
概複素構造に関する諸問題の研究

(課題番号 16540057)

平成16年度～平成18年度科学研究費補助金
基盤研究(C) 研究成果報告書

平成19年3月

研究者代表 関川浩永
(新潟大学自然科学系教授)

は し が き

滑らかな多様体 M は $J^2 = -I$ (I は恒等変換) を満たす $(1,1)$ 型テンソル場 J を許容するとき、概複素多様体と呼ばれる。概複素多様体の概念は複素多様体のその自然な一般化で、これまで、6次元球面等多くの複素多様体ではない概複素多様体の例が知られている。概複素多様体 $M = (M, J)$ はその概複素構造 J が M 上のある複素構造に付随したものに一致するとき、積分可能であるといわれる。概複素多様体の積分可能性に関しては、Newlander-Nirenberg の定理「概複素多様体 (M, J) が積分可能であるための必要かつ十分な条件はその概複素構造 J の Nijenhuis テンソル場 N_J が M 上恒等的に 0 となることである」(1960年) が最も基本的である。2次元の向き付けられた多様体は常に概複素多様体となり、さらに積分可能となることがわかるが、4次元以上の概複素多様体に対してはこのことは一般的に成り立たない。すなわち、概複素構造は許容するが、複素構造は許容しないコンパクトな4次元多様体が存在することも知られている。偶数次元球面の中で、概複素構造を許容するものは、2次元球面 S^2 と6次元球面 S^6 しかないことが知られており、 S^6 上には、ケーリー代数を用いることによって積分可能でない概複素構造の例が具体的に構成されている。しかしながら S^6 上に積分可能な概複素構造が存在するか否かは、未だに未解決である。概複素多様体 $M = (M, J)$ に M 上の(擬)リーマン計量 g で、 J に関して不変なものとを併せ考えたもの $M = (M, J, g)$ は(擬)概エルミート多様体と呼ばれる。ケーラー多様体はその最も典型的なものである。概複素多様体上には常にこのようなリーマン計量が存在することがわかる。概ケーラー多様体、近ケーラー多様体はケーラー多様体の自然な一般化で多くの研究者によって活発に研究されている概エルミート多様体のクラスである。6次元球面 S^6 は上で述べた概複素構造とその上の自然なリーマン計量とに関して近ケーラー多様体となることが知られており、この近ケーラー構造に関して様々な研究がなされている。また、ケーリー代数からなる空間は8次元ユークリッド空間とみなすことが出来るが、その6次元可符号部分多様体上には自然な仕方でも概エルミート構造が定義される。そのような部分多様体について $\text{Spin}(7)$ -幾何学の視点から研究することも興味ある問題であると思われる。概複素多様体に関わる様々な幾何学の問題を研究するにあたって、その概複素構造の性質(積分可能性等)と付随する概エルミート計量に関する性質(曲率等)との関わりについて考察することは自然なことであると思われる。

本研究においては、この一般的問題提起に沿って、主として概複素構造に関わる次の話題を中心に研究を行った。

- (1) 概ケーラー多様体の積分可能性に関する「Goldberg 予想」について
- (2) 近ケーラー6次元球面 S^6 及び8次元ユークリッド空間内の各種部分多様体について
- (3) 上記(1), (2)に関連した話題について

本報告は、上記研究テーマに関し、本科学研究費補助金の下で研究を行って得られた研究成果をまとめたものである。3年間の研究期間において他大学の研究分担者を含めた研究スタッフの下で活発な討論・情報交換を通して研究交流を行えたことは非常に有意義であった。今後、本研究課題及び関連した研究課題についてさらに研究を進めて行きたいと考えている。

最後に、本研究にご協力頂きました研究分担者及び研究課題に関連した情報を提供頂きました幾何学関係者の方々に、心からお礼申し上げます。

研究組織

研究代表者： 関川 浩永 (新潟大学自然科学系教授)
研究分担者： 印南 信宏 (新潟大学自然科学系教授)
研究分担者： 長谷川 敬三 (新潟大学人文社会・教育科学系助教授)
研究分担者： 松下 泰雄 (滋賀県立大学工学部教授)
研究分担者： 橋本 英哉 (名城大学理工学部教授)

交付決定額 (配分額)

(金額単位：千円)

	直接経費	間接経費	合計
平成16年度	1,200	0	1,200
平成17年度	900	0	900
平成18年度	1,200	0	1,200
総計	3,300	0	3,300

研究発表

(1) 学会誌等

1. K. Hirobe, T. Oguro and K. Sekigawa, A remark on an example of a 6-dimensional Einstein almost Kähler manifold, to appear in J. Geometry.
2. K. Sekigawa and A. Yamada, A Note on the integrability of a class of almost quaternionic manifolds, Indian J. Math., **48** (2006), 239–248.
3. T. Nihonyanagi, K. Sekigawa and A. Yamada, Notes on 4-dimensional almost hyperhermitian manifolds, Mathematica Balkanica, **19** (2005), 305–320.
4. T. Oguro and K. Sekigawa, Notes on 4-dimensional Kähler Einstein manifolds of dimension four, Yokohama Math. J., **51** (2004), 1015–1029.
5. N. Innami, Compression theorems for surfaces and their applications, to appear in J. Math. Soc. Japan.
6. N. Innami, Steiner ratio for hyperbolic surfaces, Proceedings of the Japan Academy, **82**, Ser.A (2006), 77–79.
7. K. Hasegawa, A Note on compact solvmanifolds with Kähler structures, Osaka J. Math., **43** (2006), 131–135.

8. K. Hasegawa, Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds, *J. Symplectic Geometry*, **3** (2005), 749–767.
9. J. Davidov, J. C. Diaz-Ramos, E. Garcia-Rio, Y. Matsushita, O. Muskarov and R. Vaquez-Lorenzo, Almost Kähler Walker 4-manifolds, *J. Geometry and Physics*, **57** (2007), 1075–1088.
10. Y. Matsushita, S. Haze and P. Law, Almost Kähler-Einstein structures on 8-dimensional Walker manifolds, *Monatshefte für Mathematik*, **150** (2007), 41–48.
11. H. Hashimoto, Grassmann geometry of the 6-dimensional sphere, *Sugaku Expositions*, **19** (2006), 1–18.
12. H. Hashimoto and K. Mashimo, On some tubes over J -holomorphic curves in S^6 , *Tokyo J. Math.*, **28** (2005), 580–591.
13. H. Hashimoto, Deformations of super-minimal J -holomorphic curves of a 6-dimensional sphere, *Tokyo J. Math.*, **27** (2004), 285–298.

(2) 口頭発表

1. 関川浩永, Integrability of almost Kähler manifolds, The seventh International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, Plovdiv Univ., Bulgaria, 2004年9月.
2. 関川浩永, The Goldberg Conjecture, VII Workshop on Symplectic and Contact Topology, Madrid, Spain, 2006年8月.
3. 関川浩永, Some critical almost Kähler structures with a fixed Kähler class, The eighth International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, Sofia, Bulgaria, 2006年9月.
4. 関川浩永, Some critical almost Kähler structures with a fixed Kähler class, Sunkyunkwan Univ., Colloquium, 2006年12月.
5. 印南信宏, Steiner ratios for surfaces, Kyung Hee Univ., 談話会, 2005年11月.
6. 印南信宏, Jacobi vector fields along geodesics in glued manifolds, The 10th International Workshop on Differential Geometry, Kyungpook National Univ., 2005年11月.
7. 印南信宏, 双曲面のシュタイナー比, 佐賀大学微分幾何学研究会, 2005年12月.

8. 印南信宏, 曲面上の最短ネットワーク問題について, 熊本大学教育学部「測地線及び関連する諸問題」, 2006年1月.
9. 印南信宏, Compression theorems for surfaces with curvature bounded below I, II, Global Analysis of Real and Complex Manifolds, Cheju National Univ., 2006年8月.
10. 長谷川敬三, Small deformations and non left-invariant complex structures on a compact solvmanifold, Symposium on 「Geometry and algebra of solvable groups」, 2006年10月.
11. 長谷川敬三, コンパクト等質多様体上の複素構造およびケーラー構造について, 日本数学会 2007年度年会特別講演, 2007年3月.
12. 松下泰雄, Four-dimensional Walker metrics and symplectic manifolds, The seventh International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, Plovdiv Univ., Bulgaria, 2004年9月.
13. 松下泰雄, 4次元 $(++--)$ 指標の不定計量の存在条件と概複素構造およびゴールドバーグ予想の反例について, シンポジウム「接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺」, 2006年1月.
14. 松下泰雄, Neutral metrics of signature $(++--)$, two kinds of almost complex structures on 4-manifolds, and the counterexamples to the Goldberg conjecture, Differential Geometry and Topology in the Perspective of Modern Trends, Dayalbagh Educational Institute (Deemed Univ.), 2006年2月.
15. 松下泰雄, Almost Kähler-Einstein structures on 8-dimensional Walker manifolds, The eighth International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, Sofia, Bulgaria, 2006年9月.
16. 橋本英哉, Extrinsic homogeneous almost Hermitian 6-manifolds, The seventh International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, Plovdiv Univ., Bulgaria, 2004年9月.
17. 橋本英哉, ケーリー代数内の6次元部分多様体のガウス写像について, 第52回幾何学シンポジウム, 2005年8月.
18. 橋本英哉, Some twistor spaces of 6-dimensional submanifolds in the octonions (Developments of Cartan Geometry and Related Mathematical Problems), 数理解析研究所, 2005年10月.
19. 橋本英哉, ケーリー代数内の6次元部分多様体上の概複素構造とグラスマン多様体, 第53回幾何学シンポジウム, 2006年8月.

20. 橋本英哉, On almost Hermitian structures of 6-dimensional submanifolds in the octonions, The eighth International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, Sofia, Bulgaria, 2006年9月.

(3) 出版物

松下泰雄, 「ミンコフスキー空間」, 別冊 数理科学「相対論の歩み」, サイエンス社, 2005年4月.

(4) 研究成果

各自、分担者間の研究討論や全国の研究者との情報交換や研究打ち合わせにより、多くの成果を挙げたが、下記のものはその一部である。

目 次

1. K. Hirobe, T. Oguro and K. Sekigawa, A remark on an example of a 6-dimensional Einstein almost-Kähler manifold 9
2. K. Sekigawa and A. Yamada, A note on the integrability of a class of almost quaternionic manifolds 15
3. T. Nihonyanagi, K. Sekigawa and A. Yamada, Notes on 4-dimensional almost hyperhermitian manifolds 25
4. T. Oguro and K. Sekigawa, Notes on strictly almost Kähler Einstein manifolds of dimension four 41
5. N. Innami, Compression theorems for surfaces and their applications 51
6. N. Innami and B. H. Kim, Steiner ratio for hyperbolic surfaces 63

7. K. Hasegawa, A note on compact solvmanifolds with Kähler structures	67
8. K. Hasegawa, Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds	73
9. J. Davidov, J. C. Diaz-Ramos, E. Garcia-Rio, Y. Matsushita, O. Muskarov and R. Vazquez-Lorenzo, Almost Kähler Walker 4-manifolds	93
10. Y. Matsushita, S. Haze and P. R. Law, Almost Kähler-Einstein structures on 8-dimensional Walker manifolds	107
11. H. Hashimoto, Grassmann geometry of the 6-dimensional sphere	115
12. H. Hashimoto and K. Mashimo, On some tubes over J -holomorphic curves in S^6	133
13. H. Hashimoto, Deformations of super-minimal J -holomorphic curves of a 6-dimensional sphere	147