の知見を考察した。その考察で得られた視点から，小学校第５学年「図形の面積」等いくつかの単元の教材を分析・解釈しながら，「深い学び」概念について具体的に説明した。

上述の論文の共同執筆活動を通して，筆者らは，当該単元に内在している本質は，その単元と関連する単元との関係の中でより明確に捉えられ，同時にその本質を追究するための学習課題も，それらの関係の中で見えてくるということを改めて学んだ。

算数・数学の実際の授業で「深い学び」を実現できることは「顕在的な授業力」の表れであるのに対し，その実現を目指し「深い学び」を捉える視点

をもって教材を研究し指導案を作成できることは「潜在的な授業力」に値する。[3]

本稿の目的は，前章1で述べた問題意識を基に，主に小学校第５・第６学年の「図形の面積公式」の教材を分析し，授業改善の視点を得ることである。そのために，次の２点を目標とする。

①小学校第５・第６学年の「図形の面積公式」の指導系統を明らかにする。
②①を通して，特に第６学年の「円の面積公式」における学習の困難点を具体的に示し，授業改善の視点を提案する。

以上のことは，教師が「潜在的な授業力」を自ら育む上で一助となると期待される。

３　理論的視点

本章では，前章２で触れた筆者らの論文について，その要点を述べ，教材及び指導の系統を分析する上で拠り所とする理論的視点を示す。

3.1　学校数学における「深い学び」概念に対する一つの見解

井口ら（2018）は，文部科学省が示している「主体的･対話的で深い学び」の意味を理解するために，まず，中央教育審議会　初等中等教育分科会　教育課程部会　算数・数学ワーキンググループ（平成28年8月26日 p.159）[4] の解説と，金子ら（2002）の「確かな学力の育成を可能にする数学科授業のイメージ」(cf. 図1）[5] の両者を照らし合わせた。図1は，包容的相対的な『開いた学校数学』では，個性的協働的な数学の学びに向かうという考えの下，数学科授業における「問題解決活動の意図別類型」と「主体性･社会性」との関係を示したものである。

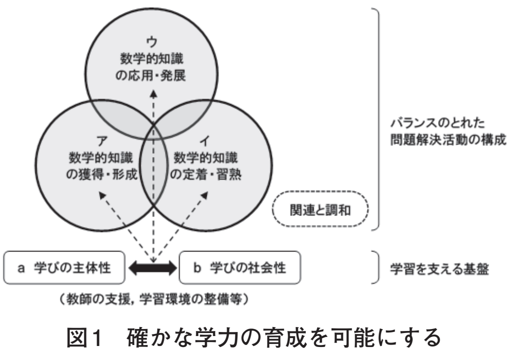


図1　確かな学力の育成を可能にする数学科授業のイメージ

考察の結果，次のように捉えられた（以下引用。ただし，下線は本稿筆者）。

> 「主体的な学び」は，対象と関わる自己を形成することであるため，「a　学びの主体性」に相当する。「対話的な学び」は，対象を介して他者との関係を構成することであるため，「b　学びの社会性」に相当する。「深い学び」は，対象そのものに対するアプローチや対象そのものの構成をすることであるため，それは，「数学における問題解決活動の意図」が指す「ア　知識を獲得・形成すること」や「イ　知識を定着・習熟すること」や「ウ　知識を応用･発展すること」であり,「ア」「イ」「ウ」は学びの深さの程度と関係すると考えられる。（井口，神林，星野，2018，p.343[2]）

下線部を踏まえて，《数学的知識を獲得・形成し，定着・習熟し，さらに応用・発展する》という数学の学びを支えるとされる「意図別問題解決活動」の観点から，学校数学における「深い学び」概念の考察を進めた。具体的には，主に，金子氏と教育学部数学科４年生がゼミナールにおいて，認知科学の視点を入れて，数学学習における知識形成の在り方について検討しまとめた論文（1987-1991）[6] [7] [8] [9] を分析・検討した。その結果を次のように整理した（以下引用。ただし，図は一部を掲載し番号を本稿に合わせて改訂。下線は本稿筆者）。

問題解決活動の意図	知識形成の機構
数学的知識の ア　獲得・形成	i　数理の形成 （広げる）
	ii　数理の理解：再体系化 （深める）
イ　定着・習熟	類似場面への 数理の選択・適用
ウ　応用・発展	異質場面への 数理の選択・活用

図2　問題解決活動の意図と知識形成機構との対応

> （前略）再体系化が数学的知識への理解を「深める」ことであることから，《算数科・数学科授業において，数学的知識が再体系化された状態で獲得･形成されているとき，はじめて「深い学び」をしている》といえる。その上で《「深い学び」の質（学びの深まり）は，獲得・形成された数学的知識がどのようにどの程度定着･習熟され応用･発展されるかという，知識の発展性と有用性の認

識の観点から解釈される》といえる。（井口, 神林, 星野，2018，p.345 [2)]）

なお，下線部の「数学的知識の獲得・形成」の意味を補足すると，以下のように要約される。

ⅰ　数理の形成：既有の知識体系をもって数学の問題の定式化及び解決にあたるが，数学的知識を適用しようとしても解決が困難な場合，新しい数学的知識を導入して解決を図る。それは，事象の解決（解明）を果たしつつ，一方で既習の数学的知識と，数学的な見方・考え方とを基に新しい数学的な概念や原理をつくりあげることである。

ⅱ　数理の理解（再体系化）：得られた数理と既有の知識体系とをつき合わせて（接続して）新しい知識体系をつくる。

（井口，神林，星野，2018，pp.345-346 [2)]）

3.2　学校数学における知識の再体系化の３類型

井口ら（2018）は, 学校数学における「深い学び」に不可欠な「数学的知識の再体系化」について詳しく考察した。

金子氏は，1984 年に認知的葛藤に基づいた問題の発生と解決の様相を，学校数学の連続した指導系列の要所，要所で実現する立場から検討して，その様相類型を三つに整理している。それが「学校数学における知識の再体系化の３類型」であり，[10)]「知識の構造の変容」を具体的に示すものである。それは, 目から鱗が落ちる経験をもたらし数学の本質（価値, 面白さ）の追究を促す視点となると考えられる。各類型の名称については，1989 年以降,「累積包括型」,「併立統合型」,「飛躍回帰型」と固定して用いられている。[11)]

以下に，それぞれの内容を示す。なお，文中で用いた記号は，本習の中心内容を M2，それに対する先行の関連内容を M1 及び M1´ としている。

a）累積包括型

累積包括型とは，M1 に含まれている中心となる数学的原理がより広い M2 にも一貫して通用することに伴って，数学的知識の枠組みが拡大するタイプである。

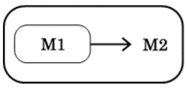


図３　累積包括型

b）併立統合型

併立統合型とは，M1 に含まれている数学的原理と M1´ に含まれている数学的原理が全く対立していて，それにより互いの特徴が際立つとともに，それらの原理を統合して新しく M2 をつくるタイプである。

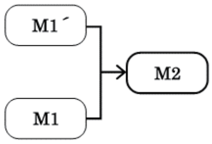


図４　併立統合型

c）飛躍回帰型

飛躍回帰型とは，M1 と M2 との間では，中心となる数学的原理に飛躍があるが，M1 から態度変更した点を明確にして M2 をつくりつつ，M2 の視点から M1 を捉え直すタイプである。

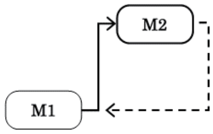


図５　飛躍回帰型

４　「図形の面積公式」の教材分析

本章では, 小学校算数における「図形の面積公式」の学習の位置付けを概観した上で，第５・第６学年の教材を,「学校数学における知識の再体系化の３類型」（金子ら，1989）の視点から分析し，その指導系統の一つの考えを述べる。

筆者は，平成 29 年に，大橋博氏（新潟市立新津第一小学校）と共に第６学年単元「円の面積とその求め方」の授業デザインの開発に取り組むために，事前に第５・第６学年の「図形の面積公式」の教材を分析した。[12)] 本稿では，その内容に検討と修正を重ねた結果を, できるだけ詳細に示すこととする。

4.1　小学校算数における「図形の面積公式」の位置付けと指導系統

本節では，金子（1993）が述べている「学校数学における測定概念の類型と指導系統」を，小学校算数の内容に焦点付けて示す。

同氏は,「学校数学では計量と計測をまとめて「測定」としている。」と述べ，以下のように，測定を２類型で捉え，指導上の課題を提言している。

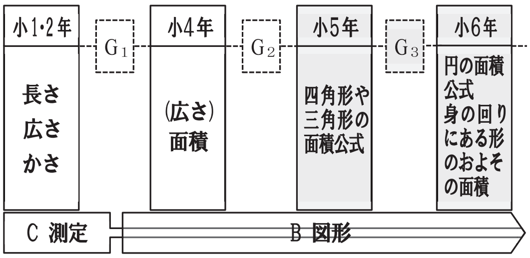
測定（計量・計測）
- 測定の種類とその使用方法に重点をおいた具体的・操作的測定（A 型）
- 測定方法に依存せず，測定原理に重点をおいた抽象的・理念的測定（B 型）

図６　学校数学における「測定」の類型

測定の学習活動は，小学校低学年ではA型であるが小学校高学年以降はB型になる。A型からB型への切り替えをどのように指導するか，それが小学校教師の大きな課題である。その理由として，小学校で行われている「大きさ比べ」という学習活動において，「大きさ」の中には，「長さ」，「広さ」，「かさ」という１次元量，２次元量，３次元量が混在しているからである。また，A型の立場からすれば，「長さ」と「かさ」はその測定方法の完成度が高い（測定器具がある）のに比べ，「面積」は測定方法がはっきりしないからである。
（金子，1993，p.45[13]，図タイトル・下線本稿筆者）

本稿における話題の中心は，下線部で指摘されている「広さ比べ」の指導上の課題が克服された後の指導内容である。つまり，それは，直接比較から任意単位による間接比較へ，さらに普遍単位による間接比較へと納得的に移行された後の指導内容である。

さらに，同氏は，各学校段階における面積指導の系統を示すとともに，その発展の契機となるギャップ（gap）を明らかにしている。以下に，その一部を引用する。ただし，図の学年区分や内容等は，本稿筆者が新学習指導要領に基づいて改変した。



※G_1～G_3は各段階の間に存在しているギャップ
※小学校算数科における基本図形の面積の位置付けは，学習指導要領（平成20年告示・平成27年一部改正反映後）における「B　量と測定」から，新学習指導要領では「B　図形」へと変更されたが，学年ごとでは，第４学年で正方形，長方形を，第５学年で三角形，平行四辺形，台形，ひし形を，第６学年で円を対象とすることは変わっていない。

図７　小学校段階における面積指導の系統
（金子，1993，p.45[13] の図を本稿筆者改変）

G_1について：２次元量の存在をどう示すかがポイントである。１次元量との違いを明確にみせる必要がある。平面図形に付随する幾何学量には１次元量と２次元量とが混在しているので，１次元量と２次元量に分離させることが大切である。（中略）

G_2について：図形の「広さ」を図形の「面積」と捉え直す点に学習価値を見いださねばならない。面積公式の存在とその導出の仕方が重要な指導内容である。そして，面積公式は互いに直交する２つの線分の長さ（これを求積決定要素と呼ぶ）の積で構成されていることを納得させなければならない。（中略）

G_3について：平面図形には，下のように“閉じた直線図形”と“閉じた曲線図形”とがある。（図は本稿筆者略）閉じた曲線図形の代表として円を扱うのである。円にも面積が存在すること，しかも長方形，三角形，平行四辺形などと同様に面積公式で求めることができることに学習価値がある。直線図形には面積公式が存在したが，曲線図形にも面積公式が存在するのだろうか。もしくは面積公式が作れるのだろうか，という課題意識をもたせることが大切である。面積が存在するのと，面積公式が作れるのとは別問題なのである。
（金子，1993，pp.45-46[13]，下線は著者による強調，二重下線本稿筆者）

本稿における話題の中心は，前述を踏まえ，B型（測定原理に重点をおいた抽象的・理念的測定）における指導内容である。したがって，話題の一つは，小学校第５学年「四角形や三角形の面積公式」内の指導系列である。これについては，前章２で示した目標①に対応しており，後節4.2～4.6で述べる。もう一つは，ギャップG_3を踏まえた第６学年「円の面積公式」の指導の在り方である。これについては，前章２で示した目標②に対応しており，後節4.7及び５章で述べる。筆者なりにG_3を詳細に分析し，そのギャップの解消とともに二重下線部に示された学習価値の感得が可能な授業づくりの視点を提案する。

4.2　三角形の求積と平行四辺形の求積はどちらを先行して扱うか？

求積に必要な，既習の図形への帰着方法が豊富である方が，児童の個性的で多様なアプローチを保障しやすいと考えられる。では，求積対象図形の配列順序によって，帰着方法にどのような違いがあるかについて，以下の図８と図９を比べて見てみよう。

帰着対象 求積対象	長方形	三角形	平行四辺形
三角形	①等積変形 ②倍積変形		
↓ 平行四辺形	③等積変形	④分割総合	

図8　Ⅰ型：三角形先行ー平行四辺形後続

帰着対象 求積対象	長方形	平行四辺形	三角形
平行四辺形	①等積変形		
↓ 三角形	②等積変形 ③倍積変形	④等積変形 ⑤倍積変形	

図9　Ⅱ型：平行四辺形先行ー三角形後続

導入では，帰着方法は，先行する図形が三角形だと２通り，平行四辺形だと１通りであるため，Ⅰ型が優位に見える。しかし，その後の展開では，Ⅱ型の方が変形の仕方が多様である。また，導入で，Ⅰ型で三角形を長方形に変形することよりも，Ⅱ型で平行四辺形を長方形に変形することの方が易しい。なぜなら，前者は図形の種類が異なる三角形と四角形の間の変換であるのに対し，後者は同じ四角形で，しかも平行性という共通の特徴がある図形間の変換であるからである（cf. 後節 4.3 図 11，後節 4.4 図 15）。

三角形と平行四辺形は，面積公式をつくる上で必要となる構成要素として，底辺は表れているが高さは表れていない点が長方形と違うので，高さを捉えやすい方がなおよい。長方形の縦に当たる構成要素の量を，他の図形で高さとして捉えやすいのは，三角形よりも平行四辺形である。なぜなら，長方形も平行四辺形も平行性の特徴があるため，いずれも「平行な辺のいずれかを底辺とし，それに対して垂直に交わる直線の長さを高さといい，それは平行な辺の間のどこで取っても一定なのでよい」という見方で，図形の中に高さを見付けられるからである。

以上から，平行四辺形の求積を先行することとする。教材配列は，長方形や平行四辺形を基に，三角形，台形，ひし形，円という順で組む。

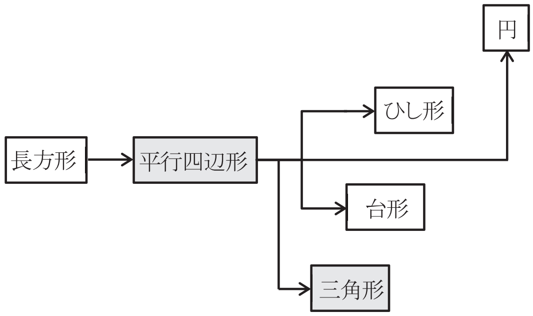


図10　「図形の面積公式」の教材配列
（平行四辺形先行ー三角形後続型）

4.3　平行四辺形の求積方法を理解するとは？

前節 4.2 図 10 より，平行四辺形の求積方法を考える拠り所となる既有の知識体系は，「長方形や正方形の面積公式」である。長方形における求積決定要素は，縦と横である。それに対し，平行四辺形においては，縦と横に当たる数量がはっきりしていない。しかし，次図 11 のように，平行四辺形を，底辺に対して下ろした垂線に沿ってはさみで切り，裁ち合わせ（等積変形）を行うことにより，垂線と底辺がそれぞれ変形後の長方形の縦と横に当たることが分かるので，平行四辺形の面積は底辺と高さとの積で求められることが見いだされる。

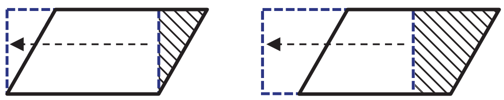


図11　平行四辺形の長方形への等積変形例

この場合の等積変形は，図形の移動の視点からすれば，いずれも平行移動によってできる。授業で扱う変形と同様の変形を，次図 12 のように，高さが図形の内部に取れる場合と取れない場合で検証する。

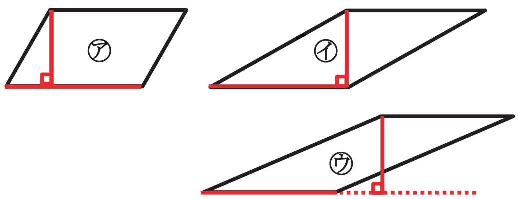


図12　平行四辺形の変形を確かめるすべての場合

例㋒のように，高さが図形の内部に取れずはみ出す場合であっても，次図 13 のように工夫すれば，標準的な例㋐に直すことができる（cf. 中島，2015[14]）。

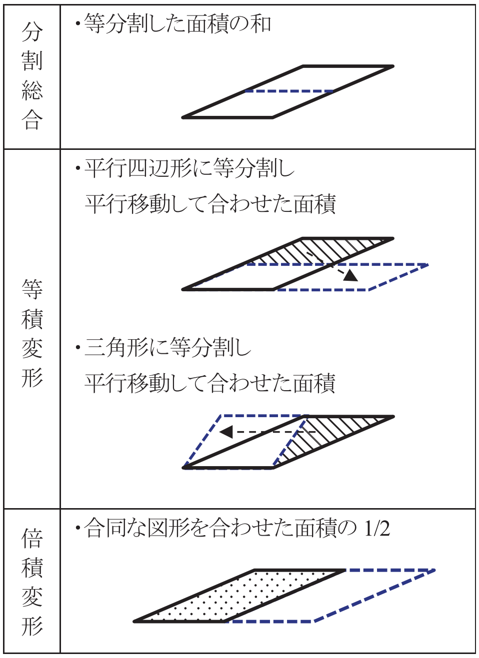


図 13 高さがはみ出す場合の平行四辺形の変形例

こうして，平行四辺形の面積公式は，「平行四辺形を長方形に変形し相互の求積方法を関係付ける」という数学的な見方・考え方を用いて形成される。

ここまでの面積公式を振り返ると，長方形の面積公式と平行四辺形の面積公式は，「累積包括型」で再体系化される。なぜなら，長方形には「縦と横との積」という固有の求積原理があるが，長方形も平行四辺形も「底辺と高さとの積」という求積原理が一貫しているからである。

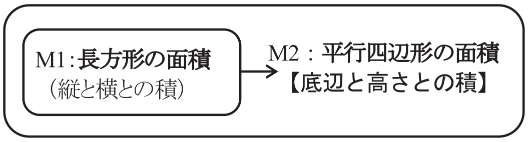
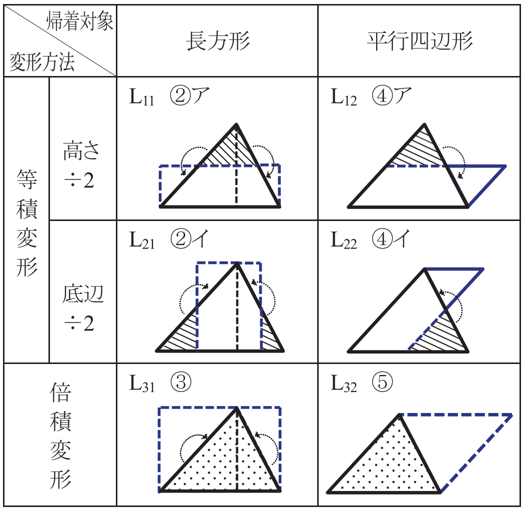


図 14 長方形と平行四辺形の面積公式の再体系化

4.4 三角形の求積方法を理解するとは？

三角形には，既習の長方形や平行四辺形のように平行な辺はないが，いずれかの図形に変形し，底辺と高さという見方を生かした求積方法を考える。既習の長方形や平行四辺形の求積方法を基にすると，考察の可能性として，次図 15 の L_{11} ～ L_{32} の 6 通りがあるということが分かる。なお，この場合の等積変形は，図 11 と同様，分割総合型である。また，三角形の面積公式の形と一致する変形は，倍積変形であり，中でもシンプルな方法は L_{32} である。



(図中の丸番号は，図 9（Ⅱ型）中の丸番号と対応)

図15 三角形の求積方法の考察枠組み

この場合の等積変形は，図形の移動の視点からすれば，いずれも辺の中点を中心に 180° の回転移動（点対称移動）によってできる。授業で扱う変形と同様の変形を，次図 16 のように，高さが図形の内部に取れる場合と取れない場合で検証する。

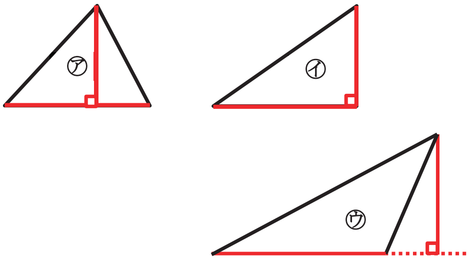


図16 三角形の変形を確かめるすべての場合

ところで，右図のように，底辺と高さがそれぞれ等しい三角形を，底辺を重ねると，面積を変えずに三角形をコマ送りした図に見える。平行線の距離は等しいことから，頂点が底辺と平行な直線上を移動していると見ることができる。この場合の等積変形は，図 11 や図 15 と異なり，連続変形型である。

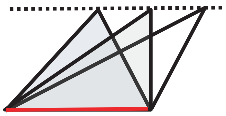


図 17 三角形の連続変形

こうして，三角形の面積公式は，「三角形を長方形や平行四辺形に変形し相互の求積方法を関係付ける」という数学的な見方･考え方を用いて形成される。

ここまでの面積公式を振り返ると，平行四辺形の

求積原理を「底辺と高さとの積の 1 倍」と見直せば，それと三角形の「底辺と高さとの積の$\frac{1}{2}$倍」という求積原理は，いずれも「底辺と高さとの積」という点が共通に保存されていると見ることができる。

さらに，三角形において「底辺の$\frac{1}{2}$倍」とは「三角形の中心線分」に当り，平行四辺形において「底辺（の 1 倍）」も「平行四辺形の中心線分」に当たる。

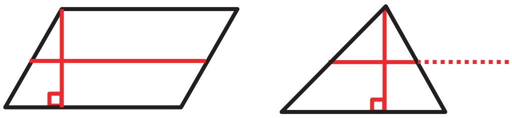


図18　図形の中心線の長さと高さとの積

本質的には，長方形と同様，「図形の中心線の長さと高さとの積」（パップス・ギュルダン）が一貫した原理であるので，平行四辺形の面積公式と三角形の面積公式は，「累積包括型」で再体系化される。

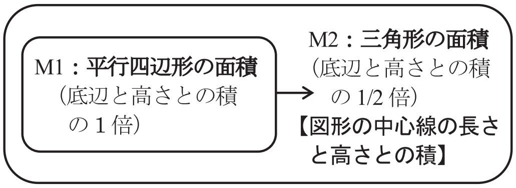


図19　平行四辺形と三角形の面積公式の再体系化

4.5　台形の求積方法を理解するとは？

台形は，平行四辺形と違って，長さが異なる底辺：上底と下底があるが，既習の長方形や平行四辺形，三角形のいずれかに変形し，両底辺と高さという見方を生かした求積方法を考える。

帰着対象 ＼ 変形方法		長方形	平行四辺形	三角形
等積変形	高さ÷2	M_{11}	M_{12}	M_{13}
	底辺÷2	M_{21}	M_{22}	M_{23}
倍積変形		M_{31}	M_{32}　例 	M_{33}

図20　台形の求積方法の考察枠組み

既習の「三角形の求積方法の考察枠組み」（cf. 図 15）を基にすると，考察の可能性として，前図 20 の M_{11} ～ M_{33} の 9 通りがあるということが分かる。なお，これらの他に分割総合がある。また，等積変形には，対角線に対する平行線を補助線として引き，前図 17 の性質を根拠として用いて，三角形に等積変形する方法がある。これは通常，中学校第 2 学年で学習する。台形の面積公式の形と一致する変形は，倍積変形であり，中でもシンプルな方法は M_{32} である。

こうして，台形の面積公式は，「台形を長方形や平行四辺形，三角形に変形し相互の求積方法を関係付ける」という数学的な見方・考え方を用いて形成される。

ここまでの面積公式を振り返ると，「台形は上底の長さが 0 になると三角形になる」と見なし，三角形の求積原理を「上底 0 と下底との和と，高さとの積の$\frac{1}{2}$倍」と見直せば，それと台形の求積原理は，いずれも「上底と下底との和と，高さとの積の$\frac{1}{2}$倍」が共通に保存されていると見ることができる。

さらに，台形において「上底と下底との和の$\frac{1}{2}$倍」とは「台形の中心線分」に当たる。本質的には，平行四辺形や長方形と同様，「図形の中心線の長さと高さとの積」（パップス・ギュルダン）が一貫した原理であるので，三角形の面積公式と台形の面積公式は，「累積包括型」で再体系化される。

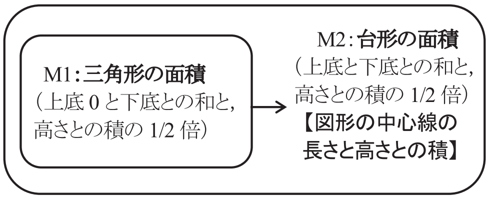
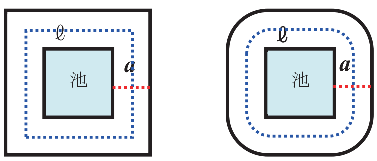


図 21　三角形と台形の面積公式の再体系化

なお，この「図形の中心線の長さと高さとの積」という求積原理は，等しい幅の道（等幅帯図形）において調節的に適用され，「図形の中心線の長さと幅との積」と定式化される。



（特別な場合）　（本来的な場合）

図 22　等幅帯図形の求積問題の場面例

図 22 でいうと，道の中心線の長さが ℓ であり，道幅が a で一定であるならば，道の面積は $a\cdot\ell$ である。この題材は通常，中学校第３学年単元「式の計算」（式の活用）で扱われる。

4.6　ひし形の求積方法を理解するとは？

ひし形は，平行四辺形の一種なので，平行四辺形の面積公式が適用できる。

一方，特殊な図形には固有の特殊な方法がある。ひし形に固有な面積公式を導く方法として，次の①～④の方法が考えられる。

①等積変形

ア　分割総合型：

ⅰ　長方形帰着

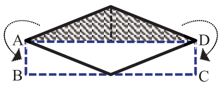


図23　等積変形：分割総合型の例

ⅱ　平行四辺形帰着

イ　連続変形型：三角形帰着

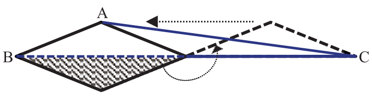


図24　等積変形：連続変形型の例

②倍積変形：長方形帰着

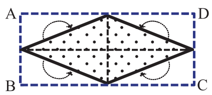


図25　倍積変形の例

③全体と部分との関係：面積の差または割合

ひし形の面積は，長方形の面積の$\frac{1}{2}$

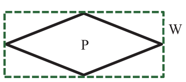


図26　全体と部分との関係への着目例

④分割総合：分割してできた三角形の面積の和

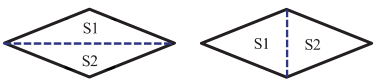


図27　分割総合の二つの例

ひし形の（対角線）×（対角線）÷２という固有の面積公式は，底辺や高さ以外の構成要素で作られている点では，長方形から台形までの面積公式とは異質であるため，対比的である。しかし，いずれも「直交する構成要素の長さの積」という視点で統合できるので，「併立統合型」で再体系化される。

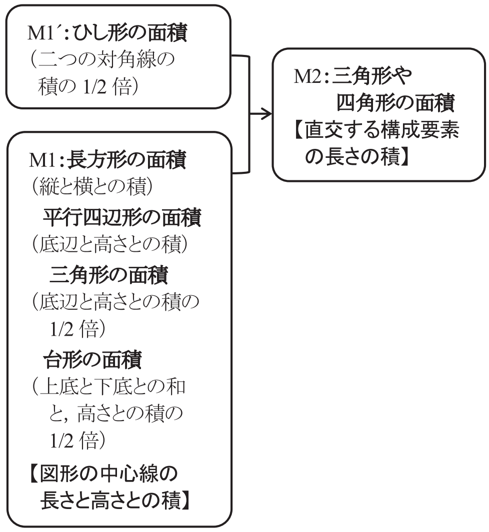


図28　既習の図形とひし形の面積公式の再体系化

4.7　円の求積方法を理解するとは？

円は，既習の三角形や四角形と異なり，曲線図形であることにより，円の面積公式を考え導くまでに，少なくとも次の学習の困難点（learning difficulties）がある。これらが前節 4.1 図 7 にあるギャップ G_3 の内容である。

D1：方眼を用いて考えることが難しい。

D2：円の求積決定要素の見当が付かない。

D3：円が三角形や四角形に帰着できるとは考えにくい。

D4：仮に円を，面積公式の分かる既習の図形（例えば長方形）に変形できると見なすことができたとして，図形の要素を基に円の面積の求め方を言葉の式で表したとしても，それを円の面積公式までに変えていくことは難しい。

以上のように，円の面積公式を形成することには，既習の直線図形と異なる学習の困難点が多くある。どのようにすれば，これらの困難点が克服され得るかについては，次の５章で考えることとする。

本節では，これらが教師の何らかの教材の構成や活動の組織の工夫によって解消され，円の面積公式:

（半径）×（半径）×（円周率 3.14）が形成されたとする。例えば，当初は D2 により，円の面積を「直交する構成要素の長さの積」という原理を用いて考えられないという問題状況があったが，それを何らかの新しい数学的知識（数学的な見方・考え方）を用いて，円の面積公式をつくることができたとする。このとき，面積公式を振り返ってみると，既習の直線図形と同様に「直交する構成要素の長さの積」と関わっていると解釈し直すことができる。したがって，円の面積公式と既習の三角形や四角形の面積公式は，「飛躍回帰型」で再体系化される。

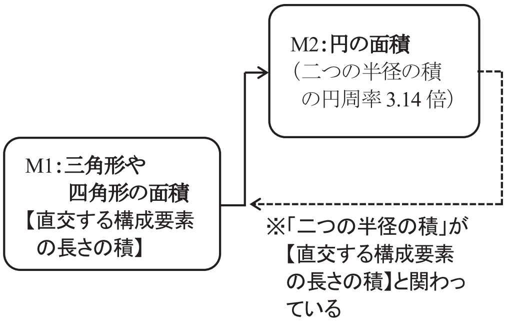


図29　既習の図形と円の面積公式の再体系化

５「円の面積公式」の学習の困難点とそれを克服する授業改善の視点の提案

本章では，前節 4.7 で述べた，円の面積公式を形成する学習の困難点を掘り下げる。そして，それらを克服する授業改善の視点を提案する。

児童にとって学習の困難点が何であり，なぜそれが困難なのかを理解することは，教師が授業実践上の課題が何であるかを捉え，どのように授業改善を図ればよいかを考えることに役立つと考えられる。この点を理解しないと，なぜ教師が授業を引っ張ることになるのかという原因が分からない，または授業がスムーズに進んでいるように見えて，実は児童が納得していないことや教師が授業を引っ張っていることに気付けない，ということが起こり得る。

5.1　学習の困難点と筆者の問題意識の具体

⑴　学習の困難点の具体的内容

円の面積公式を形成する学習の困難点を具体的に考えると，次のことが挙げられる。

D1：方眼を用いて考えることが難しい。

㋐ 1㎝方眼を基に面積を考えることは，三角形や四角形では容易であったが，円では方眼の１目に満たない半端な量が様々できるため処理しづらい。

㋑半端な量の求め方が共有できたとしても，方眼を数えて面積を求める作業自体が煩瑣である。

D2：円の求積決定要素の見当が付かない。

㋐円には，底辺や高さや対角線に当たる量が見当たらない。

㋑既習の「直交する構成要素の長さの積」という求積原理を基に，直径同士の積や，半径同士の積，直径と半径の積を考えてみても，それによって求積される図形は，正方形や長方形であって，円ではない。円の面積を，それら正方形や長方形の面積との比率を基に考えようとしても，すぐに分かるものでもない。

D3：円が三角形や四角形に帰着できるとは考えにくい。

㋐円を分割すると扇形がいくつかできる。それぞれは，三角形と似た形ではあるが，曲線はそのままでは直線にはならないので，三角形にはならない。同様に，いくつかの扇形を並べて変形しても，曲線はそのままでは直線にはならないので，四角形にはならない。

㋑はさみを使って実際に図形を細かく分割し総合する手作業に，物理的な限界がある。

D4：仮に円が，面積公式の分かる既習の図形（例えば長方形）に変形されると見なすことができたとして，図形の要素を基に円の面積の求め方を言葉の式で表したとしても，それを円の面積公式までに変えていくことは難しい。

㋐円を変形してできた長方形（と見立てた図形）の求積決定要素（縦，横）が，円のどの要素と対応するのかを捉えることは容易でない。

㋑言葉の式は，文字式と違って，それ自体計算の対象とならないため，言葉の式を同値な式に変形するためには解釈が必要となる。しかし，その解釈に困難が伴う。

⑵　筆者の問題意識の具体的内容

筆者が，身近な算数科の授業や指導案を見てきた中でもった問題意識を，上述の学習の困難点と重ねて述べる。

P1：帰納的に考える活動は行われているか？

帰納的に考えることとは，複数の事例からそれらに共通する規則を見いだし，それがいつでも成り立つことを，事例を基に示すことである。それは，算数・数学において公式を考える際の見方・考え方としてはもちろんのこと，他教科の学習や日常生活に

おいても基本かつ重要な考え方であり態度である。

Polya（1958）は,「帰納的態度」として,「知的勇気」（われわれの信念はどの一つでも喜んで修正する用意がなされなければならない。），「知的正直」（信念を修正すべきのっぴきならない理由がある場合には，それを修正すべきである。），「賢明な自制」（十分な理由もないのに，気まぐれに信念を修正すべきではない。）という三つの事柄を挙げている。[15] これらは人間らしさの重要な一側面であるため，新学習指導要領に示されている，育成すべき資質・能力の三つの柱に関わる「人間性」の要素と見ることができるが，それらを育成する上で帰納的な活動は不可欠であろう。

果たして，半径が異なるいくつかの円の面積を，方眼を用いて調べて面積の存在への実感を伴いながら帰納的に考える活動はされているのであろうか。

帰納的に考えさせたいという思いはあっても，D1 ㋑が教師にとっては授業時数との闘いの原因となり，そのような地道な調べ活動は優先順位が下げられ省かれていることはないだろうか。

帰納的に考えることは，何かパターンやきまりを見付けたいという目的があってのことである。もしも方眼による方法が，ある一つの円の面積を求めることだけの目的のために用いられるのであれば，帰納的に考えることには向かわない。円の面積の存在を確認するとともに，面積の求め方に関するパターンやきまりを見付けることを動機付け目的化する働き掛けが必要なのではないだろうか。

P2：円を長方形や平行四辺形に変形して考える必要性を共有しているか？

対象図形の面積の求め方を考えることとは，既習の図形の求積決定要素に当たる量がはっきりしないことを捉え，そのことを理由に，既習の図形に変形して，対象図形の求積決定要素を探索して捉え，求積方法を定式化することである。

平行四辺形であれば，長方形のように縦と横に当たる量がはっきりしていないから，長方形に等積変形して，その長方形の縦と横に当たるものが平行四辺形の何に当たるかを探索して捉え，求積方法を定式化する（cf. 前節 4.3）。

三角形であれば，平行四辺形のような底辺と高さに当たる量はある程度見当が付いたとしても，はっきりしていないことには違いないので，平行四辺形や長方形に等積変形や倍積変形をして，それぞれの底辺と高さに当たるものが三角形の何に当たるかを探索して捉え，求積方法を定式化する（cf. 前節 4.4）。

その結果，縦や横，底辺といった図形の直接的な構成要素量（つまり固有に決まっている長さ）と，高さや対角線といった図形の間接的な構成要素量（ただし容易に決められる長さ）を使い，図形の面積を計算によって求めることができるのである。

では，円においても，児童に，このようなこれまでの学び方を生かして問題意識と見通しをもたせ，追究を促しているであろうか。

D2 ㋑は，再体系化という「深い学び」の累積に基づく学習者の問題意識を想定しているので，そのような問題意識を触発することは今後の課題と思われるが，D2 ㋐に対する留意のないまま，形式的に既習の図形へ変形させることを急いでいないだろうか。

P3：円が長方形や平行四辺形に変形できると見なせることを共有しているか？

円を既習の図形に変形して考える必要性が，教師と児童，児童同士の相互作用を通して共有されたとしても，その変形活動は単純ではない。

児童は，日常生活経験に多少の差はあっても，ホールケーキやピザを切り分けることや，切り分けられる様子，切り分けられた状態を目にすることはあるであろう。円の形をした紙を手にとって，その分割の仕方を考えると，自然と半分に，さらに四等分に，というように折り進めていき，扇形を見付けると思われる。しかし，その先は D3 ㋐のとおりである。

これを乗り越えるためには，円の等分割が細かくなればなるほど，それらを並べてできる図形は，長方形等に近似的に帰着されるという見方を受け入れ，極限の考えをもつようになることが必要である。そのような見方を概ねよしとしようという数学的な態度，またはそのように理想化して考えるべきだという数学的な信念が鍵になると考えられるが，D3 ㋑はこれらをもつことを難しくする。このことに対して手だてを講じているであろうか。

その何らかの手だてが講じられたとして，それが機能しているかどうか，つまり，“円が長方形や平行四辺形に変形できると見なしたい”，“そう見なすべきだ”という学びに向かう情意を児童が言動に表し，それがクラスで共有されているかどうかについて，教師は把握し確認しているであろうか。

P4：児童が主体的に円の面積公式を導くことが実現されているか？

D4 ㋐の問題が，何らかの手だてによって克服され，円の構成要素と，変形後の長方形（と見立てた図形）の求積決定要素（縦，横）とを上手く対応付けられた

とする。その結果，（半径）×（直径× 3.14 ÷ 2）という言葉の式が立てられたとしよう。この式をより簡単な形に直すとき，次の3つの方法が考えられる。

・「3.14÷2は計算できる」ことを読み取り，（半径）×（直径）×1.57と直す。
・「直径は半径の2倍である」というきまりに着目して，（半径）× ｛（半径×2）×3.14÷2｝と直し計算して，（半径）×（半径）×3.14とする。
・「半径は直径の$\frac{1}{2}$である」というきまりに着目して，（直径×$\frac{1}{2}$）×（直径×3.14÷2）と直し計算して，（直径）×（直径）×0.785とする。

第１の方法は数値計算のみなので容易であるが，第２，第３の方法は，半径か直径かのいずれかに統一して表現するという目的をもち，きまりを正しく用いて計算を進めることが求められるため容易ではない。それができるとしたら，ほとんどが結論を知っているからではないだろうか。実際，教師が「半径はどうやって求められるのでしたか？」とではなく「直径はどうやって求められるのでしたか？」と発問するのは，指導すべき内容である第２の方法が導かれることを期待しているからである。

この公式を導く授業場面は，実際のところ，次のどちらのケースに近いだろうか。

ケース１：教師は「T1：長方形の縦に当たるものは何ですか？」，「T2：長方形の横に当たるものは何ですか？」，「T3：直径はどうやって求められるのでしたか？」，「T4：そこから直径を他の言葉の式に表してみましょう。」，「T5：計算できるところを計算すると言葉の式はどうなりますか？」というように，発問や指示を細かく行い，その都度児童は回答し，教師は回答に対して評価を与えるという，IRE 連鎖の相互作用を通して授業が展開されている。

ケース２：公式を導く説明も，質問や回答も児童が切り出したり持ち出したりして行い，教師はそれに対して指導・支援を加えるという，探索的な相互作用によって授業が展開されている。

ケース１になるのは，導くべき結論，つまり円の面積公式がどのような事柄であるかに対して，児童が見通しをもてていないからではないだろうか。逆に，ケース２を実現するためには，児童が円の面積公式を既に知っているが，“なぜそうなるのかを明らかにしたい”とか，児童が公式を予想することはできたが，“本当にそうなることを確かめたい”とかという証明の文脈が有効なのではないだろうか。

このことが支持される内容を，中島（2015）が次のように述べている（ただし，丸括弧内の内容は本稿筆者が要約して補足。下線も本稿筆者）。

> ㋑の方法（円の面積を，円を分解し合成し直すことによって，既習の求積公式のある直線図形に近似させて求める方法）は，㋐の方法（円の面積を，円の固有の半径または直径をもとにした基準的な図形（例えば半径を一辺とする正方形）の面積との比率で考える方法）で得られた比率の 3.1 が，円周率と同じ数値と考えてよいかどうかの演繹的な証明として用いることができるわけである。この考えに立って，㋐と㋑の方法を論理的に関連づけて取り扱うことは，「数学的な考え方」にふさわしい重要な活動と見なすことができる。（中島，2015，p.156[14]）

同氏は，続けて次のように述べ，上述の下線部の数学的活動に，教師も児童も正面から取り組むことの意味や意義を強調している（下線は本稿筆者）。

> とにかく，円の求積公式に関しても，ただ求積公式を知らせようとか，そのために二つの方法があるということを，形式的に取り扱うような指導を避けたい。上で指摘したような点に着目させることによって，子どもたちにもじゅうぶん数学的な創造の楽しさ，きびしさを味わわせることができるはずである。（中島，2015，p.156[14]）

5.2 授業改善の視点の提案

前節 5.1 では，「円の面積公式づくり」の学習において何が困難なのかを述べるとともに，その困難点を解消することに正対した授業づくりがなされているかについて，筆者なりの問題意識を具体的に述べた。本節では，その困難点を解消する方法を教材の構成及び活動の組織の視点から提案する。その際，神林（2011）の理論的視座を基にする。

同氏は，数学的知識の再体系化を促す教材構成の方略として，一般的に考えられることを以下のように述べている（下線は本稿筆者）。[16]

> **a）累積包括型の場合**
> ・中心概念や原理が一貫していることを捉えること。
> ・本習内容の新しさに気付くことにより，原理の適用される範囲が拡がったことの意味やよ

さを捉えること。

b）併立統合型の場合

・既習内容と本習内容とが対比されている関係であることに気付くこと。

・新たな視点を発見，導入し，既習内容と本習内容とを統合的に捉えること。

c）飛躍回帰型の場合

・既習内容の原理や見方と全く異質の原理や見方の存在に気付くこと。

・見いだした事柄の意味やよさに着目するとともに，それを用いて既習内容が否定されずに解釈し直せることに気付くこと。

前節 4.7 で述べたように，円の面積公式と既習の三角形や四角形の面積公式は，「飛躍回帰型」で再体系化されるので，まずは「飛躍」を可能にする指導・支援が不可欠である。それについて，上述 c の下線部の方略を基に考え，具体的な内容を示す。

Q1：**円の求積において，既習の三角形や四角形の求積の場合と全く異質の原理や見方とは？**

これに回答するということは，前節 4.7 で示した学習の困難点を克服しながら知識を獲得・形成するときに，知識構造の変容を方向付ける数学的な見方・考え方を述べる，ということである。

①方眼の半端量に対する近似的な見方

方眼の半端量の処理の難しさ（cf. 困難点 D1）を軽減する上で，以下の合理的な見方がある。

〔方眼１目１目を見る部分的な視点〕

・１目に満たない半端な部分を，二つ組み合わせて１目と見る。

・１目に近いものは 1，非常に小さいものは 0，他は 0.5 と見る。

・半端な部分はすべて 0.5 と見る。

〔対象図形自体を見る全体的な視点〕

・円を占める方眼の数は，円の内側に敷き詰めた方眼の数 N_i と，円を覆うように円周上まで敷き詰めた方眼の数 N_o との平均と見る。

この全体的な視点は，内側の N_i から得られる面積と外側の N_o から得られる面積の間に円固有の面積が存在することに対する直観的理解を一層助ける。さらに，方眼の単位図形面積を小さくすると（1 ㎠を 0.25㎠にするだけでも），N_i から得られる面積は大きくなり，N_o から得られる面積は小さくなるので，N_i と N_o から得られる各面積が円固有の面積に近付くことが分かる。このことは，円の面積の存在を捉える文脈の中で，有意味に「極限の考え方」を受け入れることに役立つと考えられる。[13] そのため，後述の「③等積変形における近似的な見方・極限の考え方」の布石として期待されるが，算数科の通常カリキュラムではあまり取り上げられないので，導入について検討を要する。

②円の面積における不変性の見方

「円の構成要素量は直径や半径であるが，どちらが求積決定要素となり，どう計算すればよいか」は見当が付かない（cf. 困難点 D2）。そのような直接的なアプローチが難しいのであれば，他の適当な図形を媒介にして，「円の面積はどういう図形の面積の何倍か」を考えるという間接的なアプローチをとる。具体的には以下の立場が考えられる。

〔現在の学校数学の一般的・基本的な立場〕

（円の面積）

＝（半径を一辺とする正方形の面積）×（何倍）

・（何倍）に当たる数は，円周率であるので，その代表値を 3.14 とする。

・（半径を一辺とする正方形の面積）は（半径）×（半径）で求められるので，それに換える。

〔和算の立場〕

「緑表紙」の教科書（尋常小学算術５年上）の教師用書には，これを扱うことが記されている。これについては，坪田（2014）が詳しい。[17]

（円の面積）

＝（円に外接する正方形の面積）×（何倍）

・（何倍）に当たる数は，円積率といい，円周率の$\frac{1}{4}$になるので，その代表値を0.79とする。

・（円に外接する正方形の面積）は（直径）×（直径）で求められるので，それに換える。

③等積変形における近似的な見方・極限の考え方

円を４等分し，扇形を互い違いに総合して等積変形する。この時点で，変形後の図形が何であるか，この形が暗示する意味は何かを読み取ることは難しい。どういう図形に近付けるかという目的意識がなければ，なおさらであろう（cf. 困難点 D3）。

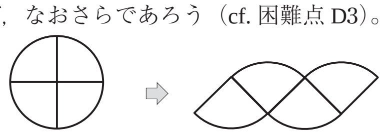


図30　円の等積変形（４等分の場合）

この等分割を８等分として，同様に変形する。ちなみに，この程度の操作は，身近では，ホールケーキをショートケーキに切って箱詰めするところで用いられている。

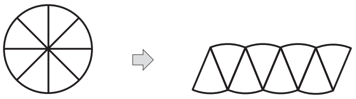


図31　円の等積変形（８等分の場合）

この等分割をさらに16等分として，同様に変形する。

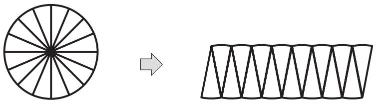


図32　円の等積変形（16等分の場合）

円を扇形に等分割し総合して変形する操作を，図30～図32のようにコマ送りにし，さらに細かく分割した場合を見ていくことができれば，扇形の一つ一つが二等辺三角形に近付き，図形全体として長方形（見方によっては平行四辺形）に近付いていくと見なすことができるであろう。

なお，これと似た，円を長方形へ近似的に変形する考え方は，江戸時代の和算にも見られる。ただし，和算では，円を細かく等分割したら，個々の扇形に弦を引き，それを底辺とする二等辺三角形を用いて変形している。[18] ちなみに，この発想の逆，つまり長方形から合同な二等辺三角形を切り取ってつなげて円に近似的に変形する操作は，製造メイカーにもよるが，洋傘づくりに用いられている。[19]

④文字や文字式立式に通じる考え方

言葉の式は，計算の対象とならないことと，式の構成要素の解釈が難しいことが，式変形を妨げる（cf. 困難点D4）のであれば，計算の対象となり，式の構成要素の解釈をあまり必要としない方法を考えてみる。それに最適なのが文字式ではあるが，小学校算数科では文字式の計算を扱わない。そこで，中学校第１学年で，文字や文字式の意味・必要性が生徒に理解されるように，それらがどのように導入されるのかという考え方を参考にする。

文字には，任意定数，未知数，変数の３種類の役割がある。任意定数としての文字は，数の代表を意味する文字であるので，このとき文字式は，どんな場合でも成り立つ関係を表すために用いられ，それは結果も考え方も同時に表される。どんな場合でも成り立つ関係であることは，基本的にはいくつかの具体的な数の場合を考えて捉えられるものである。具体的な数を扱っていても，一般的な関係の成立に確信をもてるときは，その数はすでに一般数に準ずる役割を果たしている。[5] 具体数のレベルで一般的な関係の成立の確信があったとき，文字の導入の意義が捉えられるということから，言葉の式の導入においても，具体数レベルでそのような確信がもてるようにすることが肝要であると考えられる。

Q2：**円の求積の原理や見方は，既習のものとは全く異質なのに，どのようにすればその存在に気付くことができるか？**

これに回答するということは，Q1で示した新しい見方や考え方を顕在化するためのアイデア（方法）を示す，ということである。いかにすれば，児童にとって潜在的になっている見方や考え方が萌芽したり，問題やその解決過程から見方や考え方を見いだしたり受け入れたりすることができるであろうか。

以下では，「円の面積公式づくり」の授業構成の中核をなす「方眼による求積に関わる活動」と「等積変形による求積方法の導出に関わる活動」の組織化可能性という観点から，前述の新しい見方や考え方を顕在化するためのアイデアを示す。

①「円の面積」に潜んでいるきまりを見いだす帰納的活動の組織

前節5.1⑵で示した問題意識P1に基づき，前述のQ1に対する回答②及び①に即して，この活動の組織の要点をあげる。この活動は，円の面積の存在に対する直観的理解に関わってくる。

○面積公式につながる「円の面積」の不変性を問題にする。円の大きさは半径によって決まるから，面積は半径に関係するであろう。
（円の面積）
＝（半径を一辺とする正方形の面積）×（何倍）

○上記のことを考える必然性（問題の発生動機）を，児童の学習経験（既習の内容と学び方）を基に触発する。その経験とは，（直径）＝（半径）× 2，（円周）＝（直径）×（何倍）という関係を調べ考えたことである。

○その一つは，Ⓐ：はさみうち法で調べ考えた経験である。具体的には，円，その円の内接正六角形，その円の外接正方形の三者の周長を比較し，その結果が（直径）× 3 ＜（円周）＜（直径）× 4 と表されることから，「円周は，直径の長さ（基準量）の3倍と少し（3. 何倍）である」と見当付けたという経験である。

○もう一つは，Ⓑ：複数の事例を調べ帰納的に考えた経験である。具体的には，直径の長さが異なる複数の円について調べ考えて約3.1とし，その比率の数学的な意味を知り，その代表値として3.14を受け入れたという経験である。

○これらの学習経験を基に，円の面積について，まず追究する対象（円の面積は，半径を一辺とする正方形の面積（基準量）の何倍か）と活動への見通しをもたせる。

○その一つは，Ⓐ：はさみうち法で調べ考える活動である。以下に二つの調べ方を例示する。いずれの方法からも，（半径を一辺とする正方形の面積）× 3 ＜（円の面積）＜（半径を一辺とする正方形の面積）× 4 が得られ,「円の面積は，半径を一辺とする正方形の面積（基準量）の 3 倍と少し（3. 何倍）である」と見当付けられる。なお，算数科の通常カリキュラムでは，具体的実験が一般的である。

〔具体的実験による方法〕[註)]

紙を使って，円に，その円の半径を一辺とする正方形を実際に敷き詰めて直観的に捉える。円の面積は，半径を一辺とする正方形の面積の

・１倍より大きく，4 倍より小さい。

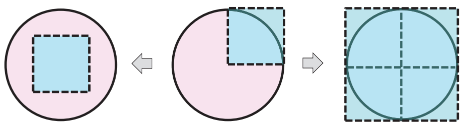


図33　円と１正方形及び４正方形との比較

・２倍より大きいか，小さいか？
　正方形２枚使って調べると，大きいということが分かる。

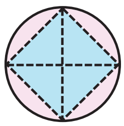


図34　円と２正方形との比較

・３倍より大きいか，小さいか？
　正方形３枚使って調べると，わずかな差だが大きいということが分かる。（この実験は，紙面の都合等により，ここでは割愛する。）

以上のことから，円の面積は，（半径を一辺とする正方形の面積）× 3 よりも大きい。

〔思考実験による方法〕

・円 O に，その円の半径を一辺とする正六角形 ABCDEF を内接させる。
・その正六角形の辺を一辺とする正三角形は，その正六角形の内部に六つできる。
・そのうちの一つを△ AOB とする。
・円の中心 O から辺 AB に対して垂直二等分線をひき，円との交点を P とすると，P は弧 AB を二等分する。
・他の辺についても同様にして，円周上に点 Q，R，S，T，U を決めると，多角形 APBQCRDSETFU は正十二角形となる。

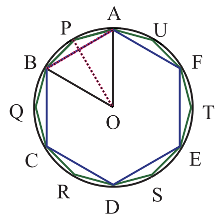


図35　円に内接する正十二角形の利用

このとき，

・（正十二角形 APBQCRDSETFU の面積）=（たこ形 AOBP の面積）× 6
・（たこ形 AOBP の面積）=（対角線 AB）×（対角線 OP）÷ 2
・対角線 AB も OP も円の半径と等しいから，
　（たこ形 AOBP の面積）＝（半径）×（半径）÷ 2
・（正十二角形 APBQCRDSETFU の面積）=（たこ形 AOBP の面積）× 6 だから，
　（正十二角形 APBQCRDSETFU の面積）
　＝ ｛(半径）×（半径）÷ 2｝ × 6
　＝（半径）×（半径）× 3

以上のことから, 円の面積は,（半径）×（半径）× 3 で得られる面積よりも大きい。

○もう一つは，Ⓑ：複数の事例を調べ帰納的に考える活動である。半径の長さが異なる複数の円について調べる。調べる道具には方眼を用い，１目に満たない半端な量の求め方を，児童と一緒に決める。複数の円について方眼で調べることは，数人のグループで協力して行う。

○問題としている比率は，様々な半径の円を一人一人が調べれば，3.14 とは考えにくい値が出されることは十分に考えられる。そうすると，方眼による帰納的な活動によって生起する状況は，少なくとも次の三つの場合が考えられる。

・比率の予想ができないため，本当はいくつなのか，一定の比率は存在するのかを，他の方法で調べ直し明らかにすることが必要になる。
・帰納的活動のみから予想することは難しいが，円周の場合から比率を円周率 3.14 と類推し，

それは本当なのか，なぜそうなるのかを，他の方法で確かめること（証明）が必要になる。
・予習等で比率が円周率3.14であることを知っているが，帰納的活動からその値がなかなか得られないので，なぜそうなるのかを，他の方法で確かめること（証明）が必要になる。
いずれの場合も，他の方法の必要性がさらなる問題の追究動機となり，帰納的活動から次の演繹的活動へ向かう状態になると期待される。
○円周の場合と同様に3.14と予想した場合，“面積の比率にもかかわらず円周率でよいのか？”と問い返すことは，確かめる必要性を強化すると考えられる。なお，半径を一辺とする正方形の面積は（半径）×（半径）で求められるから，追究の対象は,（円の面積）＝（半径）×（半径）×（何倍）と表現し直され,（何倍）のところは，何かaと予想できればその数値aが具体的に入り，予想できなければx（？）である。

②「円の面積」に潜んでいるきまりを確かめる（明らかにする）演繹的活動の組織

前節5.1⑵でP2～P4としてそれぞれ示した問題意識に基づき，前述のQ1に対する回答③及び④に即して，この活動の組織の要点をあげる。この活動は，円の面積公式づくりに相当する。

○（円の面積）＝（半径）×（半径）×（何倍）の（何倍）に当たる数値が予想どおりであることを他の方法で証明するにせよ，予想できず調べ直すにせよ,それらの活動や方法の必要性を，児童の学習経験を基に触発する。その経験とは，対象図形を，面積公式の分かる既習の図形に変形し，相互の求積方法を関係付けて，対象図形の面積公式を導いた経験である。
○円をどのような図形に変形できそうかに対するアイデアを，具体的な操作活動を通して，児童と一緒に検討して，帰着させる図形を決める。検討するということは，例えば児童が長方形とか平行四辺形とかと言ったとしても，“曲線の図形が直線の図形になると見なせるか？”と問い直すことを要するということである。
○コンピュータによるシミュレーションを活用し32等分，さらに64等分くらいして等積変形をして見せれば，円はほぼ長方形に変形できると見なせることが共有されると期待できる。先の活動①からの追究動機が確かであれば，児童はそのように見なしたい，見なすべきだとする思いを強くするであろう。
○元の円と変形後の長方形（と見立てた図形）とをよく比較観察し,長方形の面積公式（縦×横）に基づいて面積を求める式を立てさせる。その際，半径が10㎝や15㎝等，複数の具体的な数を使って立式できるようにし，それぞれが（半径）×（半径）×aの予想値aは正しいのかを確かめさせる。あるいは，（半径）×（半径）×xのxはいくつなのかを調べさせる。このとき，いかに途中計算及び求積決定要素の値を残させるかが重要である。

例．半径が10㎝の場合

$$\underbrace{10}_{\text{縦は半径}} \times (\underbrace{10 \times 2 \times 3.14 \div 2}_{\text{横は円周の半分}})$$

○このような式から，どんな数字を用いても，円の面積は（半径）×（半径）×（円周率3.14）となると考えられるようになったら，最後に半径がどんな長さであっても，それが成り立つことを,元の円と変形後の長方形（と見立てた図）を用い，言葉の式を立てて説明（証明）することに挑戦させる。児童にとって公式として一般化することが達成動機となり，児童はその説明を分かり合えるものにしようとするであろう。

６　結論（要約）

6.1　第５学・第６学年「図形の面積公式」指導系統

「再体系化」の視点から,「図形の面積公式」教材配列（cf. 前章４図10）を分析すると，指導系統（teaching sequence）は，次のように捉えられる。

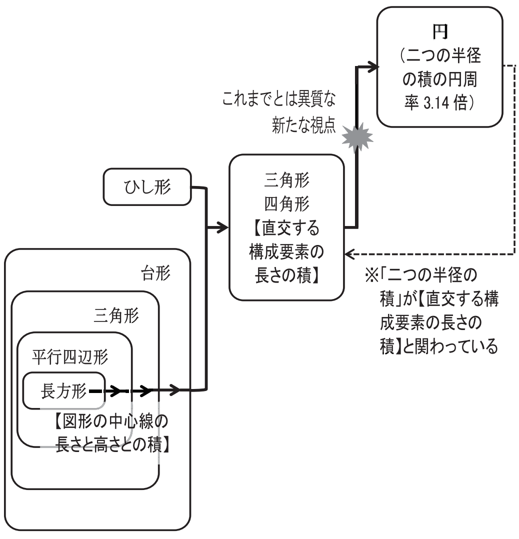


図36　「図形の面積公式」の指導系統

・「長方形→平行四辺形→三角形→台形」では,「図形の中心線の長さと高さとの積」（パップス・ギュルダン）という一貫した求積原理を基に,「累積包括型」の再体系化を指導・支援する。
・「これまでの図形→ひし形」では，それらを対比し,「直交する構成要素の長さの積」という高次の視点から,「併立統合型」の再体系化を指導・支援する。
・「これまでの三角形・四角形→円」では，特に「（円の面積）＝（半径を一辺とする正方形の面積）×（何倍）という不変性の見方」や「等積変形における近似的な見方」等の新たな視点から,「飛躍回帰型」の再体系化を指導･支援する。

6.2　第６学年「円の面積公式」における学習の困難点と授業改善の視点

前章５の要点を示すとともに，まとめながら省察して見えてきたことを少し補足する。

〔学習の困難点〕

円は，既習の三角形や四角形と異なり，曲線図形であることにより,円の面積公式を考え導くまでに,少なくとも次の学習の困難点がある。

D1：方眼を用いて考えることが難しい。

D2：円の求積決定要素の見当が付かない。

D3：円が三角形や四角形に帰着できるとは考えにくい。

D4：仮に円を，面積公式の分かる既習の図形（例えば長方形）に変形できると見なすことができたとして，図形の要素を基に円の面積の求め方を言葉の式で表したとしても，それを円の面積公式までに変えていくことは難しい。

これらは，これまでとは異質な新たな視点が必要となる，つまり「飛躍」が求められる要因である。

〔授業改善の視点〕

数学的知識の「飛躍回帰型」の再体系化を促す教材構成の第１の方略「既習内容の原理や見方と全く異質の原理や見方の存在に気付くこと」を基に，授業改善の視点を具体的に捉える。ここでの気付きの対象となる原理や見方は，次の４点である。

①方眼の半端量に対する近似的な見方

②円の面積における不変性の見方

③等積変形における近似的な見方・極限の考え方

④文字や文字式立式に通じる考え方

「円の面積公式づくり」の授業構成の中核をなす「方眼による求積に関わる活動」と「等積変形による求積方法の導出に関わる活動」の組織化可能性という観点から，前述の原理や見方を顕在化するアイデアを基に，授業改善の視点を図式でまとめると，次図 37 のように表される。なお，図中の①～④は，前述の新たな原理や見方と対応している。

各活動は，A1：B1 ⇒ A2：B2，C1：C1’ ⇒ C2：C2’ というように，既習の内容・学び方を基に，本習の内容・学び方を考えていくような「類比的関連構造[5)]」を成している。この構造は, 本単元の場合,未知の事柄を既知の事柄に引き寄せて捉えようとする「異質馴化（making the strange familiar）[5)]」の状況をつくると仮定される。そして，見馴れない異質な対象を，見馴れた事柄と関係付けて捉える必要性や意義があるからこそ，両者を関係付けるための原理や見方を見いだそうとする，場合によっては有意味に受容すると仮定される。以上の仮定は，前述の「飛躍回帰型」の再体系化を促す教材構成の第１の方略「既習内容の原理や見方と全く異質の原理や見方の存在に気付くこと」を支えると考えられる。

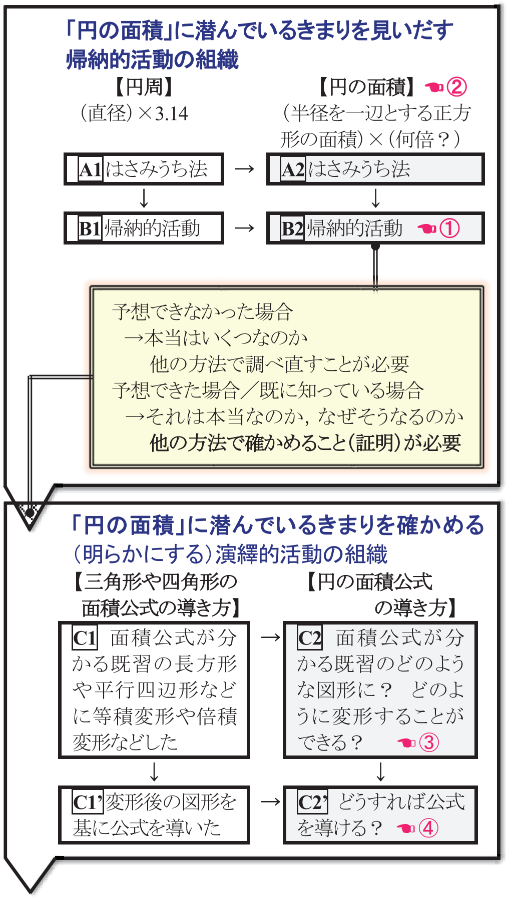


図 37　「図形の面積公式」の授業改善の視点

7　おわりに

本稿では，数理の理解として目指す状態に対する一つの見方として「再体系化」をあげ，その視点から「図形の面積公式」の指導系統を示した。その系統は，児童の理解の深まりが見込まれている。

面積公式が未習の図形の面積は，その図形を面積公式の分かる既習の図形に変形し，帰着した図形の公式を活用して求める。そして，その求め方を対象図形の構成要素と照らし合わせて面積公式を導く。本稿では，ここまでは主に「面積の求め方を考えること」であり，この先まで行って「面積の求め方を理解すること」が達成されると主張している。“この先”とは，対象図形の面積公式と既習の図形の面積公式とを，両者の原理の一貫性の観点から省察して関係付けることである。長方形から平行四辺形，三角形,台形までは「累積包括型」で,ひし形は「併立統合型」で，さらに円は「飛躍回帰型」で再体系化されるという見方は,「図形の面積公式」の理解の一つの在り方を具体的に示している。

ただし，授業実践に移す際は，児童の実態等を踏まえ，どのくらいのスパンでどの程度の再体系化をねらうかについて，授業者自身が検討することが必要である。参考までに,長方形,平行四辺形,三角形,台形はいずれも「図形の面積＝中央線×高さ」で求められることについての検証を，ひし形の面積公式までひととおり指導した後，面積の求め方の工夫としてまとめて位置付けている教科書もある。[20)]

本稿で考察の中心対象とした円においては，求積決定要素を見当付けることが難しいが,「いかにその面積の求め方を見いだすことができるか」,「いかにその求め方の表現を簡潔かつ的確な表現に高めるか」に対して,「円の面積公式」の予想に迫る帰納的活動の組織の考え方を提案した。そして,「いかに公式を導くか」に対しては，基本的には，その予想を確かめるという証明の文脈に基づく演繹的活動の組織の考え方を提案した。なお，その文脈に，予習等で公式を結果として知っている児童も，問題意識をもって乗れることが見込まれていることは，多声性を考慮した学習指導という点からも重要な意味をもつと考えられる。また，これらの活動は既習の内容と学び方を基に類推しながら展開され，児童の経験が構成される仕組み（類比的関連構造）となっている。

今後は，これらの考え方（仮説）に基づいて，具体的にどのような授業を構想し，実際どのように授業が行われ，その結果どのような成果と課題が得られ，どのようなさらなる授業改善の視点が得られたのか，についてもまとめ，別の機会で報告したい。

参考・引用文献

1) 中央教育審議会.（2016）.「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」. 平成 28 年 12 月 21 日.

2) 井口浩，神林信之，星野将直.（2018）. 学校数学における「深い学び」概念の考察　－広義の数学化過程としての問題解決活動の観点から－.『新潟大学教育学部研究紀要』，第 10 巻　第 2 号，341-361.

3) 相馬一彦，國宗進，二宮裕之編著.（2016）.『理論×実践で追究する！　数学の「よい授業」』，明治図書，59-67.

4) 中央教育審議会　初等中等教育分科会　教育課程部会.（2016）.「次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめについて（報告）」. 平成 28 年 8 月 26 日.

5) 金子忠雄監修，井口浩，小田暢雄，凮間寛司，星野将直，宮宏之，神林信之.（2002）.『学びの数学と数学の学び　－参加・協働と「生きる力」の実現を求めて－』，明治図書.

6) 金子ゼミナール：金井克浩，墓前美樹，長谷川和弘，星野律子，清水幸子，武藤雅雄.（1987）. 算数・数学科授業における「問題解決と数学的知識化」の在り方　－「授業の成立」と「学習者の知識形成」を中心として－. 新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』，第 23 号，1-27.

7) 金子ゼミナール：黒田匠，小山英美，丸山正行，寺沢優美子，佐藤薫，宮嶋伸子.（1988）. 自己化された学校数学の構想と展開　－数学的知識形成の機構と方略を中心として－. 新潟大学教育学部数学教室　『数学教育研究』，第 24 号，1-30.

8) 金子ゼミナール：凮間寛司，伊藤貴代美，阿部知美，中村装子，白澤知美，矢嶋美佳，久住幸子，栞山仁志.（1989）. 数学学習における理解と技能の関係　－知識の獲得・形成過程を中心にして－. 新潟大学教育学部数学教室　『数学教育研究』，第 25 号，1-37.

9) 金子ゼミナール：木村哲雄，島田曜子，清水雅之，三木俊幸，渡辺憲子，魚野潤，長井博幹，古川真哉.（1991）. 学校数学における「基礎・基本の獲得と問題解決力の育成との関係」について　－「認

知的支援機構」と「知識表現の二類型」を中心に－. 新潟大学教育学部数学教室 『数学教育研究』, 第 27 号, 1-39.
[10] 金子忠雄.（1984）. 学校数学の教授＝学習活動と「問題」の構成. 『新潟大学教育学部紀要』, 第 26 巻　第 1 号, 1-6.
[11] 金子忠雄, 酒井勝吉, 長谷川浩司.（1989）.『対話と探求を深める数学科授業の構築』, 教育出版.
[12] 井口浩.（2017）. 小学校における「図形の面積公式」の教材分析.（研究資料）
[13] 金子忠雄.（1993）. 学校数学における「量と測定　面積」の系統と発展. 『平成 3 年度　小・中・高等学校算数・数学科研修講座講義録　研究報告』, 144 巻, 新潟県立教育センター, 45-53.
[14] 中島健三.（2015）.『復刻版　算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察』, 東洋館出版社, 125-172.（金子書房　1982 年刊　第 2 版　の復刊）
[15] Polya, G.（1954）. Induction and Analogy in Mathematics. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.（G. ポリア著, 柴垣和三雄 訳（1959）.『帰納と類比』, 丸善, 1 章　帰納, 2-6.）
[16] 神林信之.（2011）.『教材構成の力を鍛える』, 晃洋書房, 129-130, 202-204.
[17] 坪田耕三.（2014）.『算数科授業づくりの基礎・基本』, 東洋館出版社, 324-328.
[18] 礒村吉德.（1684）.『増補算法闕疑抄』 http://www.ndl.go.jp/math/s1/question4.html（2018 年 6 月 4 日）
[19] NHK for school マテマティカ 2　円を四角く http://www2.nhk.or.jp/school/movie/outline.cgi?das_id=D0005160003_00000（2018 年 6 月 4 日）
[20] 一松信他 .（2016）.『みんなと学ぶ小学校算数 5 年』. 学校図書, 197.

謝辞）鎌倉女子大学　神林信之教授から, 教材分析において, 多くのご助言と貴重な資料をいただいたこと, 新潟市立新津第一小学校　大橋博教諭と,「円の面積」の授業改善に向け, 充実した議論ができたことを申し添え, 感謝の意を表す。

註）紙を使い, 円に, その円の半径を一辺とする正方形を実際に敷き詰める実験活動については, 新潟大学教職大学院における平成 28 年度選択科目「授業開発と実践」の授業の一環で, 新潟大学教育学部　垣水修教授が行った特別講義（2017 年 1 月 30 日）の内容を参考にしている。

【資料】

学校数学における「深い学び」について（要点）

◆学校数学における「深い学び」

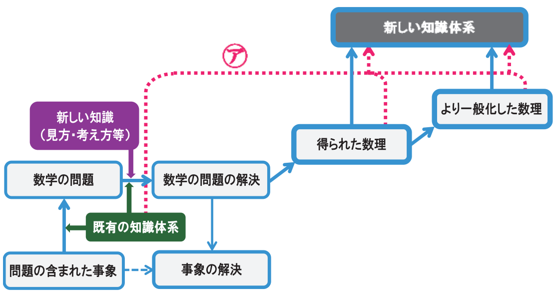
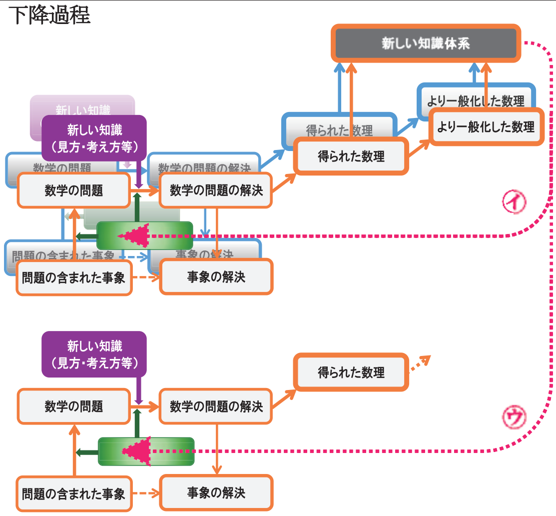
それは，「数学的知識を獲得・形成し，定着・習熟し，さらに応用・発展するという学び」である。

ただし，数学的知識が再体系化されている状態で獲得・形成されているとき，はじめて「深い学び」をしているといえる。

◆学校数学における「深い学び」の質

「深い学び」の質（学びの深まり）は，「問題解決活動の意図」に応じた実際の学びを見て，つまり，獲得・形成された数学的知識がどのようにどの程度定着・習熟され応用・発展されるかという，知識の発展性と有用性の認識の観点から，解釈される。

学びを深めるためには，いかに「数学的な見方・考え方」を働かせながら，数学的知識を獲得・形成するかが重要である。「数学的な見方・考え方」は，“その知識は何のためにあるのか”，“どこで使うのか”，“どのような意味として使うのか”，“どのように使うのか”等，対象へのかかわり方についての思考であると捉えられる。そのような「数学的な見方・考え方」を働かせるときの思考内容は，A1：宣言的知識を捉えるために，関連する宣言的知識の本質について思考すること，A2：宣言的知識を捉えるために，関連する手続き的知識の本質について思考すること，B1：手続き的知識を捉えるために，関連する宣言的知識の本質について思考すること，B2：手続き的知識を捉えるために，関連する手続き的知識の本質について思考すること，という四つの場合がある。

<table>
<tr><th>問題解決活動の意図</th><th colspan="2">知識形成の機構</th></tr>
<tr><td>数学的知識の獲得・形成</td><td>数理の形成（広げる）
「既有の知識体系」をもって「数学の問題」の定式化及び解決にあたるが，「数学的知識」を適用しようとしても解決が困難な場合，「新しい数学的知識」を導入して解決を図る。それは「事象の解決」（解明）を果たしつつ，一方で既習の数学的知識と，「数学的な見方・考え方」とを基に新しい数学的な概念や原理をつくりあげることである。
数理の理解　:再体系化（深める）
「得られた数理」と「既有の知識体系」とをつき合わせて（接続して）「新しい知識体系」をつくる（上昇過程㋐）。再体系化の様相は，「累積包括型」，「併立統合型」，「飛躍回帰型」の3類型が考えられる。</td><td>上昇過程
</td></tr>
<tr><td>数学的知識の定着・習熟</td><td>類似場面への数理の選択・適用
「新しい（既有となったばかりの）知識体系」の中から，「問題の含まれた事象」の解決に適当な数学的知識を引き出してくる。それを使って，「問題の含まれた事象」を「数学の問題」に定式化し，その問題を解決し，元の事象に戻して事象の解決を図る。さらに，用いた数学的知識を，具体的な適用条件の理解という点で強化して，「新しい（既有となったばかりの）知識体系」にとり込む。
以上のように，事象や数学の問題が以前と類似した場面に対して，数理の選択・適用を行う（下降過程㋑）。</td><td rowspan="2">下降過程
</td></tr>
<tr><td>数学的知識の応用・発展</td><td>異質場面への数理の選択・活用
事象や数学の問題が以前とは全く異なる場面に対して，数理の選択・活用を行う（下降過程㋒）。</td></tr>
</table>