

偏波干渉レーダによる地球環境の 新しい3次元イメージング

課題番号 15560358

平成16年度科学研究費補助金 (基盤研究(C))

研 究 成 果 報 告 書

平 成 17 年 3 月

研究代表者 山 口 芳 雄

(新潟大学工学部情報工学科)

I はしがき

この報告書は、平成15-16年度の文部科学省科学研究費補助金、基盤研究(C)、課題番号15560358「偏波干渉レーダによる地球環境の新しい3次元イメージング」の成果をまとめたものである。

レーダを使ったりリモートセンシングは、天候に依存しない、昼でも夜でもデータ取得ができる、広い領域を同時に計測できる、などの特長を持っている。人工衛星や航空機に搭載されたレーダには、これらの特長を利用した地球環境計測手段として非常に大きな期待が寄せられている。

レーダは本来、ターゲットまでの距離計測とその反射波の強度を測定する装置であるが、最近では移動しながら連続的に反射波を取得し、反射波を信号処理してターゲットを映像化するようになってきた。距離と反射強度計測のみではなく、画像化を目的としたイメージング装置の機能を持つようになってきた。

イメージングレーダでは、パルス圧縮によってレンジ方向の分解能を向上させ、さらにクロスレンジ方向（アジマス方向）では、合成開口法によってイメージの高分解能化を達成している。レーダの分解能には2種類がある。レーダからの電波ビームが伝搬する距離に相当するレンジ方向と、それと直交するクロスレンジ方向である。レンジ分解能とは、レンジ（距離）方向に並んだ2つのターゲットを識別できる最小距離のことであり、レーダ電波の周波数帯域幅によって決まる。クロスレンジ方向では、合成開口法の原理にしたがって、実開口アンテナの物理的な長さが最小の分解能となる。画像のきめ細かさに対応するピクセルサイズは、このレーダの2つの分解能に直接関連している。レーダ画像では分解能が高いほど1ピクセルに相当する領域の面積は小さい。現在の人工衛星に搭載された合成開口レーダでは、分解能は20m×20m程度である。一方、航空機に搭載された合成開口レーダでは、さらに分解能が向上しており、NICT/JAXAの開発したPi-SARでは、L bandで3m×3m、X bandで1.5m×1.5mである。航空機搭載レーダで分解能が高いのは、人工衛星と比べて装置の搭載スペースに余裕があり、高度な実験装置を搭載可能なためである。そして、人工衛星搭載の前実験・検証という使命も担っており、その結果が人工衛星搭載レーダに反映される。（日本の次期資源探査衛星ALOS-PALSARは2005年に打ち上げられることになっており、Pi-SARでの経験が生かされることになっている。）

しかし、最終的に得られたレーダ画像が何を意味しているのか？あるいは何が明らかになったのか？といった基本問題に対しては、簡単に答は出せない状況にある。SAR画像の基本は後方散乱係数であるが、その値のどこに特徴があり、何が利点であるか等、研究成果を待たねばならない点も数多くある。レーダ画像を正しく解釈し、利用するためには、電波の性質とターゲットの相互作用を理解した上で画像解析を行わなければならない。

この研究では、いかに偏波レーダデータを利用するかということに重点をおいた。タイトルは「偏波干渉レーダによる地球環境の新しい3次元イメージング」であったが、それ以前に、水平、垂直偏波によってターゲットの散乱特性が変わるので、取得された散乱行列がターゲットの検出、認知、分類に積極的に利用できないかと考え、検討を行った。この報告書はその研究結果をまとめたものである。

この報告書では、2章～3章で偏波とレーダポーラリメトリの基礎、4～5章は偏波利用のための偏波行列を示し、6章～8章ではこれらの行列を使った散乱電力分解を示す。6～7章ではCovariance行列から得られる理論値と実測値の対応について、8～9章ではCoherency行列から得られる理論値と実測値について述べる。また、10章はデータ利用の前提となる偏波較正についてまとめた。これらの成果は今後、SAR画像解析、3次元物体のイメージング、埋没物体への応用など、さらなる発展が期待できる。

この研究を進めるにあたり、日頃お世話になっている新潟大学工学部情報工学科・仙石正和教授に感

謝する。お手伝いいただいた新潟大学工学部情報工学科・阿達透技官，さらに，共同研究者でもある情報通信研究機構・森山敏文博士，そして研究室の大学院学生（木村晃治君，石堂基君，他），卒業生諸氏に感謝します。

研究組織

研究代表者 山口芳雄 新潟大学・工学部・情報工学科・教授
研究分担者 山田寛喜 新潟大学・工学部・情報工学科・助教授

研究経費

平成15年度	1900千円
平成16年度	1700千円
計	3600千円

研究発表

(1) 学会誌等

- [1] Koichi Sato, Hiroyoshi Yamada, Yoshio Yamaguchi, "Advantage of the ESPRIT method in Polarimetric Interferometry for Forest Analysis," IEICE Trans. Commun., vol.E86-B, no.5, pp.1666-1672, May 2003.
- [2] 原六蔵, 山田寛喜, 山口芳雄, "校正用データセット数を軽減した反復的アレー校正手法", 信学論B, vol.J86-B, no.9, pp.1906-1913, 2003年9月.
- [3] Dharmendra Singh, Yoshio Yamaguchi, K.P.Singh, "Retrieval of wheat chlorophyll by an X-band scatterometer," International Journal of Remote Sensing, vol.24, no. 23, pp.4939-4951, Dec 2003.
- [4] Koji Kimura, Yoshio Yamaguchi, Hiroyoshi Yamada, "Pi-SAR image analysis using polarimetric scattering parameters and total power", 2003 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS 2003), on CR-ROM, Toulouse, France, 21-25, July, 2003.
- [5] Hiroyoshi Yamada, Yoshio Yamaguchi, W.M.Boerner, "Forest Height feature extraction in polarimetric SAR interferometry by using rotational invariance property", 2003 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS 2003), on CR-ROM, Toulouse, France, 21-25, July, 2003.
- [6] J. Yang, G. Dong, Y. Peng, Y. Yamaguchi, and H. Yamada, "Generalized optimization of polarimetric contrast enhancement," IEEE Geoscience Remote Sensing Letters, vol.1, no.3, pp.171-174, 2004
- [7] Koji Kimura, Y. Yamaguchi, H. Yamada, "Unsupervised land classification using H/a/TP space applied to POLSAR image analysis," IEICE Trans. Commun., vol.E87-B, no.6, pp.1639-1647, June 2004
- [8] 原六蔵, 山田寛喜, 小川恭孝, 山口芳雄, "高分解能到来方向推定のための影像法を用いた反射板付きダイポールアレー校正法," 電子情報通信学会論文誌B, vol.J87-B, no.9, pp.1424-1433, 2004
- [9] Koji Kimura, Y. Yamaguchi, H. Yamada, "Circular polarization correlation coefficient for detection of non-natural targets aligned not parallel to SAR flight path in the X-band POLSAR image analysis," IEICE Trans. Commun., vol.E87-B, no.10, pp.3050-3056, Oct. 2004
- [10] Y. Yamaguchi, K. Kimura, T. Moriyama, H. Yamada, "Correlation coefficient in the circular polarization basis for detection of man-made targets in polsar image analysis," Proc. of ISAP 2004 (CD-ROM), 4C3-4, Aug. 2004
- [11] T. Moriyama, Y. Yamaguchi, S. Uratsuka, T. Umehara, H. Maeno, M. Satake, A. Nadai, K. Nakamura, "A study on polarimetric correlation coefficient for feature extraction of polarimetric SAR data," Proc. of ISAP 2004 (CD-ROM), 4C3-2, Aug. 2004
- [12] K. Ikeda, J. Nagai, T. Fujita, H. Yamada, A. Hirata, T. Ohira, Y. Yamaguchi, "DOA estimation using MUSIC algorithm with a 9-elements rectangular ESPAR antenna," Proc. of ISAP 2004 (CD-ROM), 1A4-5, Aug. 2004
- [13] H. Iura, H. Yamada, Y. Ogawa, Y. Yamaguchi, "Effect of element spacing for MIMO channel capacity in Rayleigh fading environment," Proc. of ISAP 2004 (CD-ROM), POS-S2, Aug. 2004
- [14] H. Yamada, S. Kakizaki, Y. Yamaguchi, "On optimal polarimetric characteristic parameters for land-cover classification," Proc. of ISAP 2004 (CD-ROM), POS-B6, Aug. 2004
- [15] Y. Yamaguchi, T. Moriyama, M. Ishido, H. Yamada, "Four Component Scattering Model for Polarimetric SAR Image Decomposition," Proc. of 2004 Korea-Japan joint Conference on AP/EMC/EMT, pp.105-108, Nov.22-23, 2004

(2) 口頭発表

- [1] 木村晃治, 山口芳雄, 山田寛喜, "Coherency Matrixに基づく地表面の教師なし分類", SAR Workshop 2003, on CDROM, 平成15年1月.
- [2] 柿崎創平, 山田寛喜, 山口芳雄, "POLARSAR画像における有効な分類パラメータの組み合わせの検討", PI-SAR Workshop 2003, on CDROM, 平成15年8月.
- [3] 小林弘晃, 山口芳雄, 山田寛喜, "2面コーナリフレクタからの偏波散乱特性", PI-SAR Workshop 2003, on CDROM, 平成15年8月.
- [4] 加藤洋一, 山口芳雄, 山田寛喜, "Monostatic radarによるBistatic反射測定", PI-SAR Workshop 2003, on CDROM, 平成15年8月.
- [5] 山田寛喜, 原六蔵, 小川恭孝, 山口芳雄, "アレーアンテナの素子間相互結合校正法とその精度に関する比較検討", 電子情報通信学会技術研究報告, vol.AP2002-218, no.3, pp.179-186, 2003年3月.
- [6] 小林弘晃, 山口芳雄, 山田寛喜, "2面コーナリフレクタからの偏波散乱特性", 電子情報通信学会技術研究報告, vol.103, no.100, SANE2003-13, pp.35-40, 2003年5月.
- [7] 池田堅一, 原六蔵, 山田寛喜, 山口芳雄, "種々のDOA推定法とアレー校正の効果に関する検討", 電子情報通信学会技術研究報告, vol.AP2003-60, pp.115-120, 2003年7月.
- [8] 原六蔵, 山田寛喜, 小川恭孝, 山口芳雄, "映像法を用いる反射板付ダイポールアレー校正", 電子情報通信学会技術研究報告, vol.AP-12, 2003, 2003年9月.
- [9] 木村晃治, 山口芳雄, 山田寛喜, "ターゲットの偏波散乱特性に基づく地表面の教師なし分類", 2003年電子情報通信学会総合大会, SB-1-3, 平成15年3月.
- [10] 山田寛喜, 原六蔵, 小川恭孝, 山口芳雄, "リニアアレーアンテナ校正手法の比較検討", 2003年電子情報通信学会総合大会, B-1-113, 平成15年3月.
- [11] 原六蔵, 山田寛喜, 山口芳雄, "Re-defined Impedance Matrixを用いた反復アレー校正手法", 2003年電子情報通信学会総合大会, B-1-116, 2003年3月.
- [12] 池田堅一, 千葉建治郎, 山田寛喜, 山口芳雄, "DOA推定法におけるアレー校正効果に関する実験的検討", 2003年電子情報通信学会総合大会, B-1-114, 2003年3月.
- [13] 林圭・佐藤亮一・山口芳雄・山田寛喜, "有限平板上の誘電体柱群からの偏波散乱特性", 2003年電子情報通信学会ソサイエティ大会, B-1-9, 2003年9月.
- [14] 石堂基・山口芳雄・山田寛喜, "多周波POL-SAR画像による地表面解析", 2003年電子情報通信学会ソサイエティ大会, B-1-23, 2003年9月.
- [15] 柿崎創平・山田寛喜・山口芳雄, "主成分分析を用いた最適なPOLARSAR画像分類パラメータの検討", 2003年電子情報通信学会ソサイエティ大会, B-1-24, 2003年9月.
- [16] 加藤洋一・山口芳雄・山田寛喜, "Monostatic RadarによるSpecular反射測定法の検討", 2003年電子情報通信学会ソサイエティ大会, B-1-25, 2003年9月.
- [17] 原六蔵・山田寛喜・小川恭孝・山口芳雄, "映像法を用いる反射板付ダイポールアレーの校正に関する検討", 2003年電子情報通信学会ソサイエティ大会, B-1-116, 2003年9月.
- [18] 池田堅一・原六蔵・山田寛喜・山口芳雄, "スーパーレゾリューション法を用いたコヒーレント波のDOA推定に関する校正実験", 2003年電子情報通信学会ソサイエティ大会, B-1-121, 2003年9月.
- [19] 加藤洋一・山口芳雄・山田寛喜, "Monostatic RaderによるSpecular反射測定", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, E1, p.101-102, 2003年10月.
- [20] 岡田裕樹・山田寛喜・山口芳雄, "森林モデルを用いたPol-InSAR基礎実験", 平成15年電子情報通信

学会信越支部大会, E2, pp.103-104, 2003年10月

- [21] 岡田武幸・山田寛喜・山口芳雄, "電波暗室内POL-InSAR実験における森林解析", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, E3, pp.105-106, 2003年10月
- [22] 柿崎創平・山口芳雄・山田寛喜, "POLSAR画像分類パラメータの最適な組み合わせに関する一考察", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, E4, pp.107-108, 2003年10月
- [23] 原六蔵・山田寛喜・山口芳雄, "影像法を用いる反射板付ダイポールアレーの校正について", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, E5, pp.109-110, 2003年10月
- [24] 浅田龍・山田寛喜・山口芳雄, "ESPRIT法を用いた多偏波干渉SARデータにおける森林解析について", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, E6, pp.111-112, 2003年10月
- [25] 池田堅一・原六蔵・山田寛喜・山口芳雄, "コヒーレント波のDOA推定に関するアレー校正効果の実験的検証", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, E7, pp.113-114, 2003年10月
- [26] 石堂基・山口芳雄・山田寛喜, "多周波POL-SAR画像による地表面解析について", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, E8, pp.115-116, 2003年10月
- [27] 佐藤正人・山田寛喜・山口芳雄, "POLSAR画像データを用いた地表面の傾斜角推定", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, E9, pp.117-118, 2003年10月
- [28] 朴珍珪・山田寛喜・山口芳雄, "市街地・室内無線通信における到来波の角度広がり推定", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, E10, pp.119-120, 2003年10月
- [29] 照井雄佳・原六蔵・山田寛喜・山口芳雄, "アレーアンテナを用いた電波伝搬モニタシステムの校正の検討", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, F4, pp.127-128, 2003年10月
- [30] 林圭・佐藤亮一・山口芳雄・山田寛喜, "有限平板上の誘電体柱群からの偏波散乱特性について", 平成15年電子情報通信学会信越支部大会, F5, pp.129-130, 2003年10月
- [31] ERSDAC編集, 山口芳雄分担. 地球観測データからの情報抽出-ポーラリメトリック解析, 資源環境リモートセンシングシリーズ3, pp.229-245, ERSDAC, 2003
- [32] Lecture on "Four Component Scattering Model for Polarimetric SAR Image Decomposition", at Tsinghua University on Nov. 26, 2004.
- [33] 山口芳雄, 木村晃治, 山田寛喜, "円偏波相関係数による偏波レーダ画像中の人工物体の検出", 電子情報通信学会技術研究報告, A・P2004-21, 2004年5月.
- [34] 井浦裕貴, 山田寛喜, 小川恭孝, 山口芳雄, "MIMOチャネル容量における素子間相互結合の影響", 電子情報通信学会技術研究報告, A・P2004-67, 2004年7月.
- [35] 林圭, 佐藤亮一, 山口芳雄, 山田寛喜, "斜め方向から見た誘電体2面コーナリフレクタからの散乱特性", 電子情報通信学会技術研究報告, A・P2004-96, 2004年7月.
- [36] Yoshio YAMAGUCHI, Toshifumi MORIYAMA, Motoi ISHIDO, Hiroyoshi YAMADA, "A Proposal of Four-Component Scattering Model for Polarimetric SAR Image Decomposition", 電子情報通信学会技術研究報告, A・P2004-132, 2004年9月.
- [37] 加藤洋一, 山口芳雄, 林圭, 山田寛喜, "2面コーナリフレクタを用いたMonostatic radar によるBistatic 測定の検討", 電子情報通信学会技術研究報告, A・P2004-183, 2004年10月.
- [38] 原 六蔵, 山田寛喜, 小川恭孝, 山口芳雄, "近傍既知波源を用いる反射板付ダイポールアレー校正に関する検討", 2004年電子情報通信学会総合大会, B-1-218, 平成16年3月.
- [39] 井浦裕貴, 山田寛喜, 小川恭孝, 山口芳雄, "MIMOチャネル容量における素子間相互結合の影響について", 2004年電子情報通信学会総合大会, B-1-224, 平成16年3月

- [40] 池田堅一, 永井 潤, 藤田隆宏, 山田寛喜, 平田明史, 大平 孝, 山口芳雄, "9素子矩形エスパ MUSIC法によるコヒーレント波の到来方向推定", 2004年電子情報通信学会総合大会, B-1-272, 2004年3月
- [41] 林圭, 佐藤亮一, 山口芳雄, 山田寛喜, "斜め方向から見た誘電体2面コーナリフレクタからの散乱特性," 平成16年度電子情報通信学会信越支部大会講演論文集, 2C-3, Oct.2, 2004
- [42] 三富敏, 山口芳雄, 山田寛喜, "FDTD法による正弦型ROUGH Surfaceの散乱解析," 平成16年度電子情報通信学会信越支部大会講演論文集, 2C-4, Oct.2, 2004
- [43] 照井雄佳, 山田寛喜, 山口芳雄, "アレーアンテナを用いたリアルタイム電波伝搬モニタシステムの基礎実験," 平成16年度電子情報通信学会信越支部大会講演論文集, 2C-5, Oct.2, 2004
- [44] 井浦裕貴, 山田寛喜, 山口芳雄, "アンテナ指向性がMIMOチャンネル容量に与える一検討," 平成16年度電子情報通信学会信越支部大会講演論文集, 2D-3, Oct.2, 2004
- [45] 石堂基, 山口芳雄, 山田寛喜, "四成分散乱モデル分解を用いた市街地領域のPOLARS画像解析," 平成16年度電子情報通信学会信越支部大会講演論文集, 2D-4, Oct.2, 2004
- [46] 岡田浩樹, 山田寛喜, 山口芳雄, "多偏波干渉SARデータにおける森林高推定手法について," 平成16年度電子情報通信学会信越支部大会講演論文集, 2D-5, Oct.2, 2004
- [47] 池田堅一, 山田寛喜, 平田明史, 大平孝, 山口芳雄, "9素子矩形エスパアンテナを用いた波源位置推定実験," H 1 6 年度電子情報通信学会信越支部大会講演論文集, 3C-1, Oct.2, 2004
- [48] 佐藤正人, 山田寛喜, 山口芳雄, "STAP法を用いた前方監視車載レーダの基礎的検討," 平成16年度電子情報通信学会信越支部大会講演論文集, 3C-2, Oct.2, 2004
- [49] 山口芳雄, 石堂基, 山田寛喜, "4成分散乱電力分解による Pi-SAR画像の解析," 第490回電波研連F分科会, <http://www2.nict.go.jp/pub/ursi-f/annai490.html>, Dec. 17, 2004.
- [50] 山口 芳雄, "4-component decomposition of POLSAR data based on covariance matrix," SAR Workshop 2005, on CD-ROM, Jan. 2005

II 研究成果

研究経過の概要

レーダのハードウェア開発、レーダ信号処理、レーダ画像の作成、レーダ画像の利用方法は、それぞれがレーダ工学の中心をなす大きな研究分野である。この研究は、航空機搭載ポーラリメトリックSARによって得られたデータを干渉させ、偏波位相の最適化問題を解くことによって新しい3次元イメージングを行うことを目的とした。しかし、実際の航空機SARで精度の良いリピート飛行は難しく、干渉縞の得られるようなデータの取得は不可能であった。Pi-SARは年間3-4回飛行を繰り返したが、上空の風速、風向きの変動が変わるため、全く同じ飛行経路を取ることは不可能であった。そこで、Pi-SARから得られる偏波データを使って、偏波情報から精度の良い地表分類方法を検討することにした。レーダ工学の最終目的は、レーダから得られる情報を使ってターゲットを詳細に探ることにある。ターゲットを識別したり、分類したりすることも含まれる。研究のタイトルとは異なるが、内容として偏波情報の有効利用、利用方法に焦点をあてて研究を行った。

研究期間全体を通して検討したものは

◆ 偏波理論の確立（誰もが使えるように、統一された理論を構築しておくことは非常に重要である）

◆ 散乱行列の検証実験

（理論通りの散乱行列が得られるかどうかを実験室内で検証する必要がある。この点に関して理論的に正確な散乱行列データを得るために時間がかかり、継続中である）

◆ 散乱行列からターゲット情報抽出パラメータの選定

（最も良い偏波による分類指標は何か？2次統計量の3成分分解や固有値、相関係数、などを検討）

◆ 3成分分解法を4成分分解に拡張

（理論的に2次統計量を展開すると、円偏波発生項目が出現することを見出した）

◆ 地表分類した画像の有効性の確認（グランドトゥース）

である。これらの事柄を実際のPi-SARで取得した新潟市や新潟大学近くのデータで比較を行った。その結果、おおむね計画通りに研究が進み、円偏波基底の相関係数がターゲット分類の手法として役立つことを見出した。また、市街地における4成分分解手法の有効性も示された。しかし、植生領域だけの画像など固有な状況もあるため、一般論としては何が最適かどうかなど、分類方法にはまだ問題も残された。

この報告書で、第2章～第3章では偏波とレーダポーラリメトリの基礎を述べる。最初の定義が最も重要であり、これはそこから偏波情報などのパラメータが定義されるためである。

第4章、5章では、Polarimetric SAR画像解析に有用な偏波行列について示した。偏波散乱ベクトル、平均化Covariance行列、Coherency行列、Kennaugh行列などである。また、レーダビームの方向が変わっても同一のターゲットからは同じ形の行列が得られなければ実用上困るので、ターゲットの回転に対応した理論的な平均化Covariance行列などを示した。これらの行列形式は後の散乱電力分解の基礎になるものである。

第6章ではCovariance行列による散乱電力分解を詳細に検討し、4つの成分で分解できることを示した。この点が最も大きな研究成果である。さらに、第8章でも平均化Coherency行列による分解方法を示し、円偏波成分が重要な役割を果たすことを見出した。

Reflection Symmetryといわれる条件を撤廃し、それを拡張してどの場合にも対応できるように検討した結果、円偏波での相関係数に人工物ターゲットが関連していることを見出し、相関係数の位相と建物などの関係を調べた。第7章ではそれによる解析結果について述べる。また、第9章では、Polarization Anisotropy 係数、Polarimetric entropyなど派生する重要なパラメータについても説明する。

第10章では、研究を実施する上で使用したPi-SARデータの偏波校正方法について述べる。JPLのVan Zyl氏、SheffieldのQuegan氏によって提案されたPOL-CALの手法を振り返り、Pi-SARデータに応用して偏波校正を行った。比較の結果、Quegan氏の方法が優れていることも示した。

目次

第1章 はじめに

- 1.1 リモートセンシングについて
- 1.2 多様なレーダ分野
- 1.3 偏波情報の必要性

第2章 偏波の基礎

- 2.1 平面波
 - 2.1.1 時間領域における Maxwell 方程式とベクトル波動方程式
 - 2.1.2 Phasor表現を用いたベクトル波動方程式とその解
 - 2.1.3 単一周波数のTEM波(Transverse Electro-Magnetic Wave)
 - 2.1.4 TEM波のPower
- 2.2 だ円偏波の表現方法
 - 2.2.1 一般的数式表現
 - 2.2.2 幾何学的パラメータ (τ, ϵ, A) による表現
 - 2.2.3 Jones ベクトルによる表現
 - 偏波比 (Polarization ratio) ρ による表現
 - 2.2.4 Stokesベクトルによる表現
 - (a) 完全偏波に対するStokesベクトル
 - (b) 部分偏波に対するStokesベクトル
 - 2.2.5 偏波パラメータとポアンカレー球
 - 2.2.6 偏波ベクトルによる表現
- 2.3 偏波パラメータ間の関係
- 2章付録

第3章 レーダポーラリメトリの基礎

- 3.1 レーダ概説
 - 3.1.1 Frissの伝達公式とレーダ方程式
 - 3.1.2 最大探知距離
 - 3.1.3 レーダ散乱断面積
 - 3.1.4 分布ターゲットの後方散乱断面積
 - 3.1.5 偏波による散乱依存性
- 3.2 相反定理
- 3.3 受信電圧
- 3.4 散乱行列
- 3.5 レーダポーラリメトリの基本式
- 3.6 受信電力の表現
 - 3.6.1 偏波比を使った偏波チャンネルの受信電力
 - 3.6.2 幾何学的パラメータを使った偏波チャンネルの受信電力
 - 3.6.3 Stokesベクトルを使った偏波チャンネルの受信電力表現
- 3.7 各種ターゲットからの偏波チャンネルの受信電力例
 - Polarization Signature --

第4章 POLSARデータに有用な偏波行列形式

- 4.1 散乱行列のデータ記録
- 4.2 偏波散乱ベクトル k_L と k_p
- 4.3 平均化Covariance行列, Coherency行列, Kennaugh行列

第5章 角度平均化した偏波行列の理論値

- 5.1 ターゲットの回転と散乱行列の回転
- 5.2 角度回転した散乱行列
- 5.3 角度回転した平均化Covariance行列 $\left\langle [C(\theta)] \right\rangle^{HV}$
- 5.4 角度回転した平均化Coherency行列 $\left\langle [T(\theta)] \right\rangle^{HV}$
- 5.5 角度回転した平均化 Kennaugh 行列 $\left\langle [K(\theta)] \right\rangle$
- 5.6 角度回転した偏波行列の具体例
- 5.7 円偏波基底における平均化Covariance行列
- 5.8 円偏波基底におけるCovariance行列の具体例

第6章 Covariance 行列による散乱電力分解

- 6.1 Pi-SARデータの平均Covariance 行列要素
- 6.2 相関係数によるCovariance 行列表現
- 6.3 平均Covariance行列要素の理論値
- 6.4 確率密度関数の変更
- 6.5 物理散乱モデルによる平均化Covariance行列
- 6.6 四成分分解法
- 6.7 四成分分解法の適用範囲とアルゴリズム
- 6.8 四成分分解法の検証例

- 付録6.1 Durdeen Freemanのoriginal三成分分解法
- 付録6.2 三成分分解法 (体積散乱の項を変更 $\sigma_{HH} > \sigma_{VV}$)
- 付録6.3 三成分分解法 (体積散乱の項を変更 $\sigma_{HH} < \sigma_{VV}$)
- 付録6.4 Durdeen, Freemanの分解法と注意事項
- 付録6.5 Covariance全体にかかる係数について
- 付録6.6 α, β, f_s, f_d の導出について
- 付録6.7 各種基本ターゲットの集合平均Covariance行列

第7章 偏波相関係数について

- 7.1 散乱ベクトル k_L
- 7.2 Covariance 行列と相関係数 (HV基底)
- 7.3 円偏波基底でのCovariance行列と相関係数 (RL)
- 7.4 $45^\circ - 135^\circ$ 直線偏波基底でのCovariance行列と相関係数 (XY)
- 7.5 有効と思われる相関係数
- 7.6 POLSAR画像解析例

第8章 Coherency 行列と散乱電力分解

- 8.1 行列の定義
 - Pauli 散乱ベクトル, Coherency行列, 平均化coherency 行列

8.2 具体的なPOL-SAR画像例

8.3 平均化行列の形

Reflection symmetry

Rotation symmetry

Azimuthal symmetry

8.4 数学的な平均化

8.5 基本ターゲットのCoherency行列

8.6 物理散乱モデルとの対応：散乱電力分解への準備

8.7 物理散乱モデルによるCoherency行列の四成分分解（表面，二回反射，体積散乱，円偏波発生）

8.8 Coherency行列の四成分分解例

付録8.1 三成分分解（表面，二回反射，体積散乱）

第9章 Coherency 行列と Polarimetric Entropy H/ Angle α /Anisotropy / TP

9.1 Coherency matrix と polarimetric entropy

9.2 平均化されたCoherency matrixとエントロピー

9.3 分類手法

9.4 分類結果

第10章 偏波較正

10.1 Van Zyl's method

10.1.1 cross-talk 較正

10.1.2 相対振幅位相較正

10.2 Quegan's method

10.3 偏波較正例

第1章 はじめに

1.1 リモートセンシングについて

リモートセンシングとは、航空機や人工衛星などのプラットフォームに搭載したセンサを使って離れた場所から観測対象（ターゲット）を間接的に測定する技術である。測定手段としては、主に電波や光、音波などの波動を利用する。ターゲットから反射または放射される電磁波を収集し、その情報を用いて観測対象や現象に関する情報を得る技術の総称である。

リモートセンシングの方法には、大きく分けて2つの種類がある。1つ目は、ターゲットから放射される電磁波を受信する方法（受動型）で、測定装置自身は電磁波を放射しない。ラジオメータや、光学センサーのほとんどがこの種類に入る。例えばフラッシュを使わないカメラが代表的な例である。

2つ目は、装置自身で電磁波を放射し、その反射波を測定する能動型の方法である。レーダがその典型的な例であり、カメラのフラッシュ撮影などもこの部類にはいる。電波を使ったレーダは、電波の伝搬特性（雲を透過する性質）から分かるように天候に依存せず、昼夜を問わず観測が可能である。周波数によっては、反射波の振幅のみならず位相も測定できるので、それらの情報を利用して高度な信号処理ができ、応用範囲が広い。

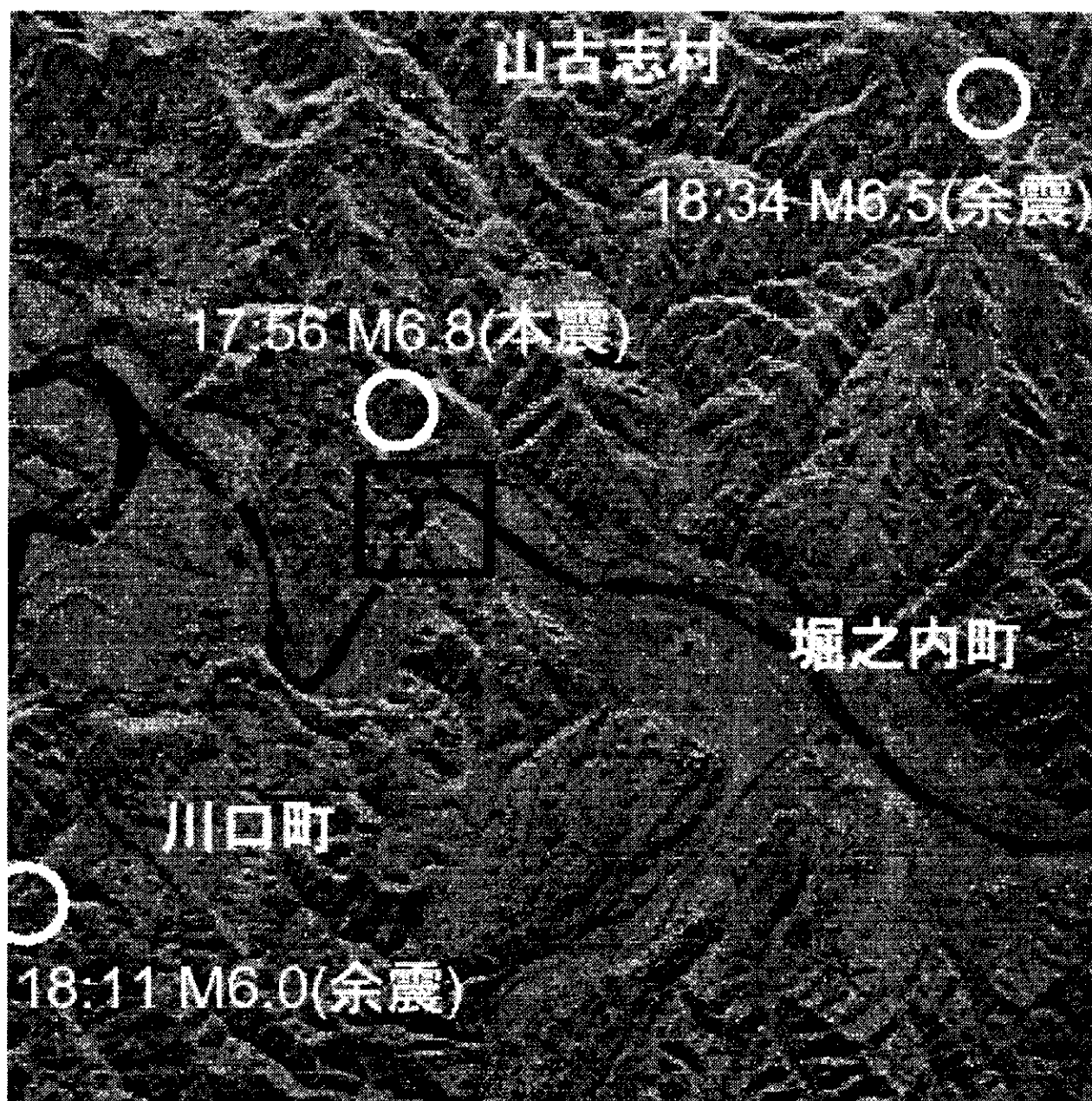
現在、人工衛星に搭載された光学センサーや合成開口レーダは、地球上の表面の隅々までを映しだし、さらに人間の入り込めないジャングルや山間部の情報をもたらしている。光学センサーと合成開口レーダでは、同じ電磁波というカテゴリの中で情報を収集するが、得られる情報はかなり異なる。同じターゲットでも周波数や波長による反射の違いが大きく、センサーの分解能も異なるためである。また、波動としての伝搬特性にも違いがあり、光では雲を通過できないが、電波（Kuバンド以下の周波数）では通過する。このことは、地上のターゲットを計測する場合にレーダの利点となるが、逆に雲を測定しようとする、この範囲の周波数の電波では、雲との相互作用が少ないので不利になる。観測しようとするターゲットの電磁波的な性質や伝搬媒質の特徴を調べた上で、どのような周波数が適しているかを考慮しておく必要がある。

一般に、光学センサーでは、可視領域も含め人間の感覚に近い波長領域の電磁波を使うため、人間にとって比較的理解しやすい画像が得られる。レーダではマイクロ波領域(1~10 GHz)の電磁波を扱い、このマイクロ波は人間には感知できないこと、その取り扱い・散乱問題が純粋に理論・実験にゆだねられるので、人間の感覚・感性からは理解しにくい点が特徴である。分解能は人工衛星搭載のレーダで10~20m、航空機搭載レーダで1~3m程度のものが得られている。電波と光のどちらか片方だけですむものではない。一般には、互いに補完しあって正確な情報が得られるので、パートナーとして捉える方が良い。

一方、地球環境だけでなく、日常生活に身近なところでもレーダが積極的に使われはじめている。車両関係では速度監視レーダは十分に実用化されているが、さらに、ITS関係で自動車用の衝突防止レーダの開発が盛んであり、船舶関係、航空管制などではレーダが無ければ航行・飛行は不可能になる。地中探査レーダも、地雷探査、ガスパイプ、電力、電話ケーブルの探査、遺跡探査などに応用されている。

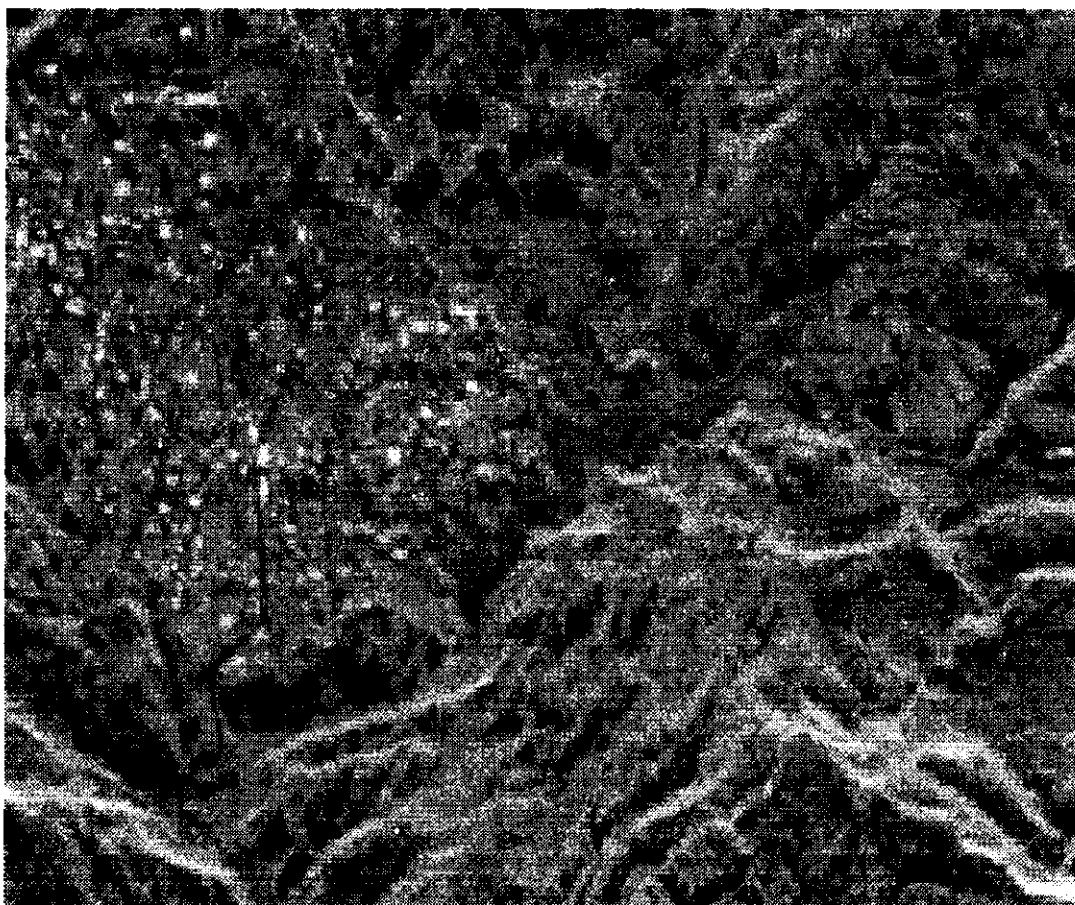
研究期間中の2004.10.23に新潟県中越地震が発生した。10.26と11.3にはPi-SARが被災地を飛行し、観測を実施した。その結果を次頁に掲載する。この研究自体は、NICT, JAXAとの共同研究体制のもとで実施している。これらの観測はレーダリモートセンシングの有効性を示す例となろう。偶然にも申請者の実家の領域が地震に見舞われ、SAR画像を見ることは初の経験であったが、雨天の中でも見事に画像化が可能であり、よ

く知られていない水量の変化を捉えていた。



偏波SAR画像(10kmx10km :10月26日観測)

Color composite image (HH:red, HV green, VV blue)



山古志村種芋原での天然ダム（黒い部分に水があった．11.3と10.26との画像差により判明）
この水で覆われた地域は申請者の出身地で，被災した両親がヘリコプターで運ばれる直前（10.24）に確認している．
和田川がせき止められて，一時的にできたものである．11.2には流出していたことも確認．

1.2 多様なレーダ技術分野

レーダは一つの計測システムであり、ターゲットの情報を得ることが目的である（ある意味では逆散乱問題解析システムとも言える）。ターゲットまでの距離計測と反射波の強度を測定する装置であるが、SAR技術の進展によってターゲットを映像化するようになってきた。最近のレーダは画像化を目的としたイメージング装置の機能も合わせ持つと考えてもよい。レーダ工学にはマイクロ波回路、アンテナ、伝搬、ターゲットにおける散乱、反射波の受信装置、信号処理、画像処理、またデータ伝送、通信など様々な要素がある。レーダに関わる人もこれらの分野に応じて幅広い。単独分野だけの理解では他の分野のことが分からなくなることがでてくるので、レーダ工学では、相互関係を把握し、その境界も理解することが大切である。

1.3 偏波情報の重要性

従来のレーダでは、垂直偏波で送信し垂直偏波で受信するなど、一つの偏波成分しか使っていないものが多かった。例えば、図1.1のように斜めの線状物体に電波を当てると、反射波には新たに直交成分が発生する。同じ方向成分しか受信していないレーダでは、新たな成分は無視していることになる。電波はベクトル量であるにもかかわらず、このように既存のレーダはベクトル中の一成分しか利用していないものが多かった。そのベクトル量（偏波情報）を全て計測すれば、ターゲットに関する様々な情報を引き出せることが想像できる。

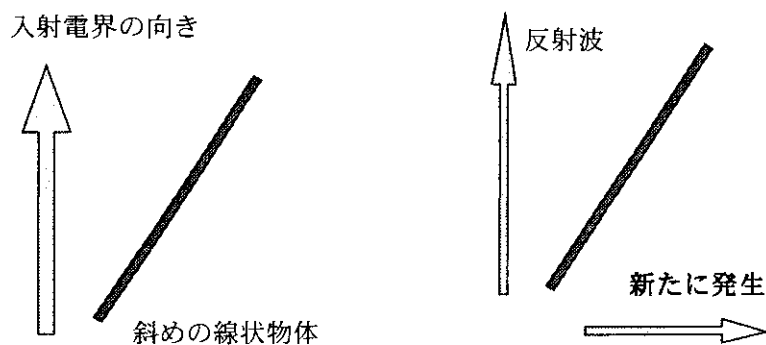


図1.1 新たに発生する偏波成分

一般にターゲットは複雑な形状をしていたり、各種の材質で構成されている。図1.2に示すように、ある偏波で電波をターゲットに当てた場合、反射波の偏波状態はだ円となる。現在の技術では振幅と位相を含めて直交2成分を測ることができ、完全にベクトル的な偏波情報を得ることができる。レーダポーラリメトリーは、電波のベクトル性質である偏波をレーダセンシングに利用する理論と技術である。

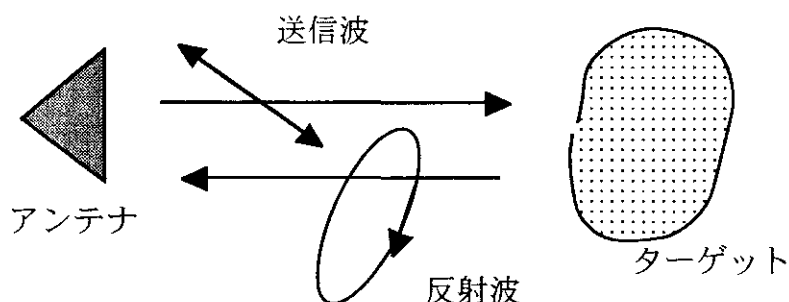


図1.2 送信と反射の偏波状態

航空機に搭載した偏波レーダは以下のような機種がある。この図はフランス、レンヌ大学のE. Pottier先生から頂いたものである。この中で、AIRSARが最も最初に偏波の有効性を示し、世界各国が次々に開発を続けてきた。日本のPi-SARも分解能をはじめとする性能では世界最高といっても良い。

POLARIMETRIC AIRBORNE SAR SENSORS

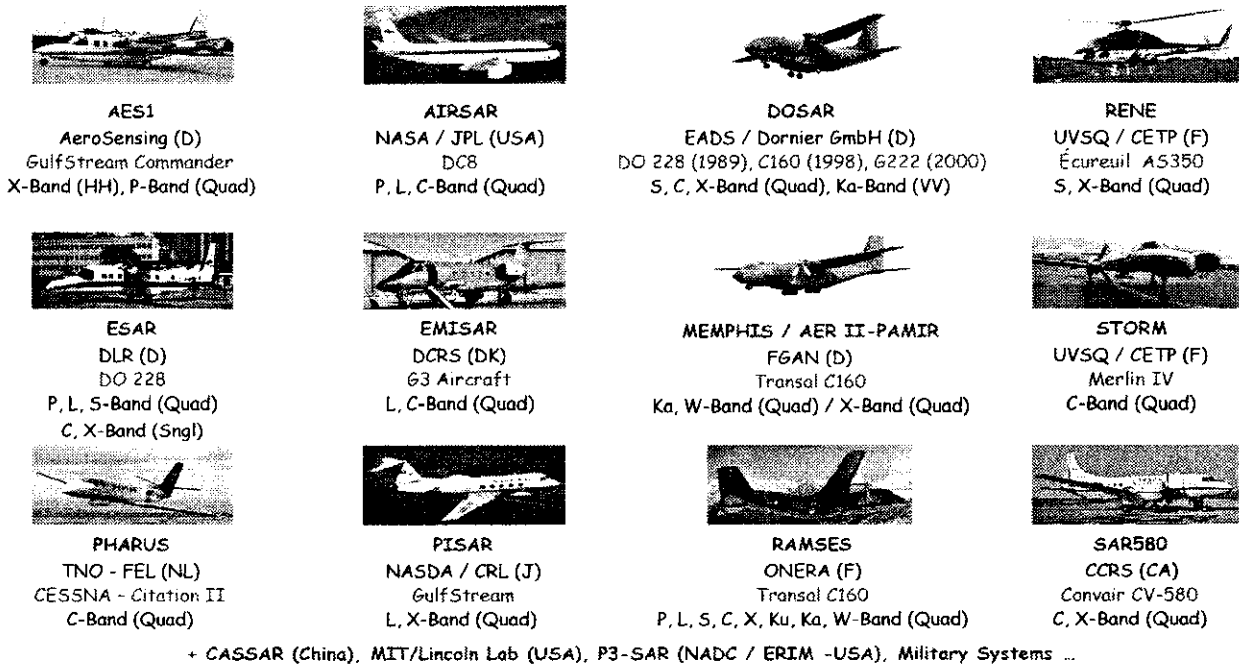


図1.3 航空機搭載偏波合成開口レーダ

2005年1月現在、世界には偏波レーダを搭載した人工衛星はまだ存在しない。2005年9月に世界に先駆けて日本の陸域観測衛星ALOS-PALSARが打ち上げられる予定である。L-bandのFully Polarimetric Radarである。

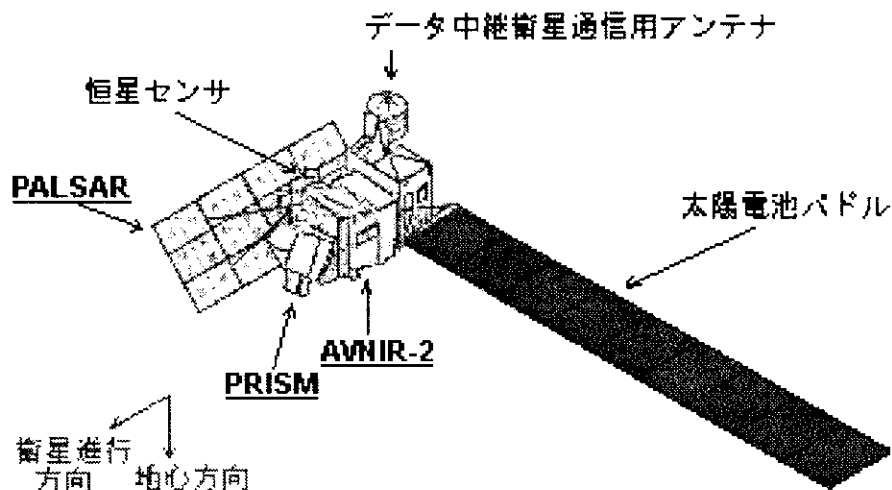














図1.4 ALOS

航空機に搭載した偏波レーダは以下のような機種がある。この図はフランス、レンヌ大学のE. Pottier先生から頂いたものである。この中で、AIRSARが最も最初に偏波の有効性を示し、世界各国が次々に開発を続けてきた。日本のPi-SARも分解能をはじめとする性能では世界最高といっても良い。

POLARIMETRIC AIRBORNE SAR SENSORS

			
AES1 AeroSensing (D) GulfStream Commander X-Band (HH), P-Band (Quad)	AIRSAR NASA / JPL (USA) DC8 P, L, C-Band (Quad)	DOSAR EADS / Dornier GmbH (D) DO 228 (1989), C160 (1998), G222 (2000) S, C, X-Band (Quad), Ka-Band (VV)	RENE UVSQ / CETP (F) Écureuil AS350 S, X-Band (Quad)
			
ESAR DLR (D) DO 228 P, L, S-Band (Quad) C, X-Band (Sngl)	EMISAR DCRS (DK) 63 Aircraft L, C-Band (Quad)	MEMPHIS / AER II-PAMIR FGAN (D) Transal C160 Ka, W-Band (Quad) / X-Band (Quad)	STORM UVSQ / CETP (F) Merlin IV C-Band (Quad)
			
PHARUS TNO - FEL (NL) CESSNA - Citation II C-Band (Quad)	PISAR NASDA / CRL (J) GulfStream L, X-Band (Quad)	RAMSES ONERA (F) Transal C160 P, L, S, C, X, Ku, Ka, W-Band (Quad)	SAR580 CCRS (CA) Convair CV-580 C, X-Band (Quad)

+ CASSAR (China), MIT/Lincoln Lab (USA), P3-SAR (NADC / ERIM -USA), Military Systems ...

図1.3 航空機搭載偏波合成開口レーダ

2005年1月現在、世界には偏波レーダを搭載した人工衛星はまだ存在しない。2005年9月に世界に先駆けて日本の陸域観測衛星ALOS-PALSARが打ち上げられる予定である。L-bandのFully Polarimetric Radarである。

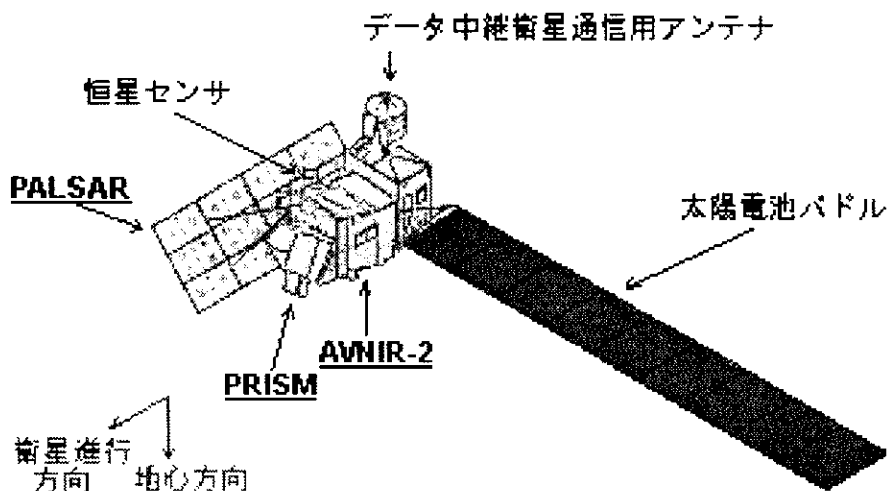


図1.4 ALOS

第2章 偏波の基礎

2.1 平面波

図2.1.1に示すように、波源（送信アンテナあるいは散乱点）から遠い位置で、観測点Pにおける波の状態を考える。遠いとは、波長 λ に比べて距離 r が十分大きいことを意味しており、観測点Pの近くでは、等位相面が局所的には平面とみなせる状態にある。平面波とは、波の等位相面が平面になっている波のことである。点Pの近傍領域で、電波は平面波と近似できる。電波で通信や計測を行うとき、ほとんど図2.1.1のように平面波近似できる状態になっているので、平面波の性質を理解しておくことが最も重要である。

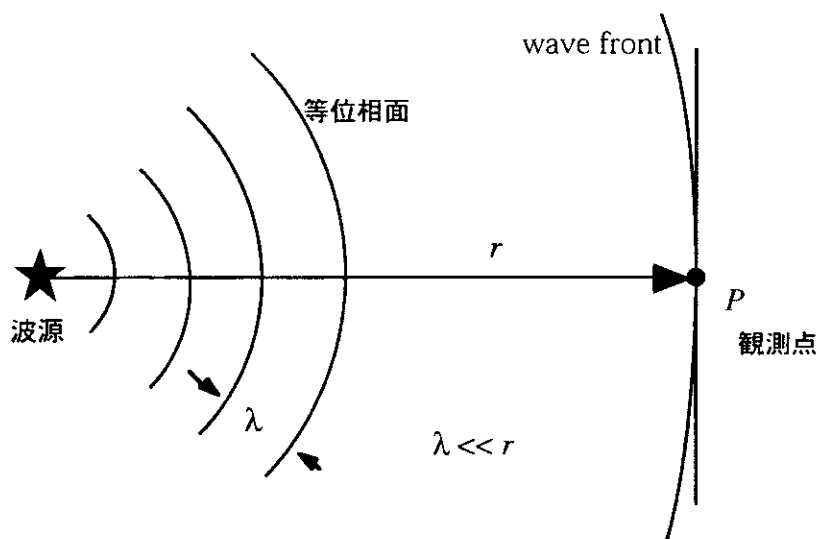


図2.1.1 観測点での電波の状態（平面波近似）

偏波を理解をする際に、平面波の理解が基礎となる。この章ではMaxwellの方程式から出発して、平面波の数学的な特徴・性質を説明する。そして偏波を解析するための基礎的な事柄を述べる。

2.1.1 時間領域における Maxwell 方程式とベクトル波動方程式

\mathbf{r} を 3次元空間中の任意点の位置ベクトル ($\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$) とする。時刻 t で位置 \mathbf{r} における電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と磁界 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ は、Maxwell方程式を満たす。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.1.4)$$

ただし、 \mathbf{D} は電束密度、 \mathbf{B} は磁束密度、 \mathbf{J} は電流密度、 ρ は電荷密度である。(2.1.2)の発散をとると電荷保存の法則が導かれる。

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.1.4)$$

均質媒質中において、その媒質の巨視的な電氣的性質は、誘電率 ϵ 、透磁率 μ 、導電率 σ によって記述することができる。

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.1.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.1.7)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.1.8)$$

式(2.1.6)-(2.1.8)は構成方程式と呼ばれている。

波源となるsource電流 \mathbf{J}_s がある場合、電流密度 \mathbf{J} は導電電流 $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$ との和で表わされるので

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \quad (2.1.9)$$

これを式(2.1.2)に代入し、次のベクトル演算子の公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

を利用して、式(2.1.1)、(2.1.2)から \mathbf{E} と \mathbf{H} に関するベクトル波動方程式を得ることができる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon} \quad (2.1.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J}_s \quad (2.1.11)$$

式(2.1.10)、(2.1.11)は厳密な一般式である。これを解けば、厳密に時間と位置に関する電界・磁界が得られる。しかし、境界条件などを含め、厳密に解くことは非常に難しい。また、式(2.1.10)、(2.1.11)を満たす時間関数としての偏波状態の表現を見いだせば望ましいが、今までにそのような表現方法は得られていない。そこで、ここでは波源の無い (source-free) 空間での平面波の伝搬を考え、単一周波数領域で偏波状態が一意に決まる場合を考察する。(最も単純な場合を対象とする)

2.1.2 Phasor表現を用いたベクトル波動方程式とその解

時間変化を含めて式(2.1.10)、(2.1.11)を直接解くことは難しいので、場が角周波数 ω で調和振動していると仮定し ($e^{j\omega t}$ で表す)、Phasor表現を用いて簡単化してから考えよう。まず、IEEE Standard [1]に定義されたフェザー(Phasor)表現を採用する。Phasorとは、以下に示すように時間因子 $e^{j\omega t}$ を除いた複素数の量である。

角周波数 ω で調和時間振動をしている場で、瞬時ベクトルを $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ とすれば、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{a}_x A_x(x, y, z, t) + \mathbf{a}_y A_y(x, y, z, t) + \mathbf{a}_z A_z(x, y, z, t) \quad (2.1.12)$$

と展開できる。 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ は、 x, y, z 方向の単位ベクトルである。一方、観測される量は実数であり、この観測量は一般的に次のように書ける。

$$a_x A_{mx} \cos(\omega t + \theta_{mx}) + a_y A_{my} \cos(\omega t + \theta_{my}) + a_z A_{mz} \cos(\omega t + \theta_{mz}) \quad (2.1.13)$$

$\theta_{mx}, \theta_{my}, \theta_{mz}$ は、それぞれ x, y, z 成分の位相を表す。また、下添字の m は measured の頭文字をとったものである。 x 成分のみを取り出して変形すると

$$\begin{aligned} A_{mx} \cos(\omega t + \theta_{mx}) &= \operatorname{Re} \left[A_{mx} e^{j(\omega t + \theta_{mx})} \right] = \operatorname{Re} \left[A_{mx} e^{j\theta_{mx}} e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[A_{mx} (\cos \theta_{mx} + j \sin \theta_{mx}) e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[(A_{mx} \cos \theta_{mx} + j A_{mx} \sin \theta_{mx}) e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[(A_{rx} + j A_{ix}) e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\dot{A}_x e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

Re は実数部をとることを意味する。このように、 x 成分は時間因子 $e^{j\omega t}$ と複素量 \dot{A}_x の積で表すことができる。 y, z 成分についても同様である。したがって、ベクトル全体としては

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right] \quad (2.1.14)$$

ただし、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = a_x \dot{A}_x + a_y \dot{A}_y + a_z \dot{A}_z \quad (2.1.15)$$

$$\dot{A}_x = A_{rx} + j A_{ix}, \quad \dot{A}_y = A_{ry} + j A_{iy}, \quad \dot{A}_z = A_{rz} + j A_{iz} \quad : \text{複素スカラー量} \quad (2.1.16)$$

と表現でき、この $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ をフェザー(Phasor)表現と言う。つまり、場のベクトルは $\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$ という複素表現で表すことができる。Phasor 自身は複素量であり、時間因子の項を取り除いたものである。これを使うと微分方程式において、時間に関する微分演算が代数演算に置き換わり、計算が簡単になる。観測量を求めるには、Phasor 表現を使って代数解析した後に $e^{j\omega t}$ を掛けて実部をとれば得られることになる。

さて、調和振動する場で、 $\rho=0, J_s=0$ の場所では、(2.1.10)、(2.1.11) は Phasor 表現により

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\omega^2 \epsilon \mu - j \omega \mu \sigma) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.1.17)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + (\omega^2 \epsilon \mu - j \omega \mu \sigma) \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.1.18)$$

となる。波数 k を定義することによって、ヘルムホルツ方程式を得ることができる。ベクトル波動方程式ともいう。

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.1.19)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.1.20)$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j \omega \mu \sigma \quad (2.1.21)$$

ベクトル波動方程式の変数分離解法

電界・磁界ベクトルの成分毎に(2.1.19), (2.1.20)が成り立たねばならないので, 例えば E_x をとって具体的に直角座標系で展開してみると

$$\nabla^2 E_x(\mathbf{r}) + k^2 E_x(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \quad (2.1.22)$$

E_x は x, y, z の関数になることが予想されるが, 各変数ごとの独立な関数 $X(x), Y(y), Z(z)$ の積と仮定して変数分離をおこなう. $E_x = X(x) Y(y) Z(z)$ とおき, 式(2.1.22)に代入すれば

$$\begin{aligned} E_0 Y(y) Z(z) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) Z(z) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x) Y(y) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k^2 X(x) Y(y) Z(z) &= 0 \\ \therefore \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k^2 &= 0 \end{aligned}$$

各項は変数毎に独立であり, 定数でなければ成立しないので, それぞれ $-k_x^2, -k_y^2, -k_z^2$ (定数) とおくと,

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2, \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k_z^2 \quad (2.1.23)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.1.24)$$

が得られる. これより, $X(x)$ では

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -k_x^2 X \\ \therefore X(x) &= A_0 e^{-jk_x x} + A_1 e^{jk_x x} \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

となる. これらを合計して E_x 成分は次のようになる.

$$E_x(\mathbf{r}) = \left(A_0 e^{-jk_x x} + A_1 e^{jk_x x} \right) \left(B_0 e^{-jk_y y} + B_1 e^{jk_y y} \right) \left(C_0 e^{-jk_z z} + C_1 e^{jk_z z} \right) \quad (2.1.26)$$

A_0, \dots, C_1 : 振幅係数

(2.1.19), (2.1.20)の一般解は, その x, y, z 成分の合計として, 次のようにまとめて書くことができる.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{E}_1 \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.1.27a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{H}_1 \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.1.27b)$$

ただし,

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z \quad (2.1.28)$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z \quad (2.1.29)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1$ は振幅係数ベクトル

それゆえ、時間を含めた観測量としての瞬時電界ベクトル（波動方程式の解）は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right\} = \mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.30a)$$

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 \exp \left[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \right\} \quad (2.1.30b)$$

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_1 \exp \left[j(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \right\} \quad (2.1.30c)$$

となる． $\exp \left[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right]$ 中の $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ は、位相を表している．簡単のために $|\mathbf{E}_0| = 1$ とすれば、式 (2.1.30b) は $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ となる． $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ が時間の経過と共にどのように変化していくか描いたものが図2.1.2である．

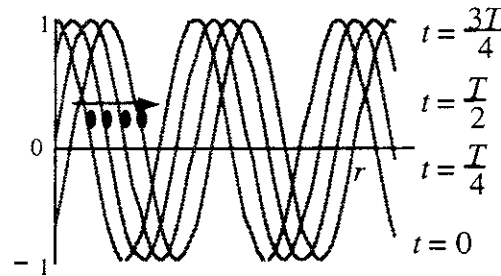


図2.1.2 一定位相点の時間的变化

いま、位相の中の1点に着目し（図2.1.2の●印）、 $\theta_1 = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ として、時間的に変化しない位相の位置を調べると

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0 = \omega - k \frac{dr}{dt}$$

したがって、

$$\frac{dr}{dt} = v = \frac{\omega}{k} \quad [\text{m/s}]$$

が得られる．これは速度の単位をもっているので、図の矢印のように正の r 方向に移動していることになる．したがって

$$\begin{aligned} \exp \left[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] & \text{は時間と共に正の } \mathbf{r} \text{ 方向 (+) に進む波} \\ \exp \left[j(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] & \text{は負の } \mathbf{r} \text{ 方向 (-) に進む波} \end{aligned}$$

を表わしている．特に、この $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ の前についている符号は、偏波変換など偏波解析を展開していく場合に重要な係数であるから注意を要する．物理学・光学の分野では、 $\exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right]$ が最初に用いられてきたため、工学とは逆の関係にあり、 $\exp \left[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \right]$ 、 $\exp \left[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t) \right]$ がそれぞれ $+\mathbf{r}$ 、 $-\mathbf{r}$ 方向に進む波を表わしている．

式(2.1.27)において、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{constant}$ であれば、電界の位相は一定である． $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ となる \mathbf{r} は平面を表す式なので、その平面で位相は一定である．図2.1.3を参照．それゆえ、式(2.1.30)は平面波を表すことになる．

平面波は図2.1.3から分かるように、 \mathbf{r} が \mathbf{r}_0 方向のときに最も位相変化が大きく、 $\mathbf{r}_0 \propto \mathbf{k}$ 方向に伝搬していく．式(2.1.28)で定義される波数ベクトル \mathbf{k} の方向が平面波の伝搬方向となる．

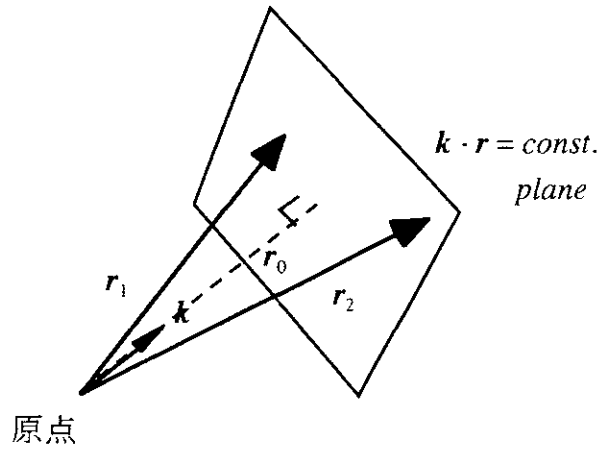


図2.1.3 一定位相面

損失の無い等方性媒質では，波数ベクトル \mathbf{k} の成分は実数となり，その大きさは

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.1.31)$$

v は媒質中の電磁波の速度， λ はその波長である．もし，比誘電率が ϵ_r の媒質であれば，自由空間での値（添字 0）と比較して以下ようになる．

$$\text{波数 } k = k_0 \sqrt{\epsilon_r} \quad (2.1.32a)$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (2.1.32b)$$

$$\text{位相速度 } \frac{dr}{dt} = v = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ [m/s]} \quad (2.1.33)$$

$$\text{波長 } \lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_r} \quad (2.1.34)$$

2.1.3 単一周波数のTEM波(Transverse Electro-Magnetic Wave)

前節で波動方程式を解いて電界の数学的な解が得られたが，ここでは，自由空間における電界と磁界の関係を求めておこう．自由空間では， $\epsilon = \epsilon_0$ ， $\mu = \mu_0$ ， $\sigma = 0$ が成り立つ．(2.1.1)のMaxwell 方程式にPhasor表現を使えば，

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.1.35)$$

+ \mathbf{r} 方向に向かう電界(2.1.30b)を代入して

$$\nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ -jk_x & -jk_y & -jk_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$$

$$\text{従って, } \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega\mu_0\mathbf{H}_0 \quad (2.1.36a)$$

もし、
$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \quad : \text{単位ベクトル} \quad (2.1.37)$$

とおけば、自由空間では
$$|\mathbf{k}_0| = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$
$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega \mu_0}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mathbf{H}_0 = \eta_0 \mathbf{H}_0 \quad (2.1.36b)$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi \quad (2.1.38a)$$

ここで、 η_0 は自由空間での固有インピーダンスである。

同様に、式 (2.1.2) より
$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad (2.1.39a)$$

$$\eta_0 \mathbf{H}_0 \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{E}_0 \quad (2.1.39b)$$

$$|\mathbf{E}_0| = |\eta_0 \mathbf{H}_0| \quad (2.1.40)$$

また、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ から

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{H}_0 = 0 \quad (2.1.41)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad (2.1.42)$$

それゆえ、 \mathbf{E}_0 と $\eta_0 \mathbf{H}_0$ は大きさが等しく、図2.1.4のように互いに直交する。そして伝搬方向 $\hat{\mathbf{k}}$ にも垂直である。 \mathbf{E}_0 と \mathbf{H}_0 は伝搬方向と垂直な面内（横断面：Transverse面）に存在しているので、TEM波 (Transverse Electro-Magnetic Wave) と呼ばれる。

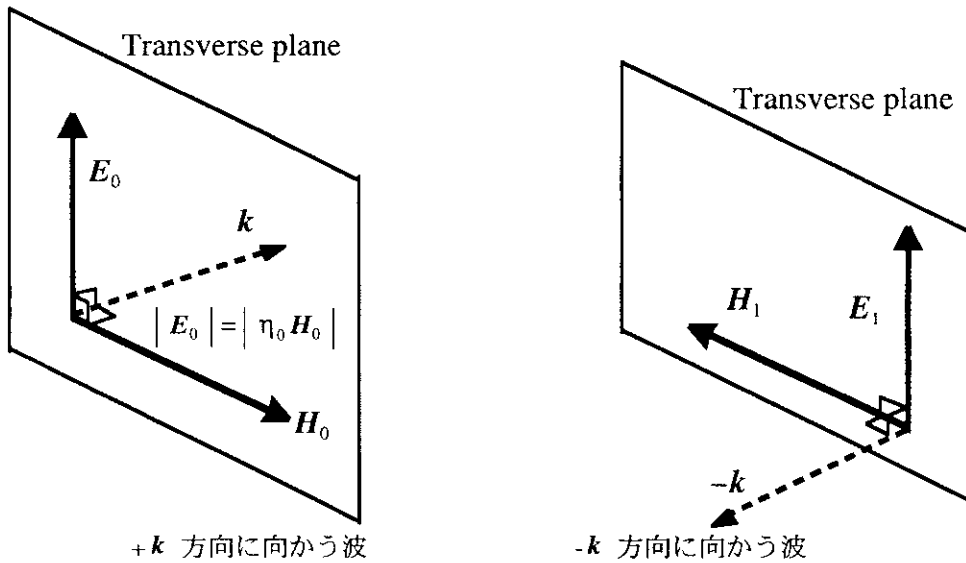


図2.1.4 平面波の電界、磁界と伝搬方向 \mathbf{k} の関係

$-\mathbf{r}(-\mathbf{k})$ 方向に向かう電界(2.1.30c)についても次式が成り立つ。

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = \omega \mu_0 \mathbf{H}_1, \quad (-\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_1 = \eta_0 \mathbf{H}_1) \quad (2.1.43a)$$

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{H}_1 = -\omega \epsilon_0 \mathbf{E}_1, \quad (\hat{\mathbf{k}} \times \eta_0 \mathbf{H}_1 = \mathbf{E}_1) \quad (2.1.43b)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{H}_1 = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad (2.1.43c)$$

この場合も、 \mathbf{E}_1 と $\eta_0 \mathbf{H}_1$ は大きさが等しく、互いに直交し、伝搬方向 $-\hat{\mathbf{k}}$ にも垂直である。ベクトルの的に書くと図2.1.4のようになり、 $+\mathbf{r}$ 方向に向かう波と似た配置関係が得られる。

図2.1.4から分かるように、どちらの方向に進む波でも $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の向きが平面波の進行方向になっている。したがって、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ が波の進行方向であると理解しておくだけでよい。

波の進む方向は任意 ($\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z$) に取れるが、 z 軸方向を進行方向と指定した場合、 $\mathbf{k} = k \mathbf{a}_z$ となる。そのとき、電界 \mathbf{E} 、磁界 \mathbf{H} は (x - y) 面内に横たわり、図2.1.5に示すようになる。この場合、(x - y) 面が横断面である。

$$\eta_0 \mathbf{H}_0(z, t) = \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_0(z, t) = \mathbf{a}_z \times \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 \exp \left[j(\omega t - k z) \right] \right\} \quad (2.1.44a)$$

$$\eta_0 \mathbf{H}_1(z, t) = -\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_1(z, t) = -\mathbf{a}_z \times \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_1 \exp \left[j(\omega t + k z) \right] \right\} \quad (2.1.44b)$$

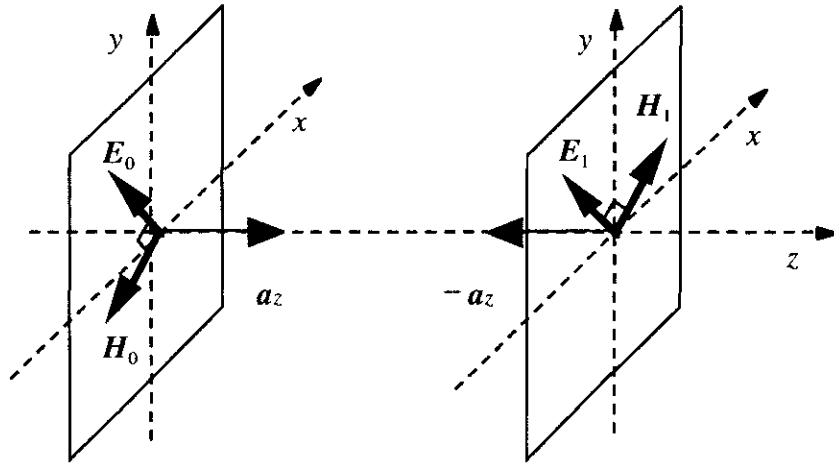


図2.1.5 電界・磁界ベクトルの方向

2.1.4 TEM 波のPower

Poyntingの定理によれば、Poynting Vector \mathbf{S} は瞬時ベクトル \mathbf{E} 、 \mathbf{H} と次の関係式で結ばれている。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1.45)$$

これに式(2.1.30a), (2.1.44a), (2.1.44b)を代入すると

$$S(z, t) = a_z \frac{|E_0|^2}{\eta_0} \cos^2(\omega t - kz) - a_z \frac{|E_1|^2}{\eta_0} \cos^2(\omega t + kz) \quad (2.1.46)$$

$z=\text{const}$ の面を考えたとき、 T を 1 周期の時間とすると時間平均した電力密度の流れは、

$$\langle S(z, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(z, t) dt = a_z \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} - a_z \frac{|E_1|^2}{2\eta_0} \quad (2.1.47)$$

によって与えられる。右辺から分かるように、 (E_0, H_0) と (E_1, H_1) の組毎に独立に電力が運ばれる。

さて瞬時Poynting Vector S と、Phasor表現を使って電力流を求めるのに都合の良い複素Poynting Vector P との関係を調べてみよう。まず、Phasor表現を使ったMaxwell の方程式から次の関係が得られる。

$$\nabla \cdot (E \times H^*) = -j\omega [B \cdot H^* - E \cdot D^*] - E \cdot J^* \quad (2.1.48)$$

ただし、 $*$ は複素共役を示す。複素 Poynting Vector P は次のように定義されている。

$$P = E \times H^* \quad (2.1.49)$$

Phasorを実部と虚部の2つに分解し、各成分を実ベクトルで表すと

$$E(r) = E_r(r) + jE_i(r), \quad H(r) = H_r(r) + jH_i(r) \quad (2.1.50)$$

それゆえ複素 Poynting Vector P は次の複素表現となる。

$$P = E \times H^* = E_r \times H_r + E_i \times H_i + j(E_i \times H_r - E_r \times H_i) \quad (2.1.51)$$

一方、瞬時観測量としてのベクトルは

$$\begin{aligned} E(r, t) &= \text{Re} \left\{ E(r) e^{j\omega t} \right\} = E_r \cos \omega t - E_i \sin \omega t \\ H(r, t) &= \text{Re} \left\{ H(r) e^{j\omega t} \right\} = H_r \cos \omega t - H_i \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

なので、瞬時Poynting Vector S は

$$S(r, t) = E_r \times H_r \cos^2 \omega t + E_i \times H_i \sin^2 \omega t - (E_i \times H_r + E_r \times H_i) \frac{\sin 2\omega t}{2} \quad (2.1.53)$$

となる。複素 Poynting Vector P と瞬時Poynting Vector S は異なる値をもつが、瞬時Poynting Vector の時間平均をとると

$$\langle S(r, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(r, t) dt = \frac{1}{2} [E_r \times H_r + E_i \times H_i] = \frac{1}{2} \text{Re}(P) \quad (2.1.54)$$

つまり、瞬時Poynting Vector の時間平均は、複素 Poynting Vector の実部の半分に等しい。

$$\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E} \times \mathbf{H} dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right\} \quad (2.1.55)$$

したがって、積分の計算をしなくとも、複素 Poynting Vector によって時間平均した電力の流れが簡単に表現できる。

さて上の例では、フェザーを実部と虚部に分けてみたが、次に、フェザーの中で座標成分について考えてみよう。z 方向に伝搬する平面波に対して

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{E} \times \frac{1}{\eta_0} (\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}^*) = \frac{|\mathbf{E}|^2}{\eta_0} \mathbf{a}_z \quad (2.1.56)$$

であるから、時間平均したエネルギー流は

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{P}) = \frac{|\mathbf{E}|^2}{2\eta_0} \mathbf{a}_z \quad (2.1.57)$$

で与えられる。つまり、電界の大きさの 2 乗、 $|\mathbf{E}|^2$ に比例する。Transverse 面内で、電界は任意の方向を向いていてもかまわないので、一般性を持たせるために電界の成分を複素数として

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y = \mathbf{a}_x (E_{xr} + j E_{xi}) + \mathbf{a}_y (E_{yr} + j E_{yi}) \quad (2.1.58)$$

と書くことができる。これを代入して

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|^2 &= \left| (\mathbf{a}_x E_{xr} + \mathbf{a}_y E_{yr}) + j (\mathbf{a}_x E_{xi} + \mathbf{a}_y E_{yi}) \right|^2 = (\mathbf{a}_x E_{xr} + \mathbf{a}_y E_{yr})^2 + (\mathbf{a}_x E_{xi} + \mathbf{a}_y E_{yi})^2 \\ \therefore |\mathbf{E}|^2 &= |E_x|^2 + |E_y|^2 \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

となり、結果的に z 方向に伝搬する平面波のエネルギーは、各座標成分の 2 乗和で表されることになる。これは、一見当然のことであるが、3.5 節以降に述べるように、偏波の観点からは $|\mathbf{E}|^2$ は偏波基底によらない不変量である。もし、円偏波基底で展開しても、右回り成分と左回り成分の 2 乗和で表される。上記は直角座標系で展開した表現であって、他の座標系でも展開できるが、ベクトルの大きさとしては座標系に関わらず一定である。

2.2 だ円偏波の表現方法

偏波とは、空間のある定まった点で、単一の周波数をもつ電波の進行方向の後ろ側から電界ベクトルの先端を観測したときに、時間の関数として電界ベクトルの先端が描く軌跡のことである。IEEE Standard Dictionary [1][2]によれば、

"That property of a radiated electromagnetic wave describing the time-varying direction and amplitude of the electric field vector: specifically, the figure traced as a function of time by the extremity of the vector at a fixed location in space, as observed along the direction of propagation."

となっている。時間的に調和振動している電界ベクトルの先端の軌跡は、一般にだ円形となることが知られている。図2.2.1に示すように、だ円形の極限として直線や円がある。また、回転の方向もある。このだ円を表わすのに、ellipticity angle, tilt angle, size, 相対位相, 偏波比, Stokesパラメータ, ポアンカレ球(Poincare Sphere)などが用いられる。この節では、だ円偏波を表現する際に使われるいくつかの記号と、その定義およびそれらの関係を紹介する。

重複になるが、偏波は電界ベクトルそのものではなく、ベクトル先端の軌跡である。だ円形の電界ベクトル？というような間違いをしないように注意が必要である。なお、章末の注1), 注2)に関連情報を載せてあるので参照されたい。

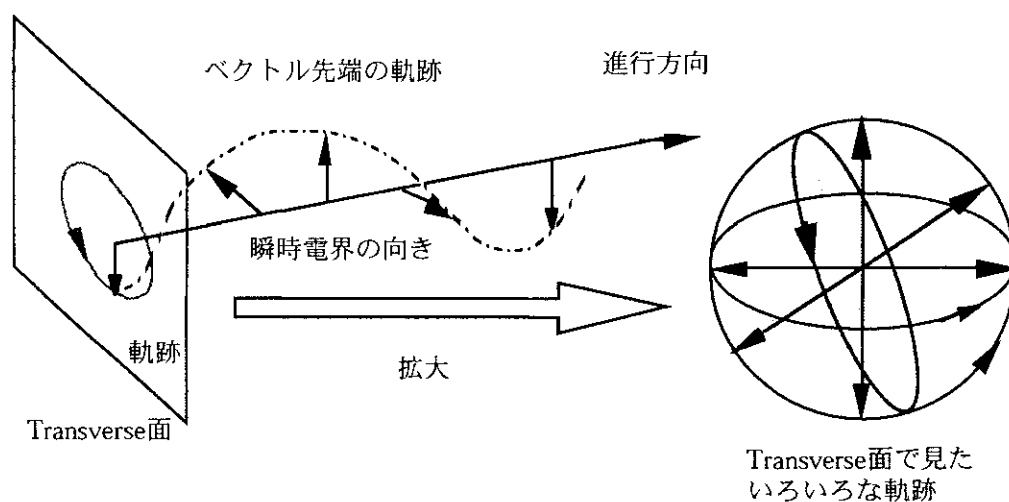


図2.2.1 電界の先端の軌跡

2.2.1 一般的数式表現

単一周波数で均質な媒質中のTEM波の電界は、横断面内で2つの直交成分に分解できる。この波が+z方向に伝搬すると仮定して、x-yの直交成分に分解しよう。+z方向に伝搬する場合、電界のz方向成分は存在しない。時間関数としての瞬時電界ベクトル $\mathbf{E}(z, t)$ の観測量は次のようにかける。

$$\mathbf{E}(z, t) = \begin{bmatrix} E_x(z, t) \\ E_y(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_x| \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ |E_y| \cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

ここで, $|E_x|$, $|E_y|$ は振幅, ϕ_x , ϕ_y は絶対位相を表わす. 空間を固定して $z=0$ の面で観測すると, 式(2.2.1)は

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(t) \\ \varepsilon_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_x| \cos(\omega t + \phi_x) \\ |E_y| \cos(\omega t + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

となり, 各成分は

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(t) &= |E_x| \cos(\omega t + \phi_x) = |E_x| \cos \omega t \cos \phi_x - |E_x| \sin \omega t \sin \phi_x \\ \varepsilon_y(t) &= |E_y| \cos(\omega t + \phi_y) = |E_y| \cos \omega t \cos \phi_y - |E_y| \sin \omega t \sin \phi_y \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

である. $\phi = \phi_y - \phi_x$ において, (2.2.3)を変形すると

$$\begin{aligned} |E_y| \varepsilon_x(t) \cos \phi_y - |E_x| \varepsilon_y(t) \cos \phi_x &= |E_x| |E_y| \sin \phi \sin \omega t \\ |E_y| \varepsilon_x(t) \sin \phi_y - |E_x| \varepsilon_y(t) \sin \phi_x &= |E_x| |E_y| \sin \phi \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

が得られる. これから $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ を使って時間因子 ωt の項を消去すると

$$\frac{\varepsilon_x^2(t)}{|E_x|^2} - \frac{2 \varepsilon_x(t) \varepsilon_y(t)}{|E_x| |E_y|} \cos \phi + \frac{\varepsilon_y^2(t)}{|E_y|^2} = \sin^2 \phi \quad (2.2.5)$$

式(2.2.5)は, 傾きのあるだ円の方程式を表している (注を参照). それ故, 瞬時電界ベクトルの成分 $\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$ は, 図2.2.2に示すようなだ円の軌跡を描くことがわかる.

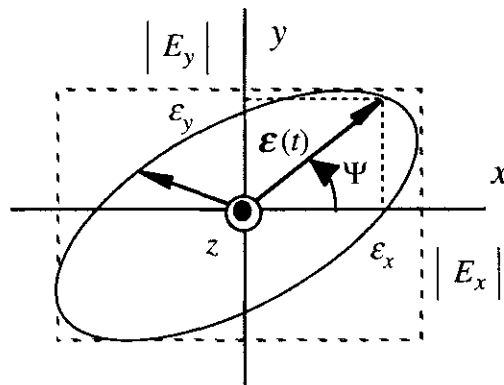


図2.2.2 電界ベクトル先端の軌跡

注) $a = |E_x|$, $b = |E_y|$, $x = \varepsilon_x(t)$, $y = \varepsilon_y(t)$ とおくと式(2.2.5)は次の形になる.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \phi + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \phi$$

$\phi = \phi_y - \phi_x = \pm \frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 傾きのないだ円の方程式

さらに $a = b$ なら $x^2 + y^2 = a^2$ 円の方程式

$\phi = \phi_y - \phi_x = 0, \pi$ のとき $\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} \right)^2 = 0$ $y = \pm \frac{b}{a} x$ 直線の方程式

電界ベクトルの回転の向きは、相対位相差に依存することが次式よりわかる。x 軸とベクトル $\mathbf{e}(t)$ のなす角 ψ を

$$\psi = \tan^{-1} \frac{E_y(t)}{E_x(t)} = \tan^{-1} \frac{|E_y| \cos(\omega t + \phi_y)}{|E_x| \cos(\omega t + \phi_x)} \quad (2.2.6)$$

とすると、その時間変化は微分操作より、

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} &= \frac{|E_y|}{|E_x|} \frac{-\omega \sin(\phi_y - \phi_x)}{\cos^2(\omega t + \phi_x)} dt \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{-\omega |E_x| |E_y| \sin \phi}{|E_x|^2 \cos^2(\omega t + \phi_x) + |E_y|^2 \cos^2(\omega t + \phi_y)} = \frac{-\omega |E_x| |E_y| \sin \phi}{|\mathbf{e}(t)|^2} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

となる。これより、

$$0 < \phi < \pi \quad \text{に対して} \quad \frac{d\psi}{dt} < 0 \quad (\text{左回り, 反時計回り}) \quad (2.2.8a)$$

$$-\pi < \phi < 0 \quad \text{に対して} \quad \frac{d\psi}{dt} > 0 \quad (\text{右回り, 時計回り}) \quad (2.2.8b)$$

図2.2.3に電波のやってくる方向と後ろ側から見た回転の方向を示す。図2.2.2や図2.2.3(a)の直角座標系 $x-y$ 平面では、 z 軸は紙面から読者側に向き、また、電波は正の z 方向に進むと仮定しているので、電波がやってくる方向を見込んでいることになる。また、図2.2.3(b)は後ろ側から見た図である。

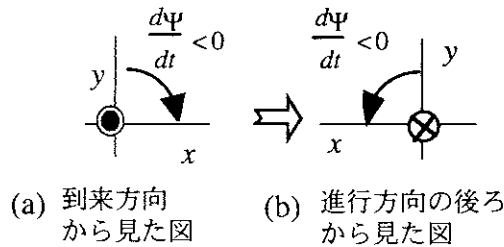


図2.2.3 回転の方向（左回り偏波）

回転方向の定義は、伝搬方向の後ろ側から電界ベクトルの先端を見たときに、時間の経過と共にどちら方向に回るかで決めている。IEEE Standard [1]によれば、 $z=\text{const}$ の面内で、時間と共に時計回りに回転するものを「右回り」と定義し、逆に、反時計回りに回転するものを「左回り」と定義している。図2.2.3(a)のように到来方向から見た場合は、 $\frac{d\psi}{dt} < 0$ は時計回りで、一見すると右回りに見えるが、電波を見る方向が逆なので、図2.2.3(b)のように左回りである（左回り偏波）。

数式的には、 $\phi = \phi_y - \phi_x$ のとる範囲を調べ、

$0 < \phi < \pi$ は 左回り, Left handed rotation sense

$-\pi < \phi < 0$ は 右回り, Right handed rotation sense

であると理解すればよい。それゆえ、相対位相差 $\phi = \phi_y - \phi_x$ を調べることで、ベクトルの先端の回転方向がわかる。 $\phi > 0$ ならば、左回りのだ円偏波となり、 $\phi < 0$ では右回りのだ円偏波となる。もし、相対位相差 $\phi = \phi_y - \phi_x$ が π の整数倍ならば、2つの成分は同相・逆相となり、直線を描く（図2.2.4）。

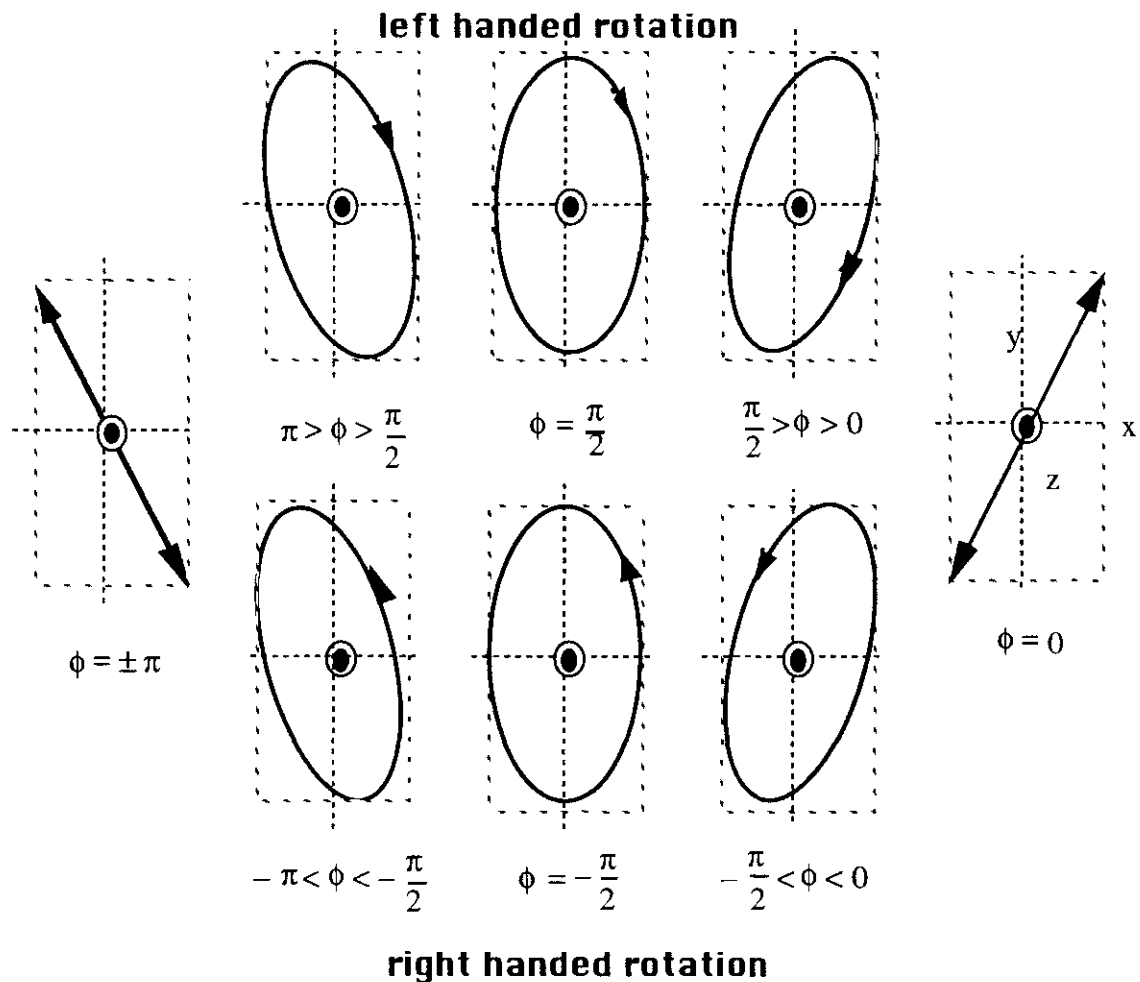


図2.2.4 一般的なだ円偏波
(到来方向から見ているので注意)

2.2.2 幾何学的パラメータ (τ, ϵ, A) による表現

だ円を表現するのに幾何学的パラメータ (τ, ϵ, A) を使う方が便利ことが多い。数式表現は厳密だが、直観的に分かりにくい。図2.2.5に示す幾何学的パラメータは、それぞれ傾き角(orientation) angle τ , ellipticity angle ϵ , size A であり、次のように定義されている。

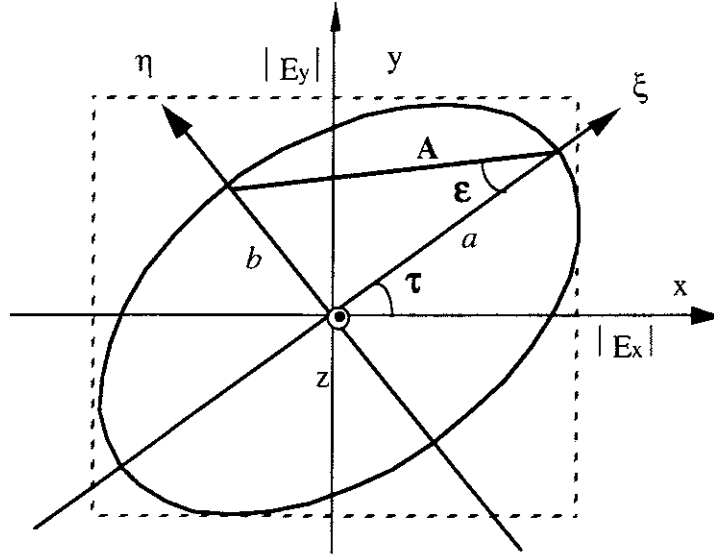


図2.2.5 だ円偏波を表すパラメータ

Ellipticity angle ϵ $\epsilon = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{4}\right)$ (2.2.9)

b はだ円の短軸, a はだ円の長軸の長さである。これはだ円の膨らみ具合を表しており, $\epsilon = \pm \frac{\pi}{4}$ で完全な円, $\epsilon = 0$ で直線となる。符号は回転の向きに対応しており, 左回りだ円偏波では $\epsilon > 0$, 右回りだ円偏波に対しては $\epsilon < 0$ である。式(2.2.19)を参照。

なお, ellipticity angle の記号 ϵ は誘電率と同じ記号なので混同しやすい。以後は, 特に断らない限り, ϵ を ellipticity angle としてあらわすものとする。

Tilt angle (傾き角) τ は, だ円の長軸と正の x 軸のなす角度であり, だ円の傾きを表す。

その範囲は $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}\right)$ である。なお, Tilt angle の頭文字に対応して, τ の記号を採用しているが, 書物や文献によっては別の記号を用いたり, 呼び名も Orientation Angle と言ったりすることが多い。

だ円の大きさは

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.2.10)$$

によって与えられる。 A^2 は電力を表し, 偏波情報とは直接関係しない。

だ円偏波の状態は, 幾何学的パラメータによって全て表現することができる。図2.2.6に幾何学的パラメータを変数とするだ円偏波を示す。 $\epsilon = \pm \frac{\pi}{4}$ では, τ がどのような値になっても円偏波である。この表現方法は後の偏波シグネチャで用いる。

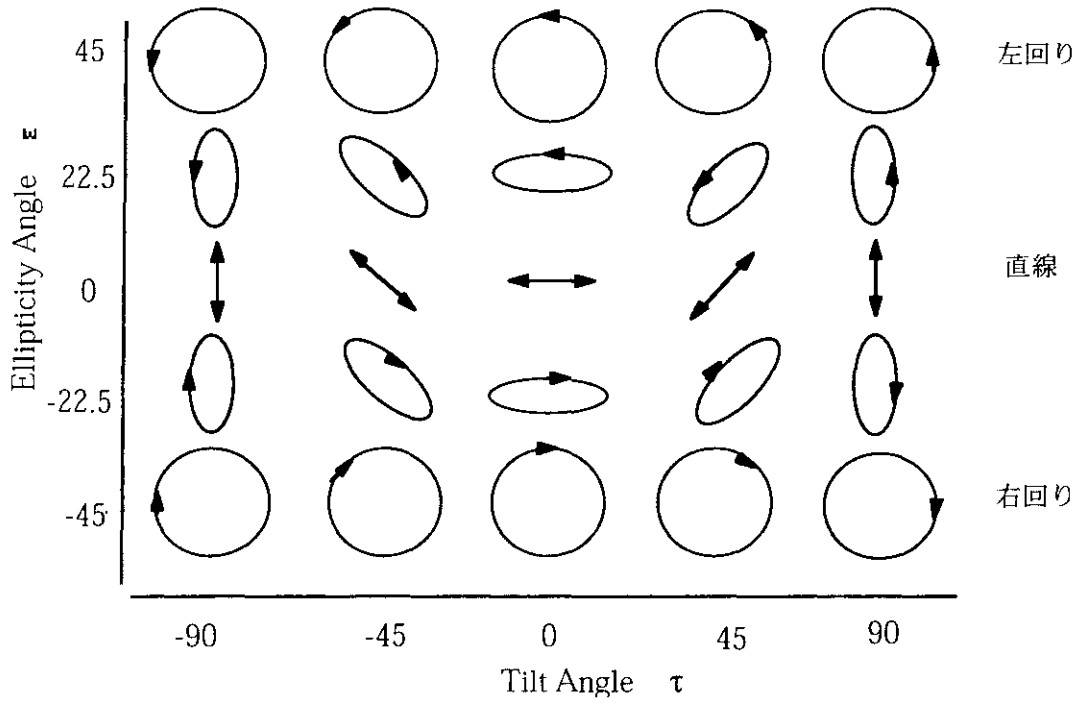


図2.2.6 幾何学的パラメータによるだ円偏波の表現

だ円偏波の状態は、幾何学的パラメータ (Tilt angle, Ellipticity angle) によって表現することができるので、数式的なパラメータ ($|E_x|$, $|E_y|$, ϕ_x , ϕ_y) の関係を求めてみよう。そして、その後に (ε, τ) を使ったストークスパラメータ、偏波ベクトル P の関係を求める。

図2.2.5において、 ξ 軸と η 軸をそれぞれ、新しい長軸と短軸方向に選ぶ。この新しい座標系で、だ円偏波は傾きのない正規のだ円となる。このだ円座標で電界の各成分は

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ b \cos(\omega t + \phi_\eta) \end{bmatrix}$$

と書くことができる。だ円の方程式(2.2.5)からも分かるように、位相的には $\phi_\eta - \phi_\xi = \frac{\pi}{2}$ となり、 $b \cos(\omega t + \phi_\eta) = b \cos(\omega t + \phi_\xi + \frac{\pi}{2}) = -b \sin(\omega t + \phi_\xi)$ により、(2.2.1) は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ -b \sin(\omega t + \phi_\xi) \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

新しい軸は x - y 軸を τ だけ回転して得られるので、 x - y 座標における電界は、 (ξ, η) 座標では次のように変換できる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

式(2.2.1)、(2.2.11)を式(2.2.12)に代入することによって

$$\begin{aligned} |E_x| \cos(\omega t + \phi_x) \cos \tau + |E_y| \cos(\omega t + \phi_y) \sin \tau &= a \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ |E_x| \cos(\omega t + \phi_x) \sin \tau - |E_y| \cos(\omega t + \phi_y) \cos \tau &= b \sin(\omega t + \phi_\xi) \end{aligned}$$

\sin, \cos 関数を展開し, $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ の係数を比較すれば

$$\begin{aligned} |E_x| \cos \phi_x \cos \tau + |E_y| \cos \phi_y \sin \tau &= a \cos \phi_\xi \\ |E_x| \sin \phi_x \cos \tau + |E_y| \sin \phi_y \sin \tau &= a \sin \phi_\xi \\ |E_x| \cos \phi_x \sin \tau - |E_y| \cos \phi_y \cos \tau &= b \sin \phi_\xi \\ |E_x| \sin \phi_x \sin \tau - |E_y| \sin \phi_y \cos \tau &= -b \cos \phi_\xi \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

演算の結果, 次の関係式が得られる.

$$\frac{b}{a} = \frac{|E_x| \cos \phi_x \sin \tau - |E_y| \cos \phi_y \cos \tau}{|E_x| \sin \phi_x \cos \tau + |E_y| \sin \phi_y \sin \tau} \quad (2.2.14a)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{-|E_x| \sin \phi_x \sin \tau + |E_y| \sin \phi_y \cos \tau}{|E_x| \cos \phi_x \cos \tau + |E_y| \cos \phi_y \sin \tau} \quad (2.2.14b)$$

$$a^2 + b^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 \quad (\text{エネルギー一定}) \quad (2.2.15)$$

$$\frac{1}{2} \left(|E_x|^2 - |E_y|^2 \right) \sin 2\tau = |E_x| |E_y| \cos 2\tau \cos(\phi_y - \phi_x) \quad (2.2.16)$$

$\phi = \phi_y - \phi_x$ を代入して

$$\tan 2\tau = \frac{2 |E_x| |E_y| \cos \phi}{|E_x|^2 - |E_y|^2} \quad (2.2.17)$$

$$ab = |E_x| |E_y| \sin(\phi_y - \phi_x) = |E_x| |E_y| \sin \phi \quad (2.2.18)$$

となる. ellipticity の定義と (2.2.14) を使って

$$\sin 2\varepsilon = \frac{2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon} = \frac{2 \tan \varepsilon}{1 + \tan^2 \varepsilon} = \frac{2(b/a)}{1 + (b/a)^2} = \frac{2 |E_x| |E_y| \sin \phi}{|E_x|^2 + |E_y|^2} \quad (2.2.19)$$

(2.2.17), (2.2.19) から, $\varepsilon, \tau, |E_x|, |E_y|, \phi$ の関係がわかる. また, (2.2.11) から,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ -b \sin(\omega t + \phi_\xi) \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t + \phi_\xi) \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \cos(\omega t + \phi_\xi) \\ -\sin \varepsilon \sin(\omega t + \phi_\xi) \end{bmatrix} = \text{Re} \left\{ A \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \exp \left[j(\omega t + \phi_\xi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

(2.2.12) より,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \text{Re} \left\{ A \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \exp \left[j \left(\omega t + \phi_\xi \right) \right] \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} \exp(j\omega t) \right\} \quad \text{だから, } (|E_x|, |E_y|, \phi_x, \phi_y) \text{ と } (A, \varepsilon, \tau) \text{ の関係は次のよう}$$

に書ける.

$$\begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} e^{j\phi_\xi} \quad (2.2.21)$$

もし、振幅を $A = 1$ と正規化すれば、絶対位相 ϕ_ξ を除き、(2.2.21)は単位ベクトル $\begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix}$ を $-\tau$ だけ回転 $\begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix}$ させたものに等しいと解釈できる。(2.2.6節で使う)

2.2.3 Jones ベクトルによる表現

2.2.1節では、電界を実数の観測量 $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ として記述した。ここでは、複素電界ベクトル(フェザー)を考える。周波数 ω の場では、瞬時ベクトルは次の形をとる。

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t) \right\} \quad (2.2.22)$$

電界ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は空間座標の関数であり、フェザーである。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.2.23)$$

正の z 軸方向に伝搬する平面波に対して、 \mathbf{E}_0 は複素振幅を持つベクトルであり、次の形式でかける。

$$\mathbf{E}(z) = \begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} e^{-jkz} \quad (2.2.24)$$

また、 z が一定の面では、 z に関する項を取り除くことができ、 $z = 0$ とすると

$$\mathbf{E}(0) = \begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} \quad (2.2.25)$$

このベクトルは "**Jones vector**" と呼ばれている。絶対位相は観測点や伝搬距離によって大きく変化する

ので、一般に計測は難しい。そこで、 x 成分を実数化するように、 x の絶対位相 ϕ_x を抜き出し、相対位相 $\phi = \phi_y - \phi_x$ を使うと次の形になる。

$$\mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} |E_x| \\ |E_y| e^{j\phi} \end{bmatrix} \quad (2.2.26)$$

偏波比 (Polarization ratio) ρ による表現

電界はベクトルなので、Transverse 面内で2つの直交成分に分解できる。その直交成分は $x-y$ 成分のような直線基底での分解が最も一般的である。しかし、円、だ円などの直交基底もあり、成分分解の方法は一意ではなく、偏波基底に依存する。ベクトルの2つの直交成分は任意の偏波基底の成分として表すことができる。互いに直交する単位ベクトル $\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{B}}$ をもつ基底(AB)に対して、その電界ベクトルを次のように書くことができる。

$$\mathbf{E}(A, B) = E_A \widehat{\mathbf{A}} + E_B \widehat{\mathbf{B}} \quad (2.2.27)$$

ここで、 E_A と E_B は複素数で、偏波比は次のように定義される。

$$\rho_{AB} = \frac{E_B}{E_A} = \frac{|E_B|}{|E_A|} e^{j(\phi_B - \phi_A)} = |\rho_{AB}| e^{j\phi_{AB}} \quad (2.2.28)$$

$\phi_{AB} = \phi_B - \phi_A$ は E_A と E_B の位相差である。この複素数の偏波比 ρ_{AB} は、偏波基底(AB)に依存するが、Jones vector で電界を表現すると

$$\mathbf{E}(AB) = \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \end{bmatrix} = |E_A| e^{j\phi_A} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix} = |E_A| e^{j\phi_A} \frac{\sqrt{1 + \frac{E_B E_B^*}{E_A E_A^*}}}{\sqrt{1 + \frac{E_B E_B^*}{E_A E_A^*}}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix} = \frac{|E| e^{j\phi_A}}{\sqrt{1 + \rho_{AB} \rho_{AB}^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix} \quad (2.2.29)$$

但し、 $|E| = \sqrt{E_A E_A^* + E_B E_B^*}$

もし、振幅を $|E| = 1$ と選び、絶対位相 ϕ_A を無視すれば、上の表現式は

$$\boxed{\mathbf{E}(AB) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_{AB} \rho_{AB}^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix}} \quad (2.2.30)$$

となる。偏波比を使ったこの表現方法も、偏波状態の1つの表し方であり、コヒーレント波の解析でよく用いられる。

(a) 直線偏波基底(HV)における偏波比 ρ_{HV}

直線基底(HV)で電界ベクトルは
$$\mathbf{E}(HV) = E_H \widehat{\mathbf{H}} + E_V \widehat{\mathbf{V}} \quad (2.2.31)$$

であるので、偏波比 ρ_{HV} は
$$\rho_{HV} = \frac{E_V}{E_H} = \frac{|E_V|}{|E_H|} e^{j(\phi_V - \phi_H)} = \tan \gamma_{HV} e^{j\phi_{HV}} \quad (2.2.32)$$

ここで γ_{HV} は図2.2.7に定義される角度である。

$$\begin{aligned} |E_H| &= \sqrt{E_H^2 + E_V^2} \cos \gamma_{HV} \\ |E_V| &= \sqrt{E_H^2 + E_V^2} \sin \gamma_{HV} \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

この表現によると、例えば水平偏波の場合、 $E_V=0$ となるので $\rho_{HV}=0$ となり

$$\mathbf{E}(HV) = 1 \widehat{\mathbf{H}} + 0 \widehat{\mathbf{V}} = \frac{1}{\sqrt{1+0 \cdot 0}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.34a)$$

45度傾いた直線偏波は

$$\mathbf{E}(HV) = \frac{1}{\sqrt{1+1 \cdot 1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.34b)$$

である。また、右回り円偏波 \mathbf{R} を表現しようとする場合、IEEEの定義では、

$$|E_H| = |E_V|, \quad \phi_{HV} = \phi_V - \phi_H = -\frac{\pi}{2}, \quad \rho_{HV} = -j \quad \text{なので}$$

$$\mathbf{E}(HV) \Rightarrow \mathbf{RHC} = \frac{1}{\sqrt{1+(-j)(j)}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad (2.2.34c)$$

同様に左回り円偏波では、 $\rho_{HV} = j$ になるので

$$\mathbf{E}(HV) = \frac{1}{\sqrt{1+j(-j)}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad (2.2.34d)$$

となっている。しかし、本文では基底変換の性質も含めて、左回り円偏波(LHC)に対しては以下の表現を使う。

$$\mathbf{E}(HV) \Rightarrow \mathbf{LHC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad (2.2.34e)$$

注：IEEEの定義では、(2.2.34c)、(2.2.34d)のJones Vector表現で円偏波が規定されており、互いに複素共役の関係にある。しかし、第3章に述べるユニタリ基底変換ではユニタリ行列の行列式が+1にならないなど大きな問題が生じてくる。

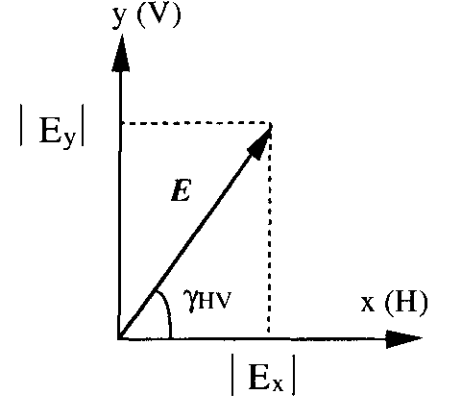


図2.2.7 電界成分と角度

(b) 円偏波基底(RL)における偏波比 ρ_{RL}

円偏波基底において、単位ベクトルは \hat{R} と \hat{L} であり、 \hat{R} は右回り円偏波の単位ベクトル、 \hat{L} は左回り円偏波の単位ベクトルである。従って、円偏波基底を用いた平面波の偏波状態は

$$E(RL) = E_R \hat{R} + E_L \hat{L} \quad (2.2.35)$$

ここで E_R と E_L はRとLの成分である。偏波比は定義により、

$$\rho_{RL} = \frac{E_L}{E_R} = \frac{|E_L|}{|E_R|} e^{j(\phi_L - \phi_R)} = |\rho_{RL}| e^{j\phi_{RL}} = \tan \gamma_{RL} e^{j\phi_{RL}} \quad (2.2.36)$$

これらのパラメータは、後述するポアンカレ球上で $-z$ 軸の交点を起点として、直線偏波の場合と同様に定義される。直線偏波の基底による表現とは異なることに注意する必要がある。振幅が1の右回り円偏波は円偏波基底で

$$E(RL) = 1 \hat{R} + 0 \hat{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.37a)$$

と表わされ、同様に左回り円偏波は

$$E(RL) = 0 \hat{R} + 1 \hat{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.37b)$$

となる。

物理的には同じ偏波状態を表わしていても、偏波基底のとり方が異なると偏波比は違った値となる。表2.2.1にいくつかの偏波状態を示す。

ところで、偏波比 $\rho = \infty$ となって発散してしまうような場合には、解析に不便なことがある。そのような場合、以下のようにスピナーパラメータを使うことがある。(2.2.1)を変形すると瞬時ベクトルは次のようになる。

$$\mathbf{E}(z, t) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma e^{j\phi} \end{bmatrix} e^{j(\omega t - kz + \alpha)} \right\} \quad (2.2.38)$$

この[]で囲まれた項目はスピナーと呼ばれる。スピナーのパラメータ γ, ϕ は、ポアンカレ球(Poincare Sphere)上で偏波状態を指定するときにも使われる。

また、

$$\begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ j \sin \epsilon \end{bmatrix}$$

を使うこともある。

表2.2.1 正規化されたJones Vectorの幾何学的パラメータ (ε, τ) : (ellipticity, tilt angle)とpolarization ratio ρ による偏波状態表現

Polarization	Tilt τ	Ellip. ε	(HV) basis ρ_{HV} E
Linear Horizontal	0	0	0 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Linear Vertical	$\frac{\pi}{2}$	0	∞ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
45° Linear	$\frac{\pi}{4}$	0	1 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
135° Linear	$-\frac{\pi}{4}$	0	-1 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
Right-Handed Circular	any	$-\frac{\pi}{4}$	$-j$ $\frac{e^{j\tau}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$
Left-Handed Circular	any	$\frac{\pi}{4}$	j $\frac{e^{-j\tau}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix}$

2.2.4 Stokesベクトルによる表現

前節では、完全偏波(Completely polarized wave)について扱っている。完全偏波した波とは、 $|E_A|$ 、 $|E_B|$ 、 ϕ_{AB} が観測時間中に定数であるか、あるいは少なくとも時間に関して非常にゆっくり変動する波で、位相がそろっているコヒーレント波とも等価である。しかし、観測時間中に位相がランダムに変わる波や、部分的に偏波した波を扱うのには、今までの手法で取り扱うことはできない。完全偏波も含め、これらのすべての波を取り扱うには、Stokesパラメータを用いなければならない。Stokesパラメータは1852年に Sir George Stokes によって創られたものである。

(a) 完全偏波に対するStokesベクトル

完全偏波した平面波は、直線偏波(HV)基底においてStokesパラメータと次の関係で結ばれている。

$$\begin{aligned} g_0 &= E_H E_H^* + E_V E_V^* = |E_H|^2 + |E_V|^2 \\ g_1 &= E_H E_H^* - E_V E_V^* = |E_H|^2 - |E_V|^2 \\ g_2 &= 2 \operatorname{Re} \left(E_H^* E_V \right) = 2 |E_H| |E_V| \cos \phi \\ g_3 &= 2 \operatorname{Im} \left(E_H^* E_V \right) = 2 |E_H| |E_V| \sin \phi \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

$|E_H|$ 、 $|E_V|$ 、 ϕ は、 E_H 、 E_V 成分の振幅、相対位相である。したがって、完全偏波に対しては次の関係が成り立つ。

$$g_0^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \quad (2.2.40)$$

g_0 は全電力、 g_1 は水平偏波と垂直偏波の電力差、 g_2 と g_3 は位相差 ϕ を与える。Stokesパラメータは幾何学的パラメータとも関連しており、(2.2.17)と(2.2.19)より次の関係がある。

$$g_0 = |E_H|^2 + |E_V|^2 = A^2 \quad (2.2.41)$$

$$g_2 = g_1 \tan 2\tau \quad (2.2.42)$$

$$g_3 = g_0 \sin 2\varepsilon = A^2 \sin 2\varepsilon \quad (2.2.43)$$

(2.2.41)-(2.2.43)を(2.2.40)に代入して

$$g_1 = g_0 \cos 2\varepsilon \cos 2\tau = A^2 \cos 2\varepsilon \cos 2\tau \quad (2.2.44)$$

$$g_2 = g_0 \cos 2\varepsilon \sin 2\tau = A^2 \cos 2\varepsilon \sin 2\tau \quad (2.2.45)$$

それゆえ、Stokesパラメータは A 、 ε 、 τ によって表され、このパラメータを4行1列のコラム形式で書いたものをStokesベクトルと言う。このベクトルの成分 g_1, g_2, g_3 は、図2.2.10に示したポアンカレ球の直角座標成分に対応している。

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_H|^2 + |E_V|^2 \\ |E_H|^2 - |E_V|^2 \\ 2 |E_H| |E_V| \cos \phi \\ 2 |E_H| |E_V| \sin \phi \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\tau \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\tau \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.2.46)$$

(b) 部分偏波に対するStokesベクトル

部分偏波した波は、完全偏波した(位相のそろった)波と位相のそろっていない波の和であり、次のCoherency Matrix [J] によって表現される。この行列は電界をそのエルミート共役で乗じたもので得られ、次のように定義されている。

$$[J] = \langle E E^\dagger \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_H E_H^* \rangle & \langle E_H E_V^* \rangle \\ \langle E_V E_H^* \rangle & \langle E_V E_V^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{HH} & J_{HV} \\ J_{VH} & J_{VV} \end{bmatrix} \quad (2.2.47)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (\dots) dt \right]$ は時間平均を表わしているが、エルゴード性を仮定すると空間での集合平均や期待値としてとりあつかってもよい。StokesベクトルをCoherency Matrix の要素によって表わせば

$$\begin{aligned} g_0 &= \langle E_H E_H^* \rangle + \langle E_V E_V^* \rangle = J_{HH} + J_{VV} = \langle |E_H|^2 + |E_V|^2 \rangle \\ g_1 &= \langle E_H E_H^* \rangle - \langle E_V E_V^* \rangle = J_{HH} - J_{VV} = \langle |E_H|^2 - |E_V|^2 \rangle \\ g_2 &= \langle E_H E_V^* \rangle + \langle E_V E_H^* \rangle = J_{HV} + J_{VH} = \langle 2 |E_H| |E_V| \cos \phi \rangle \\ g_3 &= j \langle E_H E_V^* \rangle - j \langle E_V E_H^* \rangle = j (J_{HV} - J_{VH}) = \langle 2 |E_H| |E_V| \sin \phi \rangle \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

部分偏波した波は、完全偏波した(polarized, or, coherent)波と偏波していない(unpolarized, or, incoherent)波の和であるので、ストークスパラメータを次のようにも書くことができる。

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = g_0 \underbrace{\begin{bmatrix} 1-q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{unpolarized}} + g_0 \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ q \cos 2\varepsilon \cos 2\tau \\ q \cos 2\varepsilon \sin 2\tau \\ q \sin 2\varepsilon \end{bmatrix}}_{\text{polarized}} \quad (2.2.49)$$

ただし、 q は偏波の度合いを示し、**degree of polarization** と呼ばれる。

$$q = \sqrt{1 - \frac{4 \det[J]}{(J_{HH} + J_{VV})^2}} = \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}}{g_0} \quad (2.2.50)$$

$g_0^2 \geq g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$ が成り立つので $0 \leq q \leq 1$ である。

2.2.5 偏波パラメータとポアンカレー球

図2.2.8にポアンカレー偏波球を示す．数学者ポアンカレー(Poincare)によって考案されたものである．球の表面上の1点は，ある1つのだ円を示しており，すべての偏波状態と1対1の対応がある．球面上の点を指定することによって偏波状態が指定できる．ポアンカレー球は，視覚的に偏波状態を理解するのに都合がよい．

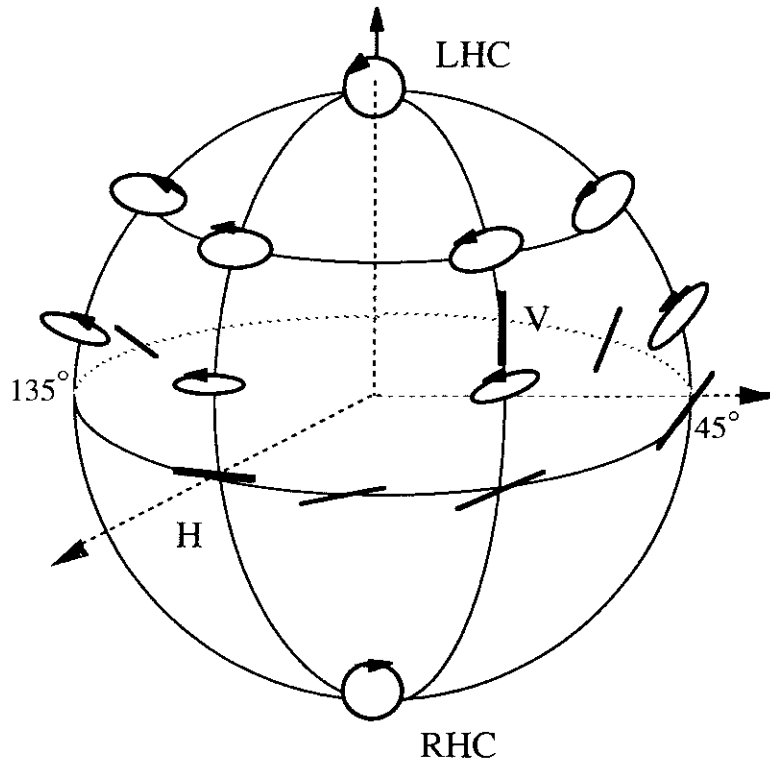


図2.2.8 ポアンカレー球といくつかの偏波状態 (上半球は左回り，下半球は右回り)

球面上の点Pの座標を指定するにはいくつかの方法がある．今まで示したパラメータに角度 $2\gamma_{HV}$ と ϕ_{HV} ，あるいは幾何学的パラメータ $2\varepsilon, 2\tau$ がある．それらのパラメータの原点の取り方を図2.2.9に示す．

$2\gamma_{HV} = 2\gamma$ は，赤道上的点H (水平偏波を表す) から点Pまでの大圏行路距離HPを表し， $0 \leq 2\gamma \leq \pi$ の範囲で球の裏側まで到達する．また $\phi_{HV} = \phi$ は，点Hにおいて赤道とHPのなす角度($-\pi \leq \phi \leq \pi$)である．

一方，幾何学的パラメータ(ε, τ)については，図2.2.12に示すように 2τ がOH軸から測られる赤道面上での角度で，経度($-\pi \leq 2\tau \leq \pi$)に対応する．一般の球座標のY軸に出会うところは $2\tau = 90^\circ$ なので， $\tau = 45^\circ$ の直線偏波を表す．そして点Hの裏側は $\tau = 90^\circ$ で垂直偏波になっている．また， 2ε は赤道面とOP軸のなす角度で，緯度($-\pi/2 \leq 2\varepsilon \leq \pi/2$)に対応している． $2\varepsilon = 90^\circ$ ($\varepsilon = 45^\circ$) はZ軸との交点(北極)で，左回り円偏波を表し， $2\varepsilon = -90^\circ$ は南極であり，右回り円偏波を表す(図2.2.8)．

なぜこのような出発点Hと角度の取り方をするかは，各パラメータ間の関係やStokesベクトルによる表現とも密接に関わっている．

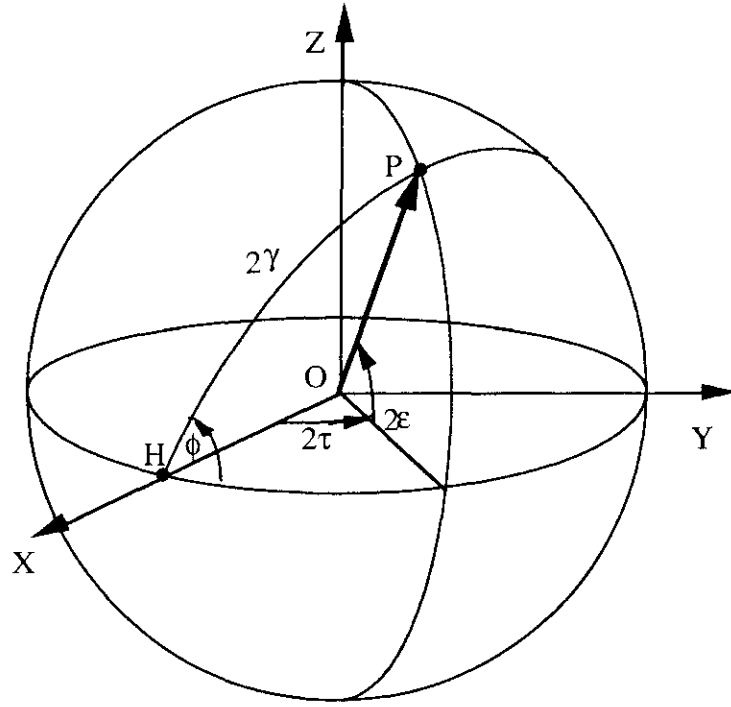


図2.2.9 ポアンカレ球(Poincare Sphere)と幾何学的パラメータ

スピナーパラメータ $\gamma_{HV} = \gamma$, $\phi_{HV} = \phi$ は, 幾何学的パラメータ ϵ , τ と次の関係がある. 図2.2.9より

$$\sin 2\epsilon = \sin 2\gamma \sin \phi \quad (2.2.51)$$

(2.2.17)をつかって

$$\tan 2\tau = \frac{2 \tan \gamma}{1 - \tan^2 \gamma} \cos \phi = \tan 2\gamma \cos \phi \quad (2.2.52)$$

また, 逆の関係として

$$\frac{\sin^2 2\epsilon}{\sin^2 2\gamma} + \frac{\tan^2 2\tau}{\tan^2 2\gamma} = 1 \quad (2.2.53)$$

$\sin^2 2\gamma \cos^2 2\tau$ を両辺に掛けて整理すると

$$\cos 2\gamma = \cos 2\tau \cos 2\epsilon \quad (2.2.54)$$

$$\tan \phi = \frac{\sin 2\epsilon}{\tan 2\tau \cos 2\gamma} = \frac{\tan 2\epsilon}{\sin 2\tau} \quad (2.2.55)$$

式 (2.2.51) から(2.2.55)までの関係を図で書くと, 結果的に図2.2.10のようにになっている.

最も特徴的なことはStokesベクトル成分 (g_1, g_2, g_3) は, ポアンカレ球の直角座標軸成分になっていることである. 通常の球座標でX軸が g_1 , Y軸が g_2 , Z軸が g_3 に対応する. また, 幾何学的パラメータ (ϵ, τ) は, 図2.2.10のように緯度, 経度を表わしており, 2τ が球座標での ϕ 方向, $\frac{\pi}{2} - 2\epsilon$ が θ 方向に相当する.

$$\text{緯度} = 2\epsilon \quad \text{経度} = 2\tau$$

式(2.2.44)から

$$\frac{g_1}{g_0} = \cos 2\epsilon \cos 2\tau = \cos 2\gamma_{HV} \quad (2.2.56)$$

なので、 $\cos 2\gamma_{HV}$ はStokesベクトル \mathbf{g} がX軸となす角の方向余弦である。それゆえ、点Hから点Pまでの
 アーク距離(大圏行路距離)は、 $HP = g_0(2\gamma_{HV}) = 2\gamma_{HV}$ のように表せる。また、角度 ϕ_{HV} は赤道面と
 最大円(アーク距離方向)とのなす角度であり、XOY面とXOP面のなす角度に等しい。点PをXOZ面に投
 影すれば、XOZ面上の投影点P'から作られる角度 $\angle YOP' = \phi_{HV}$ となる。YOZ面で次の式が成り立つこ
 とがわかる。

$$\tan \phi_{HV} = \tan \angle YOP' = \frac{g_3}{g_2} \quad (2.2.57)$$

従って、ポアンカレー球上の点Pは、同じ場所でも偏波状態の表現方法により、

$$\begin{aligned} &(2\gamma, \phi), \quad (0 \leq \gamma \leq \pi/2, -\pi \leq \phi \leq \pi) \\ &(2\tau, 2\varepsilon), \quad (-\pi/2 \leq \tau \leq \pi/2, -\pi/4 \leq \varepsilon \leq \pi/4) \\ &(g_1, g_2, g_3), \quad (-1 \leq g_1, g_2, g_3 \leq 1) \end{aligned}$$

によって図2.2.10のように表されることが分かる。このうち、最も分かり易いパラメータは $(2\tau, 2\varepsilon)$ と
 (g_1, g_2, g_3) であろう。 $(2\tau, 2\varepsilon)$ は全体の表記の基本をなしている。

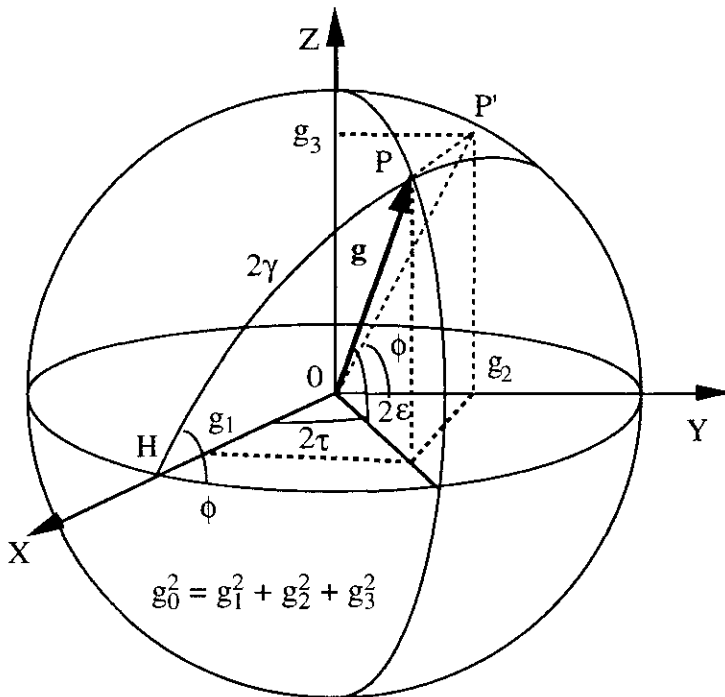


図2.2.10 ポアンカレー球とStokesベクトル

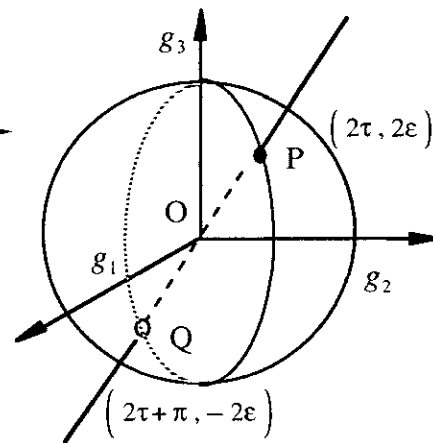


図2.2.11 直交偏波状態 (PとQ)

重要な点として、図2.2.11のようにポアンカレー球上にある点Pを指定すると、球の真裏の点Q (anti-
 podal point)は直交した偏波状態になっていることである。例えば、Hの裏側はVであり、互いに直交し
 ている。また、北極に対応する点は、左回り円偏波(LHC)で、南極は右回り(RHC)である。この直交性
 は、球面上のどの点でも成り立っており、この性質は後述の基底変換や、ターゲットの偏波状態を理解
 する点で役に立つ。

2.2.6 偏波ベクトルによる表現

図2.2.11を使ってポアンカレ球上で互いに直交する偏波状態が直感的にも理解できるので、改めて式の上でも直交する偏波状態を考えてみよう。

式(2.2.21)を再度繰り返してみる。

$$\begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ j \sin \epsilon \end{bmatrix} e^{j\phi_\xi} \quad (2.2.21)$$

この式から位相 ϕ_ξ を無視して（正確に測定することが難しいため），**Polarization Vector P**を

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\tau, \epsilon) = \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ j \sin \epsilon \end{bmatrix} \quad (2.2.58)$$

とおく。それと直交する偏波状態は、ポアンカレ球で裏側に配置しているので、

$$2\tau \Rightarrow 2\tau + \pi \quad (\tau \Rightarrow \tau + \frac{\pi}{2}) \quad 2\epsilon \Rightarrow -2\epsilon \quad (\epsilon \Rightarrow -\epsilon) \quad (2.2.59)$$

とすれば得られることになる。したがって、直交するPolarization Vector Pは

$$\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}(\tau + \frac{\pi}{2}, -\epsilon) = \begin{bmatrix} -\sin \tau - \cos \tau \\ \cos \tau - \sin \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ -j \sin \epsilon \end{bmatrix} \quad (2.2.60)$$

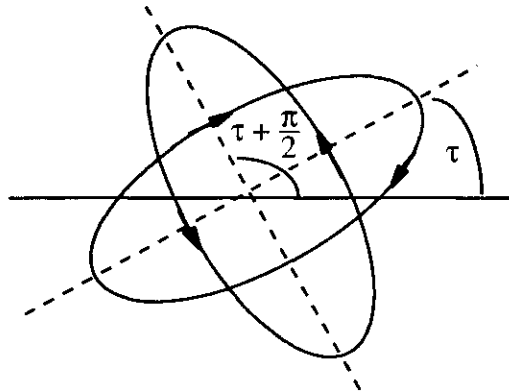


図2.2.12 直交偏波状態

例えば、代表的な偏波状態はPolarization Vector を使って以下のように表される。

$$\text{水平偏波} \quad \tau = 0, \epsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{直交（垂直）偏波} \quad \mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}(\frac{\pi}{2}, -0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{右回り円偏波 } \varepsilon = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}(\tau, -\frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{e^{j\tau}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

$$\text{直交（左回り）円偏波 } \mathbf{p}_{\perp}(\tau + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} -\sin \tau & -\cos \tau \\ \cos \tau & -\sin \tau \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \frac{e^{-j\tau}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix}$$

これらの結果は表2.2.1のものと同一表現であり、Jonesベクトル表現でもある。円偏波においては、回転 $e^{-j\tau}$ 、 $e^{j\tau}$ の項目は初期位相を表すのみであり、不定である。円を回転しても同じ円になるので、もし、 $\tau=0$ ととれば、右回りと左回りのPolarization Vectorとして

$$RHC = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad (2.2.61a)$$

$$LHC = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad (2.2.61b)$$

が得られる（注4）。

そして、Polarization Vectorは次の直交（ユニタリ内積）条件を満たしている。

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_{\perp}^* = 0 \quad (2.2.62)$$

2.3 偏波パラメータ間の関係

今まで、電界の振幅、位相から出発し、各種パラメータによってだ円偏波を表現してきた。表現方法はいろいろあるが、本質的に同じものを指している。視覚的に偏波状態を捉えるには、ポアンカレ球が最も優れている。数式の上では幾何学的パラメータが基本である。偏波比と幾何学的パラメータ、Stokesベクトルと偏波比の関係などは次章以降で使うので、これらのパラメータの相互関係を図2.3.1、図2.3.2に示す。

(a) 偏波比と幾何学的パラメータ

$$\mathcal{E}(A, \phi_\xi, \tau, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{bmatrix} = \text{Re} \left\{ A \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} e^{j(\omega t + \phi_\xi)} \right\} \quad (2.2.20)$$

であったので、振幅を1、初期位相を無視し、ベクトルとして

$$\begin{bmatrix} E_H \\ E_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

ととることができる。偏波比はellipticity, tilt angleを使って

$$\rho = \frac{E_V}{E_H} = \frac{\sin \tau \cos \varepsilon + j \cos \tau \sin \varepsilon}{\cos \tau \cos \varepsilon - j \sin \tau \sin \varepsilon} = \frac{\tan \tau + j \tan \varepsilon}{1 - j \tan \tau \tan \varepsilon} \quad (2.3.2)$$

これから、

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_r + j \rho_i = \frac{\tan \tau (1 - \tan^2 \varepsilon)}{1 + \tan^2 \tau \tan^2 \varepsilon} + j \frac{\tan \varepsilon (1 + \tan^2 \tau)}{1 + \tan^2 \tau \tan^2 \varepsilon} \\ \rho_r &= \frac{\tan \tau (1 - \tan^2 \varepsilon)}{1 + \tan^2 \tau \tan^2 \varepsilon} = \frac{\tan \tau (1 - |\rho|^2)}{1 - \tan^2 \tau} = \frac{1}{2} \tan 2\tau (1 - |\rho|^2) \\ \rho_i &= \frac{\tan \varepsilon (1 + \tan^2 \tau)}{1 + \tan^2 \tau \tan^2 \varepsilon} = \frac{\tan \varepsilon (1 + |\rho|^2)}{1 + \tan^2 \varepsilon} = \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon (1 + |\rho|^2) \end{aligned}$$

したがって、次の関係式が得られる。

$$\boxed{\tan 2\tau = \frac{2 \operatorname{Re}(\rho)}{1 - |\rho|^2}, \quad \sin 2\varepsilon = \frac{2 \operatorname{Im}(\rho)}{1 + |\rho|^2}} \quad (2.3.3)$$

(b) Stokesベクトルと偏波比の関係

一つの偏波状態Pを2つの偏波基底(HV), (LR) で表現すると、複素偏波比は次のように与えられる。

$$\rho_{HV} = \left| \rho_{HV} \right| e^{j\phi_{HV}} = \tan \gamma_{HV} e^{j\phi_{HV}} \quad 0 \leq \gamma_{HV} \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.3.4)$$

HV基底で定義された偏波比 ρ_{HV} で考えると、 $\cos 2\gamma_{HV}$ はStokesベクトル \mathbf{g} がX軸となす角の方向余弦であるので

$$\begin{aligned} \frac{g_1}{g_0} = \cos 2\gamma_{HV} &= \frac{1 - \tan^2 \gamma_{HV}}{1 + \tan^2 \gamma_{HV}} = \frac{1 - \left| \rho_{HV} \right|^2}{1 + \left| \rho_{HV} \right|^2} \\ \therefore \left| \rho_{HV} \right| &= \sqrt{\frac{g_0 - g_1}{g_0 + g_1}} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

図2.17より

$$\phi_{HV} = \angle YOP = \tan^{-1} \left(\frac{g_3}{g_2} \right),$$

$$\rho_{HV} = \left| \rho_{HV} \right| e^{j\phi_{HV}} = \sqrt{\frac{g_0 - g_1}{g_0 + g_1}} e^{j \tan^{-1} \left(\frac{g_3}{g_2} \right)} \quad (2.3.6)$$

完全偏波した波に対しては、Stokesベクトルは次のようになる。

$$g_1 = \frac{1 - \left| \rho_{HV} \right|^2}{1 + \left| \rho_{HV} \right|^2} = \cos 2\gamma_{HV} \quad (2.3.7)$$

$$g_2 = \frac{2 \left| \rho_{HV} \right| \cos \phi_{HV}}{1 + \left| \rho_{HV} \right|^2} = \frac{2 \tan \gamma_{HV} \cos \phi_{HV}}{1 + \tan^2 \gamma_{HV}} = \sin 2\gamma_{HV} \cos \phi_{HV} \quad (2.3.8)$$

$$g_3 = \frac{2 \left| \rho_{HV} \right| \sin \phi_{HV}}{1 + \left| \rho_{HV} \right|^2} = \sin 2\gamma_{HV} \sin \phi_{HV} \quad (2.3.9)$$

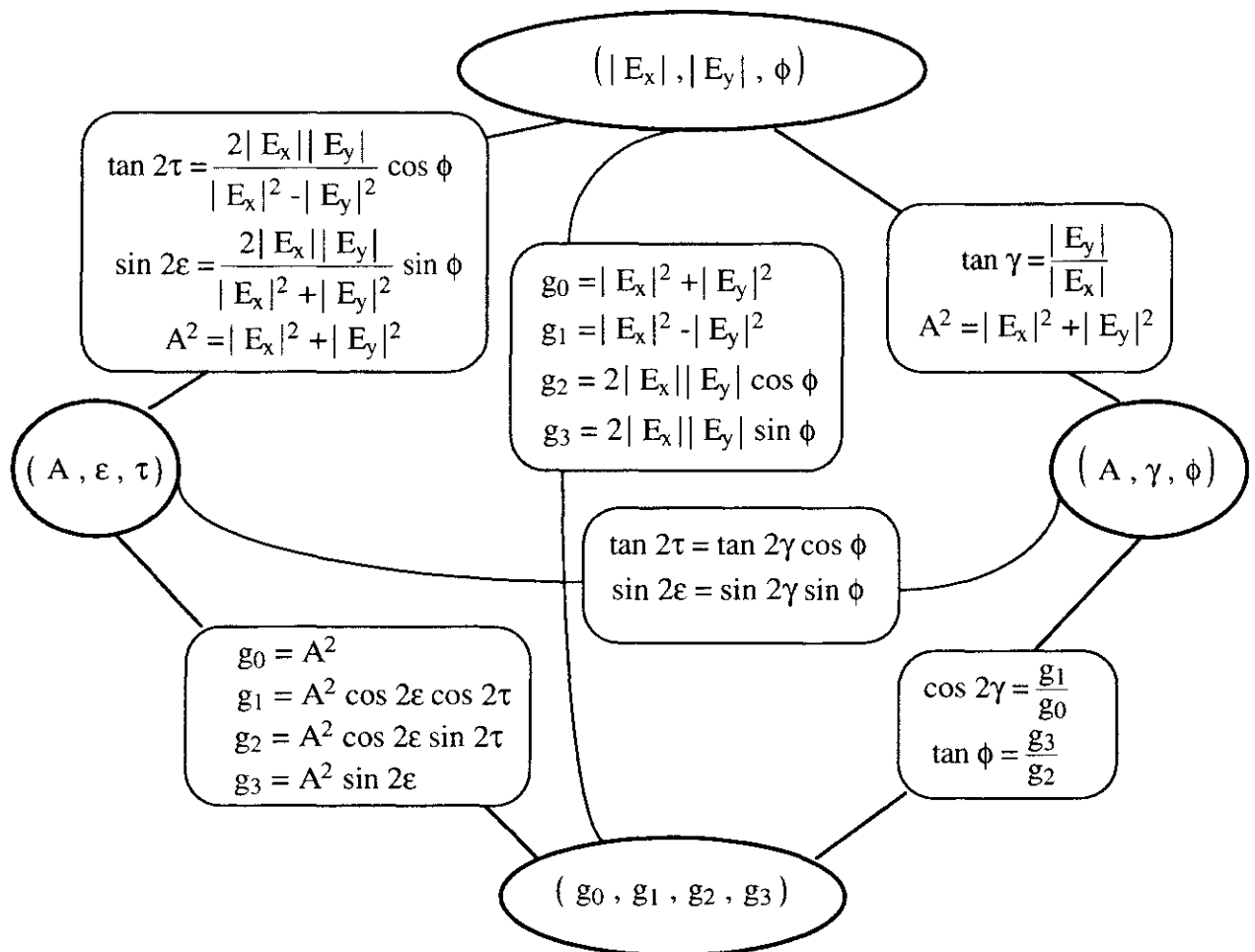


図2.3.1 だ円偏波を表すパラメータの相互関係

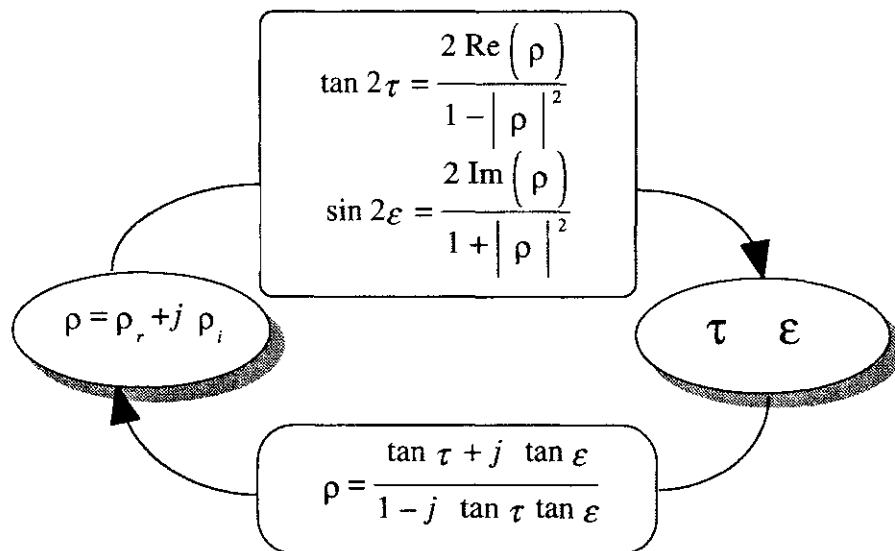


図2.3.2 偏波比とTilt and Ellipticity angle

2 章付録

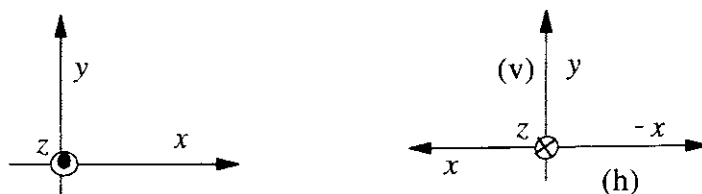
2 章本文での補足事項を以下の注) にまとめておく。

注1) 最初の定義の問題

定義は出発点なので、最初の定義が異なると途中展開や最終結果は異なった形になってくる。偏波に関する問題や混乱はそこから発生することが多い。一般に工学では光学の分野と逆の定義になっている。例えば、円偏波に右回りと左回りがあるが、その取り方に違いがある。さらにレーダポーラリメトリの中でも各人が各様に定義を始め、互いに通じ合えないことがよく起こった。右回りと左回りのどちらを基準ベクトルにとるか？また、散乱行列の要素で水平偏波と垂直偏波のどちらを先に書くか？など。注3) にも関連している。

注2) 電波の回転方向と座標系の取り方について

電波の回転方向について、電波の進行方向の後ろ側から見た方法（レーダ工学）と、到来方向から見た方法（光学）がある。教科書的に書かれている書物では、到来方向から見た展開が圧倒的に多い[3]-[4]。その理由は、下図2.2.1に示すような x, y, z 座標軸のためである。 z 方向に進行する平面波に対して、その電界を x, y 成分に分けて表現すると必然的に(a)の座標系の取り方になる。通常の x, y 成分で表現した場合は自動的に到来方向から見た形になっている。一方、IEEEの偏波の定義に沿って後ろから見た(b)の座標系で定式化すれば、偏波を取り扱う上で全て矛盾無く一貫する。しかし、この場合、数式展開からは x 成分の符号が反転し、混乱を生む原因になる。この点を考慮して、他の偏波パラメータとの整合性を合わせて書かれた教科書はまだ存在しない。やはり、数式展開の点では(a)の方が適している。本書でも到来方向からの式展開を行い、必要に応じて電波の進行方向を記載している。



(a) 到来方向（前から見る） (b) 進行方向（後ろから見る）

2 章付録 図2.2.1 電波の進行方向と座標軸の取り方

注3) 円偏波の基底ベクトル

式(2.2.61b)は、IEEEで使われている定義 ($LHC = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$) と位相が $-j$ だけ異なり、円偏波のベクトルとしてどれを使うべきか混乱しやすい点である。もし、左回り円偏波を先に規定すると

$$\text{左回り円偏波 } \varepsilon = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}(\tau, \frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \frac{e^{-j\tau}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

$$\text{直交(右回り円)偏波 } \mathbf{p}_{\perp}(\tau + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} -\sin \tau - \cos \tau \\ \cos \tau - \sin \tau \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{e^{j\tau}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{したがって} \quad LHC = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad RHC = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

となり、右回りを定義した後に左回りを決める方法に比べて位相が $-j$ だけ変わることが分かる。つまり、基底ベクトル全体として位相が $-j$ だけが変化することになる。

文献

- [1] IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronics Terms, 3rd ed. IEEE, 1984
- [2] IEEE/ANSI, Standard No.149-1979, *Test Procedures for Antennas*, New York, IEEE Publ. 1979
- [3] C. A. Balannis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, 1989
- [4] H. Mott, *Antennas for Radar Communications- a polarimetric approach*, John Wiley & Sons, New York, 1992
- [5] H. Mott, W. -M. Boerner, *Wideband Interferometric Sensing and Imaging Polarimetry*, Proc. of SPIE, vol.3120, 1997
- [6] W. -M. Boerner, W. L. Yan, A. -Q. Xi, Y. Yamaguchi, "On the basic principles of radar polarimetry : The target characteristic polarization state theory of Kennaugh, Huynen's polarization fork concept, and its extension to the partially polarized case," *Proceedings of the IEEE*, vol.79, no.10, pp.1538-1550, 1991
- [7] W. -M. Boerner, et al eds. *Direct and Inverse Methods in Radar Polarimetry*. NATO ASI Series, Part 1 & 2, Kluwer Academic Publishers, 1992
- [8] E. Krogager, *Aspects of Polarimetric Radar Imaging*, Doctoral Thesis, Technical University of Denmark, May 1993
- [9] F. M. Henderson, and A. J. Lewis eds., *Principles and Applications of Imaging Radar*, Manual of Remote Sensing, 3rd ed. Chapter 5, John Wiley & Sons, 1998
- [10] J. Kraus, *Electromagnetics*, McGraw-Hill, 1984
- [11] F. T. Ulaby, C. Elachi, *Radar polarimetry for geoscience applications*, Artech House, 1990
- [12] 徳丸仁, 基礎電磁波, 森北出版1993

第3章 レーダポーラリメトリの基礎

3.1 レーダ概説

レーダ (Radio Detection and Ranging) はターゲットに向けて電波を送り、ターゲットからの散乱波を受信してターゲットの検出と距離計測をする装置である[1]-[10]。図3.1.1(a)のように送信アンテナと受信アンテナが同じ位置にあるものをmonostatic radar, (b)のように異なる位置にあるものをbistatic radarという。ここでは、最もよく用いられるmonostatic radarを扱う。

この章では偏波レーダによる受信電力表現の理解を目的とする。従来から使われている電力表現が偏波レーダではどのように表現されるか、また、偏波によってターゲットの受信電力がいかに変化するかという点が主眼である。最初に、レーダの原理、レーダ方程式、電力の表現を説明する。次に偏波の取り扱いを厳密に行うために、基本に立ち戻って、相反定理、受信電圧、散乱行列、偏波受信電力を示す。

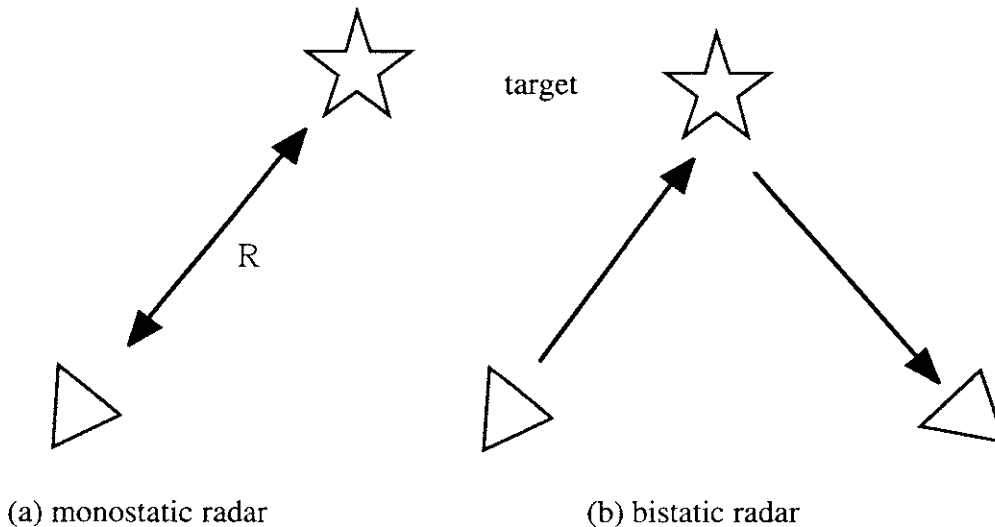


図3.1.1 レーダとターゲットの位置関係

レーダによる距離計測は、電波の往復時間から決める。概念的には、送信アンテナからパルスを発射し、距離 R だけ離れた位置にあるターゲットに反射されて受信アンテナまで戻ってくる時間を利用する。電波の往復距離は $2R$ であり、電波の速度は自由空間では $c = 3 \times 10^8$ m/s なので、往復に要する時間（遅延時間ともいう）は

$$\tau = \frac{2R}{c} \quad (3.1.1)$$

である。これより

$$R = \frac{c\tau}{2} \quad (3.1.2)$$

にて距離 R を求めることができる。

反射波の大きさの計測について

ターゲットに電波が当たると、散乱が生じる。散乱はターゲットの形状、材質、波長に対する大きさ、周波数、入射角、偏波など各種パラメータに依存する複雑な現象である。レーダの方向に戻ってくる電波の電力について、通信の場合と比較しながらレーダ方程式を見てみよう。

3.1.1 Frissの伝達公式とレーダ方程式

図3.1.2のように2つのアンテナが対向しているときに、電力の観点からアンテナ2に受信される電力を考える。ただし、2つのアンテナは距離 r だけ離れているものとし、波長に比べて距離が十分大きいものとする。 $r \gg \lambda$

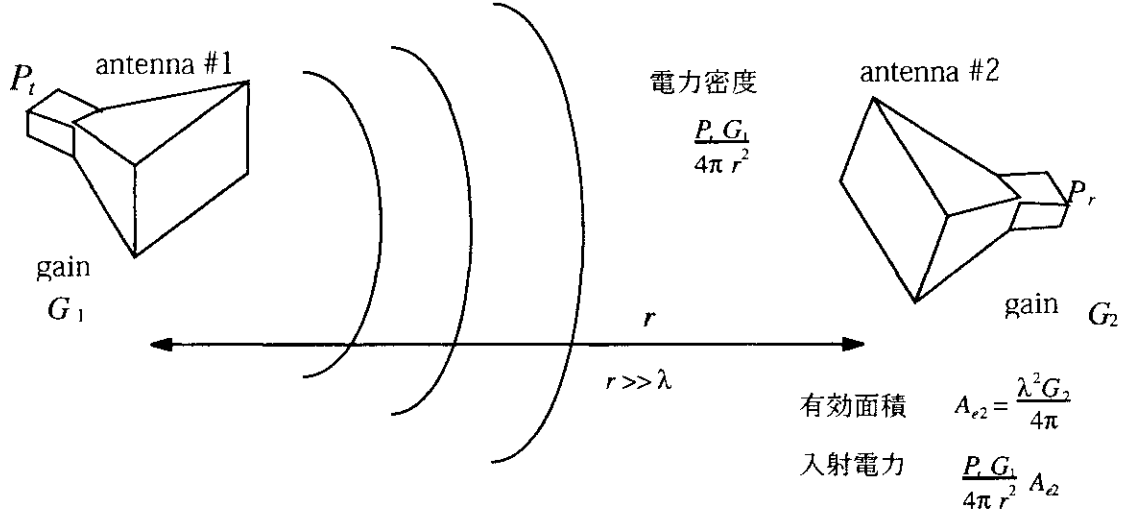


図3.1.2 antennaの受信電力（通信）

無指向性のアンテナ1から送信電力 P_t の電波を放射した場合、距離 r における電力密度は

$$\frac{P_t}{4\pi r^2} \quad (3.1.3)$$

となる。

もし、アンテナ1が指向性を持っているならば、その指向性利得とアンテナの効率を掛け合わせた利得を G_1 として、距離 r における電力密度は

$$\frac{P_t G_1}{4\pi r^2} \quad (3.1.4)$$

と表される。アンテナ2の有効面積を A_{e2} とすれば、アンテナ2への入射電力は次のようになる。

$$\frac{P_t G_1}{4\pi r^2} A_{e2} \quad (3.1.5)$$

アンテナ2の有効面積 A_{e2} はその利得 G_2 と

$$A_{e2} = \frac{\lambda^2 G_2}{4\pi} \quad (3.1.6)$$

の関係で結ばれているので、アンテナ2の受信電力 P_r は

$$P_r = \frac{P_t G_1}{4\pi r^2} \frac{\lambda^2 G_2}{4\pi} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_1 G_2 P_t \quad (3.1.7)$$

となる。これがよく知られている**Frissの伝達公式**である。通信や放送ではこのようにアンテナ2の位置で受信するシステムになっており、電力は距離に対して r^{-2} で減少する点に特徴がある。

次に、図3.1.3のようにアンテナ2の位置にターゲットが置かれているレーダの場合を考えてみよう。

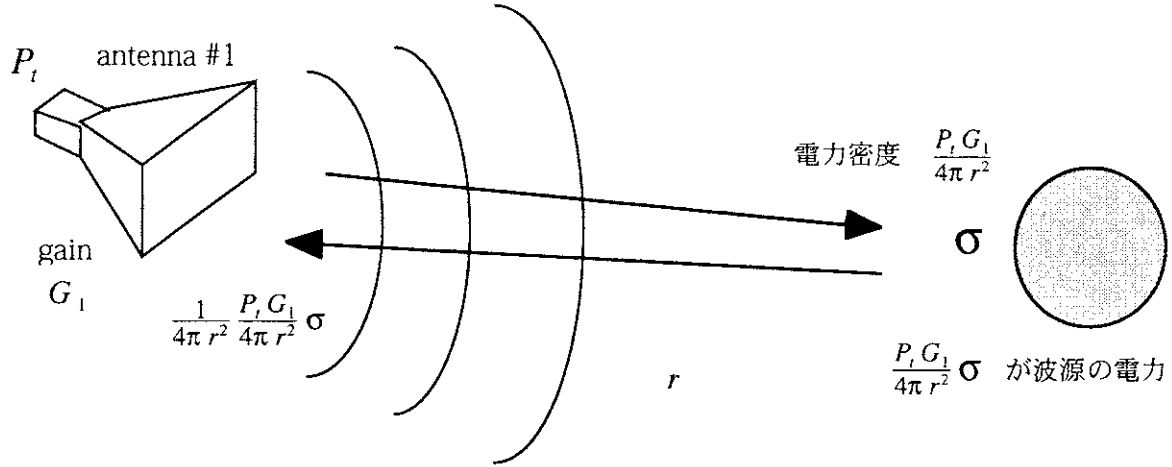


図3.1.3 monostatic radar での配置

ターゲットによっていろいろな方向に電波が散乱されるが、その指向性を考慮した有効反射面積を σ と
おくと、電力的には

$$\frac{P_t G_1}{4\pi r^2} \sigma \quad (3.1.8)$$

が新たな波源となる。この電力波源から放射される電力密度は、アンテナ1の位置において次のように
なる。

$$\frac{1}{4\pi r^2} \frac{P_t G_1}{4\pi r^2} \sigma \quad (3.1.9)$$

アンテナ1の有効面積は $A_{e1} = \frac{\lambda^2 G_1}{4\pi}$ なので、受信電力 P_r は次式で与えられる。

$$P_r = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{P_t G_1}{4\pi r^2} \sigma A_{e1} = \frac{\lambda^2 G_1^2 P_t}{(4\pi)^3 r^4} \sigma \quad (3.1.10)$$

これが**レーダ方程式**で、電力的に見たレーダの基本式である。電力が距離に対して r^{-4} の割合で減少する
点に特徴がある。通信の場合と比べて短い距離で受信電力が小さくなる。そのため、レーダでカバー
できるエリアは制限される。この式に示すように、 r^{-4} の距離依存性は原理上さけられない。それを克
服するために（遠い距離にあるターゲットを検出するために）、遠方ほど受信機の感度を高くするSTC
技術が使われている。

3.1.2 最大探知距離

どれくらい遠くのターゲット検出できるか？ということは興味のある事柄である。ターゲットの大き
さにも依存するが、最終的にはレーダ受信機の感度で決まる。レーダの最大探知距離 r_{\max} は、受信機で
検出される最小の探知信号電力 S_{\min} に等しい距離として定義される。式(3.1.10)で $P_r = S_{\min}$ とおいて次の式
が導かれる。

$$r_{\max} = \left[\frac{\lambda^2 G_1^2 P_t}{(4\pi)^3 S_{\min}} \sigma \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3.1.11)$$

この式から分かることは、送信電力を2倍にしても $2^{1/4} = 1.19$ となり、約20%しか探知距離は伸びない。したがって電力を増やしても大きな貢献はしない。

もし、伝搬媒質に損失があれば、探知距離はさらに指数関数的に減少する。地中レーダなどではこの点が大きな難題で、レーダによる深い地中での探査は難しい。

参考のために、損失媒質での送信電力と最大探知距離の関係を図3.1.4に示す。損失媒質中では、

$$E = E_0 e^{-\alpha r}$$

となるので、受信電力は

$$P_r = \frac{\lambda^2 G_t^2 P_t e^{-4\alpha r}}{(4\pi)^3 r^4} \sigma$$

となる。自由空間に比べてさらに指数関数的に減少する。右図から、例えば $\sigma = 0.03 \text{ m}^2$ のターゲットに対して-30dB=1mWの電力を送信した場合、純水では $r_{\text{max}} = 1 \text{ m}$ となるが、電力を10倍して10mWに増加しても $r_{\text{max}} = 1.2 \text{ m}$ 程度である。また、同じ10mWでも媒質が異なると探知距離が大きく変わってくることが分かる。

自由空間中が最も探知距離が大きい。

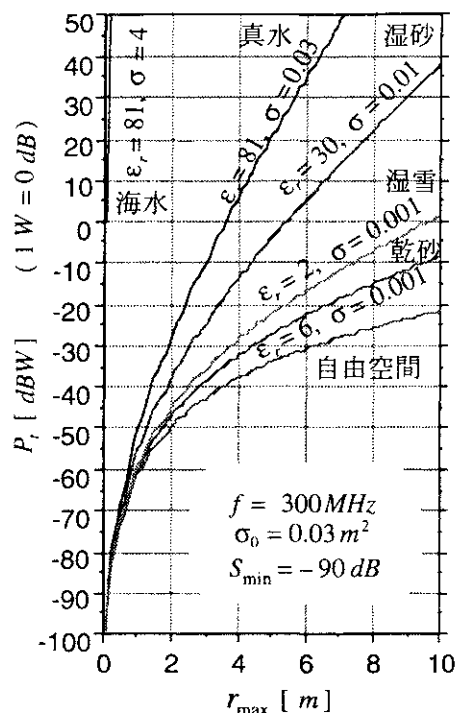


図3.1.4 最大探知距離と電力の関係

3.1.3 レーダ散乱断面積

さて、レーダ方程式について、もう少し詳しく見てみよう。ターゲットに関する全ての情報は σ に含まれている。その他の項目はレーダシステムに関連し、ターゲットの情報は含まれていない。

どのレーダで測定しても同一のターゲットからは同じ反射強度が得られなくてはならない。距離やレーダの送信電力に関わらず、ターゲット固有の大きさを表す必要がある。そのために何かの基準が必要となる。そこで、この σ をレーダ散乱断面積と定義し、**Radar Cross Section (RCS)**と呼ぶ。

$$\sigma = \sigma(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \left| \frac{E^s(\theta, \phi)}{E^i} \right|^2 \quad (3.1.12)$$

ただし、 E^i はターゲットへの入射電界、 $E^s(\theta, \phi)$ は散乱電界を表す。 θ, ϕ は球座標成分である。

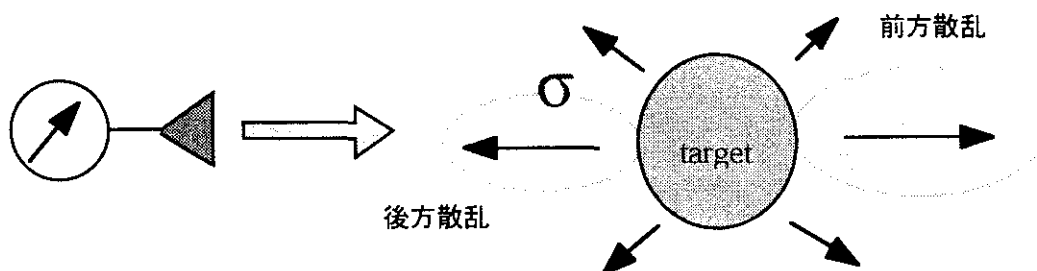


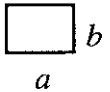






図3.1.5 前方散乱と後方散乱

RCSはターゲットに入射したエネルギーがどれだけの方向に反射するかを表している。この形式は、アンテナの指向性利得の定義と類似しており、ターゲットでの入射電力を全方向に均一に放射した場合と実際の方向に放射される電力の比を表している。図3.1.5に示すように、あらゆる方向に散乱されるが、レーダに戻ってくる方向を後方散乱という。波長に比べて十分大きい代表的な金属ターゲットの後方散乱RCSは表3.1.1のように表される。

表3.1.1 レーダ散乱断面積：RCS σ

種類	RCS	備考
 大きな球	πa^2	$a \gg \lambda$
 円板	$\frac{4\pi^3 a^4}{\lambda^2} \left[2 \frac{J_1(4a \sin \theta / \lambda)}{4a \sin \theta / \lambda} \right]^2 \cos^2 \theta$	正面に対する入射角 θ
 長方形板	$\frac{4\pi A^2}{\lambda^2} \left[\frac{\sin(2\pi b \sin \theta / \lambda)}{2\pi b \sin \theta / \lambda} \right]^2 \cos^2 \theta$	$A = ab$
 円柱	$\frac{2\pi a l^2}{\lambda} \left[\frac{\sin(2\pi l \sin \theta / \lambda)}{2\pi l \sin \theta / \lambda} \right]^2 \cos \theta$	
 Square side trihedral corner reflector	$\frac{12\pi a^4}{\lambda^2} \quad (\text{max})$	
 Triangle side trihedral corner reflector	$\frac{4\pi a^4}{3\lambda^2} \quad (\text{max})$	
 Dihedral corner reflector	$\frac{8\pi a^2 b^2}{\lambda^2} \quad (\text{max})$	

3面コーナリフレクタは他のターゲットと比べてRCSが最も大きいため、レーダの受信電力校正用によく使用される。Point targetとして扱われることが多い。3面コーナリフレクタのRCS値を図3.1.6に示す。金属面の形が正方形の場合とそれを半分にした直角三角形の場合の比較であるが、Lバンドでは10dB近くも大きさが異なる。

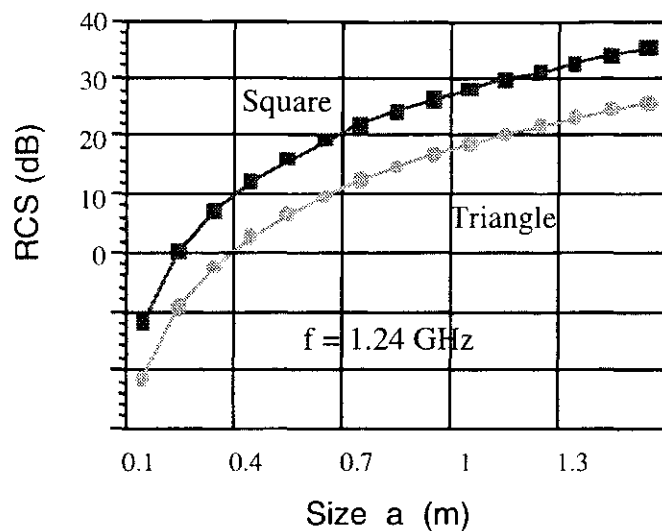


図3.1.6 3面コーナリフレクタの後方散乱断面積 ($f = 1.24 \text{ GHz}$)

波長に比べて大きな球のRCSは πa^2 となる．球を投影した円の面積に等しい．球には偏波依存性がないため，偏波レーダの校正用ターゲットとしてよく使用されている．なお，金属球では問題は無いが，材質の違いにより後方散乱断面積が異なってくることに注意が必要である．正規化したRCSを次の図3.1.7に示す．誘電体では後方散乱が小さくなり，完全誘電体では不規則な変化をする．この正規化したRCSを求める簡単な方法を付録3.1に掲げておく．

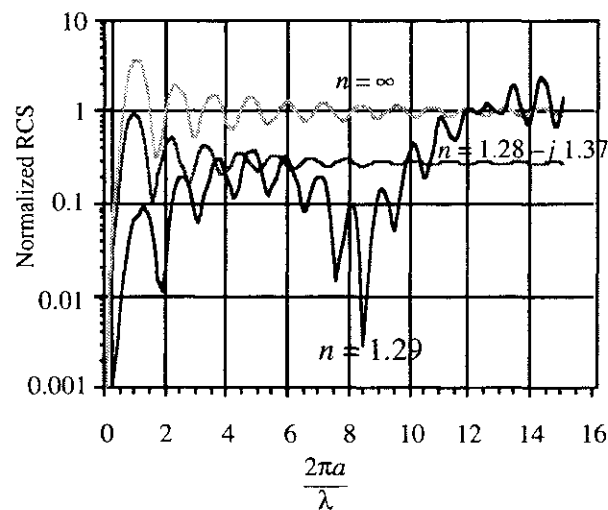


図3.1.7 材質の違いによる正規化後方散乱断面積 (n は屈折率)

$\frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1$ の領域はレイリー散乱領域と呼ばれ，散乱断面積は λ^4 に比例する．波長に比べて小さなターゲットの計測に利用され，雨滴サイズなどを計測する際に利用されている．

3.1.4 分布ターゲットの後方散乱断面積

Point targetのRCSは表3.1.1のように理論値が導かれるが、ターゲットがレーダ分解能より広がりを持つような場合には後方散乱断面積の定義が難しくなる。地表のように面上に広がっている場合、さらに雲などのように体積分布を持つ場合など、受信電力はターゲット分布によって大きく変化する。また、アンテナのビーム広がりもレーダシステムによって異なる。そこで、レーダで照射している面内(Foot print)に存在する個々のターゲットの散乱断面積を次のように表す。

$$\sigma_i = \frac{\sigma_i \Delta A_i}{\Delta A_i} \quad (3.1.13)$$

ここで、 ΔA_i はターゲットの面積（Foot print, 例えば地表での照射面積）である。そして、正規化散乱断面積 σ^0 を単位面積あたりの散乱断面積の平均で定義する。

$$\sigma^0 = \left\langle \frac{\sigma_i}{\Delta A_i} \right\rangle \quad (3.1.14)$$

この値はsigma zeroと呼ばれ、単位は $[m^2/m^2]$ となるので、無単位の値となる。もし、照射面積中で P_t , G_1 , r が一定と見なせるような場合は、 $\sigma = \sigma^0 \Delta A_i$ である。その結果、分布しているターゲットからの受信電力を想定すると、レーダ方程式は

$$P_r = \iint_s \frac{\lambda^2 G_1^2 P_t}{(4\pi)^3 r^4} \sigma^0 dS \quad (3.1.15)$$

となる。この式が実際に最もよく使われるレーダ方程式である。 σ^0 は面積で正規化された後方散乱断面積であり、分布ターゲットの比較によく用いられる。

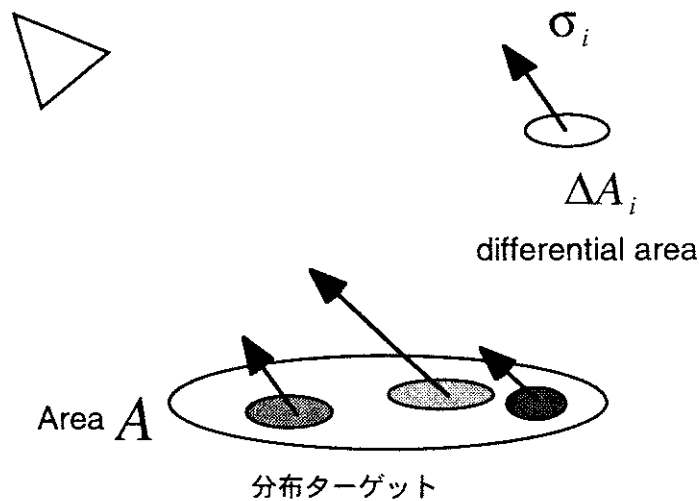


図3.1.8 分布ターゲットからの後方散乱断面積

3.1.5 偏波による散乱依存性

電力表現による散乱の問題点は、電界の方向が考慮されていないことである。例えば、図3.1.8のように金属格子に水平と垂直偏波の電界を当てた場合、垂直偏波では大きな反射が得られるが、水平偏波では通り抜けてしまい、反射は得られない。また、図3.1.9のように斜めの線状物体に入射した電界に対して、直交する成分が新たに発生するが、単一偏波のレーダではその直交成分を取り逃がしてしまい、散乱断面積がターゲット角度によって大きく変わってしまう。本来は直交する散乱波成分があり、それを受信できるレーダであれば、全体としての散乱断面積を得ることができる。そのため、偏波（あるいは電界の振動方向）を考慮した定式化が必要となる。

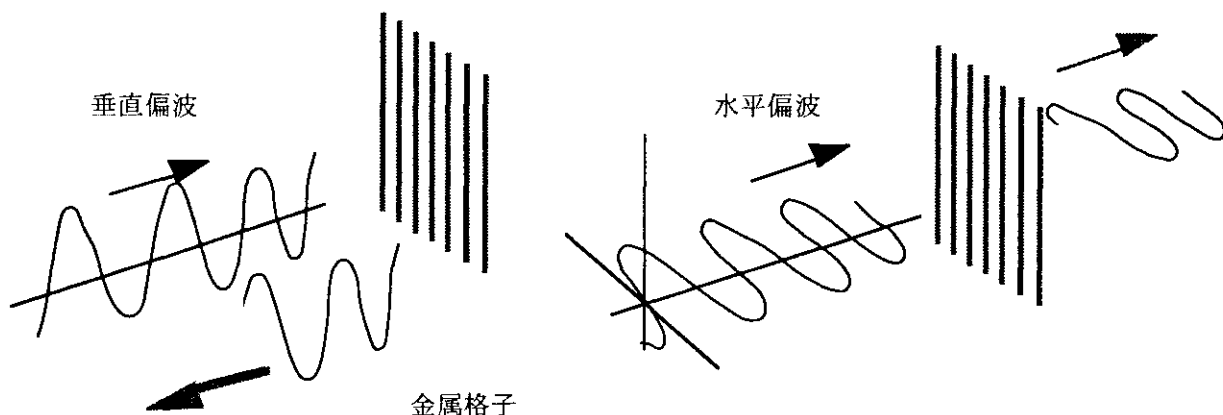


図3.1.8 金属格子による反射の違い

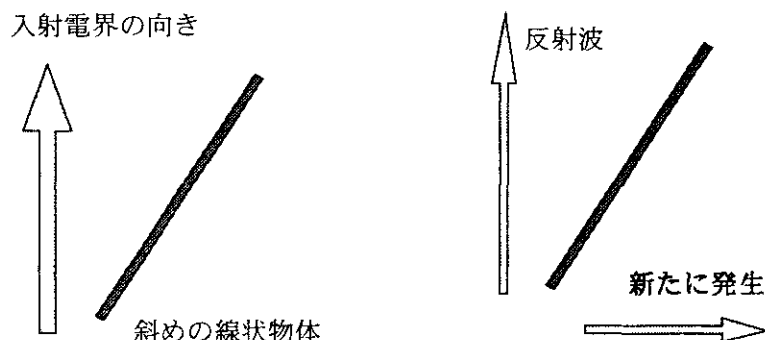


図3.1.9 新たに発生する偏波成分

偏波依存性を取り入れるために、RCSに p, q を偏波方向（horizontal=h方向, vertical=v方向）を表す添え字として割り当て、 σ_{pq} を使うことが考えられた。

$$\sigma_{pq} = \sigma_{pq}(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \left| \frac{E_p(\theta, \phi)}{E_q^i} \right|^2 \quad (3.1.16)$$

例えば、 $q=v, p=h$ の場合、 σ_{hv} はv偏波を入射したときにh偏波成分の散乱電力の大きさを表す。その結果、以下の式のように σ_{hv} , σ_{vh} , σ_{vh} , σ_{vv} の電力反射係数が得られる。

$$\begin{bmatrix} P_h^s \\ P_v^s \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \sigma_{hh} & \sigma_{hv} \\ \sigma_{vh} & \sigma_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_h^i \\ P_v^i \end{bmatrix} \quad K: \text{constant} \quad (3.1.17)$$

そのRCSを測定することによって、ターゲットの偏波依存性をある程度は調べることができる。しかし、それでも電力値のスカラー量のみである。位相成分は測定することが難しいこともあって、従来は無視されてきたが、最近は技術の進歩に伴ってそれが可能になっている。

実際の散乱現象の基本は電界である。電界には振幅のみならず位相成分も含まれる。位相成分はターゲットの認識に重要である。電界の振幅のみ、あるいは電力のみの取り扱いでは、十分な情報が得られない。そこでレーダ方程式を電界の各偏波方向の振幅と位相まで立ち戻って、再構築が始められたのが1950年代である。

ここでは、電磁界の基礎から出発して、電界のベクトル成分（偏波）に焦点を当てた次の形式を詳しく考察する。なお、定数Kは、偏波に無関係なため省略することがある。

$$\begin{bmatrix} E_h^s \\ E_v^s \end{bmatrix} = \sqrt{K} \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{hh}} e^{j\phi_{hh}} & \sqrt{\sigma_{hv}} e^{j\phi_{hv}} \\ \sqrt{\sigma_{vh}} e^{j\phi_{vh}} & \sqrt{\sigma_{vv}} e^{j\phi_{vv}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h^i \\ E_v^i \end{bmatrix} \quad (3.1.18)$$

はじめに基本的な相反定理から出発し、偏波の概念を取り入れた受信アンテナに誘導される電圧の表現式を導く。また、散乱行列、レーダポーラリメトリの基本式を示し、偏波によってレーダ方程式

$$P_r = \frac{\lambda^2 G_1^2 P_t}{(4\pi)^3 r^4} \sigma = K P_t \sigma \propto \sigma \quad (3.1.10)$$

が拡張されることを示す。さらに、偏波状態によって受信電力がどのように変化するか？ターゲットと偏波チャンネルごとに具体例で示す。

3.2 相反定理

図3.2.1に示すように、線形で均質媒質中に置かれた電流源と磁流源 (J_1, M_1) 、 (J_2, M_2) の2組のソースと場の関係を考えてみよう。これらのソースは各々Maxwell方程式を満たす。

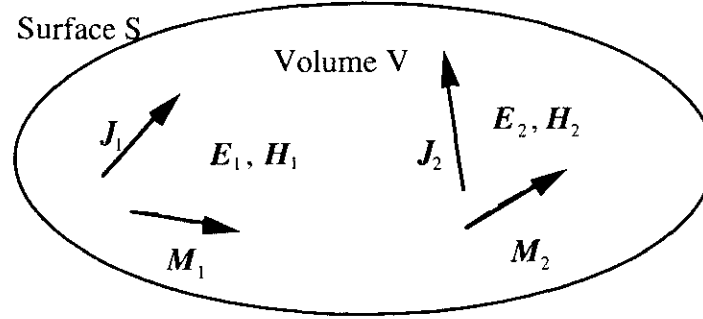


図3.2.1 ソースと場

$$\nabla \times H_1 = J_1 + j\omega\epsilon E_1 \quad \nabla \times E_1 = -M_1 - j\omega\mu H_1 \quad (3.2.1)$$

$$\nabla \times H_2 = J_2 + j\omega\epsilon E_2 \quad \nabla \times E_2 = -M_2 - j\omega\mu H_2 \quad (3.2.2)$$

J_1, M_1 によって E_1, H_1 が生じ、 J_2, M_2 によって E_2, H_2 が生じるものとする。ベクトル公式

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot \nabla \times A - A \cdot \nabla \times B$$

を使うと(3.2.1), (3.2.2)から

$$-\nabla \cdot (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) = E_1 \cdot J_2 - E_2 \cdot J_1 + H_2 \cdot M_1 - H_1 \cdot M_2 \quad (3.2.3)$$

この式を積分形で表せば

$$-\iint (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) \cdot n \, dS = \iiint (E_1 \cdot J_2 - E_2 \cdot J_1 + H_2 \cdot M_1 - H_1 \cdot M_2) \, dv \quad (3.2.4)$$

となる。この式はLorentzの相反定理と呼ばれている。

もし、考えている領域内にソースが無ければ、式(3.2.4)の右辺が0となるから

$$\iint (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) \cdot n \, dS = 0 \quad (3.2.5)$$

一方、ソースがあっても面Sを無限遠に拡張すれば、式(3.2.4)の左辺は消滅し、その結果

$$\iiint (E_1 \cdot J_2 - H_1 \cdot M_2) \, dv = \iiint (E_2 \cdot J_1 - H_2 \cdot M_1) \, dv \quad (3.2.6)$$

が導かれる。この式(3.2.6)は互いのソースによる場の結合を表している。この結合関係のことをReactionと呼び、左辺、右辺をそれぞれ

$$\langle 1, 2 \rangle = \iiint (E_1 \cdot J_2 - H_1 \cdot M_2) \, dv \quad (3.2.7)$$

$$\langle 2, 1 \rangle = \iiint (E_2 \cdot J_1 - H_2 \cdot M_1) \, dv \quad (3.2.8)$$

と記す。相反定理はこの表記を使うと単純な関係式となる。

$$\langle 1, 2 \rangle = \langle 2, 1 \rangle \quad (3.2.9)$$

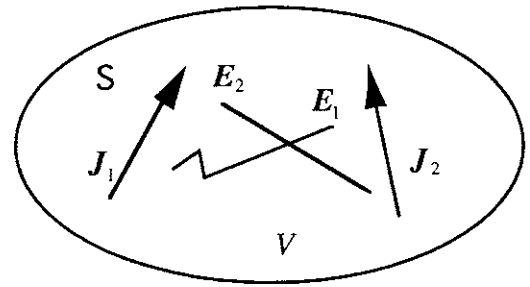
これは、ソース2による場1へのReactionと、ソース1による場2へのReactionは等しいことを意味している。

この相反定理を使ってアンテナに流れる電流と、もう一つのアンテナに生ずる電圧の関係を考えてみよう。簡単のため、磁流源が無い($M_1 = M_2 = 0$)とする。考察の対象は、図3.2.2のような無限に広い空間におかれた2つの電流源 J_1, J_2 と、それらによる場 E_1, E_2 である。

$$\langle 1, 2 \rangle = \iiint E_1 \cdot J_2 dv$$

の体積積分を変形すれば、 J_2 における線積分に置き換わる。

$$\iiint E_1 \cdot J_2 dv = \int E_1 \cdot I_2 dL$$



これから、次の式が導かれる。

図3.2.2 2つの電流源と場

$$\begin{aligned} \int E_1 \cdot I_2 dL &= I_2 \int E_1 \cdot dL = -I_2 V_{2,1} \\ \therefore \langle 1, 2 \rangle &= \iiint E_1 \cdot J_2 dv = \int E_1 \cdot I_2 dL = I_2 \int E_1 \cdot dL = -I_2 V_{2,1} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

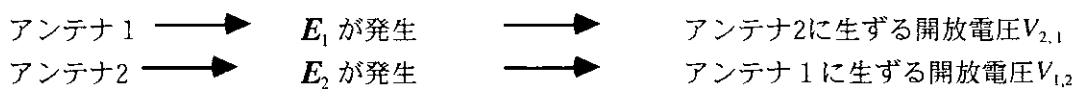
$V_{2,1}$ は J_2 の場所において電界 E_1 を積分して得られる値で、ソース2に生ずる開放電圧である。同様に

$$\langle 2, 1 \rangle = \iiint E_2 \cdot J_1 dv = \int E_2 \cdot I_1 dL = I_1 \int E_2 \cdot dL = -I_1 V_{1,2} \quad (3.2.11)$$

$V_{1,2}$ は電界 E_2 によってソース1に生ずる開放電圧である。したがって

$$\langle 1, 2 \rangle = \langle 2, 1 \rangle \Rightarrow I_2 V_{2,1} = I_1 V_{1,2} \quad (3.2.12)$$

もし、 $I_1 = I_2$ とすれば、 $V_{2,1} = V_{1,2}$ となり、誘起される電圧は等しいことになる。これより、電流源をアンテナに置き換えて、 J_1 をアンテナ1、 J_2 をアンテナ2とする。同じ大きさの電流を交互に流したとすれば



が等しくなる。物理的には2つのアンテナを対向させて送受信したとすると、同じ大きさの電流を送信アンテナに流せば、受信アンテナに生ずる電圧は等しくなることを意味している。

3.3 受信電圧

アンテナの放射電磁界を扱う際には、球座標成分が用いられる。放射電界は一般的に θ, ϕ 成分だけからなっている。線状アンテナであろうと開口面アンテナであろうと、電界が入射した場合にそのアンテナに誘起される開放端電圧は、偏波も含めてベクトル実効長 L_e によって表される[11],[12]。

$$L_e(\theta, \phi) = a_\theta L_\theta(\theta, \phi) + a_\phi L_\phi(\theta, \phi) \quad (3.3.1)$$

この量は実効高とも等しい。アンテナから十分遠い遠方界において電界はベクトル実効長 L_e を使って次のように表すことができる。

$$E(\theta, \phi) = a_\theta E_\theta + a_\phi E_\phi = j \frac{\eta_0 k I L_e}{4\pi r} e^{-jkr} = \frac{j \eta_0 I}{2\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} L_e \quad (3.3.2)$$

図3.3.1に示す一般のアンテナ1と微小ダイポールアンテナ2に相反定理を適用してみよう。(図3.3.1では最終的にアンテナ1の座標系に統一する。)

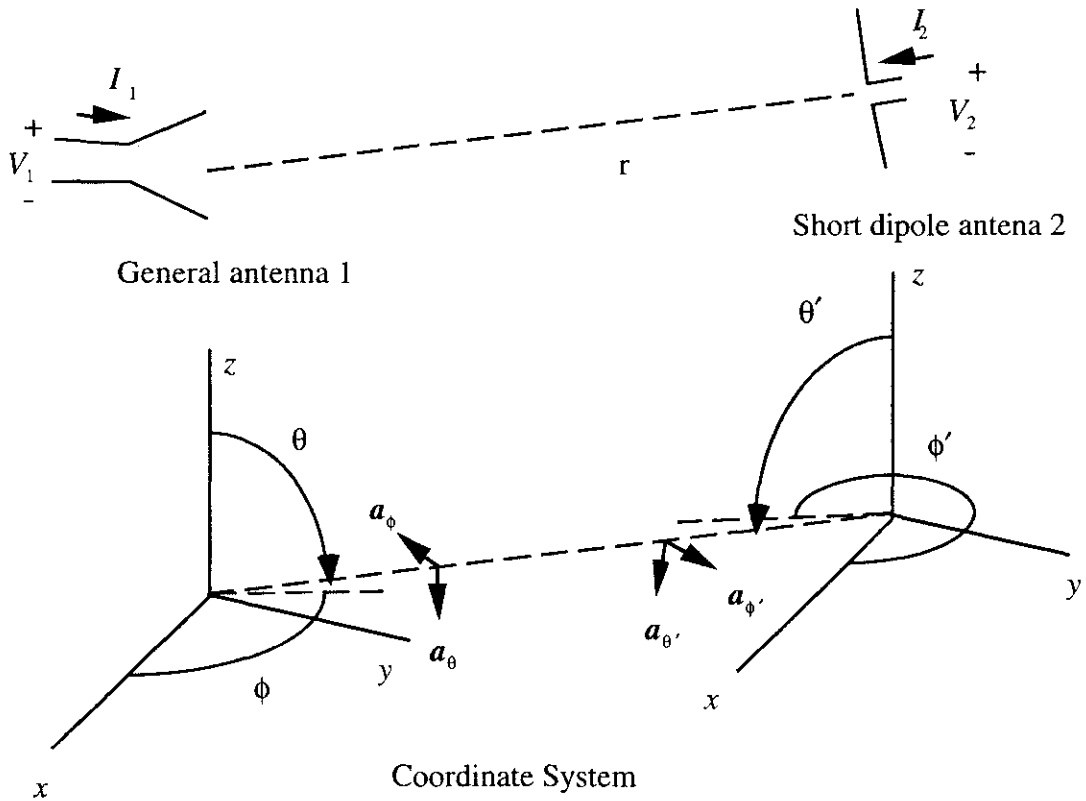


図3.3.1 一般のアンテナ1と微小ダイポールアンテナ2

まず、自由空間で一般のアンテナ1に1Aの電流を流せば、その電流によって場が作られ、微小ダイポール2の場所での放射電界は以下の式で表される。

$$\mathbf{E}' = \frac{j \eta_0 I}{2\lambda r} e^{-jkr} \mathbf{h} = \frac{j \eta_0}{2\lambda r} e^{-jkr} \mathbf{h} \quad (3.3.3)$$

となる。ここで \mathbf{h} は、一般的なアンテナ1の実効長(effective length)であり、長さLの微小ダイポールでは

$$\mathbf{h} = h(\theta, \phi) = a_\theta h_\theta = a_\theta L \sin \theta \quad (3.3.4)$$

によって与えられる。もし、 E_i をだ円偏波にするようなアンテナであれば、実効長 \mathbf{h} は複素量のベクトルとなる。

さて、微小ダイポールアンテナ2の端子に生ずる開放電圧は

$$V_{2,1} = \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{L} \quad (3.3.5)$$

\mathbf{L} は微小ダイポールアンテナ2のベクトル的な長さである。 \mathbf{E}^i は r 方向の成分を持っていないので、

$$\begin{aligned} V_{2,1} &= E_\theta^i L_\theta + E_\phi^i L_\phi \\ L_\theta &= \mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{L}, \quad L_\phi = \mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{L} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

それゆえ、微小ダイポールアンテナ2の端子に生ずる開放電圧は、次の形に書くことができる。

$$V_{2,1} = \frac{j\eta_0}{2\lambda r} e^{-jkr} \mathbf{h} \cdot \mathbf{L} \quad (3.3.7)$$

次に、逆に微小ダイポール2に1Aの電流を流して、一般のアンテナ1で受信することを考えてみよう。ダイポールによるアンテナ1の位置での場は

$$E_{\theta'}^i = \frac{j\eta_0}{2\lambda r} e^{-jkr} L_{\theta'}, \quad E_{\phi'}^i = \frac{j\eta_0}{2\lambda r} e^{-jkr} L_{\phi'} \quad (3.3.8)$$

アンテナ1での座標系を使うと、 $\mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_{\theta'}$ 、 $\mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_{\phi'}$ なので

$$E_{\theta'}^i = E_\theta^i, \quad E_{\phi'}^i = -E_\phi^i, \quad L_{\theta'} = L_\theta, \quad L_{\phi'} = -L_\phi \quad (3.3.9)$$

それゆえ、アンテナ1に入射する電界は、

$$\begin{aligned} E_\theta^i &= \frac{j\eta_0}{2\lambda r} e^{-jkr} L_\theta, \quad -E_\phi^i = \frac{j\eta_0}{2\lambda r} e^{-jkr} (-L_\phi) \\ \therefore \mathbf{E}^i &= \frac{j\eta_0}{2\lambda r} e^{-jkr} \mathbf{L} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

アンテナ1の開放電圧 V_1 は、相反定理から V_2 に等しい。それゆえ、

$$V_{1,2} = \frac{j\eta_0}{2\lambda r} e^{-jkr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{h} = V_{2,1} \quad (3.3.11)$$

したがって、アンテナ1の開放電圧はその実効長を \mathbf{h} 、入射電界を \mathbf{E}^i として一般的に

$$V_{1,2} = \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{E}^i \quad (3.3.12)$$

と書けることになる。すなわち、受信アンテナの開放電圧はそのアンテナが送信として働くときの実効長 \mathbf{h} と入射電界 \mathbf{E}^i にのみによって決まる複素スカラー量となる。

一般に、放射・受信電界は、複素量のPhasor表現であり、 \mathbf{h} も \mathbf{E}^i も複素ベクトルである。もし、 \mathbf{h} も \mathbf{E}^i も互いに直交したベクトルであれば、開放電圧は0となる。 \mathbf{h} は偏波を扱う上で重要な概念で、どの方向にどれだけの電界成分を生ずるかを示しており、結果的にそのアンテナから生ずる偏波の状態を表していると考えてよい。注意すべき点として、 \mathbf{h} も \mathbf{E}^i も同じ座標系で定義されていること、および誘導される開放電圧は内積の形式をしているが、電圧の物理的な定義からも分かるように複素共役の内積ではないことである。そのため、次の形式に書き改めた方が混乱は少ないように思われる。

$$V = \mathbf{h}^T \mathbf{E}^i = h_\theta E_\theta + h_\phi E_\phi \quad (3.3.13)$$

Tは転置を意味し、 $\mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} h_\theta & h_\phi \end{bmatrix}$ など2つの直交する成分からなっている。

受信アンテナに生ずる電圧がわかれば、その受信アンテナに付けられた整合負荷に供給される電力Pは電気回路理論から導かれるように

$$P = \frac{1}{8R_a} VV^* = \frac{1}{8R_a} |V|^2 \quad (3.3.14)$$

で与えられる。ただし、*は複素共役、 R_a は受信アンテナ回路の整合インピーダンスである。

注) なお、通信の場合でも開放電圧(3.3.12),(3.3.13)は成立し、これを使って偏波の整合度合いを調べることができる。通信に偏波を積極的に使う場合はコミュニケーションポーラリメトリと呼ばれるかもしれない。(山口、仙石、阿部、電子情報通信学会技術研究報告、AP90-89, 1990-12)

3.4 散乱行列

レーダは、送信アンテナから電波をターゲットに送り、ターゲットからの散乱波を受信する。受信アンテナに生ずる端子電圧をデータとして記録する。その様子は図3.4.1のように示すことができる。一般に、ターゲットからの散乱電界は、送信する偏波状態によって変わる。通常、送信波の偏波状態と散乱波の偏波状態は異なり、散乱する方向によっても偏波状態は一般に異なる。ターゲットはその意味で偏波の変換物体とも考えられる。偏波散乱特性を扱う場合、座標系が重要な意味を持つてくる。図3.4.1はレーダターゲットに対して、3つの右手直角座標系を示したものである[11]。\$(x_1, y_1, z_1)\$ 座標系は送信アンテナに原点を持ち、\$(x_2, y_2, z_2)\$ 座標系はターゲットに原点をもつ。\$(x_3, y_3, z_3)\$ は受信座標系で受信アンテナに原点を持つ。\$z_1, z_2\$ 軸は電波の進行方向に一致するように選んでいるが、\$z_3\$ は散乱波の到来方向である。Monostatic radarでは送信と受信が同じ位置にあるので、\$(x_1, y_1, z_1) = (x_3, y_3, z_3)\$ である。

これらの座標系と伝搬方向に対して、送信電界\$\mathbf{E}^t\$ は送信アンテナから距離\$r_1\$ の位置で次のように書くことができる[13]。

$$\mathbf{E}^t = \left(E_{x1}^t \mathbf{a}_{x1} + E_{y1}^t e^{j\phi_1} \mathbf{a}_{y1} \right) \exp \left\{ j \left(\omega t - k r_1 + \theta_1 \right) \right\} \text{ at } (x_1, y_1, z_1) \text{ coordinate} \quad (3.4.1)$$

\$\theta_1\$ は絶対位相。また、この電界はターゲット座標系\$(x_2, y_2, z_2)\$ の位置で入射電界\$\mathbf{E}^i\$ となり、

$$\mathbf{E}^i = \left(E_{x2}^i \mathbf{a}_{x2} + E_{y2}^i e^{j\phi_2} \mathbf{a}_{y2} \right) \exp \left\{ j \left(\omega t + k 0 + \theta_2 \right) \right\} \text{ at } (x_2, y_2, z_2) \text{ coordinate} \quad (3.4.2)$$

伝搬距離の違い以外は互いに同じものを表している。なお、\$\mathbf{a}_{x1}\$, \$\mathbf{a}_{y1}\$ などは単位ベクトル、添え字 \$i\$ はターゲットに対するincidenceを表す。また、ターゲットから散乱して距離\$r_2\$ を伝搬し、受信アンテナに届くときは\$x_2, y_2, z_2\$ における表現は、

$$\mathbf{E}^s = \left(E_{x2}^s \mathbf{a}_{x2} + E_{y2}^s e^{j\phi_2} \mathbf{a}_{y2} \right) \exp \left\{ j \left(\omega t - k r_2 + \theta_2 \right) \right\} \text{ at } (x_2, y_2, z_2) \text{ coordinate} \quad (3.4.3)$$

一方、受信アンテナの実効長\$\mathbf{h}\$ は受信座標\$x_3, y_3, z_3\$ を使い

$$\mathbf{h} = \left(h_{x3} \mathbf{a}_{x3} + h_{y3} e^{j\phi_3} \mathbf{a}_{y3} \right) \exp \left\{ j \left(\omega t - k r + \theta_3 \right) \right\} \text{ at } (x_3, y_3, z_3) \text{ coordinate} \quad (3.4.4)$$

と書くことができる。ここで、\$\phi\$ は相対位相、\$\theta\$ は絶対位相である。これらの式で、\$(\bullet)\$ の中は2次元の複素数ベクトルで、座標系を含んだ偏波状態を表している。これを一貫して次のJones ベクトル形式で書く。

$$\mathbf{E}^t = \begin{bmatrix} E_{x1}^t \\ E_{y1}^t \end{bmatrix} \text{ at } (x_1, y_1) \text{ plane} \quad (3.4.5)$$

この表現には伝搬方向は含まれていないが、\$\exp \{ \bullet \}\$ の項から復元できる。\$\mathbf{E}^t\$, \$\mathbf{E}^i\$, \$\mathbf{h}\$ はそれぞれ \$+z_1\$, \$-z_1\$, \$r\$ 方向に伝搬する波で、もし \$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}\$ で与えられれば、\$\mathbf{h}\$ に対しては左回り、\$\mathbf{E}^i\$ に対しては右回りの円偏波となる。

さて、ターゲットに入射する電界成分と散乱する電界成分は、次のような一般的な行列形式で書くことができる。

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

この式はターゲット上で成立するもので、この表現では座標系を指定していない。散乱する方向が変われば行列の要素が変化し、座標系の取り方によっても変化する。

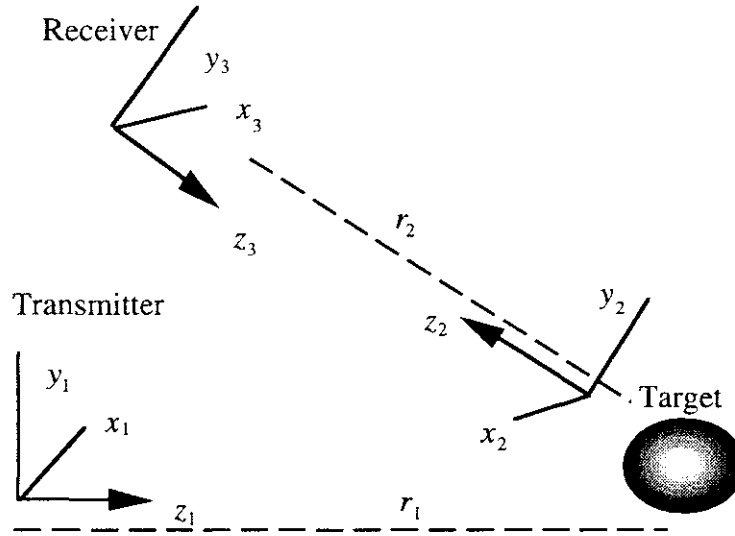


図3.4.1 レーダとターゲットの座標系

図3.4.1のように、レーダにおいて送信と受信の位置が異なる場合をbistatic、送信と受信が一致した場合をmonostaticと言う。従って、散乱波の偏波状態を定義するには、座標系としてターゲットに原点をもつ x_2, y_2, z_2 が最も自然であるが、レーダの方からすると (x_1, y_1, z_1) あるいは (x_3, y_3, z_3) の座標系の方が好ましい。レーダの一般的な構成はmonostaticであるので、 $(x_1, y_1, z_1) = (x_3, y_3, z_3)$ 座標系が都合がよい。座標の原点をどこにとるかによって定式化が異なってくる。光学の分野では (x_2, y_2, z_2) での定式化がよく行われ、Mueller行列はその1つである。レーダ座標系を使って定式化が行なわれているものにSinclair scattering matrixがある。散乱波は座標系 (x_3, y_3, z_3) で見たとき、

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi} r_2} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} e^{-jk r_2} \quad (3.4.7)$$

によって定義している。つまり、レーダ座標系でベクトル成分を観測したとき、ベクトルとして左辺のように表す。右辺には送信ベクトルの座標系、そして散乱過程が含まれている。この式の行列部分をSinclair scattering matrixと呼ぶ。一般的に散乱行列あるいはS行列とも呼ばれる。

$$\boxed{[S] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix}} \quad (3.4.8)$$

この行列要素は複素数で、互いに独立な量である。しかし、後方散乱($x_1, y_1, z_1 = x_3, y_3, z_3$) の場合には $S_{yx} = S_{xy}$ となる。以下に、これを示そう。 $r_1 = r_2 = r$ となるので、送信から距離 r にあるターゲットに入射する電界は

$$\begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} = \frac{j \eta_0 I}{2 \lambda r} \begin{bmatrix} h_x^i \\ h_y^i \end{bmatrix} e^{-jkr} \quad (3.4.9)$$

これが散乱し、送信と同じ位置にある受信アンテナに到達する電界は

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \frac{j \eta_0 I}{\sqrt{4\pi} 2 \lambda r^2} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x^i \\ h_y^i \end{bmatrix} e^{-j2kr} \quad (3.4.10)$$

受信アンテナの開放電圧は

$$V = \mathbf{h}_r^T \mathbf{E}^s = \frac{j \eta_0 I}{\sqrt{4\pi} 2 \lambda r^2} \begin{bmatrix} h_x^r & h_y^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x^i \\ h_y^i \end{bmatrix} e^{-j2kr} \quad (3.4.11)$$

今、送信アンテナと受信アンテナを逆にしたら、受信電圧は

$$V = \mathbf{h}_i^T \mathbf{E}^s = \frac{j \eta_0 I}{\sqrt{4\pi} 2 \lambda r^2} \begin{bmatrix} h_x^i & h_y^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x^r \\ h_y^r \end{bmatrix} e^{-j2kr} \quad (3.4.12)$$

この2つの電圧は相反定理により、等しくならなければならない。そのためには

$$S_{yx} = S_{xy} \quad (3.4.13)$$

が成り立つことが必要である。この関係がmonostatic radarによる散乱行列の条件としてよく使われる。ただし、伝搬媒質がFaraday 回転をもつような非等方性媒質では、この条件は成り立たない。

3.5 レーダポーラリメトリの基本式

アンテナとターゲット間の距離は十分長く、散乱波も受信アンテナに入射する時は平面波になっていると仮定する。後方散乱の場合を考え、送受信アンテナが同一地点にあるとする。そこで、レーダ座標系 x_1, y_1, z_1 を用いてレーダの受信電力を考える。偏波状態に着目して考察する場合、距離など偏波以外の定数項は省いてもよい。レーダ送信の偏波状態を \mathbf{E}^t 、ターゲットから受信アンテナに届く散乱波を \mathbf{E}^s とすると、

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^t \\ E_y^t \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{E}^s = [\mathbf{S}] \mathbf{E}^t} \quad (3.5.1)$$

受信アンテナの開放電圧は

$$\boxed{V = \mathbf{h}^T \mathbf{E}^s = h_x E_x^s + h_y E_y^s} \quad (3.5.2)$$

によって与えられる。 \mathbf{h} は受信アンテナが送信アンテナとして動作したときの実効長である。 \mathbf{h} も \mathbf{E}^s も共にレーダ座標系 x_1, y_1, z_1 で表現されている。受信アンテナに付加された整合負荷に生ずる受信電力 P は

$$P = \frac{VV^*}{8R_a} = \frac{|V|^2}{8R_a} = \frac{1}{8R_a} |h_x E_x^s + h_y E_y^s|^2$$

であるが、比例定数分は偏波特性には影響しないので

$$\boxed{P = VV^* = |V|^2 = |\mathbf{h}^T \mathbf{E}^s|^2 = |\mathbf{h}^T [\mathbf{S}] \mathbf{E}^t|^2} \quad (3.5.3)$$

としてもかまわない。式(3.5.1)-(3.5.3)がレーダポーラリメトリの基本式である。

散乱行列を計測することによって、(3.5.1)のように散乱波の複素電界成分が求まる。直交する電界成分が取得できれば、散乱波のだ円偏波状態が復元でき、偏波パラメータが導出できる。

次に、偏波レーダによる受信電力について考察する。受信電力は、散乱波 \mathbf{E}^s と \mathbf{h} のベクトル成分によって変化する。そして散乱波 \mathbf{E}^s は送信の偏波状態 \mathbf{E}^t によって変化するのので、変数としては送信 \mathbf{E}^t と受信 \mathbf{h} が独立に存在する。これらを偏波比やStokesベクトルによって表してみよう。

3.6 受信電力の表現

3.6.1 偏波比を使った偏波チャンネルの受信電力

送信電界を正規化したJones Vector 表現を使って書くと（ここでは，後ろ側⊗ から見ている．）

$$\mathbf{E}^t = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \frac{|\mathbf{E}^t| e^{j\phi}}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \quad (3.6.1)$$

したがって，

$$\mathbf{E}^s = \begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = [\mathbf{S}] \mathbf{E}^t = \frac{[\mathbf{S}]}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \quad (3.6.2)$$

ここで注意点は，ターゲットからの散乱電界 \mathbf{E}^s を図3.6.1のようにレーダ側から見ていることである．

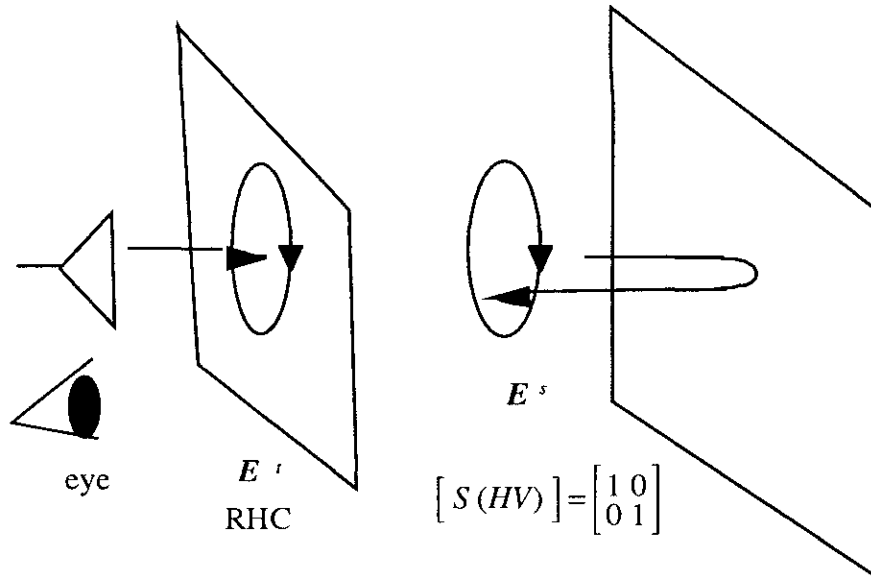


図3.6.1 送信と受信の偏波

もし，無限平板に向かって右回りの円偏波（ $\rho = -j$ ）で送信したとすれば，散乱波が左回りの円偏波で戻ってくる．そして我々は左回りの偏波アンテナで受信すれば受信でき，右回りのアンテナでは受信できないことを知っている．これをJones Vector で表すと

$$\mathbf{E}^t = \frac{1}{\sqrt{1+(-j)(-j)^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad \text{RHC} \quad (3.6.3a)$$

$$\mathbf{E}^s = [\mathbf{S}] \mathbf{E}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad \text{RHC} \quad (3.6.3b)$$

レーダ側から見ると，散乱波の回転方向は図3.6.1のように送信波と同じ右回りであるが，伝搬方向は逆なので，偏波の定義から左回りとなる．受信アンテナ（送信アンテナの実効長）の偏波状態を

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \quad (3.6.4)$$

とおき，左回りのアンテナで受信した場合は次のようになる．

$$V = \mathbf{h}^T \mathbf{E}_s = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} -j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = -j \quad \therefore P = |-j|^2 = 1 \quad \text{Max.} \quad (3.6.5a)$$

$$\text{あるいは } V = \mathbf{h}^T \mathbf{E}_s = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = 1 \quad P = 1$$

右回りのアンテナで受信した場合,

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} 0 = 0 \quad \therefore P = 0 \quad \text{Min.} \quad (3.6.5b)$$

となり, これらの結果は実験的事実と一致する.

直線の水平偏波で送受信した場合も同様に

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \therefore P = 1 \quad \text{Max.} \quad (3.6.6a)$$

送信が水平, 受信が垂直では

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \therefore P = 0 \quad \text{Min.} \quad (3.6.6b)$$

送信が水平, 受信が右回りでは

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore P = \frac{1}{2} \quad (3.6.6c)$$

となり, 実験的事実と一致する.

座標系に関して, \mathbf{h} は受信アンテナが送信として働くときの偏波状態を表し, 偏波の解釈上問題は無い. しかし \mathbf{E}^s はレーダに向かってくるベクトルをレーダ側から見ているので, 偏波定義の方向と一致していない. この点は不都合であるが, レーダ座標系で散乱波は単に Jones ベクトルとして考えた方がよい.

さて, ポーラリメトリックレーダでは送信 \mathbf{E}^t , 受信 \mathbf{h} の偏波状態が独立変数で, その組み合わせは無限通りある. それを全て網羅することはできないので, 1つの独立変数で扱えるように, 解析的にも都合の良い次の3つの仮想的偏波チャンネルを考える (図3.6.2).

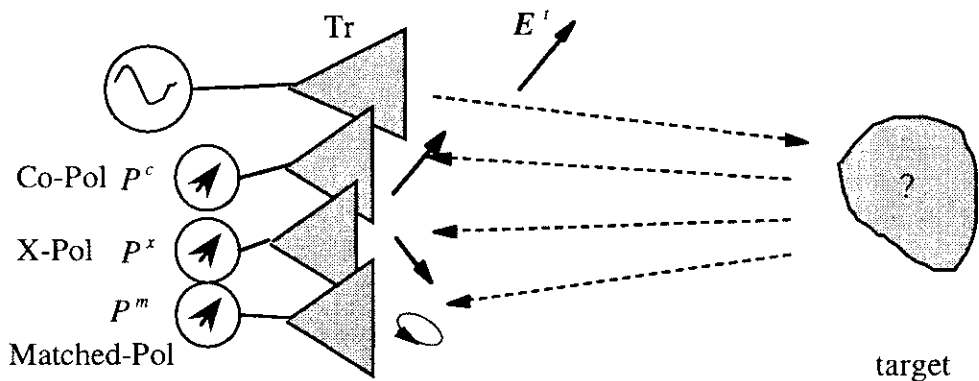


図3.6.2 3つの偏波チャンネル

1)送信と受信が同じ偏波チャンネル(Co-Polarization Channel) $h = E'$

このCo-Pol Channelでは、送信と受信が常に常に同じ偏波状態をとることを仮定しており、その電力は次のように与えられる。偏波比 ρ が偏波状態を示す変数である。

$$P^c = \left| E'^T [S] E' \right|^2 = \left| \frac{\begin{bmatrix} 1, \rho \end{bmatrix} [S] \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}}{1 + \rho \rho^*} \right|^2 \quad (3.6.7)$$

2)送信と受信が直交の偏波チャンネル(Cross-Polarization Channel) $h = E'_\perp$

\perp は直交を意味する。このCross-Pol Channelでは、X-Pol channel とも書き、受信アンテナの偏波状態が常に送信偏波状態と直交している。

$$P^x = \left| E'_\perp{}^T [S] E' \right|^2 = \left| \frac{\begin{bmatrix} \rho^*, -1 \end{bmatrix} [S] \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}}{1 + \rho \rho^*} \right|^2 \quad (3.6.8)$$

3)散乱波電力を受信するチャンネル(Matched-Polarization Channel) $h = E^{s*}$

Matched-Pol Channelは、散乱波の電力すべてを受信するチャンネルである。

$$P^m = \left| \left([S] E' \right)^{*T} [S] E' \right|^2 = \left| \frac{\begin{bmatrix} 1, \rho^* \end{bmatrix} [S]^*{}^T [S] \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}}{1 + \rho \rho^*} \right|^2 \quad (3.6.9)$$

3.6.2 幾何学的パラメータを使った偏波チャンネルの受信電力

電界表現は偏波比と幾何学的パラメータなど、いろいろの表現方法があった。式 (2.2.30) , (2.2.63) の関係が成り立つので、

$$E(HV) = \begin{bmatrix} E_H \\ E_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ j \sin \epsilon \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}$$

偏波チャンネルの電力式に直接代入して、以下の表現式となる。この幾何学的パラメータ表現の利点は、偏波比と比べて $\rho = \infty$ などの発散する点がないことである。

1)送信と受信が同じ偏波チャンネル(Co-Polarization Channel) $h = E'$

$$P^c = \left| E'^T [S] E' \right|^2 = |V_c|^2 \quad (3.6.10)$$

$$\begin{aligned} V_c &= \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \\ &= S_{xx} \left(\cos \tau \cos \varepsilon - j \sin \tau \sin \varepsilon \right)^2 + S_{yy} \left(\sin \tau \cos \varepsilon + j \cos \tau \sin \varepsilon \right)^2 + \left(\frac{S_{xy} + S_{yx}}{2} \right) \left(\sin 2\tau + j \cos 2\tau \sin 2\varepsilon \right) \end{aligned}$$

$S_{xy} = S_{yx}$ なら (monostatic radarなら)

$$V_c = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \cos 2\varepsilon + \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \left(\cos 2\tau - j \sin 2\tau \sin 2\varepsilon \right) + S_{xy} \left(\sin 2\tau + j \cos 2\tau \sin 2\varepsilon \right)$$

2)送信と受信が直交の偏波チャンネル(Cross-Polarization Channel) $h = E'_\perp$

(2.2.60) を使って

$$P^x = \left| E'^T_\perp [S] E' \right|^2 = |V_x|^2 \quad (3.6.11)$$

$$\begin{aligned} V_x &= \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & -j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \tau & \cos \tau \\ -\cos \tau & -\sin \tau \end{bmatrix} [S] \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \\ &= \frac{-S_{xx}}{2} \left(\sin 2\tau \cos 2\varepsilon - j \sin 2\varepsilon \right) + \frac{S_{yy}}{2} \left(\sin 2\tau \cos 2\varepsilon + j \sin 2\varepsilon \right) \\ &\quad - S_{xy} \left(\sin^2 \tau \cos^2 \varepsilon + \cos^2 \tau \sin^2 \varepsilon \right) + S_{yx} \left(\cos^2 \tau \cos^2 \varepsilon + \sin^2 \tau \sin^2 \varepsilon \right) \end{aligned}$$

$S_{xy} = S_{yx}$ なら (monostatic radarなら)

$$V_x = S_{xy} \cos 2\tau \cos 2\varepsilon + \frac{S_{yy} - S_{xx}}{2} \sin 2\tau \cos 2\varepsilon + j \frac{S_{yy} + S_{xx}}{2} \sin 2\varepsilon$$

3)散乱波電力を受信するチャンネル(Matched-Polarization Channel) $h = E^{s*}$

$$P^m = \left| \left([S] E' \right)^{*T} [S] E' \right|^2 = |V_m|^2 \quad (3.6.12)$$

$$\begin{aligned} V_m &= \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & -j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} [S]^* [S] \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \\ V_m &= \left(|S_{xx}|^2 + |S_{yx}|^2 \right) \left(\cos^2 \tau \cos^2 \varepsilon + \sin^2 \tau \sin^2 \varepsilon \right) + \left(|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2 \right) \left(\sin^2 \tau \cos^2 \varepsilon + \cos^2 \tau \sin^2 \varepsilon \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{S_{xx}^* S_{xy} + S_{yx}^* S_{yy}}{2} \left(\sin 2\tau \cos 2\varepsilon + j \sin 2\varepsilon \right) \right\} \end{aligned}$$

3.6.3 Stokesベクトルを使った偏波チャンネルの受信電力表現

今まで、コヒーレント波の表現として散乱行列、偏波比を用いて受信電力を導いてきたが、散乱行列の平均を取ったり、統計的な性質を調べる際にそのまま散乱行列を使用することはできない。複素数の加算はできない。一方、Stokes vectorやMueller行列による表現は、複素数の積として電力表現を扱うので誤りや混乱を生じにくい。そこで、ポーラリメトリの基本式をStokes vectorやMueller行列による電力表現に対応できるように置き換えてみる。以下の展開は、統計解析にも適した変換である。まず、正規化したJones Vector 表現を使って(3.5.1)式を書き換えると

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} \quad (3.6.13)$$

これを展開して、次の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} E_x^s E_x^{s*} \\ E_y^s E_y^{s*} \\ E_x^s E_y^{s*} \\ E_y^s E_x^{s*} \end{bmatrix} = [W] \begin{bmatrix} E_x^i E_x^{i*} \\ E_y^i E_y^{i*} \\ E_x^i E_y^{i*} \\ E_y^i E_x^{i*} \end{bmatrix} \quad (3.6.14)$$

ここで、

$$[W] = \begin{bmatrix} S_{xx} S_{xx}^* & S_{xy} S_{xy}^* & S_{xx} S_{xy}^* & S_{xy} S_{xx}^* \\ S_{yx} S_{yx}^* & S_{yy} S_{yy}^* & S_{yx} S_{yy}^* & S_{yy} S_{yx}^* \\ S_{xx} S_{yx}^* & S_{xy} S_{yy}^* & S_{xx} S_{yy}^* & S_{xy} S_{yx}^* \\ S_{yx} S_{xx}^* & S_{yy} S_{xy}^* & S_{yx} S_{xy}^* & S_{yy} S_{xx}^* \end{bmatrix} \quad (3.6.15)$$

さて、完全に偏波した波に対して送信，散乱，受信を表すcoherencyベクトルをつぎのように定義する。添え字*i*は送信，*s*は散乱，*rec*は受信に対応している。このベクトルは光学の分野でよく用いられており，前方散乱を仮定している。

$$J_i = \begin{bmatrix} E_x^i E_x^{i*} \\ E_y^i E_y^{i*} \\ E_x^i E_y^{i*} \\ E_y^i E_x^{i*} \end{bmatrix}, \quad J_s = \begin{bmatrix} E_x^s E_x^{s*} \\ E_y^s E_y^{s*} \\ E_x^s E_y^{s*} \\ E_y^s E_x^{s*} \end{bmatrix}, \quad J_{rec} = \begin{bmatrix} h_x h_x^* \\ h_y h_y^* \\ h_x h_y^* \\ h_y h_x^* \end{bmatrix} \quad (3.6.16)$$

すると，散乱行列を使った偏波散乱方程式(3.6.13)は

$$J_s = [W] J_i \quad (3.6.17)$$

と等価になる。受信電力*P*は

$$P = \left| \mathbf{h}^T \mathbf{E}^s \right|^2 = \left| h_x E_x^s + h_y E_y^s \right|^2 = \mathbf{J}_{rec}^T \mathbf{J}_s = \mathbf{J}_{rec}^T [W] \mathbf{J}_i \quad (3.6.18)$$

*T*は転置を表す。Stokesベクトルもcoherencyベクトルを使って

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} E_x E_x^* + E_y E_y^* \\ E_x E_x^* - E_y E_y^* \\ E_x E_y^* + E_y E_x^* \\ j(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x E_x^* \\ E_y E_y^* \\ E_x E_y^* \\ E_y E_x^* \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] \mathbf{J} \quad (3.6.19)$$

と表現できる。ただし $[\mathbf{R}]$ は

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & j & -j \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{R}]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ 0 & 0 & 1 & j \end{bmatrix} \quad (3.6.20)$$

従って、

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_t &= [\mathbf{R}] \mathbf{J}_t, & \mathbf{g}_s &= [\mathbf{R}] \mathbf{J}_s, & \mathbf{g}_{rec} &= [\mathbf{R}] \mathbf{J}_{rec}, \\ \mathbf{J}_t &= [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_t, & \mathbf{J}_s &= [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_s, & \mathbf{J}_{rec} &= [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_{rec} \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

Mueller 行列は、ターゲット上に座標の原点をもつ Stokes ベクトルの前方散乱を表す関係で用いられており、

$$\mathbf{g}_s = [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t \quad (3.6.22)$$

つぎの関係を使うと

$$\mathbf{J}_s = [\mathbf{W}] \mathbf{J}_t, \quad [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_s = [\mathbf{W}] [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_t, \quad \mathbf{g}_s = [\mathbf{R}] [\mathbf{W}] [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_t \quad (3.6.23)$$

Mueller 行列 $[\mathbf{M}]$ は、散乱行列の要素をもつ $[\mathbf{W}]$ で表現できることになる。

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{R}] [\mathbf{W}] [\mathbf{R}]^{-1} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6.24)$$

要素は、

$$m_{00} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 + |S_{xy}|^2 + |S_{yx}|^2 + |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.6.25a)$$

$$m_{01} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 - |S_{xy}|^2 + |S_{yx}|^2 - |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.6.25b)$$

$$m_{02} = \text{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) + \text{Re} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \text{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* + S_{yx} S_{yy}^* \right) \quad (3.6.25c)$$

$$m_{03} = \text{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) + \text{Im} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \text{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* + S_{yx} S_{yy}^* \right) \quad (3.6.25d)$$

$$m_{10} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 + |S_{xy}|^2 - |S_{yx}|^2 - |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.6.25e)$$

$$m_{11} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 - |S_{xy}|^2 - |S_{yx}|^2 + |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.6.25f)$$

$$m_{12} = \text{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) - \text{Re} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \text{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* - S_{yx} S_{yy}^* \right) \quad (3.6.25g)$$

$$m_{13} = \text{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) - \text{Im} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \text{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* - S_{yx} S_{yy}^* \right) \quad (3.6.25h)$$

$$m_{20} = \text{Re} \left(S_{xx} S_{yx}^* \right) + \text{Re} \left(S_{xy} S_{yy}^* \right) = \text{Re} \left(S_{xx} S_{yx}^* + S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.6.25i)$$

$$m_{21} = \text{Re} \left(S_{xx} S_{yx}^* \right) - \text{Re} \left(S_{xy} S_{yy}^* \right) = \text{Re} \left(S_{xx} S_{yx}^* - S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.6.25j)$$

$$m_{22} = \text{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) + \text{Re} \left(S_{xy} S_{yx}^* \right) = \text{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* + S_{xy} S_{yx}^* \right) \quad (3.6.25k)$$

$$m_{23} = \text{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) + \text{Im} \left(S_{yx} S_{xy}^* \right) = \text{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* + S_{yx} S_{xy}^* \right) \quad (3.6.25l)$$

$$m_{30} = -\text{Im} \left(S_{xx} S_{yx}^* \right) - \text{Im} \left(S_{xy} S_{yy}^* \right) = -\text{Im} \left(S_{xx} S_{yx}^* + S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.6.25m)$$

$$m_{31} = -\text{Im} \left(S_{xx} S_{yx}^* \right) + \text{Im} \left(S_{xy} S_{yy}^* \right) = -\text{Im} \left(S_{xx} S_{yx}^* - S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.6.25n)$$

$$m_{32} = -\text{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) + \text{Im} \left(S_{xy} S_{yx}^* \right) = -\text{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* - S_{yx} S_{xy}^* \right) \quad (3.6.25o)$$

$$m_{33} = \text{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) - \text{Re} \left(S_{xy} S_{yx}^* \right) = \text{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* - S_{xy} S_{yx}^* \right) \quad (3.6.25p)$$

それゆえ、StokesベクトルとMueller行列を使った受信電力表現はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{J}_{rec}^T \mathbf{J}_s = \mathbf{J}_{rec}^T [\mathbf{W}] \mathbf{J}_t = \left([\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_{rec} \right)^T [\mathbf{W}] [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_t = \mathbf{g}_{rec}^T \left([\mathbf{R}]^{-1} \right)^T [\mathbf{W}] [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_t \\ &= \mathbf{g}_{rec}^T \left([\mathbf{R}]^{-1} \right)^T \left([\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{R}] \right) [\mathbf{W}] [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_t = \mathbf{g}_{rec}^T \left([\mathbf{R}]^{-1} \right)^T \left([\mathbf{R}]^{-1} \right) [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_{rec}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \frac{1}{2} \mathbf{g}_{rec}^T [\mathbf{K}] \mathbf{g}_t \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

後方散乱の場合、Mueller行列のみでは正しいパワーが与えられない。Mueller行列は座標の原点をターゲットに置く前方散乱について定義されているものであって、レーダに原点を置く後方散乱のものではない。後方散乱の行列は**Kennaugh行列**と呼ばれ、

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \quad (3.6.27)$$

と定義されている。monostatic radar では $S_{yx} = S_{xy}$ であるので、Mueller行列の要素では

$$\begin{aligned} m_{01} &= m_{10}, \quad m_{02} = m_{20}, \quad m_{03} = -m_{30}, \\ m_{12} &= m_{21}, \quad m_{13} = -m_{31}, \quad m_{23} = -m_{32} \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

が成り立つ。その結果、

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ -m_{30} & -m_{31} & -m_{32} & -m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{01} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{03} & m_{13} & m_{23} & -m_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6.29)$$

となって、成分が実数であるから、実の対称行列となる。この場合

$$m_{00} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 + 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.6.30a)$$

$$m_{01} = m_{10} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.6.30b)$$

$$m_{02} = m_{20} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* + S_{xy} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Re} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^* \quad (3.6.30c)$$

$$m_{03} = -m_{30} = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* + S_{xy} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Im} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^* \quad (3.6.30d)$$

$$m_{11} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 - 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.6.30e)$$

$$m_{12} = m_{21} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* - S_{xy} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Re} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^* \quad (3.6.30f)$$

$$m_{13} = -m_{31} = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* - S_{xy} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Im} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^* \quad (3.6.30g)$$

$$m_{22} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) + |S_{xy}|^2 \quad (3.6.30h)$$

$$m_{23} = -m_{32} = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) \quad (3.6.30i)$$

$$-m_{33} = |S_{xy}|^2 - \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) \quad (3.6.30j)$$

以上をまとめて

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{|S_{xx}|^2 + 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2}{2} & \frac{|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2}{2} & \operatorname{Re} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^* & \operatorname{Im} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^* \\ \frac{|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2}{2} & \frac{|S_{xx}|^2 - 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2}{2} & \operatorname{Re} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^* & \operatorname{Im} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^* \\ \operatorname{Re} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^* & \operatorname{Re} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^* & |S_{xy}|^2 + \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) & \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) \\ \operatorname{Im} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^* & \operatorname{Im} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^* & \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) & |S_{xy}|^2 - \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) \end{bmatrix} \quad (3.6.31)$$

となる。monostaticな場合には、これら10個の要素のうち

$$m_{00} = m_{11} + m_{22} - m_{33}$$

が成り立つので、9個が独立である。

Kennaugh行列はHuynen Parameter (A -- H) と関係づけられている。

$$[K] = \begin{bmatrix} A_0 + B_0 & C & H & F \\ C & A_0 + B & E & G \\ H & E & A_0 - B & D \\ F & G & D & -A_0 + B_0 \end{bmatrix}$$

$$A_0 \quad \frac{1}{4} |S_{xx} + S_{yy}|^2 \quad \text{Generator or target symmetry}$$

$$B_0 \quad \frac{1}{4} |S_{xx} - S_{yy}|^2 + |S_{xy}|^2 \quad B \quad \frac{1}{4} |S_{xx} - S_{yy}|^2 - |S_{xy}|^2$$

$B_0 + B$	$\frac{1}{2} \left S_{xx} - S_{yy} \right ^2$	Generator of target Non-symmetry
$B_0 - B$	$2 \left S_{xy} \right ^2$	Generator of target irregularity
C	$\frac{\left S_{xx} \right ^2 - \left S_{yy} \right ^2}{2}$	Generator of target global shape (linear)
D	$\text{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right)$	Generator of target local shape (curvature)
E	$\text{Re} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^*$	Generator of target local twist (torsion)
F	$\text{Im} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^*$	Generator of target global twist (helicity)
G	$\text{Im} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^*$	Generator of target local coupling (Glue)
H	$\text{Re} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^*$	Generator of target global coupling (Orientation)

monostaticな場合, StokesベクトルとKennaugh行列による受信電力を導いておこう. 偏波比の場合と同様に3つの偏波チャンネルを考える.

1) 送信と受信が同じ偏波チャンネル(Co-Pol Channel) $\mathbf{h} = \mathbf{E}^t$

Co-Pol.チャンネルに対して, 送信Stokesベクトルと受信Stokesベクトルが等しいので $\mathbf{g}_{rec} = \mathbf{g}_t$

$$P^c = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T [\mathbf{K}]_c \mathbf{g}_t \quad (3.6.32)$$

ただし, $[\mathbf{K}]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \quad (3.6.33)$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\left| S_{xx} \right|^2 + 2 \left| S_{xy} \right|^2 + \left| S_{yy} \right|^2}{2} & \frac{\left| S_{xx} \right|^2 - \left| S_{yy} \right|^2}{2} & \text{Re} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^* & \text{Im} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^* \\ \frac{\left| S_{xx} \right|^2 - \left| S_{yy} \right|^2}{2} & \frac{\left| S_{xx} \right|^2 - 2 \left| S_{xy} \right|^2 + \left| S_{yy} \right|^2}{2} & \text{Re} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^* & \text{Im} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^* \\ \text{Re} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^* & \text{Re} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^* & \left| S_{xy} \right|^2 + \text{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) & \text{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) \\ \text{Im} \left(S_{xx} - S_{yy} \right) S_{xy}^* & \text{Im} \left(S_{xx} + S_{yy} \right) S_{xy}^* & \text{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) & \left| S_{xy} \right|^2 - \text{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) \end{bmatrix}$$

2) 送信と受信が直交する偏波チャンネル(Cross-Pol Channel) $h = E'_\perp$

Cross(X)-Polarization Channelでは、送信Stokesベクトルと受信Stokesベクトルが直交している。ポアンカレ球上で見ると分かるように、送信Stokesベクトルに対して受信Stokesベクトルは球の真後ろに位置する。そのため、

$$\mathbf{g}_t = \begin{pmatrix} 1, x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix}^T \quad (3.6.34)$$

とすると
$$\mathbf{g}_{\text{rec}} = \begin{pmatrix} 1, -x_1, -x_2, -x_3 \end{pmatrix}^T \quad (3.6.35)$$

となる。行列で書けば

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

であるから、

$$P^x = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t$$

$$P^x = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T [\mathbf{K}]_x \mathbf{g}_t \quad (3.6.36)$$

ただし、
$$[\mathbf{K}]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \quad (3.6.37)$$

$$[\mathbf{K}]_x = \begin{bmatrix} \frac{|S_{xx}|^2 + 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2}{2} & \frac{|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2}{2} & \text{Re}(S_{xx} + S_{yy}) S_{xy}^* & \text{Im}(S_{xx} - S_{yy}) S_{xy}^* \\ -\frac{|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2}{2} & -\frac{|S_{xx}|^2 - 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2}{2} & -\text{Re}(S_{xx} - S_{yy}) S_{xy}^* & -\text{Im}(S_{xx} + S_{yy}) S_{xy}^* \\ -\text{Re}(S_{xx} + S_{yy}) S_{xy}^* & -\text{Re}(S_{xx} - S_{yy}) S_{xy}^* & -|S_{xy}|^2 - \text{Re}(S_{xx} S_{yy}^*) & -\text{Im}(S_{xx} S_{yy}^*) \\ -\text{Im}(S_{xx} - S_{yy}) S_{xy}^* & -\text{Im}(S_{xx} + S_{yy}) S_{xy}^* & -\text{Im}(S_{xx} S_{yy}^*) & -|S_{xy}|^2 + \text{Re}(S_{xx} S_{yy}^*) \end{bmatrix}$$

3) 受信が散乱波を最大に受信するチャンネル(Matched-Pol Channel) $h = E^s^*$

Matched-pol Channelでは、散乱波のもつエネルギーを全て受信する。そのため、Stokesベクトルの定義から、

$$\mathbf{g}^s = \begin{bmatrix} g_0^s \\ g_1^s \\ g_2^s \\ g_3^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_x^s|^2 + |E_y^s|^2 \\ |E_x^s|^2 - |E_y^s|^2 \\ 2|E_x^s||E_y^s|\cos\phi \\ 2|E_x^s||E_y^s|\sin\phi \end{bmatrix} \quad (3.6.38)$$

の第1成分 g_0^s を受け取ることになる。これは送信StokesベクトルとMueller行列の成分で書くと

$$P^m = |V|^2 = |E_s|^2 = g_0^s = m_{00} + m_{01}x_1 + m_{02}x_2 + m_{03}x_3 \quad (3.6.39)$$

したがって、形式的にはつぎのように行列表現できる。

$$P^m = \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \mathbf{g}_t^T [\mathbf{K}]_m \mathbf{g}_t \quad (3.6.40)$$

$$[\mathbf{K}]_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \quad (3.6.41)$$

$$[\mathbf{K}]_m = \begin{bmatrix} \frac{|S_{xx}|^2 + 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2}{2} & \frac{|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2}{2} & \operatorname{Re}(S_{xx} + S_{yy})S_{xy}^* & \operatorname{Im}(S_{xx} - S_{yy})S_{xy}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なお、

$$[\mathbf{K}]_m = \frac{1}{2}[\mathbf{K}]_c + \frac{1}{2}[\mathbf{K}]_x \quad (3.6.42)$$

が成り立つので

$$P^m = P^c + P^x \quad (3.6.43)$$

この式から、Matched-Polチャンネルの電力は、Co-Pol.とCross(X)-Polチャンネルの電力和で表現できることが分かる。

3.7 各種ターゲットからの偏波チャンネルの受信電力例

-- Polarization Signature --

偏波によってターゲットからの受信電力がどのように変わるかを見てみよう。ターゲットの種類は多いが、基本的な散乱行列を与えて、そのターゲットからの後方散乱電力を視覚的に示す。なお、送信・受信偏波の組み合わせは無限にあるので、偏波チャンネル毎に幾何学的パラメータ（Tilt angle τ , Ellipticity angle ϵ ）を用いて受信電力を表現することにする。この電力表現した図は、偏波シグネチャ（Polarization Signature）と呼ばれている。

以下に示す図は3次元表示であるが、高さ方向の値は電力値、2次元平面上の変数は図2.2.6に対応したTilt angle τ , Ellipticity angle ϵ である。Tilt angle τ , Ellipticity angle ϵ の各値に対して、Co-Pol, Cross-Pol, Matched Polチャンネルでの電力値が描かれており、全体として電力パターンになっている。Tilt angle τ , Ellipticity angle ϵ の出発点の値の取り方は、文献によって違いがある。この例では、2次元平面の中心位置が水平偏波Hになっている。

例えば最初の例題で、平板、球、3面コーナリフレクタの散乱行列は

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられるので、それをMueller, Kennaugh行列に変換すると

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

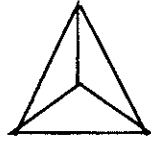
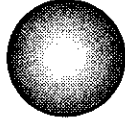
となる。右上のCo-Pol ChannelではEllipticity angle=0の偏波状態で受信電力が最も大きくなっている（山脈になっている）。Ellipticity=0は直線偏波を表しており、どのような傾き（Tilt angle）の直線偏波を送信しても反射波は同じ傾きの直線偏波で返ってくる。その反射波を送信と同じ偏波状態で受信することによって常に最大の受信電力が得られる。また、右回り円偏波（ellipticity=-45）で送信した場合、左回り円偏波が反射されるので、送信と同じ右回り円偏波受信channelの電力は0となる。左回り送信、左回り受信でも受信電力は0となる。その結果、3次元形状としては山脈のような形となる。

右下のX-Pol Channelでは、送信と直交した偏波状態で受信するので、円偏波で送受信した場合、Co-Pol Channelとは逆に最大電力が得られる。また、直線偏波を送信した場合、反射波は同じ傾きの直線偏波で返ってくるので、それと直交した直線偏波で受信すれば、受信電力は0となる。したがって、3次元形状はCo-Pol Channelと逆の形になる。

左下のM-Pol Channelは、Co-PolとX-Pol Channel電力の和で表される。そのため、平らな形となり、どのような偏波状態でも一定の電力受信することになる。M-Pol Channelは反射波の偏波状態がどのようなものであっても、その反射波電力の全てを受信するためである。

なお、この3次元表示の利点は、一見したときの形状認識である。逆に欠点は、3次元であるが故にTilt angle τ , Ellipticity angle ϵ の出発点の値の取り方に違いがあると、単純に形状が比較できなくなる。また、図の投影方向が異なると形状が変化して見えたり、極値などにおけるTilt angle, Ellipticity angle の値が判別しにくいことである。そのため、最大値におけるTilt, Ellipticity を読みとろうとする場合には、2次元平面（図2.2.6）を使って、電力値をグレースケールで表す方法が用いられる。

Sphere , Plate , Trihedral Corner Reflector



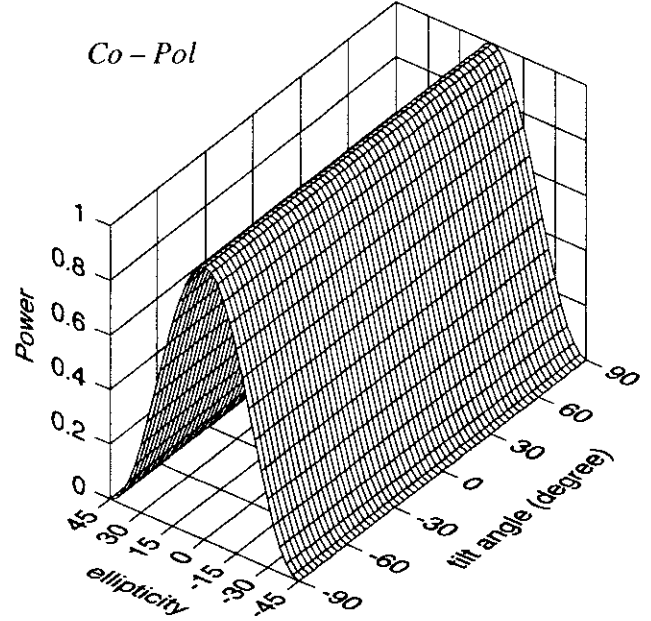
$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

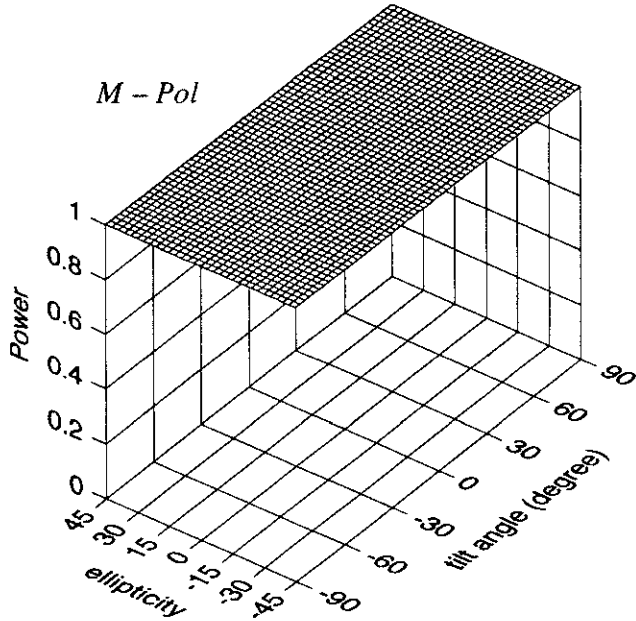
$$[K]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

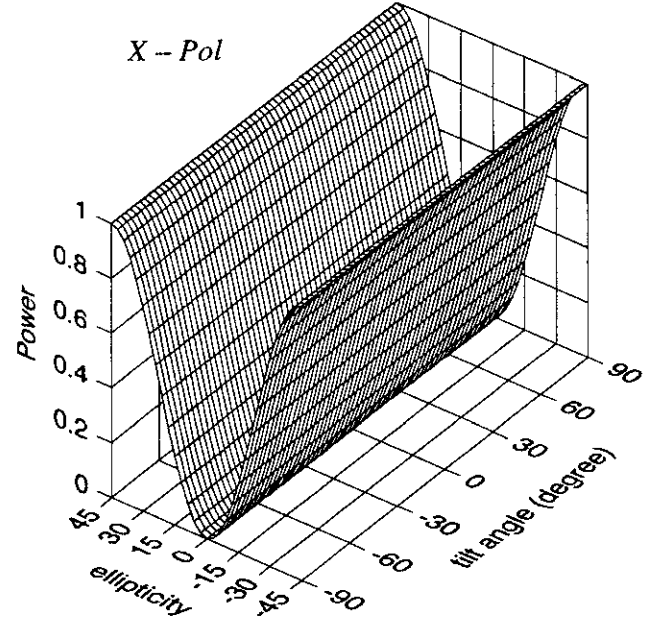
Co - Pol



M - Pol



X - Pol



Horizontal Wire



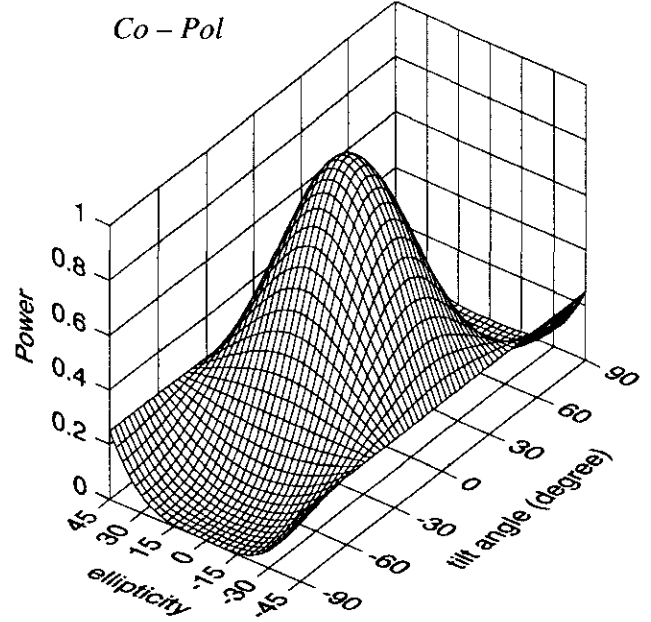
$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

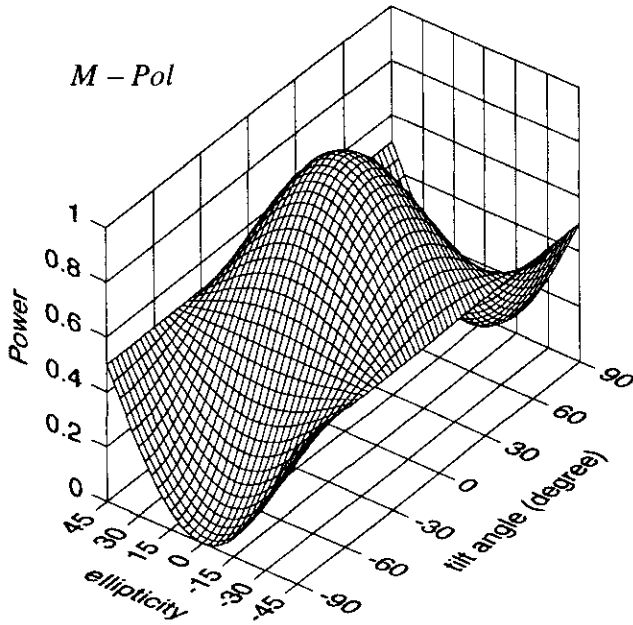
$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

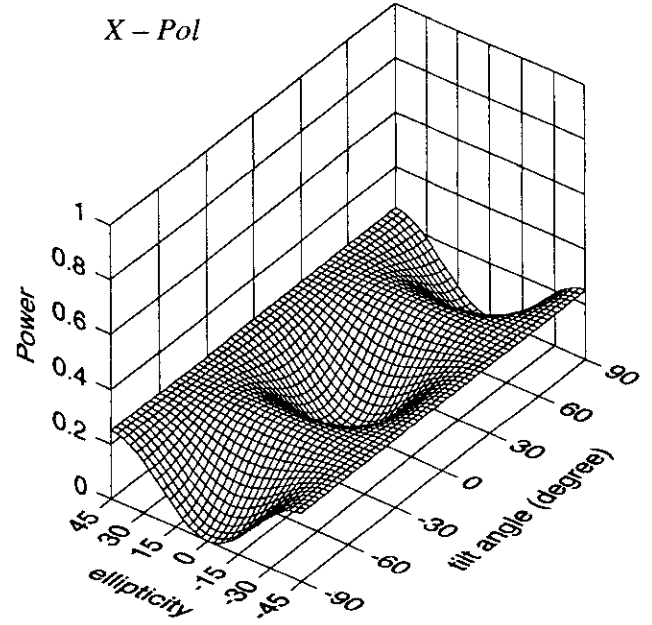
Co - Pol



M - Pol



X - Pol



Vertical Wire

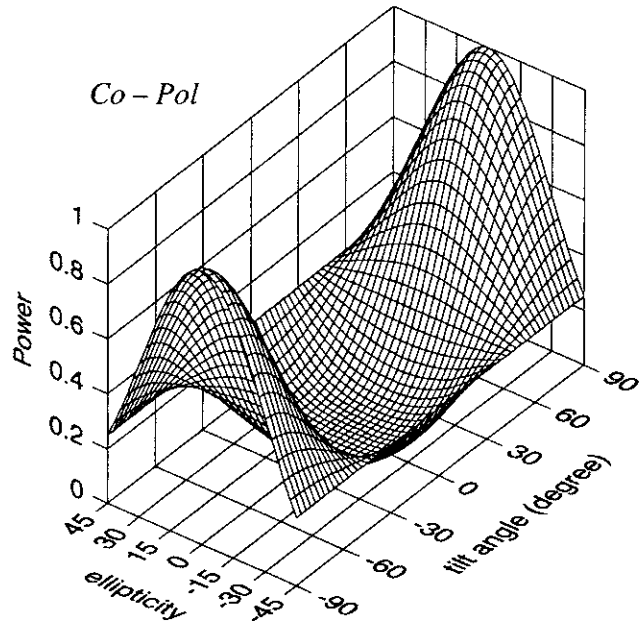
$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

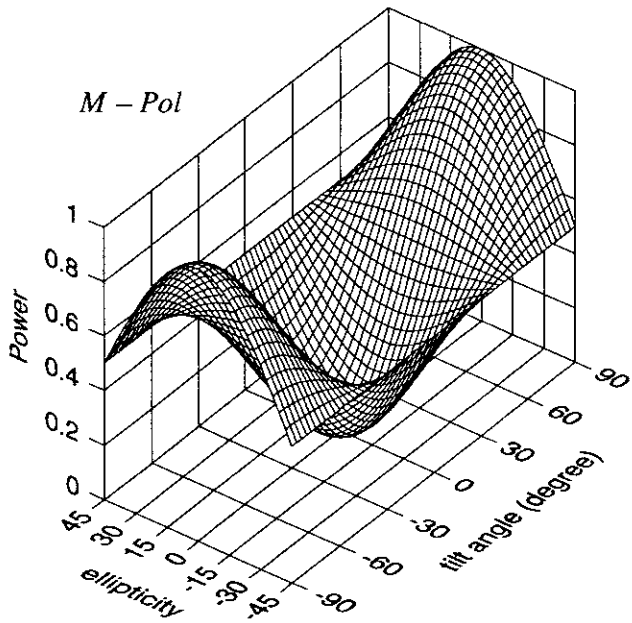
$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

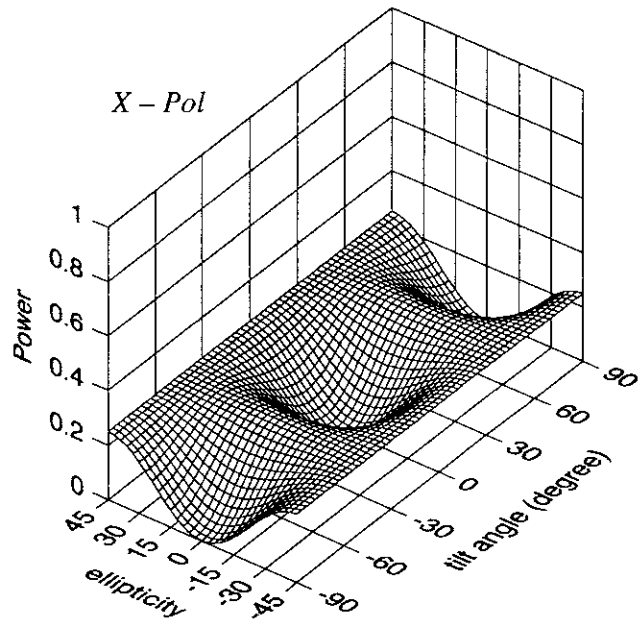
Co - Pol



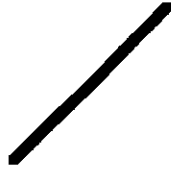
M - Pol



X - Pol



45 deg oriented Wire



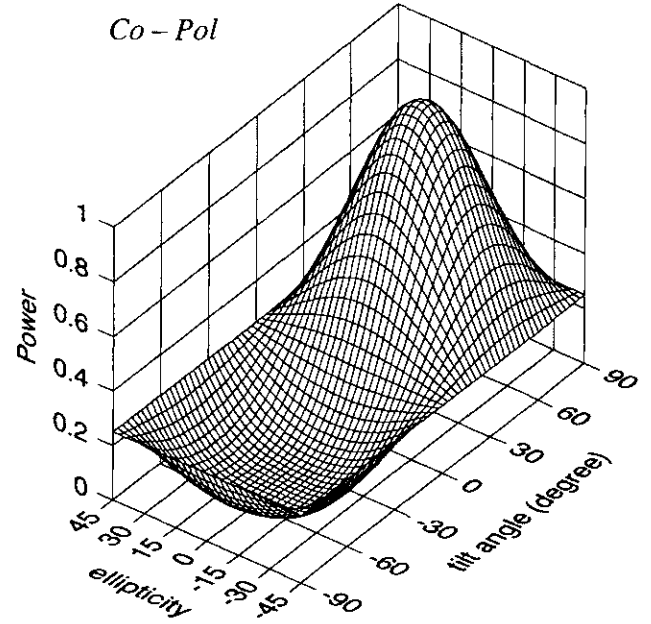
$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

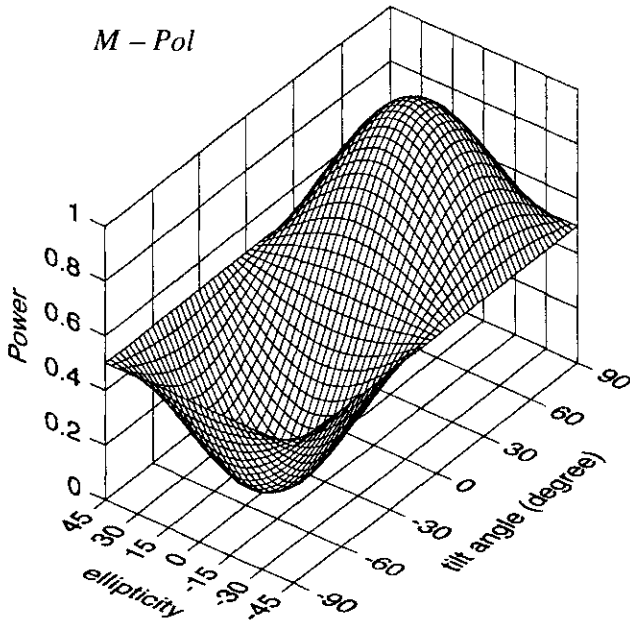
$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

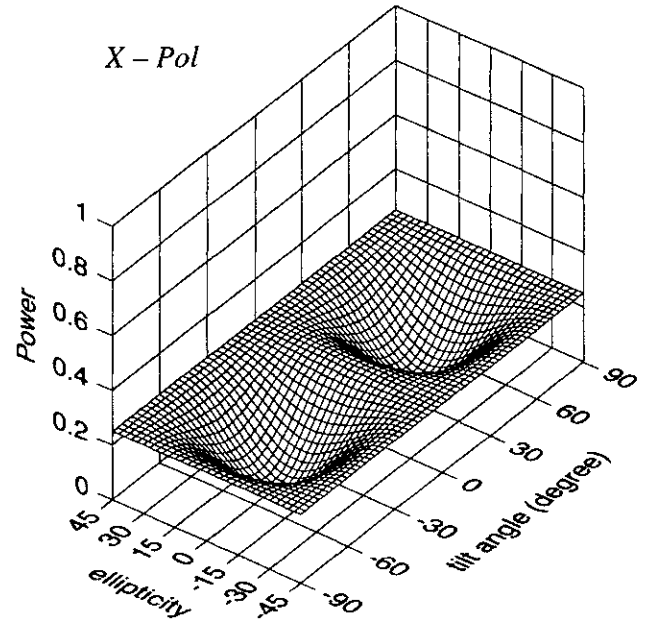
Co - Pol



M - Pol



X - Pol



– 45 deg oriented Wire



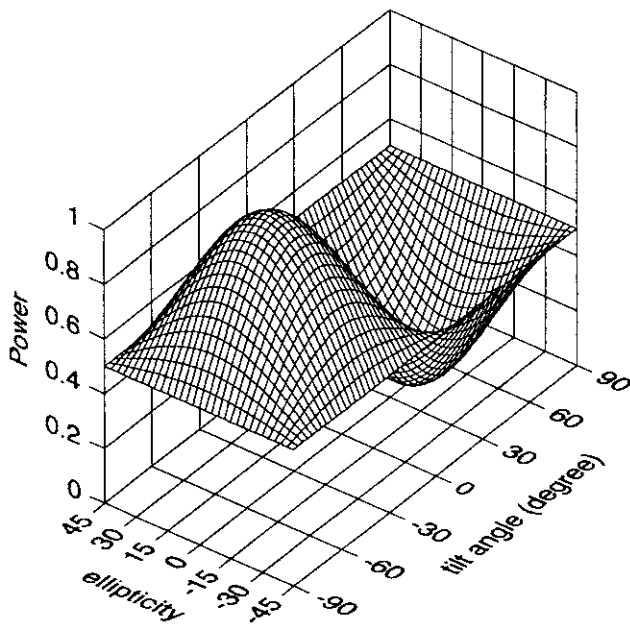
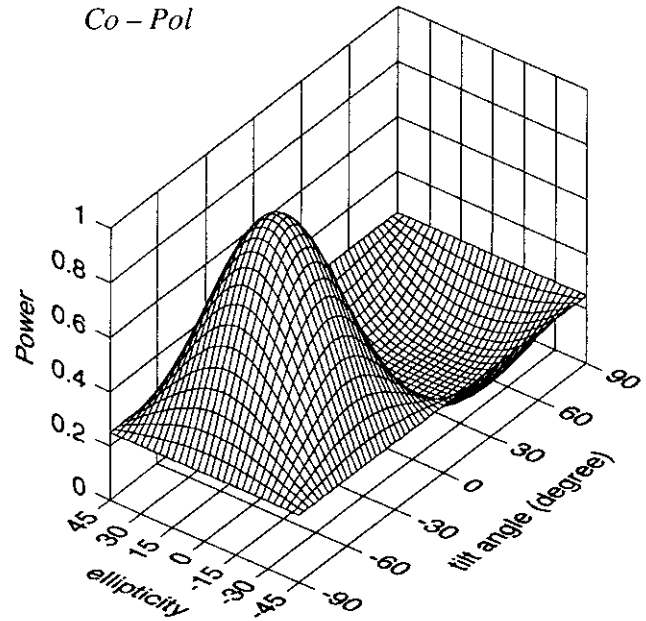
$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

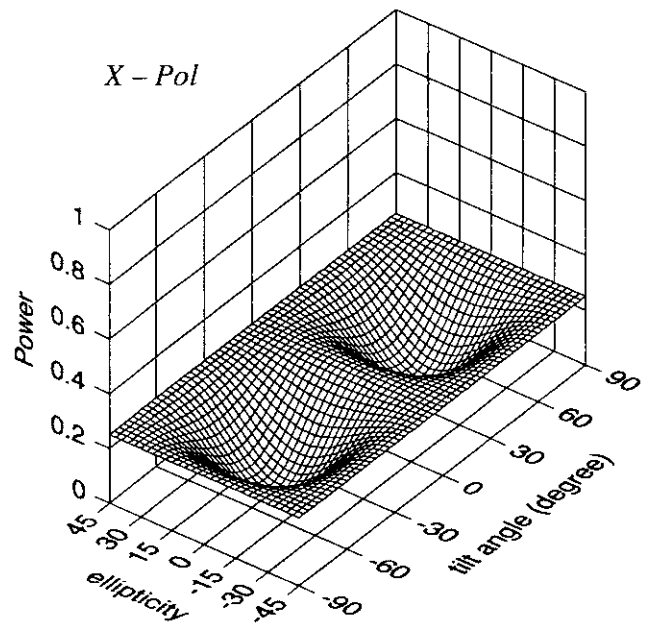
$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

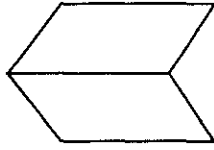
Co – Pol



X – Pol



Dihedral Corner Reflector



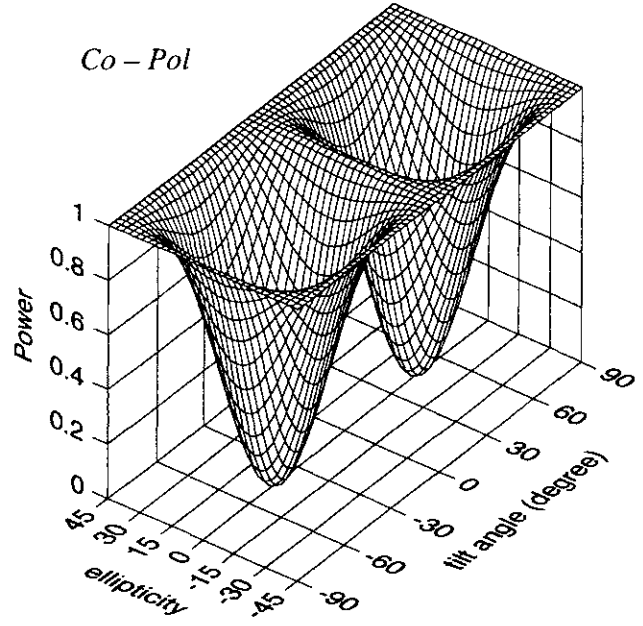
$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

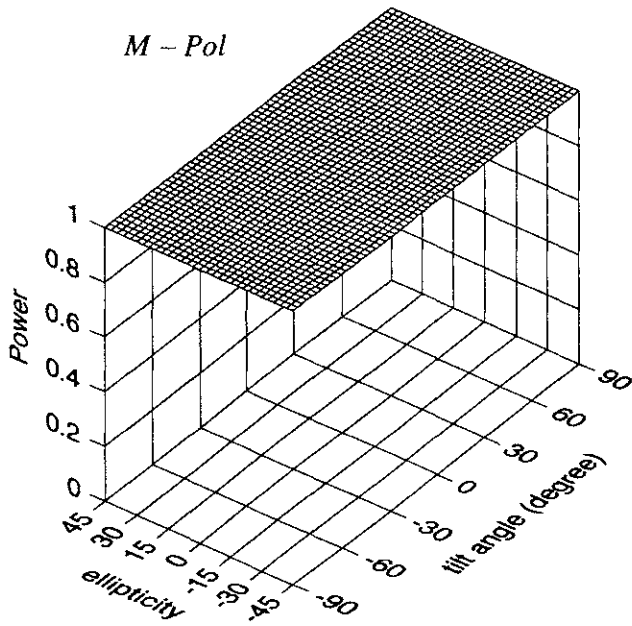
$$[K]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

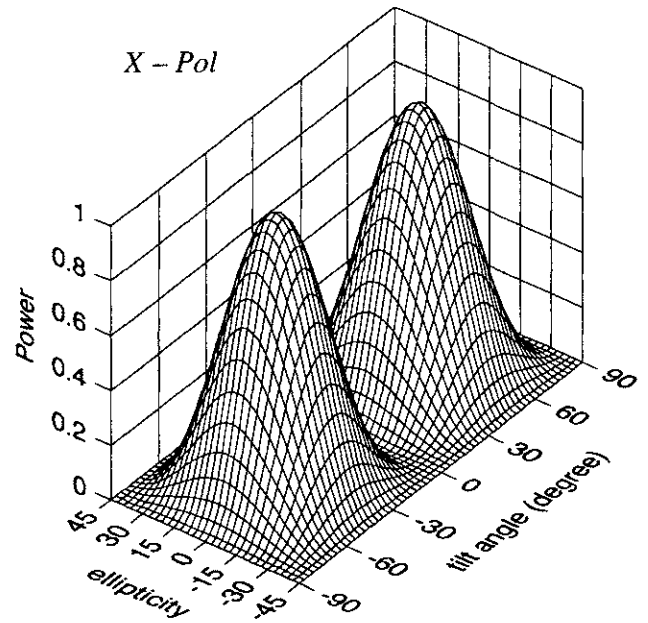
Co - Pol



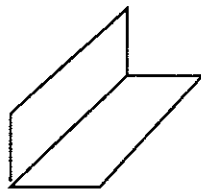
M - Pol



X - Pol



45 oriented Corner Reflector

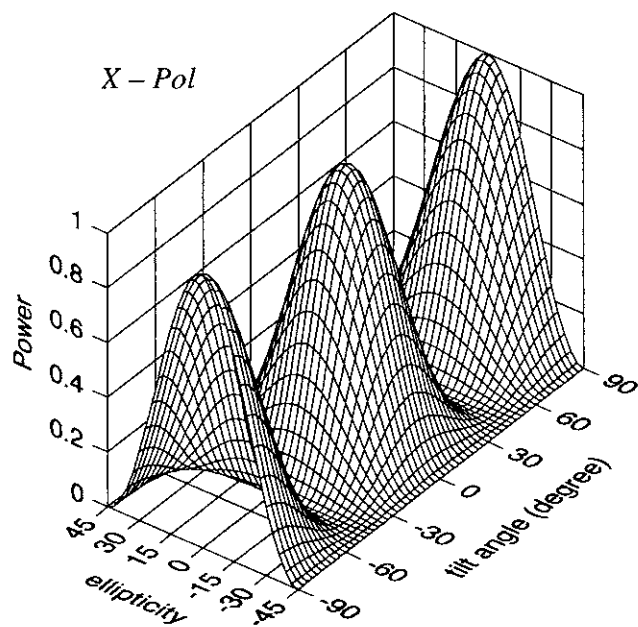
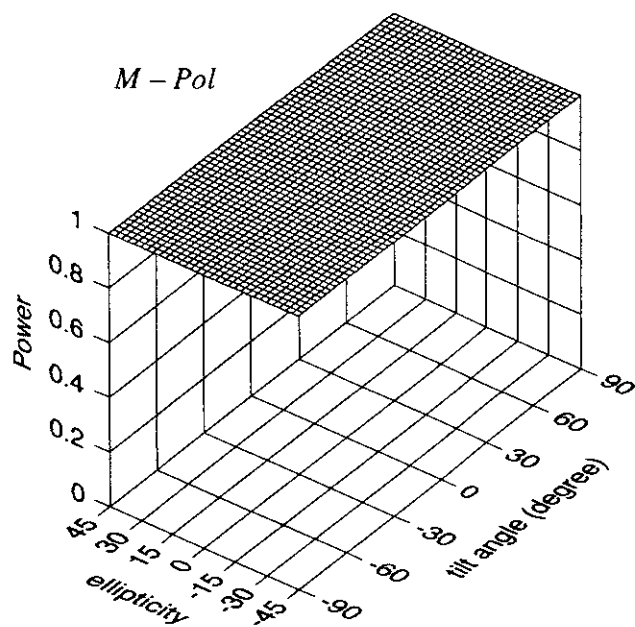
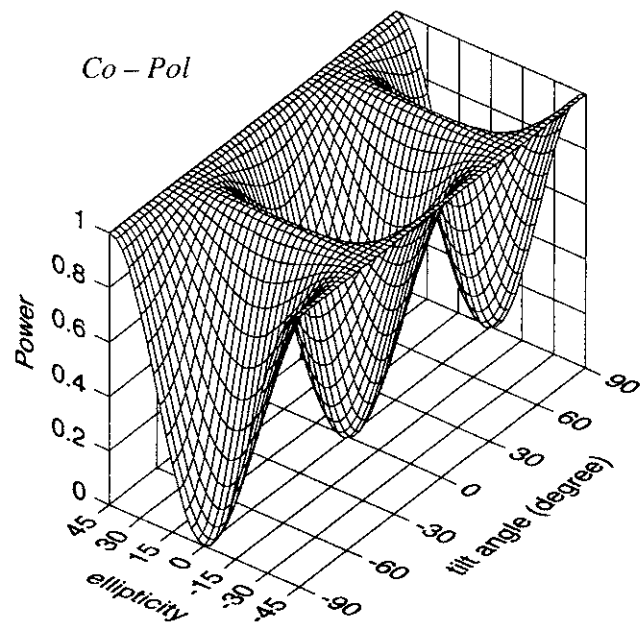


$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



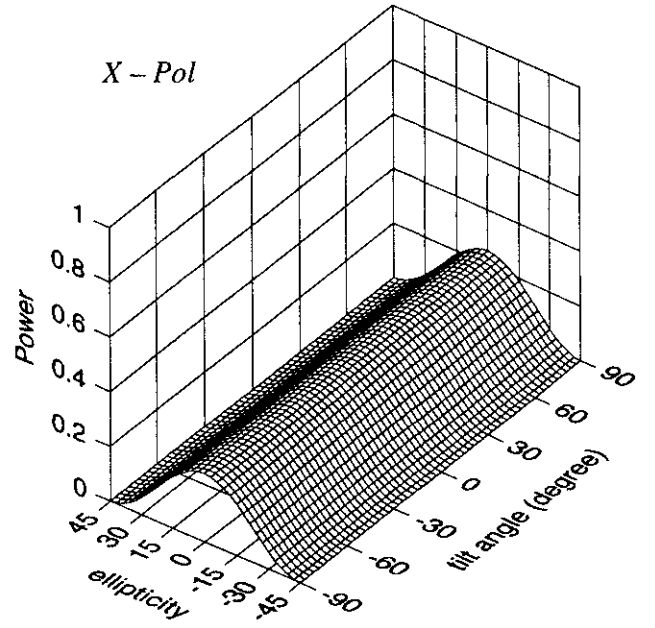
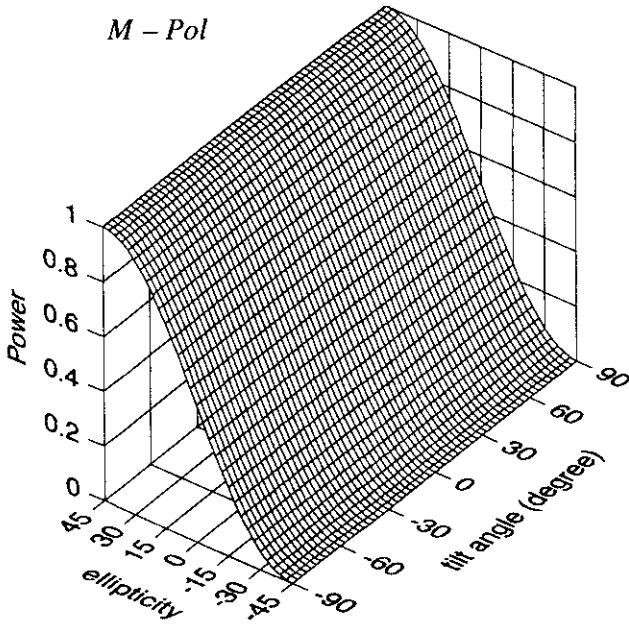
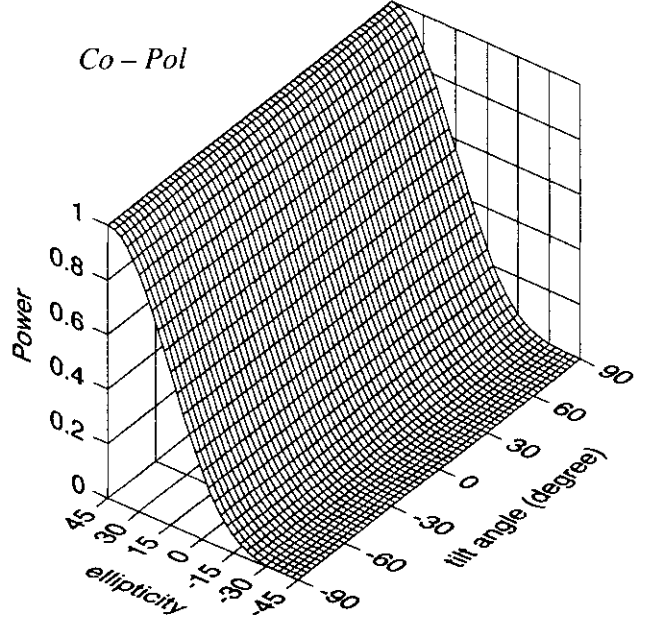
Right Helix

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$



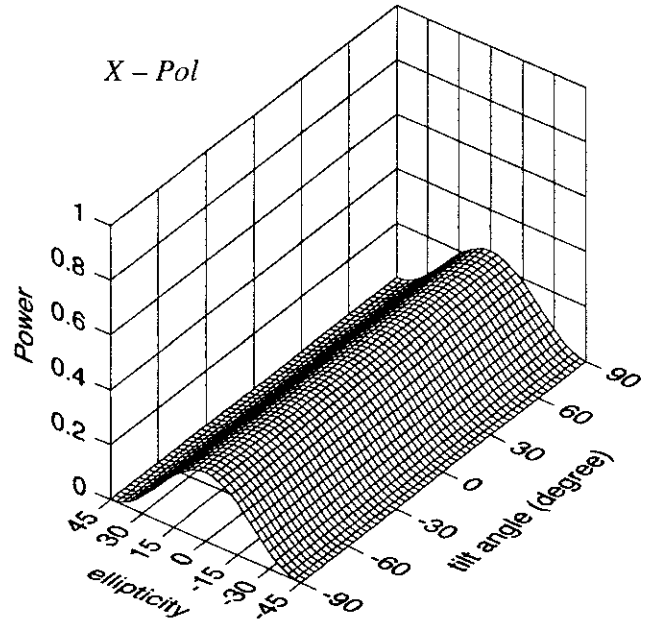
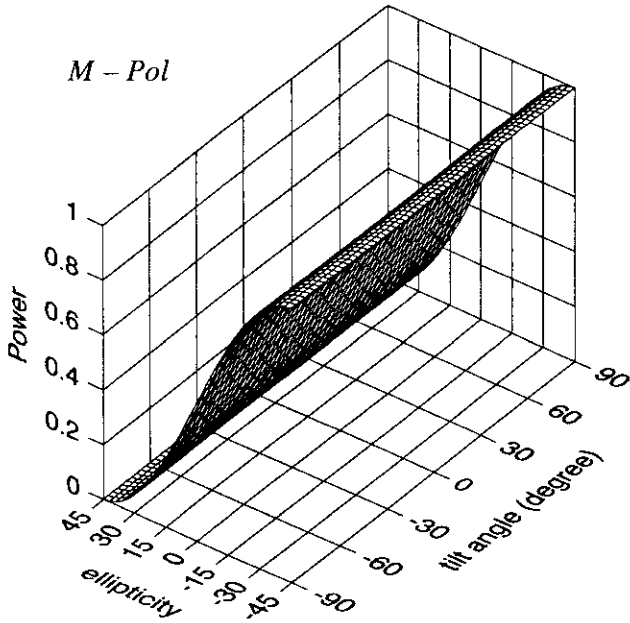
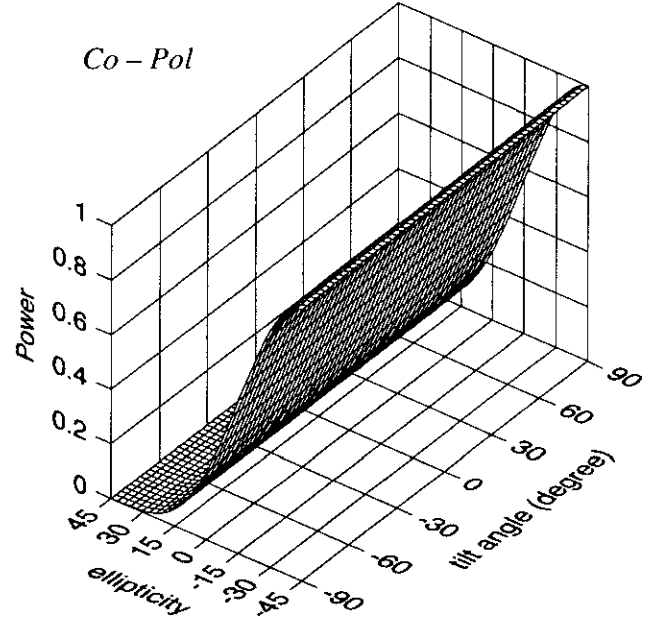
Left Helix

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

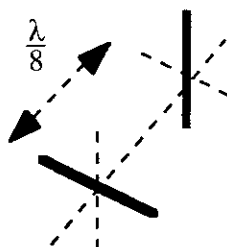
$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$



$\frac{\lambda}{8}$ orthogonal dipoles

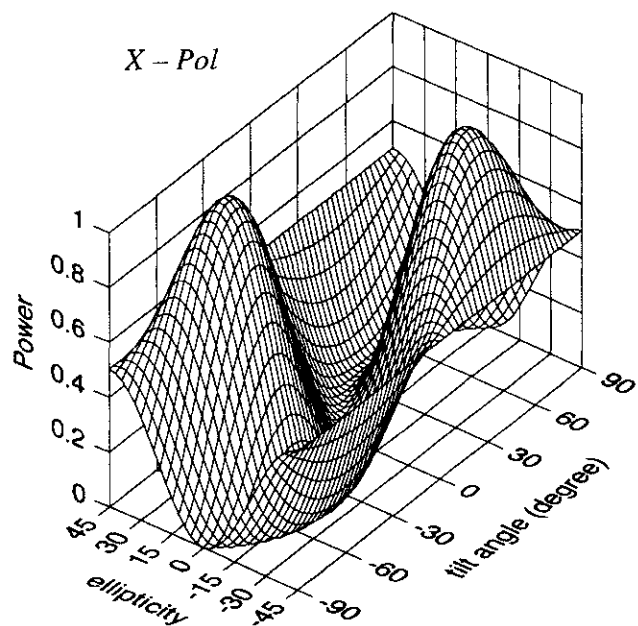
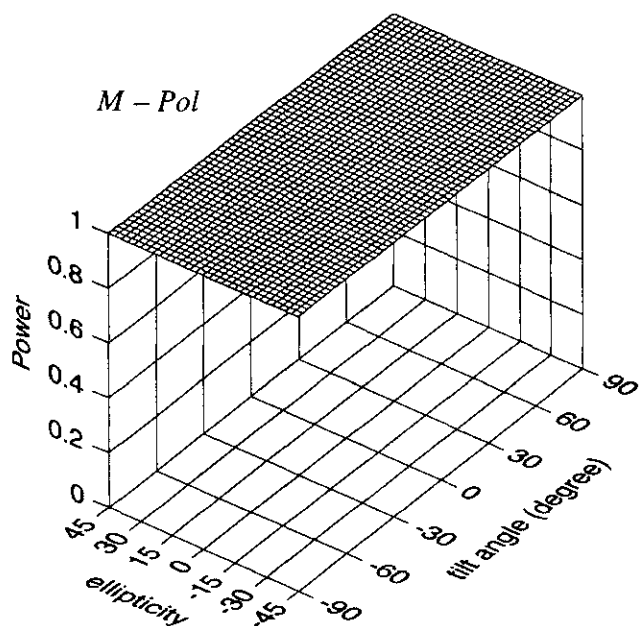
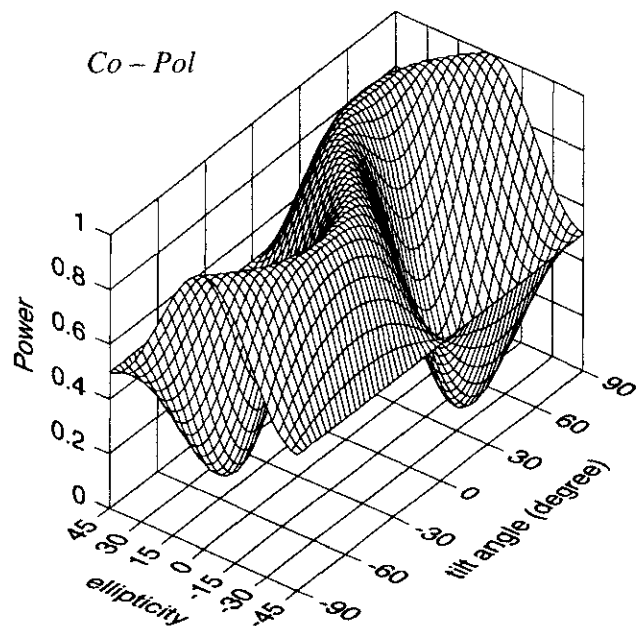


$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



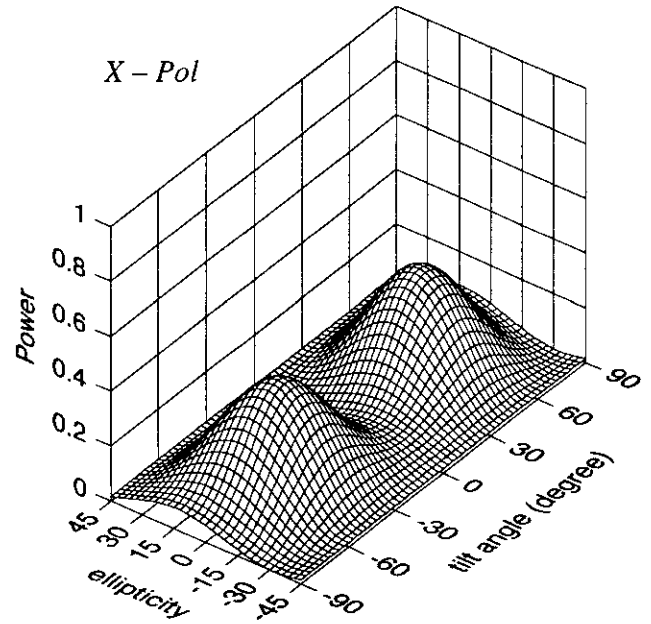
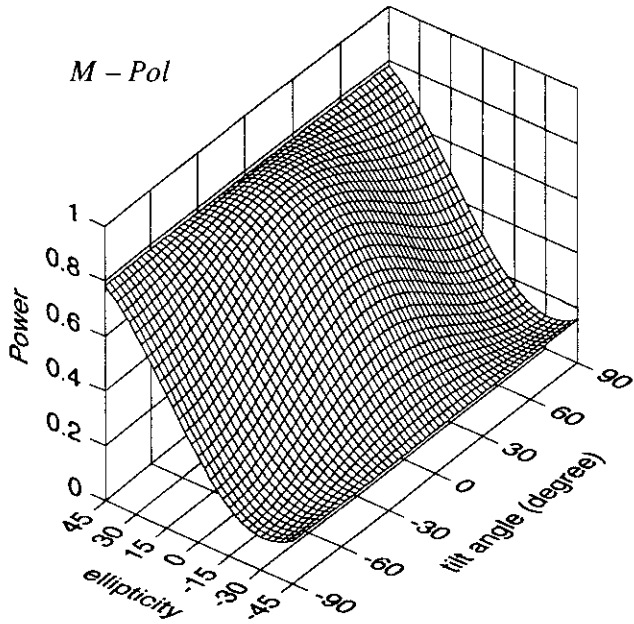
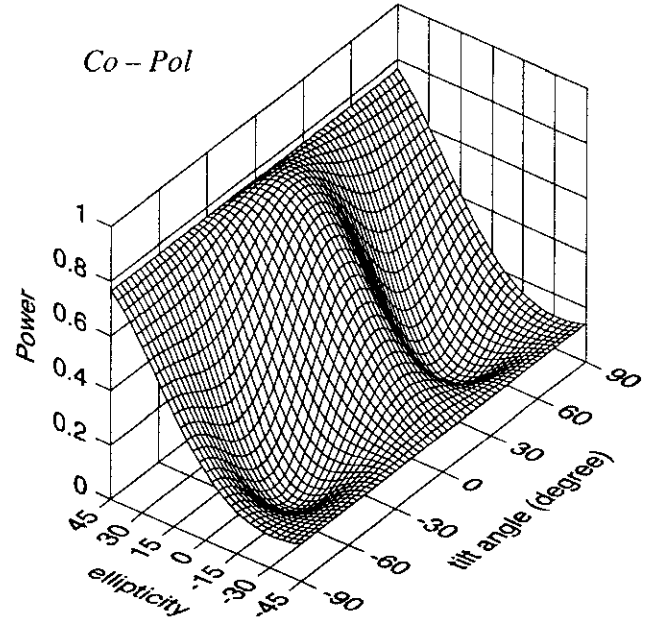
Special target 1

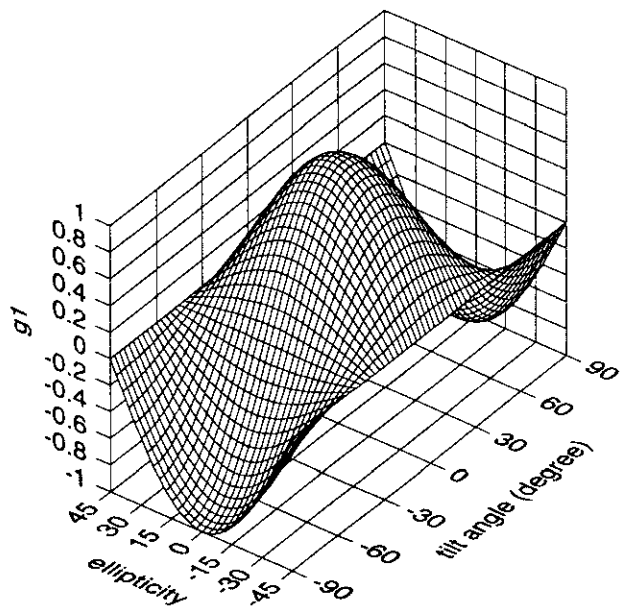
$$[S] = \begin{bmatrix} 0.75j & 0.25 \\ 0.25 & -0.5j \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.469 & 0.156 & 0 & 0.313 \\ 0.156 & 0.344 & 0 & 0.063 \\ 0 & 0 & -0.313 & 0 \\ -0.313 & -0.063 & 0 & -0.438 \end{bmatrix}$$

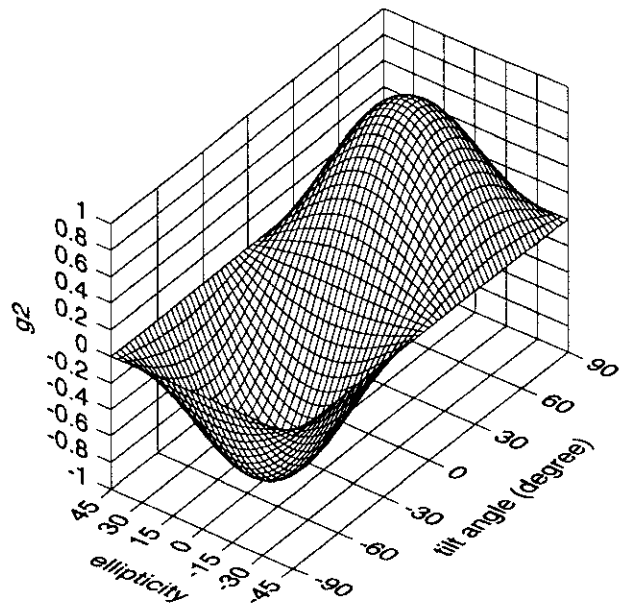
$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.469 & 0.156 & 0 & 0.313 \\ 0.156 & 0.344 & 0 & 0.063 \\ 0 & 0 & -0.313 & 0 \\ 0.313 & 0.063 & 0 & 0.438 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.469 & 0.156 & 0 & 0.313 \\ -0.156 & -0.344 & 0 & -0.063 \\ 0 & 0 & 0.313 & 0 \\ -0.313 & -0.063 & 0 & -0.438 \end{bmatrix}$$



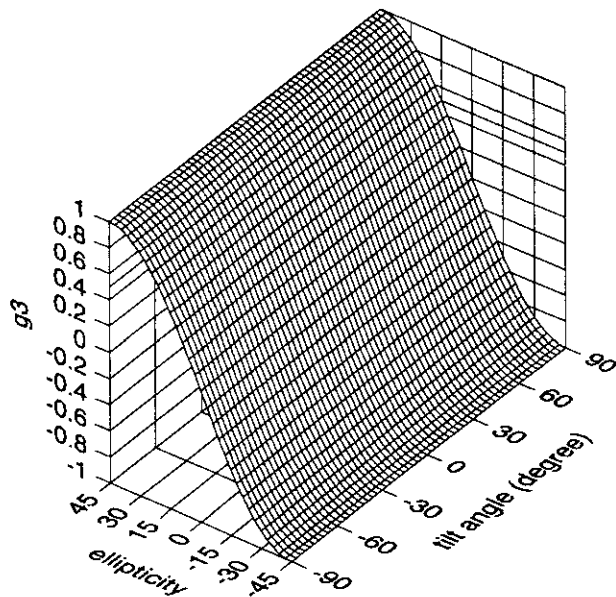


g_1



g_2

$$g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 1$$



g_3

2.2.10 Stokes vector component g_1, g_2, g_3

第3章の補足

レーダには円偏波がよく使われる。雨滴に対して直線偏波では水平でも垂直でも同じ程度の不要反射（クラッタ）が返ってくるが、円偏波では右回りで送信し、右回りで受信するとほとんど受信されない。クラッタが少ないという利点があるためである。左回りの送受信でも同様である。円偏波のレーダではだ円偏波の受信を考慮して、その円偏波特性を表すために軸比 (Axial Ratio) が用いられてきた。あくまで、振幅測定を基本にしている。

$$\text{Axial Ratio} = 20 \log \frac{b}{a} \quad [\text{dB}] \quad (3.7.1)$$

この定義は、既に出てきたEllipticity angle ϵ の大きさそのものである。この値が3dB低下する程度まで円偏波とみなす場合が多い。しかし、具体的に計算してみると、

$$\begin{aligned} |\tan \epsilon| = 1 &\Rightarrow \epsilon = \pm 45^\circ \quad \text{完全なる円偏波} \\ |\tan \epsilon| = \frac{1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow \epsilon = \pm 35.27^\circ \quad \text{許容円偏波=だ円偏波} \end{aligned}$$

したがって、 $2\epsilon = \pm 70.54^\circ$

この範囲をポアンカレー球で見ると、おおよそ図3.7.1のように平面で球を切断した円周より北極側や南極側を円偏波と見なしていることになる。本来、円偏波は完全な円偏波であって、そこから離れれば異なる偏波状態と考えるべきであろう。

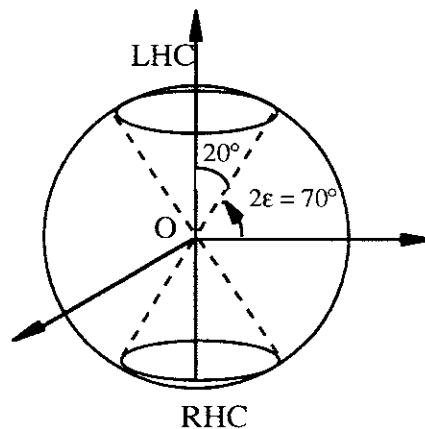


図3.7.1 軸比3dB以内の領域

付録3.1 半径 r の球による後方散乱断面積 ξ_b の導出について
(出典 Microwave Remote Sensing, vol.1, pp.290-298, Ulaby)

半径 r の球による後方散乱断面積は次の式で与えられる.

$$\xi_b = \frac{\sigma_b}{\pi r^2} = \frac{1}{\chi^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l (2l+1) (a_l - b_l) \right|^2$$

ここで,

$$a_l = \frac{\left(\frac{A_l}{n} + \frac{l}{\chi} \right) \operatorname{Re} \{ W_l \} - \operatorname{Re} \{ W_{l-1} \}}{\left(\frac{A_l}{n} + \frac{l}{\chi} \right) W_l - W_{l-1}}, \quad b_l = \frac{\left(n A_l + \frac{l}{\chi} \right) \operatorname{Re} \{ W_l \} - \operatorname{Re} \{ W_{l-1} \}}{\left(n A_l + \frac{l}{\chi} \right) W_l - W_{l-1}}$$

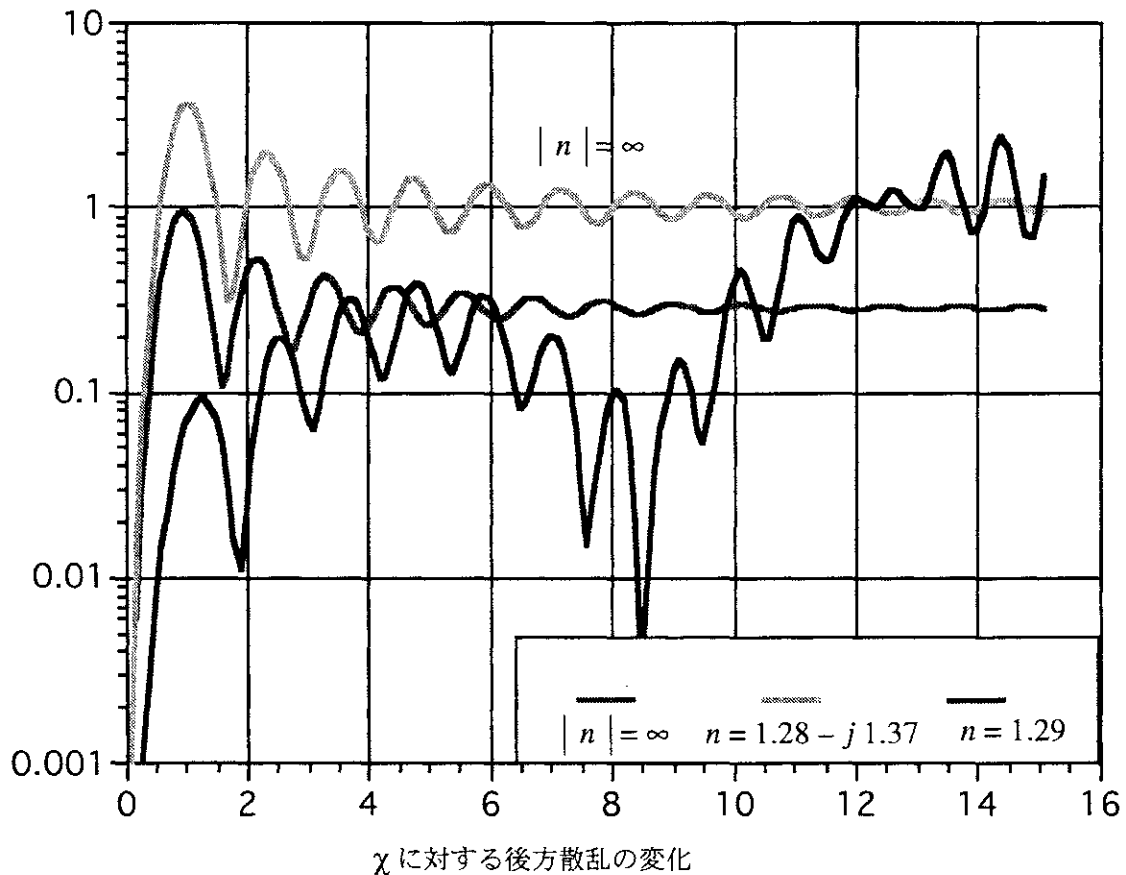
$$W_l = \left(\frac{2l-1}{\chi} \right) W_{l-1} - W_{l-2}, \quad W_0 = \sin \chi + j \cos \chi, \quad W_{-1} = \cos \chi - j \sin \chi$$

$$A_l = -\frac{l}{n\chi} + \frac{1}{\left(\frac{l}{n\chi} - A_{l-1} \right)}, \quad A_0 = \cot n\chi$$

$$\chi = k_0 r = \frac{2\pi r}{\lambda}, \quad n = \sqrt{\epsilon_r^*} = n_r - j n_i \quad \text{複素屈折率}$$

光学領域 $\chi \Rightarrow \infty$ に対して, 損失のある媒質の後方散乱断面積は $\lim_{\chi \rightarrow \infty} \xi_b(n, \chi) = \left| \frac{n-1}{n+1} \right|^2$

また, Rayleigh 領域 $n\chi \Rightarrow 0$ に対して, $\lim_{\chi \rightarrow 0} \xi_b(n, \chi) = 4\chi^4 |K|^2 \propto \left(\frac{r}{\lambda} \right)^4$



文献

- [1] F. T. Ulaby, R. K. Moore, and A. K. Fung, *Microwave Remote Sensing - Active and Passive*, vols I-III, Artech House, 1986.
- [2] 山下栄吉, 電磁波工学入門, 産業図書, 昭和55
- [3] 古濱洋治, 岡本謙一, 増子治信, 人工衛星によるマイクロ波リモートセンシング, 電子通信学会, 昭和61年
- [4] F. T. Ulaby and M. C. Dobson, *Handbook of Radar Scattering Statistics for Terrain*, Artech House, 1989
- [5] N. C. Currie ed., *Radar Reflectivity Measurement: Techniques and Applications*, Artech House, 1989
- [6] 吉田孝監修, 改訂レーダ技術, 電子情報通信学会, 1996
- [7] 岡本謙一編著, 地球環境計測, ウエーブサミット講座, オーム社, 1999
- [8] 関根松夫, レーダ信号処理技術, 電子情報通信学会, 1991
- [9] D. L. Mensa, *High Resolution Radar Cross-Section Imaging*, Artech House, 1991
- [10] Bassen R. Mahafza, *Introduction to RADAR ANALYSIS*, CRC press, 1998
- [11] H. Mott, *Antennas for Radar Communications- a polarimetric approach*, John Wiley & Sons, New York, 1992
- [12] C. A. Balanis, *Antenna Theory : analysis and design*, second ed., chapt.2, Wiley1982
- [13] A. B. Kostinski, W. -M. Boerner, "On foundation of radar polarimetry," *IEEE Trans. Antenna Propagation*, vol.34, no.12, pp.1359-1404, 1986
- [14] W. -M. Boerner, W. L. Yan, A. Q. Xi, Y. Yamaguchi, "On the basic principles of radar polarimetry: the target characteristic polarization state theory of Kennaugh, Huynen's polarization fork concept, and its extension to the partially polarized case," *Proc. IEEE*, vol.79, no. 10, 1991

第4章 POLSARデータに有用な偏波行列形式

偏波情報を取得できるFully Polarimetric Radarが世界的に数多く開発されている。航空機搭載用では、2003年時点で少なくとも24機種がテスト飛行を行っている。また、人工衛星として2005年にはL-bandのALOS PALSAR, RadarSAT-2 (C-band)が打ちあげ予定である。

4.1 散乱行列のデータ記録

航空機や人工衛星によって作られるPOLSAR画像は図4.1のようにになっている。SARは飛行方向と直角な方向に電波を照射し、データを取得する (side looking)。このSide Looking Radarは、slant range方向では周波数帯域幅 B によって決まるレンジ分解能 $\frac{c}{2B}$ を持つ。slant range方向はレーダからの距離が一定なので $\frac{c}{2B}$ の間隔をもつ円形になる。それを地上に投影すると入射角に対応して $\frac{c}{2B} \frac{1}{\sin \theta}$ の長さとなり、対応距離が変わる。遠い方では短くなり、近い方では長くなる。その結果、 r_1, r_2, r_3 の距離に対応するピクセル (図4.1) で構成されるOriginal POLSAR画像が得られる。各ピクセルには取得された散乱行列が記録されている。

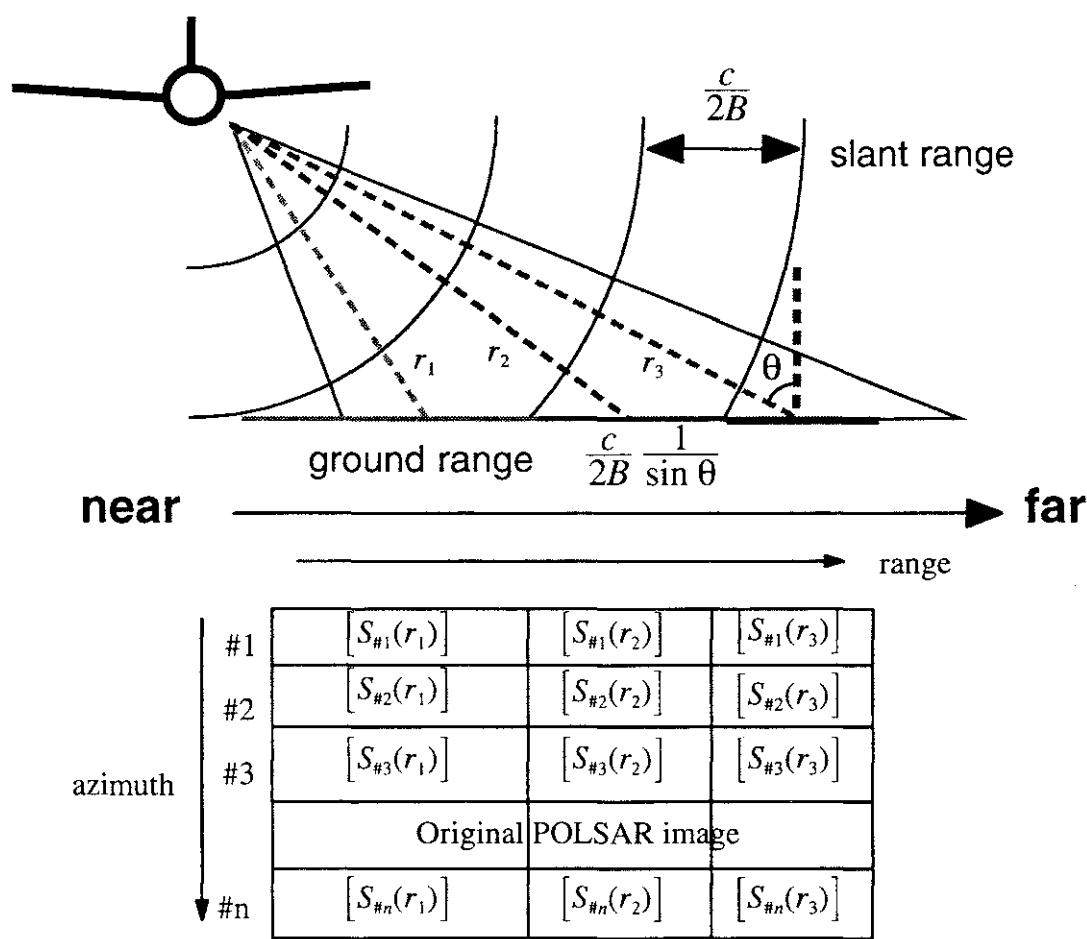


図4.1 レンジと散乱行列データ

取得された散乱行列の位相に注目してみよう。同じ距離 r_1 ではazimuth方向の

$$\begin{bmatrix} S_{\#1}(r_1) & S_{\#2}(r_1) & S_{\#3}(r_1) & S_{\#n}(r_1) \end{bmatrix}$$

の伝搬距離による位相は同じである。しかし、 r_1 、 r_2 、 r_3 と距離方向に並べられた

$$\begin{bmatrix} S_{\#1}(r_1) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S_{\#1}(r_2) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S_{\#1}(r_3) \end{bmatrix}$$

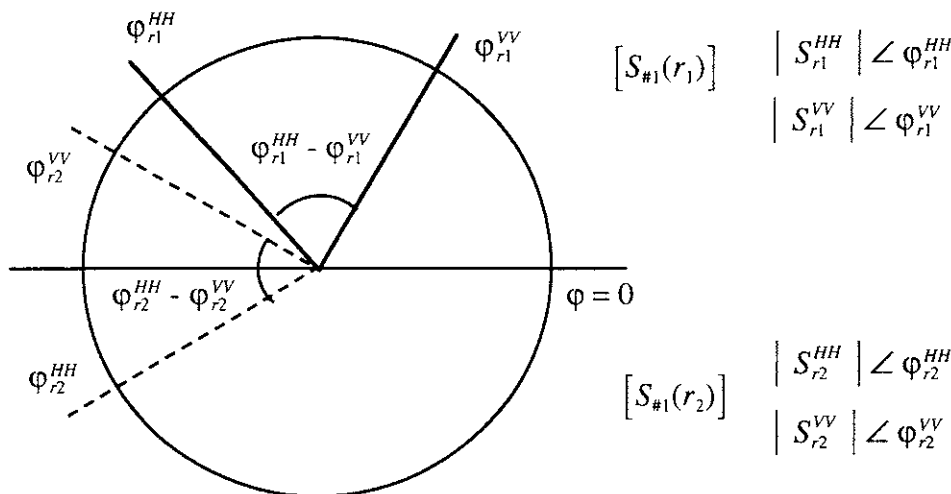
は伝搬距離が異なるので、その位相は伝搬距離に応じて変化する。この位相の様子を書いたものが図4.2

である。例えば r_1 で $\begin{bmatrix} S_{\#1}(r_1) \end{bmatrix}$ の成分 $\begin{bmatrix} S_{r1}^{HH} \end{bmatrix} \angle \varphi_{r1}^{HH}$ $\begin{bmatrix} S_{r1}^{VV} \end{bmatrix} \angle \varphi_{r1}^{VV}$

であったとすると位相 φ_{r1}^{HH} 、 φ_{r1}^{VV} は図2に描いた場所に配置する。

r_2 の位置では $\begin{bmatrix} S_{\#1}(r_2) \end{bmatrix}$ の成分 $\begin{bmatrix} S_{r2}^{HH} \end{bmatrix} \angle \varphi_{r2}^{HH}$ $\begin{bmatrix} S_{r2}^{VV} \end{bmatrix} \angle \varphi_{r2}^{VV}$

となり、伝搬距離位相の変化により φ_{r2}^{HH} と φ_{r2}^{VV} は r_1 の場合とは異なる場所に配置してしまう。



Relative phase $\varphi^{HH} - \varphi^{VV}$ is rather stable

図4.2 位相の位置関係

このことから、レンジ方向の散乱行列の要素を直接加え合わせると、同じターゲットからの散乱行列でも全く意味がなくなることが分かる。異なるレンジの散乱行列の直接加算ができないのはこのためである。

一方、その位相差 $\varphi_{r2}^{HH} - \varphi_{r2}^{VV}$ は $\varphi_{r1}^{HH} - \varphi_{r1}^{VV}$ に近い（理想的には同じ）。レンジに関わらず安定した値を与える。この相対位相差がターゲットの分類や識別に重要な役割を果たす。この演算は複素共役をとった要素を掛けるだけでよい。

POLSAR画像処理で $S_{HH} S_{VV}^*$ のような2次統計量（モーメント、電力量に関連）が良く用いられるのはこの理由による。通常のデータ形式としては、散乱行列の要素のうち S_{HH} 成分が実数となるように、相対散乱行列の形式で保存されている。

$$\begin{bmatrix} S(HV) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S \end{bmatrix}_{relative} = \begin{bmatrix} |S_{HH}| & |S_{HV}| e^{j(\varphi_{HV} - \varphi_{HH})} \\ |S_{HV}| e^{j(\varphi_{HV} - \varphi_{HH})} & |S_{VV}| e^{j(\varphi_{VV} - \varphi_{HH})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

したがって、もしPOLSAR画像として図1に示されるような距離依存のある形式でデータが格納されていたら、まず、散乱行列の伝搬距離による位相を消去（例えば φ^{HH} を0に）する操作を行ってから、その後平均化処理などの処理を行う必要がある。伝搬距離が同じと保証されているような場合には、相対散乱行列を使ってコヒーレント解析を行っても問題はない。Pi-SARデータでは φ^{HH} が0となるように相対散乱行列の形式でデータが保存されている。

なお、 S_{HH} の位相が0になるように相対散乱行列の形でデータが入っていても、ピクセル単位の散乱行列データだけで偏波解析を行うと誤差が大きい。その理由として、例えば同じ距離 r_1 のazimuth方向のデータをみると、伝搬距離による位相差はなくなっているが、さらに、ターゲットが異なるために生じる位相差まで0になっているためである。 ϕ^{HH} を0にすることは、ターゲットから生じる位相差も消していることになる。（これは単純に伝搬距離による位相差とターゲットによる位相差を分離して消すことができないためである。インターフェロメトリではターゲットの位相差を一定と想定して伝搬距離による位相情報を使う）

さらに、誤差が大きくなる他の理由として、単にノイズの影響と考えた方が理解しやすい。2次統計量の S_{HH} S_{VV}^* などはピクセル単位ごとに計算できるが、その集合はその領域の電力に関連する値なので比較的安定である。散乱行列要素に誤差が含まれても複素共役演算を行うことによって、位相に関してはその誤差が打ち消される。2次統計量は集合平均を扱うMueller行列、Kennaugh行列、Covariance行列、Coherency行列などに用いられている。一般論として、位相情報を扱うよりも絶対値を使うパラメータの方が安定である。Mueller行列、Kennaugh行列、Covariance行列、Coherency行列の対角要素は主に電力に関連したパラメータになっている。

POLSAR画像解析でよく使われる偏波行列の関係を図4.3に示す。2次統計量を要素にもつKennaugh行列、Covariance行列、Coherency行列が最も重要である。これらの行列は平均化しても、偏波情報が保存される。以下に数式的な平均化のための必要な事柄を述べる。

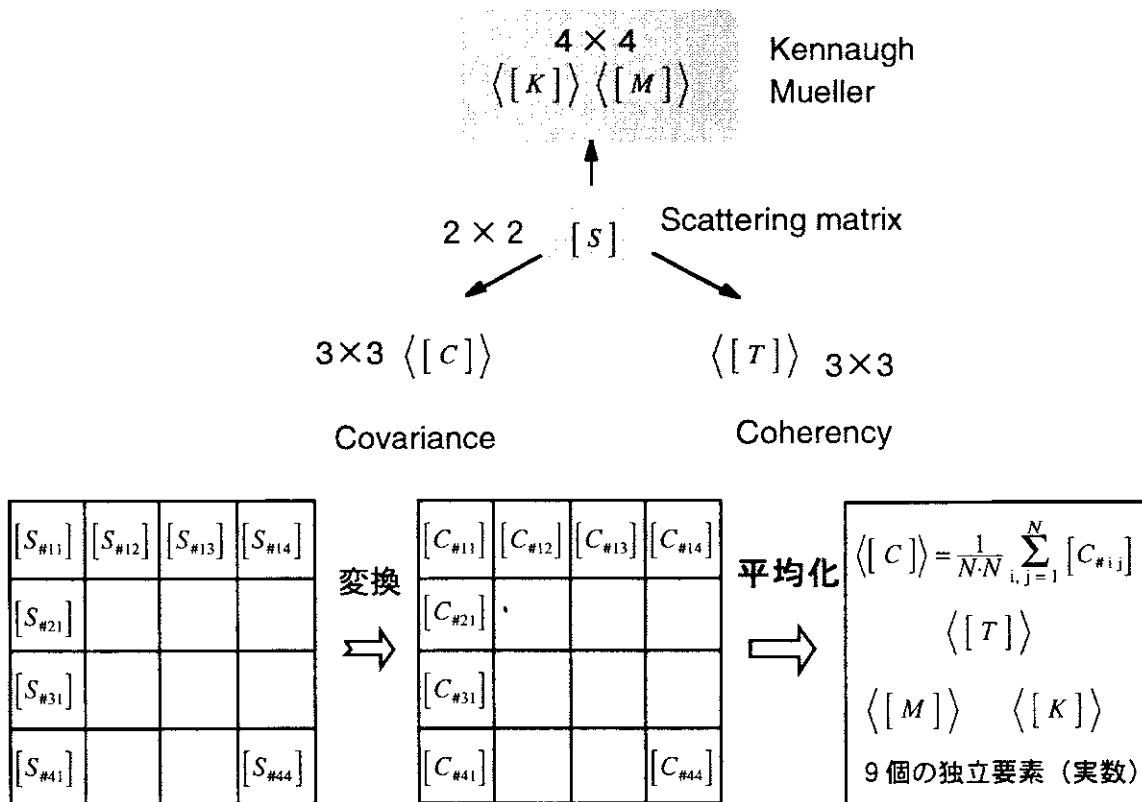


図4.3 偏波行列の関係と平均化

4.2 偏波散乱ベクトル k_L と k_p

レーダ分解能のサイズと画像の1ピクセルのサイズは必ずしも同じではないが、通常1ピクセルに1つの散乱行列が対応している。ピクセル毎の偏波画像解析ではspeckle noiseの影響が出たり、誤差が含まれるので、全体としてSAR画像評価する場合には統計的な手法が必要となってくる。

統計的に扱うために、散乱行列の全ての情報を保持したベクトルとして、散乱行列の要素を順次並べた散乱ベクトル k_L が次のように定義されている。Monostatic の場合には $S_{HV} = S_{VH}$ なので、

$$\text{散乱ベクトル } k_L = \begin{bmatrix} S_{HH} \\ \sqrt{2} S_{HV} \\ S_{VV} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

この散乱ベクトルのノルムは散乱行列のSpanと等しい。

$$\|k_L\|^2 = |S_{HH}|^2 + 2|S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 = \text{Span}[S] \quad (4.2)$$

k_L に含まれる情報は同じなので、散乱ベクトルと散乱行列は等価である。

また、散乱行列の全ての情報を保持したベクトルとしてPauli 散乱ベクトル k_p が定義されている。Monostatic の場合には $S_{HV} = S_{VH}$ なので、散乱行列 $[S]$ とPauli matrixの積のTraceとり、次の形になる。

$$k_p = \left[\frac{1}{2} \text{Trace}([S]\sigma_0), \frac{1}{2} \text{Trace}([S]\sigma_1), \frac{1}{2} \text{Trace}([S]\sigma_2) \right]^T \quad (4.3)$$

$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$: Pauli matrix

$$\sigma_0 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

この散乱ベクトル k_p は以下の式と同等である。Coherency ベクトルとも言う。

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{HH} + S_{VV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ 2S_{HV} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

この散乱ベクトルも大きさは散乱行列のSpanと等しく、含まれる情報量は同じなので、散乱行列と散乱ベクトルは等価である。

$$\|k_p\|^2 = |S_{HH}|^2 + 2|S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 = \text{Span}[S] \quad (4.6)$$

なお、散乱行列の要素を順次並べた散乱ベクトル k_L との間には次の関係がある。

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{HH} + S_{VV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ 2S_{HV} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH} \\ \sqrt{2} S_{HV} \\ S_{VV} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} k_L \quad (4.7)$$

4.3 平均化Covariance行列, Coherency行列, Kennaugh行列

散乱行列要素を用いて, 上記の平均化偏波行列を表すと, 次のようになる.

◆平均化Covariance行列 $\langle [C] \rangle$

散乱ベクトル \mathbf{k}_L を使って集合平均のCovariance 行列 $\langle [C] \rangle$ は以下のように定義される. 平均化した値や行列を $\langle \bullet \rangle$ のように表す.

$$\begin{aligned} \langle [C] \rangle &= \frac{1}{n} \sum \mathbf{k}_L \mathbf{k}_L^\dagger = \frac{1}{n} \sum \begin{bmatrix} S_{HH} \\ \sqrt{2} S_{HV} \\ S_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH}^* & \sqrt{2} S_{HV}^* & S_{VV}^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle & \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{HV} S_{HH}^* \rangle & 2 \langle S_{HV} S_{HV}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \\ \langle S_{VV} S_{HH}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle & \langle S_{VV} S_{VV}^* \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

◆平均化Coherency行列 $\langle [T] \rangle$

Pauli 散乱ベクトル \mathbf{k}_p を使ってCoherency行列 $\langle [T] \rangle$ が定義される.

$$\begin{aligned} \langle [T] \rangle &= \frac{1}{n} \sum [T] = \frac{1}{n} \sum \mathbf{k}_p \mathbf{k}_p^\dagger \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle & \langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle & \langle 2 S_{HV}^* (S_{HH} + S_{VV}) \rangle \\ \langle (S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle & \langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle & \langle 2 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \rangle \\ \langle 2 S_{HV} (S_{HH} + S_{VV})^* \rangle & \langle 2 S_{HV} (S_{HH} - S_{VV})^* \rangle & \langle 4 |S_{HV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

◆平均化Kennaugh行列 $\langle [K] \rangle$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{|S_{xx}|^2 + 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2}{2} & \frac{|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2}{2} & \text{Re}(S_{xx} + S_{yy}) S_{xy}^* & \text{Im}(S_{xx} - S_{yy}) S_{xy}^* \\ \frac{|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2}{2} & \frac{|S_{xx}|^2 + 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2}{2} & \text{Re}(S_{xx} - S_{yy}) S_{xy}^* & \text{Im}(S_{xx} + S_{yy}) S_{xy}^* \\ \text{Re}(S_{xx} + S_{yy}) S_{xy}^* & \text{Re}(S_{xx} - S_{yy}) S_{xy}^* & |S_{xy}|^2 + \text{Re}(S_{xx} S_{yy}^*) & \text{Im}(S_{xx} S_{yy}^*) \\ \text{Im}(S_{xx} - S_{yy}) S_{xy}^* & \text{Im}(S_{xx} + S_{yy}) S_{xy}^* & \text{Im}(S_{xx} S_{yy}^*) & |S_{xy}|^2 - \text{Re}(S_{xx} S_{yy}^*) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

これらの平均化は画像処理・データ処理での平均化操作である. なお, 後に述べるようにどの行列を使っても, 9個の実数の独立要素が含まれている.

第5章 角度平均化した偏波行列の理論値

5.1 ターゲットの回転と散乱行列の回転

あるターゲットをレーダで観測したときに得られる散乱行列は、レーダビームを照射する位置関係により変化する。例えばビームの入射方向によって散乱行列は変わるし、同じ入射方向でもレーダを回転させて測定したら散乱行列の値が変わってくる。そこで、レーダビームと垂直な面内(Line of Sight上)でターゲットを回転した場合に、散乱行列がどのような表現になるかを考察しておこう。これは平均化した偏波行列を導く際の基礎になる。

図5.1(a)のように、あるターゲットを直線偏波基底HVで測定したとする。そのときの散乱行列を $[S]^{HV}$ とする。ターゲットが傾くとは、図5.1(b)のようにLine of Sight上でオリエンテーション角(向き)が θ だけ変化することである。このとき、散乱行列 $[S(\theta)]^{HV}$ はどのような表現になるであろうか？

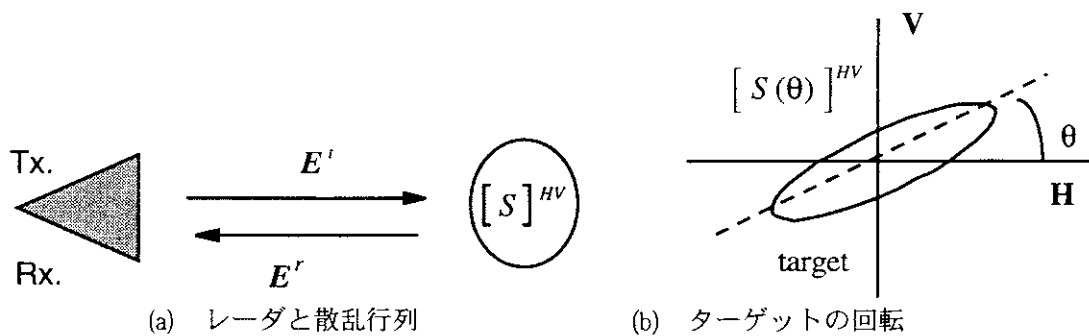


図5.1 θ だけ回転した(傾いた)ターゲット

一般に「ターゲットを回転させる」という表現を使うと、図5.1(b)のようにターゲットを回転させた図を描き、いつの間にか座標原点がターゲット側に移ってしまうことがよく起こる。レーダポラリメトリでは座標の原点をレーダ側においているので、その点に注意して散乱行列を導く必要がある。

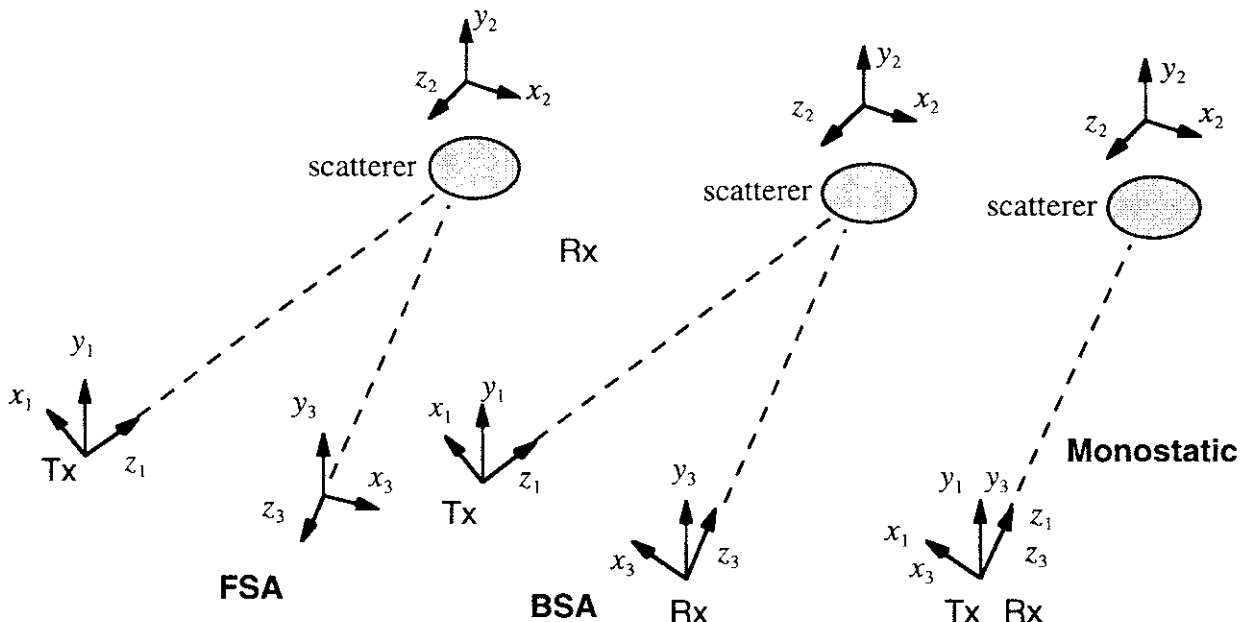
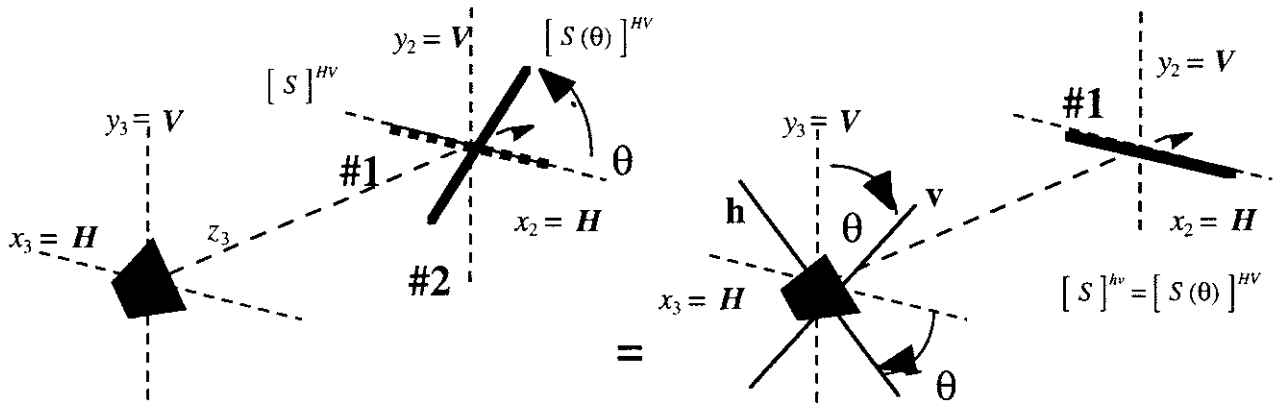


図5.2 前方散乱(Forward Scattering Alignment), Bistatic Scattering Alignment, 後方散乱(Monostatic Scattering Alignment)の比較

そこで再度、レーダと回転したターゲットの位置関係に着目して散乱行列を見てみよう。図5.2に示す座標系で、 $x_1 y_1 z_1$ は送信、 $x_2 y_2 z_2$ はターゲット、 $x_3 y_3 z_3$ は受信アンテナで定義された座標系である。 z_1 軸は波の進行方向と一致しているが、 z_3 軸では波の進行方向と逆向きである。散乱行列は通常、BSAあるいは Monostaticで定義されている。Monostaticでは送信と受信の座標系が一致している。波の進行方向と座標軸 $x_3 y_3$ の取り方に注意しておく必要がある。

図5.1 (b)ではターゲットの座標系 $x_2 y_2 z_2$ を用いて $x_2 = H$, $y_2 = V$ となっている。座標系に関わらず、Hは水平、Vは垂直を表すので、その表記を踏襲してMonostaticの場合に当てはめてみよう。



(a) $x_2 y_2 z_2$ 座標で角度 θ だけ傾けたターゲット (#1 \Rightarrow #2) (b) $x_3 y_3 z_3$ 座標でレーダを θ だけ回転

図5.3 レーダとターゲットの位置関係

図5.3(a)のように $x_2 y_2 z_2$ 座標で位置#1のターゲット（波線）を測定した散乱行列を $[S]^{hv}$ とする。図5.3(a)でH方向から角度 θ だけ傾けたターゲット（位置#2の実線）の散乱行列 $[S(\theta)]^{hv}$ は、その相対位置関係を考慮して、図3(b)のように#1にあるターゲットに対してレーダを矢印の向きに θ だけ回転させて観測した散乱行列 $[S]^{hv} = [S(\theta)]^{hv}$ に等しい。ターゲットを θ だけ回転させて散乱行列を測定するということは、ターゲットを元の位置#1に置いてレーダを矢印の向きに θ だけ回転させて測定することと同じである。したがって、レーダ座標系 $x_3 y_3 z_3$ を $+\theta$ だけ回転させていることに等しい。

5.1 座標系の回転

図5.3(b)のレーダ座標系 $x_3 y_3 z_3$ を取り出し、 z_3 側（散乱波の進行方向）から見た状態を図5.4に示す。この場合、(H,V)の座標軸を $+\theta$ だけ傾けた状態になっており、新たにできる(h, v)座標系との間に次の関係式が成り立つ。

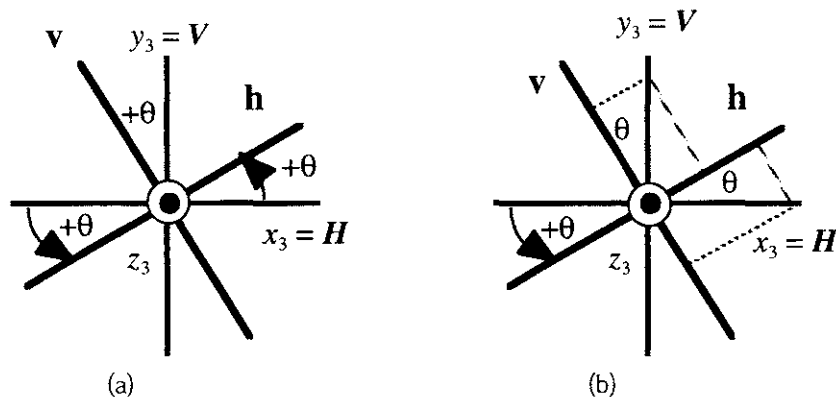


図5.4 座標系の回転

$$\begin{aligned} h &= H \cos \theta + V \sin \theta \\ v &= -H \sin \theta + V \cos \theta \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} = [R(\theta)] \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$[R(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{回転行列}$$

$$\begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} = [R(\theta)]^{-1} \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} = [R(-\theta)] \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

重複した表現になるが、この式は図4のように $\begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix}$ 基底を $+\theta$ だけ回転させると $\begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix}$ 基底になり、逆に $\begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix}$ 基底を $-\theta$ だけ回転させると $\begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix}$ 基底になることを示している。

5.2 角度回転した散乱行列

レーダとターゲットの相対位置関係は変わらないので、HV基底でもhv基底でも偏波受信電力は等しい。図5.4のレーダ座標系 x_3, y_3, z_3 を考慮すると次の電力関係式

$$P^c = \left| \mathbf{E}^t(HV)^T [S(HV)] \mathbf{E}^t(HV) \right|^2 = \left| \mathbf{E}^t(hv)^T [S(hv)] \mathbf{E}^t(hv) \right|^2 \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \text{より} \quad [H, V] [S(HV)] \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} &= [h, v] [S(hv)] \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} \quad : \text{不変} \\ &= [h, v] [R(-\theta)]^T [S(HV)] [R(-\theta)] \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

その結果、散乱行列には

$$[S(hv)] = [R(-\theta)]^T [S(HV)] [R(-\theta)] = [S(\theta)]^{HV} \quad (5.5)$$

が成立していなくてはならない。ここで、添え字hvは回転後の偏波基底を表す。これはHV基底で角度 $+\theta$ だけ回転させたターゲットの散乱行列と等しい。したがって、ターゲットを θ だけ回転させて測定すると、散乱行列には次の関係式が成り立つ。

$$\boxed{[S(\theta)]^{HV} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}} \quad (5.6)$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_{hh} &= S_{HH} \cos^2 \theta + S_{VV} \sin^2 \theta + S_{HV} \sin 2\theta \\ S_{hv} &= S_{vh} = \frac{S_{VV} - S_{HH}}{2} \sin 2\theta + S_{HV} \cos 2\theta \\ S_{vv} &= S_{HH} \sin^2 \theta + S_{VV} \cos^2 \theta - S_{HV} \sin 2\theta \end{aligned}} \quad (5.7)$$

5.3 角度回転した平均化Covariance行列 $\langle [C(\theta)] \rangle^{HV}$

角度回転した散乱行列を使って平均化Covariance行列を求める。式展開を簡単にするために、

$$\text{回転前の散乱行列を} \quad [S(HV)] = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \quad (5.3.1)$$

$$\text{回転後の散乱行列を} \quad [S(hv)] = [S(\theta)]^{HV} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \quad (5.3.2)$$

とする。レーダ座表系 $x_3 y_3 z_3$ で、レーダを θ だけ回転させると散乱行列 $[S(\theta)]^{HV}$ は

$$[S(\theta)]^{HV} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

$$\begin{aligned} S_{hh} &= a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta + c \sin 2\theta \\ S_{hv} &= S_{vh} = \frac{b-a}{2} \sin 2\theta + c \cos 2\theta \\ S_{vv} &= a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta - c \sin 2\theta \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

である。Covariance行列 $[C]^{hv} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ の要素を展開して次式が得られる。

$$\begin{aligned} c_{11} \text{ 成分} \quad S_{hh} S_{hh}^* &= |S_{hh}|^2 = |a|^2 \cos^4 \theta + |b|^2 \sin^4 \theta + |c|^2 \sin^2 2\theta \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(a b^*) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \operatorname{Re}(a c^*) \cos^2 \theta \sin 2\theta + 2 \operatorname{Re}(b c^*) \sin^2 \theta \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{22} \text{ 成分} \quad S_{vv} S_{vv}^* &= |S_{vv}|^2 = |a|^2 \sin^4 \theta + |b|^2 \cos^4 \theta + |c|^2 \sin^2 2\theta \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(a b^*) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \operatorname{Re}(a c^*) \sin^2 \theta \sin 2\theta - 2 \operatorname{Re}(b c^*) \cos^2 \theta \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$c_{33} \text{ 成分} \quad S_{hv} S_{hv}^* = |S_{hv}|^2 = \frac{|b-a|^2}{4} \sin^2 2\theta + |c|^2 \cos^2 2\theta + \operatorname{Re}\left\{c^*(b-a)\right\} \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned} c_{13} \text{ 成分} \quad S_{hh} S_{vv}^* &= \left(|a|^2 + |b|^2\right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - |c|^2 \sin^2 2\theta \\ &\quad + a b^* \cos^4 \theta + a^* b \sin^4 \theta + (b^* c - a^* c^*) \cos^2 \theta \sin 2\theta + (a^* c - b^* c^*) \sin^2 \theta \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{31} \text{ 成分} \quad S_{hh}^* S_{vv} &= \left(|a|^2 + |b|^2\right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - |c|^2 \sin^2 2\theta \\ &\quad + a^* b \cos^4 \theta + a b^* \sin^4 \theta + (b c^* - a^* c) \cos^2 \theta \sin 2\theta + (a c^* - b^* c) \sin^2 \theta \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{12} \text{ 成分} \quad S_{hh} S_{hv}^* &= a \frac{b^* - a^*}{2} \cos^2 \theta \sin 2\theta + b \frac{b^* - a^*}{2} \sin^2 \theta \sin 2\theta + c \frac{b^* - a^*}{2} \sin^2 2\theta \\ &\quad + a c^* \cos^2 \theta \cos 2\theta + b c^* \sin^2 \theta \cos 2\theta + |c|^2 \sin 2\theta \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{21} \text{ 成分} \quad S_{hh}^* S_{hv} &= a^* \frac{b-a}{2} \cos^2 \theta \sin 2\theta + b^* \frac{b-a}{2} \sin^2 \theta \sin 2\theta + c^* \frac{b-a}{2} \sin^2 2\theta \\ &\quad + a^* c \cos^2 \theta \cos 2\theta + b^* c \sin^2 \theta \cos 2\theta + |c|^2 \sin 2\theta \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$c_{23} \text{ 成分} \quad S_{hv} S_{vv}^* = a^* \frac{b-a}{2} \sin^2 \theta \sin 2\theta + b^* \frac{b-a}{2} \cos^2 \theta \sin 2\theta - c^* \frac{b-a}{2} \sin^2 2\theta \\ + c a^* \sin^2 \theta \cos 2\theta + b^* c \cos^2 \theta \cos 2\theta - |c|^2 \sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$c_{32} \text{ 成分} \quad S_{hv}^* S_{vv} = a \frac{b^*-a^*}{2} \sin^2 \theta \sin 2\theta + b \frac{b^*-a^*}{2} \cos^2 \theta \sin 2\theta - c \frac{b^*-a^*}{2} \sin^2 2\theta \\ + c^* a \sin^2 \theta \cos 2\theta + b c^* \cos^2 \theta \cos 2\theta - |c|^2 \sin 2\theta \cos 2\theta$$

確率密度関数を $p(\theta)$ とし、次の積分によって角度についての平均化を行う。数式的な平均化は図5.5のように、角度に対する平均化である。

$$\langle S_{hh} S_{hh}^* \rangle = \int_0^{2\pi} S_{hh} S_{hh}^* p(\theta) d\theta \quad (5.3.5)$$

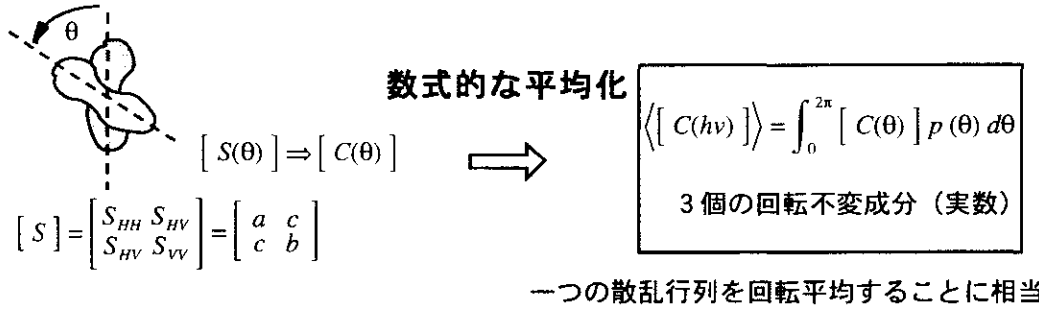


図5.5 数学的な平均化

$\langle S_{hh} S_{hh}^* \rangle$ の $S_{hh} S_{hh}^*$ 等は理論値として扱っているので、ここで用いる $\langle \cdot \rangle$ は角度に関する平均的な理論値をあらわす。丁寧に展開すると要素の平均値は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \langle |S_{hh}|^2 \rangle &= |a|^2 I_1 + |b|^2 I_2 + |c|^2 I_3 + 2 \operatorname{Re}(ab^*) I_4 + 2 \operatorname{Re}(ac^*) I_5 + 2 \operatorname{Re}(bc^*) I_6 \\ \langle |S_{vv}|^2 \rangle &= |a|^2 I_2 + |b|^2 I_1 + |c|^2 I_3 + 2 \operatorname{Re}(ab^*) I_4 - 2 \operatorname{Re}(ac^*) I_5 - 2 \operatorname{Re}(bc^*) I_6 \\ \langle |S_{hv}|^2 \rangle &= \frac{|b-a|^2}{4} I_3 + |c|^2 I_7 + \operatorname{Re}\left\{c^*(b-a)\right\} I_8 \\ \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \left(|a|^2 + |b|^2\right) I_4 - |c|^2 I_3 + ab^* I_1 + a^* b I_2 + (b^* c - a c^*) I_5 + (a^* c - b c^*) I_6 \\ \langle S_{hh}^* S_{vv} \rangle &= \left(|a|^2 + |b|^2\right) I_4 - |c|^2 I_3 + a^* b I_1 + ab^* I_2 + (b c^* - a^* c) I_5 + (a c^* - b^* c) I_6 \\ \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= a \frac{b^*-a^*}{2} I_5 + b \frac{b^*-a^*}{2} I_6 + c \frac{b^*-a^*}{2} I_3 + a c^* I_{10} + b c^* I_9 + |c|^2 I_8 \\ \langle S_{hh}^* S_{hv} \rangle &= a^* \frac{b-a}{2} I_5 + b^* \frac{b-a}{2} I_6 + c^* \frac{b-a}{2} I_3 + a^* c I_{10} + b^* c I_9 + |c|^2 I_8 \\ \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= a^* \frac{b-a}{2} I_6 + b^* \frac{b-a}{2} I_5 - c^* \frac{b-a}{2} I_3 + c a^* I_9 + b^* c I_{10} - |c|^2 I_8 \\ \langle S_{hv}^* S_{vv} \rangle &= a \frac{b^*-a^*}{2} I_6 + b \frac{b^*-a^*}{2} I_5 - c \frac{b^*-a^*}{2} I_3 + a c^* I_9 + b c^* I_{10} - |c|^2 I_8 \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

$$\begin{aligned}
\text{ただし, } I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta p(\theta) d\theta, & I_2 &= \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta p(\theta) d\theta \\
I_3 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta p(\theta) d\theta, & I_4 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta p(\theta) d\theta \\
I_5 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin 2\theta p(\theta) d\theta, & I_6 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sin 2\theta p(\theta) d\theta \\
I_7 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 2\theta p(\theta) d\theta, & I_8 &= \int_0^{2\pi} \sin 2\theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta \\
I_9 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta, & I_{10} &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

確率密度関数が一様と仮定して、 $p(\theta) = p = \frac{1}{2\pi}$ とおいた場合、積分項は

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta p(\theta) d\theta = p \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{4} p = \frac{3}{8} \\
I_2 &= \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta p(\theta) d\theta = p \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{4} p = \frac{3}{8} \\
I_3 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta p(\theta) d\theta = p \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right) d\theta = \pi p = \frac{1}{2} \\
I_4 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta p(\theta) d\theta = p \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{4 \cdot 2} \right) d\theta = \frac{\pi}{4} p = \frac{1}{8} \\
I_5 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin 2\theta p(\theta) d\theta = 0 \\
I_6 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sin 2\theta p(\theta) d\theta = 0 \\
I_7 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 2\theta p(\theta) d\theta = p \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta = \pi p = \frac{1}{2} \\
I_8 &= \int_0^{2\pi} \sin 2\theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta = 0 \\
I_9 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta = -\frac{\pi}{2} p = -\frac{1}{4} \\
I_{10} &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} p = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

これらの積分値を代入した平均化要素は次式となる.

$$\begin{aligned}
\langle |S_{hh}|^2 \rangle &= \frac{3}{8} |a|^2 + \frac{3}{8} |b|^2 + \frac{1}{2} |c|^2 + \frac{1}{4} \text{Re}(ab^*) \\
\langle |S_{vv}|^2 \rangle &= \frac{3}{8} |a|^2 + \frac{3}{8} |b|^2 + \frac{1}{2} |c|^2 + \frac{1}{4} \text{Re}(ab^*) \\
\langle |S_{hv}|^2 \rangle &= \frac{1}{8} |b-a|^2 + \frac{1}{2} |c|^2 \\
\langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \frac{1}{8} (|a|^2 + |b|^2) + \frac{3}{4} \text{Re}(ab^*) - \frac{1}{2} |c|^2 = \langle S_{hh}^* S_{vv} \rangle \\
\langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= c \frac{b^* - a^*}{4} + \frac{a c^*}{4} - \frac{b c^*}{4} = \frac{1}{4} \left\{ c^*(a-b) - c(a-b)^* \right\} = +\frac{j}{2} \text{Im} \left\{ c^*(a-b) \right\} \\
\langle S_{hh}^* S_{hv} \rangle &= c^* \frac{b-a}{4} + \frac{a^* c}{4} - \frac{b^* c}{4} = -\frac{1}{4} \left\{ c^*(a-b) - c(a-b)^* \right\} = -\frac{j}{2} \text{Im} \left\{ c^*(a-b) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= -c^* \frac{b-a}{4} - \frac{c a^*}{4} + \frac{b^* c}{4} = \frac{1}{4} \left\{ c^* (a-b) - c (a-b)^* \right\} = +\frac{j}{2} \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} \\
\langle S_{hv}^* S_{vv} \rangle &= -c \frac{b^*-a^*}{4} - \frac{a c^*}{4} + \frac{b c^*}{4} = -\frac{1}{4} \left\{ c^* (a-b) - c (a-b)^* \right\} = -\frac{j}{2} \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\}
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

さらに変形して、最終的に平均化Covariance行列は次のようになる。

◆平均化Covariance行列

$$\left\langle [C(hv)] \right\rangle = \left\langle [C(\theta)] \right\rangle^{HV} = \begin{bmatrix} \langle |S_{hh}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle & \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{hh}^* \rangle & 2 \langle |S_{hv}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle \\ \langle S_{vv} S_{hh}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{vv} S_{hv}^* \rangle & \langle |S_{vv}|^2 \rangle \end{bmatrix} \tag{5.3.9}$$

$$\begin{aligned}
\langle |S_{hh}|^2 \rangle &= \langle |S_{vv}|^2 \rangle = \frac{1}{8} |a+b|^2 + \frac{1}{4} (|a|^2 + |b|^2) + \frac{1}{2} |c|^2 && \text{実数} \\
\langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \langle S_{hh}^* S_{vv} \rangle = \frac{1}{8} |a+b|^2 + \frac{1}{2} \text{Re}(a^* b) - \frac{1}{2} |c|^2 && \text{実数} \\
\langle |S_{hv}|^2 \rangle &= \frac{1}{8} |a-b|^2 + \frac{1}{2} |c|^2 && \text{実数} \\
\langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle = +\frac{j}{2} \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} && \text{純虚数} \\
\langle S_{hh}^* S_{hv} \rangle &= \langle S_{hv}^* S_{vv} \rangle = -\frac{j}{2} \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} && \text{純虚数}
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

$$\text{Trace} \left\langle [C(\theta)] \right\rangle = \langle |S_{hh}|^2 \rangle + 2 \langle |S_{hv}|^2 \rangle + \langle |S_{vv}|^2 \rangle = |a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 = \text{Span}[S] \tag{5.3.11}$$

この要素式から、 $a+b$ 、 $a-b$ 、 $2c$ が重要なファクターとなって現れていることがわかる。

5.4 角度回転した平均化Coherency行列 $\langle [T(\theta)] \rangle^{HV}$

◆角度回転したコヒーレントな散乱ベクトル $k_p(\theta)$

散乱行列と同じ情報量をもつ散乱ベクトルを

$$k_p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ 2S_{hv} \end{bmatrix}, \quad k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{HH} + S_{VV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ 2S_{HV} \end{bmatrix} \quad (5.4.1)$$

とすると、要素関係式から

$$\begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ 2S_{hv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH} + S_{VV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ 2S_{HV} \end{bmatrix} \quad (5.4.2)$$

が成り立つ。したがって

$$k_p(\theta) = [R_p(\theta)] k_p \quad (5.4.3)$$

ただし、 $[R_p(\theta)]$ も散乱ベクトル k_p に対する回転行列である。

$$[R_p(\theta)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}, \quad \det[R_p(\theta)] = 1$$

◆コヒーレントなCoherency行列

コヒーレントなCoherency行列は次式で定義される。

$$[T(\theta)]^{HV} = k_p(\theta) k_p^\dagger(\theta) = [R_p(\theta)] k_p k_p^* [R_p(\theta)]^* = [R_p(\theta)] [T]^{HV} [R_p(\theta)]^* \quad (5.4.4)$$

$$[T(\theta)]^{HV} = \begin{bmatrix} \frac{|S_{HH} + S_{VV}|^2}{2} & \frac{(S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^*}{2} & (S_{HH} + S_{VV})S_{HV}^* \\ \frac{(S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^*}{2} & \frac{|S_{HH} - S_{VV}|^2}{2} & (S_{HH} - S_{VV})S_{HV}^* \\ S_{HV}(S_{HH} + S_{VV})^* & S_{HV}(S_{HH} - S_{VV})^* & 2|S_{HV}|^2 \end{bmatrix} \quad (5.4.5)$$

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{回転後}), \quad [T]^{HV} = \begin{bmatrix} S & A & B \\ A^* & D & E \\ B^* & E^* & C \end{bmatrix} \quad (\text{回転前}) \quad (5.4.6)$$

とにおいて要素間の関係を求めると

$$\begin{aligned}
T_{11} &= S \\
T_{12} &= A \cos 2\theta + B \sin 2\theta & T_{21} &= A^* \cos 2\theta + B^* \sin 2\theta \\
T_{13} &= -A \sin 2\theta + B \cos 2\theta & T_{31} &= -A^* \sin 2\theta + B^* \cos 2\theta \\
T_{22} &= D \cos^2 2\theta + C \sin^2 2\theta + \frac{E+E^*}{2} \sin 4\theta & T_{33} &= D \sin^2 2\theta + C \cos^2 2\theta - \frac{E+E^*}{2} \sin 4\theta \\
T_{23} &= E \cos^2 2\theta - E^* \sin^2 2\theta + \frac{C-D}{2} \sin 4\theta & T_{32} &= E^* \cos^2 2\theta - E \sin^2 2\theta + \frac{C-D}{2} \sin 4\theta
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

◆平均化Coherency行列

確率密度関数を $p(\theta)$ とし、次の積分によって角度 θ についての平均化を行ってみる。

$$\langle [T(\theta)] \rangle = \int_0^{2\pi} [T(\theta)] p(\theta) d\theta \tag{5.4.8}$$

確率密度関数が一様と仮定して $p(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ とした場合、平均値は以下のようになる。

$$\langle [T(\theta)] \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [T(\theta)] d\theta = \begin{bmatrix} \langle T_{11} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle T_{22} \rangle & \langle T_{23} \rangle \\ 0 & \langle T_{32} \rangle & \langle T_{33} \rangle \end{bmatrix} \tag{5.4.9}$$

$$\begin{aligned}
\langle T_{11} \rangle &= S = \frac{1}{2} |a+b|^2 \\
\langle T_{22} \rangle &= \langle T_{33} \rangle = \frac{D+C}{2} = \frac{1}{4} |a-b|^2 + |c|^2 \\
\langle T_{12} \rangle &= \langle T_{21} \rangle = \langle T_{13} \rangle = \langle T_{31} \rangle = 0 \\
\langle T_{23} \rangle &= \frac{E-E^*}{2} = \frac{1}{2} \left\{ c^* (a-b) - c (a-b)^* \right\} = j \operatorname{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} \\
\langle T_{32} \rangle &= -\langle T_{23} \rangle = -j \operatorname{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\}
\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

その結果、角度積分した平均化Coherency行列は以下の表現となる。

$$\langle [T] \rangle^{hv} = \langle [T(\theta)] \rangle^{hv} = \begin{bmatrix} \frac{|a+b|^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} |a-b|^2 + |c|^2 & j \operatorname{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} \\ 0 & -j \operatorname{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} & \frac{1}{4} |a-b|^2 + |c|^2 \end{bmatrix} \tag{5.4.11}$$

ところで、 $\langle [T(\theta)] \rangle$ は形式的に次の形になっている。

$$\langle [T(\theta)] \rangle = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & jc' \\ 0 & -jc' & b' \end{bmatrix} \quad (5.4.12)$$

$$a', b', c' \text{ は実数で } a' = \frac{|a+b|^2}{2}, \quad b' = \frac{1}{4} |a-b|^2 + |c|^2, \quad c' = \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\}$$

$\langle [T(\theta)] \rangle$ の固有値は固有値方程式より以下より求めることができる。

$$\begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b' - \lambda & jc' \\ 0 & -jc' & b' - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

固有値が求められれば、行列を対角化でき

$$\langle [T] \rangle = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

の形式に書くことができる。

固有値の具体的な表現は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \lambda_1 = a' &= \frac{|a+b|^2}{2} = \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle}{2} \\ \lambda_2 = b' + c' &= \frac{1}{4} |a-b|^2 + |c|^2 + \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} = \frac{1}{4} \left\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 + 4 |S_{HV}|^2 \right\rangle + \text{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \\ \lambda_3 = b' - c' &= \frac{1}{4} |a-b|^2 + |c|^2 - \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} = \frac{1}{4} \left\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 + 4 |S_{HV}|^2 \right\rangle - \text{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

これより、理論的には

$$\text{Total Power : } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \langle |a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2 \rangle = \langle \text{Span}[S] \rangle = \text{Trace} \langle [T(\theta)] \rangle \quad (5.4.14)$$

$$\text{Anisotropy : } A = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{2c'}{2b'} = \frac{\text{Im} \left\{ 4c^* (a-b) \right\}}{|a-b|^2 + 4|c|^2} \Rightarrow \frac{\text{Im} \left\{ 4 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\}}{\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 + 4 |S_{HV}|^2 \rangle} \quad (5.4.15)$$

が導ける。

5.5 角度回転した平均化 Kennaugh 行列 $\langle [K(\theta)] \rangle$

Kennaugh行列とMueller行列は4 * 4の実数要素をもち、Covariance, Coherency行列に比べて行列サイズが大きい。後方散乱のKennaugh行列を再度掲載する。

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [M] \quad (5.5.1)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{|S_{xx}|^2 + 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2}{2} & \frac{|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2}{2} & \operatorname{Re}(S_{xx} + S_{yy})S_{xy}^* & \operatorname{Im}(S_{xx} - S_{yy})S_{xy}^* \\ \frac{|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2}{2} & \frac{|S_{xx}|^2 + 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2}{2} & \operatorname{Re}(S_{xx} - S_{yy})S_{xy}^* & \operatorname{Im}(S_{xx} + S_{yy})S_{xy}^* \\ \operatorname{Re}(S_{xx} + S_{yy})S_{xy}^* & \operatorname{Re}(S_{xx} - S_{yy})S_{xy}^* & |S_{xy}|^2 + \operatorname{Re}(S_{xx}S_{yy}^*) & \operatorname{Im}(S_{xx}S_{yy}^*) \\ \operatorname{Im}(S_{xx} - S_{yy})S_{xy}^* & \operatorname{Im}(S_{xx} + S_{yy})S_{xy}^* & \operatorname{Im}(S_{xx}S_{yy}^*) & |S_{xy}|^2 - \operatorname{Re}(S_{xx}S_{yy}^*) \end{bmatrix}$$

この式から分かるように、実数の対称行列である。独立要素は4+3+2+1=10のように思われるが、対角成分で

$$k_{00} = k_{11} + k_{22} + k_{33}$$

が成り立つので、9個である。

数式的な集合平均

確率密度関数が一様と仮定して $p(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ とした場合、平均化行列は以下のようになる。

$$\langle [K] \rangle^{HV} = \int_0^{2\pi} [K(\theta)]^{HV} p(\theta) d\theta \quad (5.5.2)$$

既に得られている関係式を書き出すと

$$\begin{aligned} \langle |S_{hh}|^2 \rangle &= \langle |S_{vv}|^2 \rangle = \frac{1}{8} |a+b|^2 + \frac{1}{4} (|a|^2 + |b|^2) + \frac{1}{2} |c|^2 && \text{実数} \\ \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \langle S_{hh}^* S_{vv} \rangle = \frac{1}{8} |a+b|^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(a^* b) - \frac{1}{2} |c|^2 && \text{実数} \\ \langle |S_{hv}|^2 \rangle &= \frac{1}{8} |a-b|^2 + \frac{1}{2} |c|^2 && \text{実数} \\ \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle = +\frac{j}{2} \operatorname{Im}\{c^*(a-b)\} && \text{純虚数} \\ \langle S_{hh}^* S_{hv} \rangle &= \langle S_{hv}^* S_{vv} \rangle = -\frac{j}{2} \operatorname{Im}\{c(b^* - a^*)\} = -\frac{j}{2} \operatorname{Im}\{c^*(a-b)\} && \text{純虚数} \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

これを基にして

$$\frac{1}{2} \langle |S_{hh}|^2 + 2|S_{hv}|^2 + |S_{vv}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |a|^2 + 2|c|^2 + |b|^2 \rangle \quad \text{invariant, Total power}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\langle \left| S_{hh} \right|^2 - \left| S_{vv} \right|^2 \right\rangle = 0 \\
& \text{Re} \left\langle \left(S_{hh} + S_{vv} \right) S_{hv}^* \right\rangle = \text{Re} \left\langle \frac{j}{2} \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} - \frac{j}{2} \text{Im} \left\{ c (a-b)^* \right\} \right\rangle = 0 \\
& \text{Im} \left\langle \left(S_{hh} - S_{vv} \right) S_{hv}^* \right\rangle = \text{Im} \left\langle j \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} \right\rangle = \text{Im} \left\langle c^* (a-b) \right\rangle \\
& \frac{1}{2} \left\langle \left| S_{hh} \right|^2 - 2 \left| S_{hv} \right|^2 + \left| S_{vv} \right|^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \left\langle \left| a+b \right|^2 \right\rangle \\
& \text{Re} \left\langle \left(S_{hh} - S_{vv} \right) S_{hv}^* \right\rangle = \text{Re} \left\langle \frac{j}{2} \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} + \frac{j}{2} \text{Im} \left\{ c (a-b)^* \right\} \right\rangle = 0 \\
& \text{Im} \left\langle \left(S_{hh} + S_{vv} \right) S_{hv}^* \right\rangle = \text{Im} \langle 0 \rangle = 0 \\
& \left\langle \left| S_{hv} \right|^2 \right\rangle + \text{Re} \left\langle S_{hh} S_{vv}^* \right\rangle = \frac{1}{4} \left\langle \left| a+b \right|^2 \right\rangle \\
& \text{Im} \left\langle S_{hh} S_{vv}^* \right\rangle = \text{Im} \left\langle \frac{1}{8} \left(\left| a+b \right|^2 - 4 \left| c \right|^2 \right) + \frac{1}{2} \text{Re} (a b^*) \right\rangle = 0 \\
& \left\langle \left| S_{hv} \right|^2 \right\rangle - \text{Re} \left\langle S_{hh} S_{vv}^* \right\rangle = \left\langle \left| c \right|^2 \right\rangle - \text{Re} \left\langle a b^* \right\rangle
\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

それ故、角度積分平均化後のKennaugh行列の理論値は次の形で与えられる。

$$\left\langle [K] \right\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left\langle \left| a \right|^2 + 2 \left| c \right|^2 + \left| b \right|^2 \right\rangle & 0 & 0 & \text{Im} \left\langle c^* (a-b) \right\rangle \\ 0 & \frac{1}{4} \left\langle \left| a+b \right|^2 \right\rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \left\langle \left| a+b \right|^2 \right\rangle & 0 \\ \text{Im} \left\langle c^* (a-b) \right\rangle & 0 & 0 & \left\langle \left| c \right|^2 \right\rangle - \text{Re} \left\langle a b^* \right\rangle \end{bmatrix} \tag{5.5.4}$$

非対角項に0が多く現れており、 $\text{Im} \left\langle c^* (a-b) \right\rangle$ 以外に有用な情報は無いことがわかる。

5.6 角度回転した偏波行列の具体例

以上述べた関係式から代表的なターゲットの散乱行列と散乱ベクトルなどを求めておこう． $[\bullet]^{HV}$ の表記はHV基底でのコヒーレントなベクトルと行列， $\langle [\bullet] \rangle^{HV}$ はHV基底での集合平均行列を表すことにする．また， (θ) は回転していることを表す．

◆Plate

$$[S]_{plate}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [S(\theta)]_{plate}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{plate}^{L1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{plate}^{L2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{plate}^{L1}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{plate}^{L2}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Covariance 行列 } [C(\theta)] = \mathbf{k}_{L2}(\theta) \mathbf{k}_{L2}^{*T}(\theta), \quad [C(\theta)]_{plate}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Trace} = 1 \text{ とした集合平均Covariance 行列 } \langle [C] \rangle_{plate}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{plate}^P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}(\theta)_{plate}^P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Coherency 行列 } [T(\theta)] = \mathbf{k}_P(\theta) \mathbf{k}_P^{*T}(\theta) \quad [T(\theta)]_{plate}^{HV} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Trace} = 1 \text{ とした集合平均Coherency 行列 } \langle [T] \rangle_{plate}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆Diplane

$$[S]_{diplane}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [S(\theta)]_{diplane}^{HV} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{diplane}^{L1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{diplane}^{L2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{diplane}^{L1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{diplane}^{L2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ -\sqrt{2} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{Covariance 行列 } [C(\theta)]_{diplane}^{HV} = \begin{bmatrix} \cos^2 2\theta & -\frac{\sin 4\theta}{\sqrt{2}} & -\cos^2 2\theta \\ -\frac{\sin 4\theta}{\sqrt{2}} & 2 \sin^2 2\theta & \frac{\sin 4\theta}{\sqrt{2}} \\ -\cos^2 2\theta & \frac{\sin 4\theta}{2} & \cos^2 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{Trace} = 1 \text{ とした集合平均Covariance 行列 } \langle [C] \rangle_{diplane}^{HV} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{diplane}^P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}(\theta)_{diplane}^P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cos 2\theta \\ -2 \sin 2\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{bmatrix} \quad (Norm = 1)$$

$$\text{Coherency 行列} \quad [T(\theta)]_{diplane}^{HV} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2} \\ 0 & -\frac{\sin 4\theta}{2} & \sin^2 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{Trace} = 1 \text{ とした集合平均Coherency 行列} \quad \langle [T] \rangle_{diplane}^{hv} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \blacklozenge \text{Wire} \quad [S]_{h-wire}^{HV} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & [S(\theta)]_{wire}^{HV} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\frac{1}{2} \sin 2\theta \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ k_{h-wire}^{L1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & k_{h-wire}^{L2} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & k_{h-wire}^{L1}(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \\ -\frac{\sin 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta \end{bmatrix} & k_{h-wire}^{L2}(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \\ -\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Covariance 行列} [C(\theta)]_{wire}^{HV} = \begin{bmatrix} \cos^4 \theta & -\frac{\sin 2\theta \cos^2 \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin^2 2\theta}{4} \\ -\frac{\sin 2\theta \cos^2 \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin^2 2\theta}{2} & -\frac{\sin 2\theta \sin^2 \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin^2 2\theta}{4} & -\frac{\sin 2\theta \sin^2 \theta}{\sqrt{2}} & \sin^4 \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Trace} = 1 \text{ とした集合平均Covariance 行列} \quad \langle [C] \rangle_{wire}^{hv} &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ p(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \quad \text{一様分布を仮定している} \end{aligned}$$

$$k_{h-wire}^P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k(\theta)_{wire}^P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{Norm}=1)$$

$$\text{Coherency 行列} \quad [T(\theta)]_{wire}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2} \\ -\sin 2\theta & -\frac{\sin 4\theta}{2} & \sin^2 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{Trace} = 1 \text{ とした集合平均Coherency 行列} \quad \langle [T] \rangle_{wire}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆Right helix $[S]_{r-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix}$

$$[S(\theta)]_{r-helix}^{HV} = \frac{e^{-j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{r-helix}^{L1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{r-helix}^{L2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -j\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{r-helix}^{L1}(\theta) = \frac{e^{-j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{r-helix}^{L2}(\theta) = \frac{e^{-j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -j\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Covariance 行列

$$[C(\theta)]_{r-helix}^{HV} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & j\sqrt{2} & -1 \\ -j\sqrt{2} & 2 & j\sqrt{2} \\ -1 & -j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Trace = 1 とした集合平均Covariance 行列

$$\langle [C] \rangle_{r-helix}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & j\sqrt{2} & -1 \\ -j\sqrt{2} & 2 & j\sqrt{2} \\ -1 & -j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{r-helix}^P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}(\theta)_{r-helix}^P = \frac{e^{-j2\theta}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -j \end{bmatrix} \text{ (Norm=1)}$$

Coherency 行列

$$[T(\theta)]_{r-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix}$$

Trace = 1 とした集合平均Coherency 行列

$$\langle [T] \rangle_{r-helix}^{hv} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix}$$

◆Left helix $[S]_{l-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}$

$$[S(\theta)]_{l-helix}^{HV} = \frac{e^{j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{l-helix}^{L1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{l-helix}^{L2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ j\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{l-helix}^{L1}(\theta) = \frac{e^{j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{l-helix}^{L2}(\theta) = \frac{e^{j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ j\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Covariance 行列

$$[C(\theta)]_{l-helix}^{HV} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j\sqrt{2} & -1 \\ j\sqrt{2} & 2 & -j\sqrt{2} \\ -1 & j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Trace = 1 とした集合平均Covariance 行列

$$\langle [C] \rangle_{l-helix}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j\sqrt{2} & -1 \\ j\sqrt{2} & 2 & -j\sqrt{2} \\ -1 & j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{l-helix}^P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}(\theta)_{l-helix}^P = \frac{e^{j2\theta}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ j \end{bmatrix} \text{ (Norm=1)}$$

Coherency 行列

$$[T(\theta)]_{l-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix}$$

Trace = 1 とした集合平均Coherency 行列

$$\langle [T] \rangle_{l-helix}^{hv} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix}$$

5.7 円偏波基底における平均化Covariance行列

5.7.1 基底変換

基底変換行列[T]

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \rho^*}} \begin{bmatrix} 1 & -\rho^* \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7.1)$$

を使うと、散乱行列の基底変換は

$$[S(RL)] = [T]^T [S(HV)] [T] \quad (5.7.2)$$

にて与えられる。 $\rho = -j$ の右回り円偏波基底を基準に

$$R(HV) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}, \quad L(HV) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.7.3)$$

なる基底をとれば、

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7.4)$$

が得られる。その結果、直線偏波成分を使うと円偏波基底での散乱行列は以下の変換式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{LL} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7.5)$$

要素表現では

$$\begin{aligned} S_{RR} &= \frac{1}{2} (S_{HH} - S_{VV} - 2j S_{HV}) & S_{LR} = S_{RL} &= \frac{-j}{2} (S_{HH} + S_{VV}) \\ S_{LL} &= \frac{1}{2} (S_{VV} - S_{HH} - 2j S_{HV}) \end{aligned} \quad (5.7.6)$$

次に、 θ だけ回転した散乱行列で、円偏波基底での要素と直線偏波基底での要素の関係を調べておこう。計算の簡単化のために

$$[S(HV)] = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \quad (5.7.7)$$

とおく。それを回転させたときの散乱行列は

$$[S(\theta)]^{HV} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.7.8)$$

にて与えられるので、この要素に対してHV基底からRL基底への変換を行なうと

$$\left[S(\theta) \right]^{RL} = \begin{bmatrix} S_{RR}(\theta) & S_{RL}(\theta) \\ S_{RL}(\theta) & S_{LL}(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \left[S(\theta) \right]^{HV} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7.9)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j\theta} & -j e^{j\theta} \\ -j e^{-j\theta} & e^{-j\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\theta} & -j e^{-j\theta} \\ -j e^{j\theta} & e^{-j\theta} \end{bmatrix} \quad \text{回転後に基底変換} \quad (5.7.10a) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{RL} & S_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{基底変換後に回転} \quad (5.7.10b)$$

要素には次の関係が成り立っている。

$$\begin{aligned} S_{RR}(\theta) &= \left(\frac{a-b}{2} - j c \right) e^{j2\theta} = S_{RR} e^{j2\theta} \\ S_{RL}(\theta) &= -j \left(\frac{a+b}{2} \right) = S_{RL} \\ S_{LL}(\theta) &= \left(\frac{b-a}{2} - j c \right) e^{-j2\theta} = S_{LL} e^{-j2\theta} \end{aligned} \quad (5.7.11)$$

この要素からも分かるように、円偏波基底での回転では $e^{j2\theta}$ や $e^{-j2\theta}$ が関係してくるだけである。

円偏波基底でのCovariance行列は

$$\left[C(\theta) \right]^{RL} = \begin{bmatrix} |S_{RR}(\theta)|^2 & \sqrt{2} S_{RR}(\theta) S_{RL}^*(\theta) & S_{RR}(\theta) S_{LL}^*(\theta) \\ \sqrt{2} S_{RL}(\theta) S_{RR}^*(\theta) & 2 |S_{RL}(\theta)|^2 & \sqrt{2} S_{RL}(\theta) S_{LL}^*(\theta) \\ S_{LL}(\theta) S_{RR}^*(\theta) & \sqrt{2} S_{LL}(\theta) S_{RL}^*(\theta) & |S_{LL}(\theta)|^2 \end{bmatrix} \quad (5.7.12)$$

で定義されるので、代入して要素を求めると

$$\begin{aligned} |S_{RR}(\theta)|^2 &= \frac{1}{4} |a-b-j2c|^2 \\ |S_{RL}(\theta)|^2 &= \frac{1}{4} |a+b|^2 \\ |S_{LL}(\theta)|^2 &= \frac{1}{4} |a-b+j2c|^2 \\ S_{RR}(\theta) S_{LL}^*(\theta) &= \frac{1}{4} (a-b-j2c) (b-a-j2c)^* e^{j4\theta} \\ S_{RR}(\theta) S_{RL}^*(\theta) &= \frac{j}{4} (a-b-j2c) (a+b)^* e^{j2\theta} \\ S_{RL}(\theta) S_{LL}^*(\theta) &= \frac{j}{4} (a-b+j2c)^* (a+b) e^{j2\theta} \end{aligned} \quad (5.7.13)$$

次に、角度に関する積分により平均操作を行う。角度に関する確率密度関数 $p(\theta)$ が一定とすれば

$$\begin{aligned} \left\langle |S_{RR}(\theta)|^2 \right\rangle &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |a-b-j2c|^2 p(\theta) d\theta = \frac{1}{4} |a-b-j2c|^2 \\ \left\langle |S_{RL}(\theta)|^2 \right\rangle &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |a+b|^2 p(\theta) d\theta = \frac{1}{4} |a+b|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left| S_{LL}(\theta) \right|^2 \right\rangle &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left| a - b + j 2c \right|^2 p(\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left| a - b + j 2c \right|^2 \\
\left\langle S_{RR}(\theta) S_{LL}^*(\theta) \right\rangle &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (a - b - j 2c) (b - a - j 2c)^* e^{j 4\theta} p(\theta) d\theta = 0 \\
\left\langle S_{RR}(\theta) S_{RL}^*(\theta) \right\rangle &= \frac{j}{4} \int_0^{2\pi} (a - b - j 2c) (a + b)^* e^{j 2\theta} p(\theta) d\theta = 0 \\
\left\langle S_{RL}(\theta) S_{LL}^*(\theta) \right\rangle &= \frac{j}{4} \int_0^{2\pi} (a - b + j 2c)^* (a + b) e^{j 2\theta} p(\theta) d\theta = 0
\end{aligned} \tag{5.7.14}$$

が得られる。その結果、平均化Covariance 行列は形式的に次の対角行列になる。

$$\left\langle [C(\theta)] \right\rangle^{RL} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \left| a - b - j 2c \right|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \left| a + b \right|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left| a - b + j 2c \right|^2 \end{bmatrix} \tag{5.7.15}$$

$$\left\langle [C(\theta)] \right\rangle^{RL} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left| a - b - j 2c \right|^2 = \frac{1}{4} \left\langle \left| S_{HH} - S_{VV} - j 2S_{HV} \right|^2 \right\rangle \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left| a + b \right|^2 = \frac{1}{2} \left\langle \left| S_{HH} + S_{VV} \right|^2 \right\rangle \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4} \left| a - b + j 2c \right|^2 = \frac{1}{4} \left\langle \left| S_{HH} - S_{VV} + j 2S_{HV} \right|^2 \right\rangle \end{aligned} \tag{5.7.16}$$

これより、理論的には

$$\text{Total Power : } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \left\langle \left| a \right|^2 + \left| b \right|^2 + 2 \left| c \right|^2 \right\rangle = \left\langle \text{Span} [S] \right\rangle = \text{Trace} \left\langle [C(\theta)] \right\rangle \tag{5.7.17}$$

$$\text{Anisotropy : } A = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{\text{Im} \left\langle 4 c^* (a - b) \right\rangle}{\left\langle \left| a - b \right|^2 + 4 \left| c \right|^2 \right\rangle} = \frac{\text{Im} \left\langle 4 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle}{\left\langle \left| S_{HH} - S_{VV} \right|^2 + 4 \left| S_{HV} \right|^2 \right\rangle} \tag{5.7.18}$$

が導ける。

$$\text{なお、円偏波基底で散乱ベクトルを } \mathbf{k}_P^{RL} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{RR} + S_{LL} \\ S_{RR} - S_{LL} \\ 2S_{RL} \end{bmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$$\mathbf{k}_P^{RL} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j 2S_{HV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ -j (S_{HH} + S_{VV}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j \\ 0 & 1 & 0 \\ -j & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{k}_P^{HV} \tag{5.7.19}$$

となり、類似の項目が要素位置を変えて出てくる。 \mathbf{k}_P^{HV} との変換行列は $\text{Det} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j \\ 0 & 1 & 0 \\ -j & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$ を満たすユニタリ行列となるので、以後の固有値解析などで本質な点は変わらない。そのため、円偏波基底でのCoherency行列展開は止める。

5.8 円偏波基底におけるCovariance行列の具体例

◆Plate

$$\begin{aligned} [S(\theta)]_{plate}^{HV} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ S_{RR} &= \frac{1}{2} (1 - 1 - 2j0) = 0 \quad S_{LL} = \frac{1}{2} (1 - 1 - 2j0) = 0 \quad S_{LR} = S_{RL} = \frac{-j}{2} (1 + 1) = -j \\ [S(\theta)]_{plate}^{RL} &= \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{plate}^{RL-L2}(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -j\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad [C(\theta)]_{plate}^{RL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Trace} = 1 \text{ とした集合平均Covariance 行列} \quad \langle [C(\theta)] \rangle_{plate}^{RL} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◆Diplane

$$\begin{aligned} [S(\theta)]_{diplane}^{HV} &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \\ S_{RR} &= \frac{1}{2} (\cos 2\theta + \cos 2\theta + 2j \sin 2\theta) = e^{j2\theta} \quad S_{LR} = S_{RL} = \frac{-j}{2} (\cos 2\theta - \cos 2\theta) = 0 \\ S_{LL} &= \frac{1}{2} (-2 \cos 2\theta + 2j \sin 2\theta) = -e^{-j2\theta} \\ [S(\theta)]_{diplane}^{RL} &= \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & -e^{-j2\theta} \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{diplane}^{RL-L2}(\theta) &= \begin{bmatrix} e^{j2\theta} \\ 0 \\ -e^{-j2\theta} \end{bmatrix} \quad [C(\theta)]_{diplane}^{RL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e^{j4\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -e^{-j4\theta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{Trace} = 1 \text{ とした集合平均Covariance 行列} \quad \langle [C(\theta)] \rangle_{diplane}^{RL} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◆Wire

$$\begin{aligned} [S(\theta)]_{wire}^{HV} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\frac{1}{2} \sin 2\theta \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ S_{RR} &= \frac{1}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + j \sin 2\theta) = \frac{1}{2} (\cos 2\theta + j \sin 2\theta) = \frac{1}{2} e^{j2\theta} \\ S_{LL} &= \frac{1}{2} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta + j \sin 2\theta) = \frac{1}{2} (-\cos 2\theta + j \sin 2\theta) = \frac{-1}{2} e^{-j2\theta} \\ S_{LR} = S_{RL} &= \frac{-j}{2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{-j}{2} \end{aligned}$$

$$\left[S(\theta) \right]_{wire}^{RL} = \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{LL} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & -j \\ -j & -e^{-j2\theta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{wire}^{RL-L2}(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j2\theta} \\ -j\sqrt{2} \\ -e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$$

$$\left[C(\theta) \right]_{wire}^{RL} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & j\sqrt{2}e^{j2\theta} & -e^{j4\theta} \\ -j\sqrt{2}e^{-j2\theta} & 2 & j\sqrt{2}e^{j2\theta} \\ -e^{-j4\theta} & -j\sqrt{2}e^{-j2\theta} & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trace = 1 \text{ とした集合平均Covariance 行列} \quad \left\langle \left[C(\theta) \right] \right\rangle_{wire}^{RL} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆Right helix

$$\left[S(\theta) \right]_{r-helix}^{HV} = \frac{e^{-j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_{RR} = \frac{1}{2} \frac{e^{-j2\theta}}{2} (1 + 1 - 2j(-j)) = 0$$

$$S_{RL} = S_{LR} = \frac{-j}{2} \frac{e^{-j2\theta}}{2} (1 - 1) = 0$$

$$S_{LL} = \frac{1}{2} \frac{e^{-j2\theta}}{2} (-1 - 1 - 2j(-j)) = -e^{-j2\theta}$$

$$\left[S(\theta) \right]_{r-helix}^{RL} = \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{-j2\theta} \end{bmatrix} = e^{-j2\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{r-helix}^{RL-L2}(\theta) = e^{-j2\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[C(\theta) \right]_{r-helix}^{RL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trace = 1 \text{ とした集合平均Covariance 行列} \quad \left\langle \left[C(\theta) \right] \right\rangle_{r-helix}^{RL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆Left helix

$$\left[S(\theta) \right]_{l-helix}^{HV} = \frac{e^{j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_{RR} = \frac{1}{2} \frac{e^{j2\theta}}{2} (-1 - 1 - 2j(j)) = e^{j2\theta}$$

$$S_{RL} = S_{LR} = \frac{-j}{2} \frac{e^{j2\theta}}{2} (1 - 1) = 0$$

$$S_{LL} = \frac{1}{2} \frac{e^{j2\theta}}{2} (-1 - 1 - 2j(j)) = 0$$

$$\left[S(\theta) \right]_{l-helix}^{RL} = \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e^{j2\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{l-helix}^{RL-L2}(\theta) = e^{j2\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[C(\theta) \right]_{l-helix}^{RL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Trace = 1 \text{ とした集合平均Covariance 行列} \quad \left\langle \left[C(\theta) \right] \right\rangle_{l-helix}^{RL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

もし、 $\rho=j$ なる左回り円偏波を基準に基底をとれば、基底変換行列は

$$L(HV) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}, \quad R(HV) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [T] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8.1)$$

にて与えられるので、円偏波基底への変換は次式となる。

$$\boxed{\begin{bmatrix} S_{LL} & S_{LR} \\ S_{RL} & S_{RR} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}} \quad (5.8.2)$$

要素表現では

$$\begin{aligned} S_{LL} &= \frac{1}{2} (S_{HH} - S_{VV} + 2j S_{HV}) & S_{LR} = S_{RL} &= \frac{j}{2} (S_{HH} + S_{VV}) \\ S_{RR} &= \frac{1}{2} (S_{VV} - S_{HH} + 2j S_{HV}) \end{aligned} \quad (5.8.3)$$

円偏波基底で散乱ベクトルは

$$k_{L2}^{RL}(\theta) = \begin{bmatrix} S_{RR} \\ \sqrt{2} S_{RL} \\ S_{LL} \end{bmatrix} \quad (5.8.4)$$

にて与えられる。

$\rho=j$ の円偏波基底における代表的ターゲットの散乱行列とCovariance行列（参考程度）

◆Plate
$$\begin{bmatrix} S(\theta) \end{bmatrix}_{plate}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{LL} = 0 \quad S_{LR} = j \quad S_{RR} = 0$$

$$\begin{bmatrix} S(\theta) \end{bmatrix}_{plate}^{LR} = \begin{bmatrix} S_{LL} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{plate}^{RL-L2}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ j\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C(\theta) \end{bmatrix}_{plate}^{RL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trace = 1 とした集合平均Covariance 行列
$$\left\langle \begin{bmatrix} C(\theta) \end{bmatrix} \right\rangle_{plate}^{RL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆Diplane
$$\begin{bmatrix} S(\theta) \end{bmatrix}_{diplane}^{HV} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$S_{LL} = \cos 2\theta - j \sin 2\theta = e^{-j2\theta} \quad S_{RR} = -\cos 2\theta - j \sin 2\theta = -e^{-j2\theta} \quad S_{LR} = 0$$

$$\begin{bmatrix} S(\theta) \end{bmatrix}_{diplane}^{LR} = \begin{bmatrix} S_{LL} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j2\theta} & 0 \\ 0 & -e^{j2\theta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{diplane}^{RL-L2}(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-j2\theta} \\ 0 \\ -e^{j2\theta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C(\theta) \end{bmatrix}_{diplane}^{RL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e^{-j4\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -e^{j4\theta} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trace = 1 とした集合平均Covariance 行列
$$\left\langle \begin{bmatrix} C(\theta) \end{bmatrix} \right\rangle_{diplane}^{RL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆Wire
$$\begin{bmatrix} S(\theta) \end{bmatrix}_{wire}^{HV} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\frac{1}{2} \sin 2\theta \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$S_{LL} = \frac{1}{2} (\cos 2\theta - j \sin 2\theta) = \frac{1}{2} e^{-j2\theta} \quad S_{RR} = \frac{1}{2} (-\cos 2\theta - j \sin 2\theta) = \frac{-1}{2} e^{j2\theta} \quad S_{LR} = \frac{j}{2}$$

$$\begin{bmatrix} S(\theta) \end{bmatrix}_{wire}^{LR} = \begin{bmatrix} S_{LL} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{RR} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-j2\theta} & j \\ j & -e^{j2\theta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{wire}^{RL-L2}(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-j2\theta} \\ j\sqrt{2} \\ -e^{j2\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C(\theta) \end{bmatrix}_{wire}^{RL} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j\sqrt{2} e^{-j2\theta} & -e^{-j4\theta} \\ j\sqrt{2} e^{j2\theta} & 2 & -j\sqrt{2} e^{-j2\theta} \\ -e^{j4\theta} & j\sqrt{2} e^{j2\theta} & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trace = 1 \text{ としての集合平均Covariance 行列} \quad \left\langle [C(\theta)] \right\rangle_{wire}^{RL} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆Right helix

$$[S(\theta)]_{r-helix}^{HV} = \frac{e^{-j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_{LL} = e^{-j2\theta} \quad S_{LR} = 0 \quad S_{RR} = 0$$

$$[S(\theta)]_{r-helix}^{LR} = \begin{bmatrix} S_{LL} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j2\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e^{-j2\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{r-helix}^{RL-L2}(\theta) = e^{-j2\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [C(\theta)]_{r-helix}^{RL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Trace = 1 \text{ としての集合平均Covariance 行列} \quad \left\langle [C(\theta)] \right\rangle_{r-helix}^{RL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆Left helix

$$[S(\theta)]_{l-helix}^{HV} = \frac{e^{j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_{LL} = 0 \quad S_{LR} = 0 \quad S_{RR} = -e^{j2\theta}$$

$$[S(\theta)]_{l-helix}^{LR} = \begin{bmatrix} S_{LL} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{j2\theta} \end{bmatrix} = e^{j2\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{l-helix}^{RL-L2}(\theta) = e^{j2\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [C(\theta)]_{l-helix}^{RL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trace = 1 \text{ としての集合平均Covariance 行列} \quad \left\langle [C(\theta)] \right\rangle_{l-helix}^{RL} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

円偏波基底での散乱行列（参考） 変換基底を変化させた場合と要素の順序を変えた場合のまとめ

変換基底	$[T] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}$	$[T] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$	
◆Plate	$\begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{bmatrix}$
◆Diplane	$\begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & -e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{-j2\theta} & 0 \\ 0 & -e^{j2\theta} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$
◆Wire	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & -j \\ -j & -e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-j2\theta} & j \\ j & -e^{j2\theta} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{j2\theta} & j \\ j & e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$
◆Right helix	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{-j2\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$
◆Left helix	$\begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ RL	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{j2\theta} \end{bmatrix}$ LR	$\begin{bmatrix} -e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ RL
変換基底	$[T] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$	$[T] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}$	
◆Plate	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	
◆Diplane	$\begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{-j2\theta} & 0 \\ 0 & e^{j2\theta} \end{bmatrix}$	
◆Wire	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 1 \\ 1 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-j2\theta} & 1 \\ 1 & e^{j2\theta} \end{bmatrix}$	
◆Right helix	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{-j2\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
◆Left helix	$\begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ RL	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{j2\theta} \end{bmatrix}$ RL	

第6章 Covariance 行列による散乱電力分解

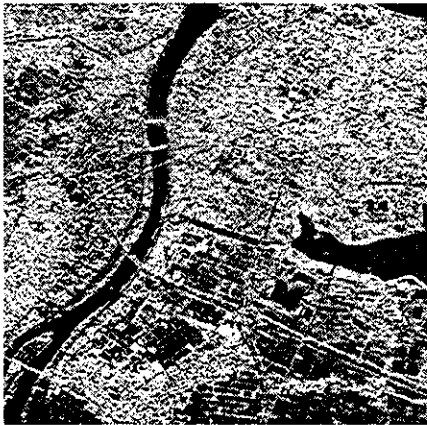
6.1 Pi-SARデータの平均Covariance 行列要素

集合平均のCovariance 行列 $\langle [C] \rangle$ は次の式で与えられる．添え字のHVは偏波基底を示すと同時に測定値を表す．

$$\langle [C] \rangle^{HV} = \begin{bmatrix} \langle |S_{HH}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle & \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{HV} S_{HH}^* \rangle & 2 \langle |S_{HV}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \\ \langle S_{VV} S_{HH}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle & \langle |S_{VV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$\langle [C] \rangle$ の対角成分は偏波チャンネルの電力を表す実数であり，非対角項は相関係数に関連する複素数である．対角成分の和 $\text{Trace} \langle [C] \rangle^{HV}$ は全電力である．

まず，具体例を見よう．Pi-SARによってデータ取得されたX-bandの鳥屋野潟周辺画像を以下の図に示す．これらの図は9 * 9ピクセルの集合平均によるCovariance行列の要素である．

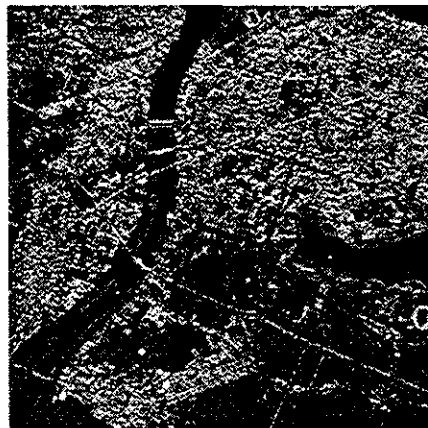


$\langle |S_{HH}|^2 \rangle$



$\langle |S_{VV}|^2 \rangle$

注：全体的に反射強度は大きいが，この画像ではHHよりVV成分の方が大きい．



$2 \langle |S_{HV}|^2 \rangle$

注：交差偏波成分画像であるが，人工物体からの反射がよく分かる．鳥屋野潟周辺や河原からの植生の反射はない．



$$\text{Re} \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle$$

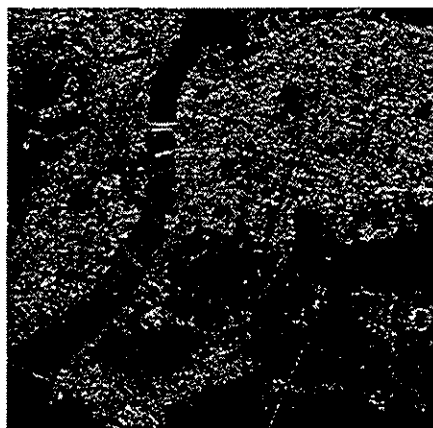


$$\text{Im} \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle$$

注：虚数部の方が大きな値となっている。この画像は相関係数に関連している。



$$\text{Re} \left\{ \sqrt{2} \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \right\}$$

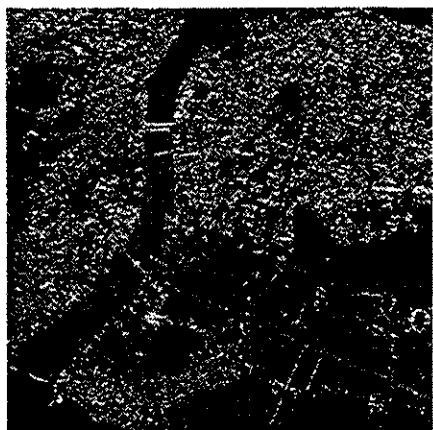


$$\text{Im} \left\{ \sqrt{2} \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \right\}$$

注：植生地では $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ である。田圃の所では $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ が成り立っているが、市街地では成り立っていない。 $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \neq 0$ の領域が見受けられる。



$$\text{Re} \left\{ \sqrt{2} \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \right\}$$



$$\text{Im} \left\{ \sqrt{2} \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \right\}$$

注：植生では $\langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ である。田圃の所では $\langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ が成り立っているが、市街地では成り立っていない。 $\langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \neq 0$ の領域が見受けられる。

このように、要素ごとに特徴は見られるが、 $\langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \neq 0$ の領域があることが了解できる。

6.2 相関係数によるCovariance 行列表現

さて、Covariance 行列要素同士の関係を調べるためには何らかの正規化が必要となる。そこで、HH偏波での散乱断面積

$$\sigma_{HH} = \langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle = \langle |S_{HH}|^2 \rangle \quad (6.2.1)$$

によって $\langle [C] \rangle$ を正規化する。電力比を

$$g = \frac{\langle S_{VV} S_{VV}^* \rangle}{\langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle} = \frac{\langle |S_{VV}|^2 \rangle}{\langle |S_{HH}|^2 \rangle}, \quad e = \frac{\langle S_{HV} S_{HV}^* \rangle}{\langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle} = \frac{\langle |S_{HV}|^2 \rangle}{\langle |S_{HH}|^2 \rangle} \quad (6.2.2)$$

とおき、相関係数を

$$\gamma_{XY-AB} = \text{Cor}(XY, AB) = \frac{\langle S_{XY} S_{AB}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{XY} S_{XY}^* \rangle \langle S_{AB} S_{AB}^* \rangle}} \quad (6.2.3)$$

にてあらわすと、各偏波間の相関係数は形式的に次の形になる。

$$\gamma_{HH-VV} = \text{Cor}(HH, VV) = \frac{\langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle \langle S_{VV} S_{VV}^* \rangle}} \quad (6.2.4)$$

$$\gamma_{HH-HV} = \text{Cor}(HH, HV) = \frac{\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle \langle S_{HV} S_{HV}^* \rangle}} \quad (6.2.5)$$

$$\gamma_{VV-HV} = \text{Cor}(VV, HV) = \frac{\langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{VV} S_{VV}^* \rangle \langle S_{HV} S_{HV}^* \rangle}} \quad (6.2.5)$$

集合平均Covariance 行列 $\langle [C] \rangle$ は相関係数と電力比によって表すことができる。

$$\langle [C] \rangle = \sigma_{HH} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2e} \gamma_{HH-HV} & \sqrt{g} \gamma_{HH-VV} \\ \sqrt{2e} \gamma_{HH-HV}^* & 2e & \sqrt{2eg} \gamma_{HV-VV} \\ \sqrt{g} \gamma_{HH-VV}^* & \sqrt{2eg} \gamma_{HV-VV}^* & g \end{bmatrix} \quad (6.2.6)$$

今までに、AIRSARをはじめ各種の航空機SARによって地上観測が行われてきたが、実験的事実として海洋、草地、森林などでは $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ が成り立つことが知られている。この特性をもつターゲットをReflection Symmetricなターゲットと言う。この条件の下では、 $\langle [C] \rangle$ は次の対称な形になる。

$$\langle [C] \rangle = \begin{bmatrix} \langle |S_{HH}|^2 \rangle & 0 & \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle \\ 0 & 2\langle |S_{HV}|^2 \rangle & 0 \\ \langle S_{VV} S_{HH}^* \rangle & 0 & \langle |S_{VV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (6.2.7)$$

$$\langle [C] \rangle = \sigma_{HH} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{g} \gamma_{HH-VV} \\ 0 & 2e & 0 \\ \sqrt{g} \gamma_{HH-VV}^* & 0 & g \end{bmatrix} \quad (6.2.8)$$

Covariance Matrixの利点は、森林などの分布した自然ターゲットに対して偏波チャネルの電力の測定により、ほとんどの重要な要素が決まることである。そして、相関係数自身をターゲットの偏波依存特性として分類に用いることができる。画像処理では散乱行列要素を平均化するための簡単な演算で行える利点がある。

しかし、実際のデータでは、鳥屋野潟周辺画像にあるように $\langle S_{HH}S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV}S_{HV}^* \rangle \approx 0$ が成立していない。そこで、この研究では全体を通して $\langle S_{HH}S_{HV}^* \rangle \neq 0$, $\langle S_{VV}S_{HV}^* \rangle \neq 0$ の条件で各種の解析を行ってみた。相関係数による詳細は第7章に述べる。また、第5章で導いたように、固有値解析もできる。この章では物理散乱モデルに基づいた電力分解について検討する。ここでいう電力とはCovariance行列の対角要素成分で、全電力は $\text{Trace} \langle [C] \rangle$ を意味している。

6.3 平均Covariance行列要素の理論値

A. Freeman らによって提案された三成分散乱モデルをふり返り、それを基本にPOLARS画像の電力分解を考察する。三成分散乱モデルは散乱過程をランダムな向きのワイヤ集合による体積散乱、地表面散乱に代表される表面散乱、直角構造による2回反射散乱に分けた物理的なモデルに基づくものである。ここでは、市街地など人工物が多い場所で、三成分散乱モデルでは表現が不可能であった円偏波発生による散乱過程を加える。そして円偏波による電力を第四の散乱電力として加える。

まず、基本ターゲットの平均化Covariance行列を求める。その後、三成分散乱モデル分解や四成分散乱モデル分解に必要な体積散乱、2回反射散乱、表面散乱モデルのCovariance行列を導出する。そして測定されたCovariance行列をこれらのCovariance行列を用いて展開し、その係数によって散乱電力を導く。

ランダムな向きの木の枝や幹、それらが組み合わさった植生集合からの偏波散乱特性を調べるためには、個々の散乱行列を調べても無理があるので、角度に依存しない2次統計量としてのCovariance行列要素を求める必要がある。任意角度に傾いた各種の基本ターゲット(wire, plate, diplane, helix)を角度について積分し、数学的な集合平均とする。第5章で導いたように $\langle S_{HH}S_{HV}^* \rangle \neq 0$, $\langle S_{VV}S_{HV}^* \rangle \neq 0$ の条件で数式的な平均Covariance行列は次のようになる。

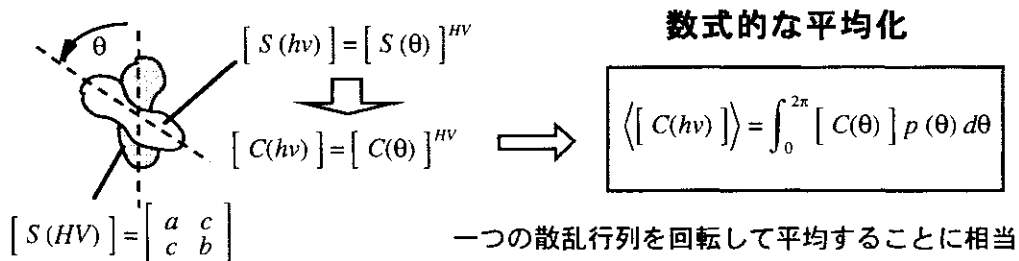


図6.2 数式的な平均化 (=図5.5)

$$\left\langle [C(hv)] \right\rangle = \left\langle [C(\theta)] \right\rangle^{HV} = \begin{bmatrix} \langle |S_{hh}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle & \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{hh}^* \rangle & 2 \langle |S_{hv}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle \\ \langle S_{vv} S_{hh}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{vv} S_{hv}^* \rangle & \langle |S_{vv}|^2 \rangle \end{bmatrix}$$

HV はHV偏波基底で測定値や理論値を表すための添え字として使う。 HV は基本基底である。一方、 hv はHV基底を角度回転した直線偏波基底として使う。そして数式的な平均化操作の際に使用する。上の関係式では、 $\left\langle [C(\theta)] \right\rangle^{HV}$ はHV基底で θ の角度回転し（HV基底から hv 基底に移行）、その集合平均 $\langle \bullet \rangle$ をとったものを表す。HV基底で θ の角度回転しているので、表現方法としては了解できるであろう。その結果が hv 基底での値と等しいとするので、 $\left\langle [C(hv)] \right\rangle$ となる。この要素は積分結果から

$$\begin{aligned} \langle |S_{hh}|^2 \rangle &= \langle |S_{vv}|^2 \rangle = \frac{1}{8} |a+b|^2 + \frac{1}{4} (|a|^2 + |b|^2) + \frac{1}{2} |c|^2 && \text{実数} \\ \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \langle S_{hh}^* S_{vv} \rangle = \frac{1}{8} |a+b|^2 + \frac{1}{2} \text{Re}(a^* b) - \frac{1}{2} |c|^2 && \text{実数} \\ \langle |S_{hv}|^2 \rangle &= \frac{1}{8} |a-b|^2 + \frac{1}{2} |c|^2 && \text{実数} \\ \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle = +\frac{j}{2} \text{Im}\{c^*(a-b)\} && \text{純虚数} \\ \langle S_{hh}^* S_{hv} \rangle &= \langle S_{hv}^* S_{vv} \rangle = -\frac{j}{2} \text{Im}\{c^*(a-b)\} && \text{純虚数} \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

ここで予め、基本ターゲットの平均化Covariance行列を求めておく。

◆<ワイヤターゲット>

ワイヤの基本形として垂直に立っている木・枝を想定し

$$\text{垂直ワイヤの散乱行列} \quad [S]_{v\text{-wire}}^{HV} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.2)$$

を選べば、平均化Covariance行列は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle |S_{hh}|^2 \rangle &= \langle |S_{vv}|^2 \rangle = \frac{3}{8} \\ \langle |S_{hv}|^2 \rangle &= \frac{1}{8}, \quad \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle = \langle S_{hh}^* S_{vv} \rangle = \frac{1}{8} \\ \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle = \langle S_{hh}^* S_{hv} \rangle = \langle S_{hv}^* S_{vv} \rangle = 0 \end{aligned} \quad \left\langle [C] \right\rangle_{v\text{-wire}}^{hv} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (6.3.3)$$

同様に、水平ワイヤでも平均化Covariance行列は次のようになる。

$$\text{水平ワイヤ} \quad [S]_{h\text{-wire}}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\langle [C] \right\rangle_{h\text{-wire}}^{hv} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (6.3.4)$$

この結果からワイヤについては垂直と水平で散乱行列が異なっているが、同じ形の $\left\langle [C] \right\rangle_{h\text{-wire}}^{hv}$ が得られることが分かる。この点が2次統計量を用いる利点であり、後のCovariance行列による電力分解の基礎になっている。さらに、 $\text{Trace} \left\langle [C] \right\rangle_{h\text{-wire}}^{hv} = 1$ になっているので、電力の単位として扱うことができる。

◆<2回反射ターゲット>

2回反射をおこす金属のDihedral Corner Reflector (= diplane)を想定すると

$$\text{水平} \quad [S]_{h\text{-diplane}}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle [C] \rangle_{h\text{-diplane}}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.5)$$

$$\text{垂直} \quad [S]_{v\text{-diplane}}^{HV} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle [C] \rangle_{v\text{-diplane}}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.6)$$

$$\text{Trace} \langle [C] \rangle_{diplane}^{hv} = 1 \quad (6.3.7)$$

diplaneについても同じ形の $\langle [C] \rangle_{diplane}^{hv}$ が得られることが分かる. なお, $\langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle$ が負の値になっていることに注意.

◆<奇数回反射ターゲット>

1回反射の代表例としてPlate, Sphere, 3回反射のTrihedral Corner Reflectorでは,

$$[S]_{plate}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle [C] \rangle_{plate}^{hv} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.8)$$

$$\text{Trace} \langle [C] \rangle_{plate}^{hv} = 1 \quad (6.3.9)$$

垂直でも水平でも同じ $\langle [C] \rangle_{plate}^{hv}$ が得られ, 交差偏波成分 $\langle |S_{hv}|^2 \rangle$ の寄与はない.

なお, 散乱行列表現でもCovariance行列表現でも, ワイヤはPlateとDiplaneの和で表される.

$$[Wire] = \frac{1}{2} [plate] + \frac{1}{2} [diplane]$$

$$\text{散乱行列} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{h\text{-wire}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{plate} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{h\text{-diplane}} \quad (6.3.10)$$

$$\text{Covariance行列} \quad \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{h\text{-wire}}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{plate}^{hv} + \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{h\text{-diplane}}^{hv} \quad (6.3.11)$$

◆<円偏波発生ターゲット>

円偏波を発生するHelixや $\lambda/4$ 離れたdiplaneでは, 散乱行列の全要素が0でない. 要素を計算すると

$$\langle |S_{hh}|^2 \rangle = \langle |S_{vv}|^2 \rangle = \frac{3}{8} \left| \frac{1}{2} \right|^2 + \frac{3}{8} \left| -\frac{1}{2} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{-j}{2} \right|^2 + \frac{1}{4} \text{Re} \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^* \right) = \frac{1}{4}$$

$$\langle |S_{hv}|^2 \rangle = \frac{1}{8} \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{-j}{2} \right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle = \frac{1}{8} \left(\left| \frac{1}{2} \right|^2 + \left| -\frac{1}{2} \right|^2 \right) + \frac{3}{4} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^* \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{-j}{2} \right|^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle = \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle = -\frac{1}{4} \left\{ \frac{j}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{j}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)^* \right\} = \frac{j}{4}$$

したがって

$$[S]_{r-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle [C] \rangle_{r-helix}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & j\sqrt{2} & -1 \\ -j\sqrt{2} & 2 & j\sqrt{2} \\ -1 & -j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.12)$$

$$[S]_{l-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle [C] \rangle_{l-helix}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j\sqrt{2} & -1 \\ j\sqrt{2} & 2 & -j\sqrt{2} \\ -1 & j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3.13)$$

$$\operatorname{Trace} \langle [C] \rangle_{helix}^{hv} = 1 \quad (6.3.14)$$

さて、(6.3.1)より次の関係が成り立っている。

$$\langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle = \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle = \frac{j}{2} \operatorname{Im} \left\{ c^* (a - b) \right\}$$

右辺は純虚数である。この値を左辺（実測値）の虚部に対応させる。観測値の $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle$ と $\langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle$ は必ずしも一致しない場合があるので、その平均値を用いる。

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ c^* (a - b) \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle + \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \right\} \quad (6.3.15)$$

$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ c^* (a - b) \right\}$ が値をもつ基本ターゲット（ワイヤ, diplane, plate, helix）を探すとHelixしか存在しない。

$$\text{右回りHelixでは} \quad [S]_{r-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{j}{2} \left(\frac{1+1}{2} \right) \right\} = \frac{1}{4} \quad (6.3.16)$$

$$\text{左回りHelixでは} \quad [S]_{l-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{-j}{2} \left(\frac{1+1}{2} \right) \right\} = -\frac{1}{4} \quad (6.3.17)$$

となり、その電力寄与は単位電力の $\frac{1}{4}$ の大きさを持っている。(37)右辺から得られる値を電力 f_c をもつHelix（円偏波発生電力源）による値と考えると、 $\frac{f_c}{4}$ 分が $\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle + \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle \right\}$ に現れていると考えることができる。

$$\boxed{\frac{f_c}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle + \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\}} \quad (6.3.18)$$

このように割り当てると、従来考慮されていない項目 $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \neq 0$ 、 $\langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \neq 0$ を評価でき、そしてこの項の大きさから円偏波発生電力を考えることができる。

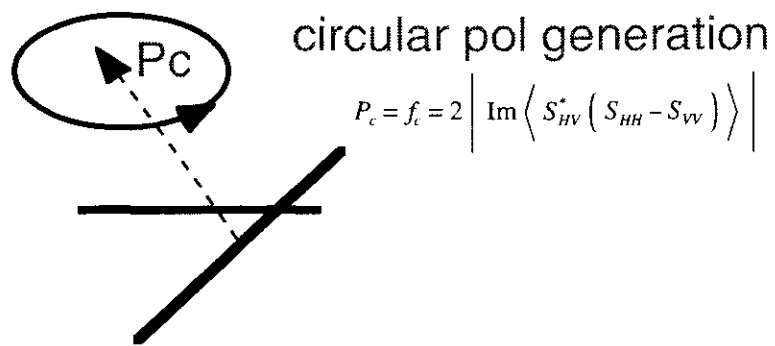


図6.3 円偏波発生とその電力

右回り円偏波 $\text{Im} \left\{ \left\langle S_{HH} S_{HV}^* \right\rangle + \left\langle S_{HV} S_{VV}^* \right\rangle \right\} > 0$

左回り円偏波 $\text{Im} \left\{ \left\langle S_{HH} S_{HV}^* \right\rangle + \left\langle S_{HV} S_{VV}^* \right\rangle \right\} < 0$

6.4 確率密度関数の変更

次に、垂直に立っている幹・枝が最も多い植生の分布を想定して、確率密度関数を

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin \theta & \text{for } 0 < \theta < \pi \\ 0 & \text{for } \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \quad \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = 1 \quad (6.4.1)$$

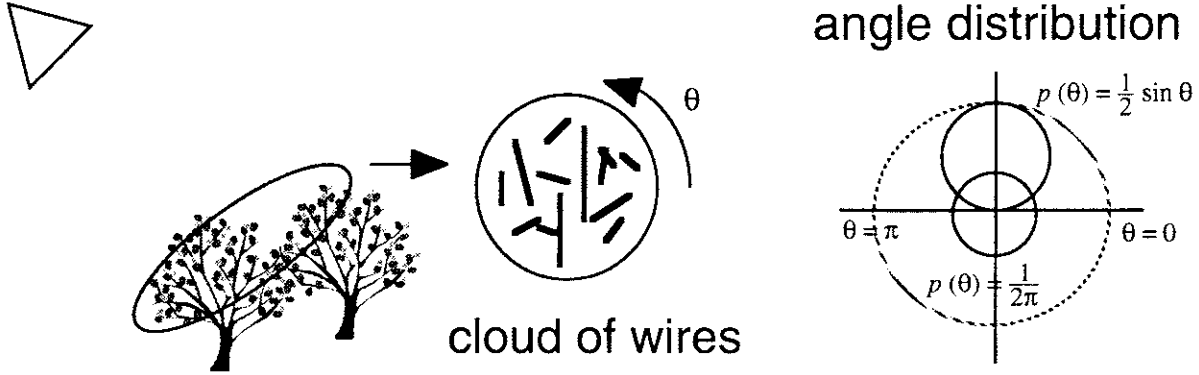


図6.4 植生の確率密度関数

と仮定した場合、体積散乱モデルのCovariance行列要素を求めておく。この確率密度関数による積分値は

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = \frac{3}{15} \\ I_2 &= \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^4 \theta \sin \theta d\theta = \frac{8}{15} \\ I_3 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 2\theta \sin \theta d\theta = \frac{8}{15} \\ I_4 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{15} \\ I_5 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin 2\theta \sin \theta d\theta = 0 \\ I_6 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sin 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \sin 2\theta \sin \theta d\theta = 0 \\ I_7 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 2\theta \sin \theta d\theta = \frac{7}{15} \\ I_8 &= \int_0^{2\pi} \sin 2\theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2\theta \cos 2\theta \sin \theta d\theta = 0 \\ I_9 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos 2\theta \sin \theta d\theta = -\frac{6}{15} \\ I_{10} &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \cos 2\theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{15} \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

となるので、数式的に平均化した要素

$$\begin{aligned} \langle |S_{hh}|^2 \rangle &= |a|^2 I_1 + |b|^2 I_2 + |c|^2 I_3 + 2 \operatorname{Re}(a b^*) I_4 \\ \langle |S_{vv}|^2 \rangle &= |a|^2 I_2 + |b|^2 I_1 + |c|^2 I_3 + 2 \operatorname{Re}(a b^*) I_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle |S_{hv}|^2 \rangle &= \frac{|b-a|^2}{4} I_3 + |c|^2 I_7 \\
\langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \left(|a|^2 + |b|^2 \right) I_4 - |c|^2 I_3 + ab^* I_1 + a^* b I_2 \\
\langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= c \frac{b^* - a^*}{2} I_3 + a c^* I_{10} + b c^* I_9 \\
\langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= -c^* \frac{b-a}{2} I_3 + c a^* I_9 + b^* c I_{10}
\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

に代入して次の結果が得られる.

$$\begin{aligned}
\langle |S_{hh}|^2 \rangle &= \frac{3}{15} |a|^2 + \frac{8}{15} |b|^2 + \frac{8}{15} |c|^2 + \frac{4}{15} \text{Re}(ab^*) && \text{実数} \\
\langle |S_{vv}|^2 \rangle &= \frac{8}{15} |a|^2 + \frac{3}{15} |b|^2 + \frac{8}{15} |c|^2 + \frac{4}{15} \text{Re}(ab^*) && \text{実数} \\
\langle |S_{hv}|^2 \rangle &= \frac{2}{15} |a-b|^2 + \frac{7}{15} |c|^2 && \text{実数} \\
\langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \frac{2}{15} \left(|a|^2 + |b|^2 - 4|c|^2 \right) + \frac{8}{15} a^* b + \frac{3}{15} ab^* && \text{複素数} \\
\langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= \frac{4}{15} c (b^* - a^*) + \frac{1}{15} c^* a - \frac{6}{15} c^* b && \text{複素数} \\
\langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= \frac{4}{15} c^* (b-a) + \frac{1}{15} b^* c - \frac{6}{15} a^* c && \text{複素数}
\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

θ は水平方向からの角度を想定しているので, 基本ワイヤとして

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{を選べば} \quad \langle [C] \rangle_{\text{wire}}^{hv} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \tag{6.4.5}$$

となる. また

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{を選べば} \quad \langle [C] \rangle_{\text{wire}}^{hv} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{6.4.6}$$

が得られる. ここでは物理的な考察から(6.4.6)を採用する. (6.4.6)を一見すると, 垂直ワイヤが多いにも関わらず, hhの反射強度が大きいことに矛盾を感じずようにも思われる. しかし, Durden, Freeman氏の論文でも, 森からの散乱としてL- CバンドではHHの後方散乱が強いことが示されており, 実験事実とも一致している. Pi-SARによる苫小牧森林データもHHの後方散乱が強いことが示されている.

なお, 参考までに角度分布関数を $\frac{1}{2} \sin \theta$ に変更するとCovariance行列の非対角項は

$$\begin{aligned}
\langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \frac{2}{15} \left(|a|^2 + |b|^2 - 4|c|^2 \right) + \frac{8}{15} a^* b + \frac{3}{15} ab^* \\
\langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle + \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= j \frac{2}{3} \text{Im} \left[c^* (a-b) \right] - \frac{1}{3} (bc^* + a^* c)
\end{aligned}$$

と複素数となる. 上記の場合は $[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と選んでいるので結果的には実数になるが, 単純な形の散乱行列でない場合には, 複素数として現れてくることが分かる. また, 相関係数も複素数となる. したがって, 角度分布関数を変更するだけでCovariance行列の非対角項は実数にも複素数にもなり得ることに注意が必要である.

注) 参考

もし、分布関数を

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \theta & \text{for } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

と選んだ場合、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta \cos \theta d\theta = \frac{8}{15} \\ I_2 &= \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos \theta d\theta = \frac{3}{15} \\ I_3 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\theta \cos \theta d\theta = \frac{8}{15} \\ I_4 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos \theta d\theta = \frac{2}{15} \\ I_5 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin 2\theta \cos \theta d\theta = 0 \\ I_6 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sin 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \sin 2\theta \cos \theta d\theta = 0 \\ I_7 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 2\theta \cos \theta d\theta = \frac{7}{15} \\ I_8 &= \int_0^{2\pi} \sin 2\theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2\theta \cos 2\theta \cos \theta d\theta = 0 \\ I_9 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos 2\theta \cos \theta d\theta = -\frac{1}{15} \\ I_{10} &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cos 2\theta p(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \cos 2\theta \cos \theta d\theta = \frac{6}{15} \end{aligned}$$

なので、平均化Covariance行列の要素は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle |S_{hh}|^2 \rangle &= \frac{8}{15} |a|^2 + \frac{3}{15} |b|^2 + \frac{8}{15} |c|^2 + \frac{4}{15} \text{Re}(ab^*) \\ \langle |S_{vv}|^2 \rangle &= \frac{3}{15} |a|^2 + \frac{8}{15} |b|^2 + \frac{8}{15} |c|^2 + \frac{4}{15} \text{Re}(ab^*) \\ \langle |S_{hv}|^2 \rangle &= \frac{2}{15} |a-b|^2 + \frac{7}{15} |c|^2 \\ \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \frac{2}{15} (|a|^2 + |b|^2 - 4|c|^2) + \frac{3}{15} a^* b + \frac{8}{15} a b^* \\ \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= \frac{4}{15} c (b^* - a^*) + \frac{6}{15} a c^* - \frac{1}{15} b c^* \\ \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= \frac{4}{15} c^* (a - b) + \frac{6}{15} b^* c - \frac{1}{15} c a^* \\ \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle + \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= j \frac{2}{3} \text{Im} [c^* (a - b)] + \frac{1}{3} (c b^* + c^* a) \end{aligned}$$

θ は水平方向からの角度を想定しているので、基本ワイヤとして

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{を選べば} \quad \langle [C] \rangle_{\text{wire}}^{hv} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

となる。また

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{を選べば} \quad \langle [C] \rangle_{\text{wire}}^{hv} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

が得られる。この形式はH-wireに対してHH成分、V-wireに対してVV成分が強くなるように、分布関

数を選んだものである.

分布関数の選び方にもよるが, 結果的にwireの集合平均は3通りになる.

$$\langle [C] \rangle_{wire}^{hv} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \langle [C] \rangle_{wire}^{hv} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \langle [C] \rangle_{wire}^{hv} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

そこで, 実際の植生に対応できるように, $\langle |S_{HH}|^2 \rangle$, $\langle |S_{VV}|^2 \rangle$ の大きさを考慮して選べるようにしておくことが考えられる.

分ける基準は $10 \log \left(\frac{8}{3} \right) = 4.26 \text{ dB}$ となるので, 2 dBを基準に図のように分けられたいであろう.

体積散乱Covarianceの選び方

$10 \log \frac{\langle S_{VV} ^2 \rangle}{\langle S_{HH} ^2 \rangle}$	- 4 dB	- 2 dB	0 dB	2 dB	4 dB
$\langle [C] \rangle_{vol}^{hv} =$	$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$		

6.5 物理散乱モデルによる平均化Covariance行列

観測された平均化Covariance行列を，簡単な物理散乱モデルに基づいて展開する．物理散乱モデルとしてランダムワイヤからなる体積散乱電力，コーナーリフレクタからの2回反射散乱電力，平地からの表面散乱電力，そして円偏波発生電力を考慮する．

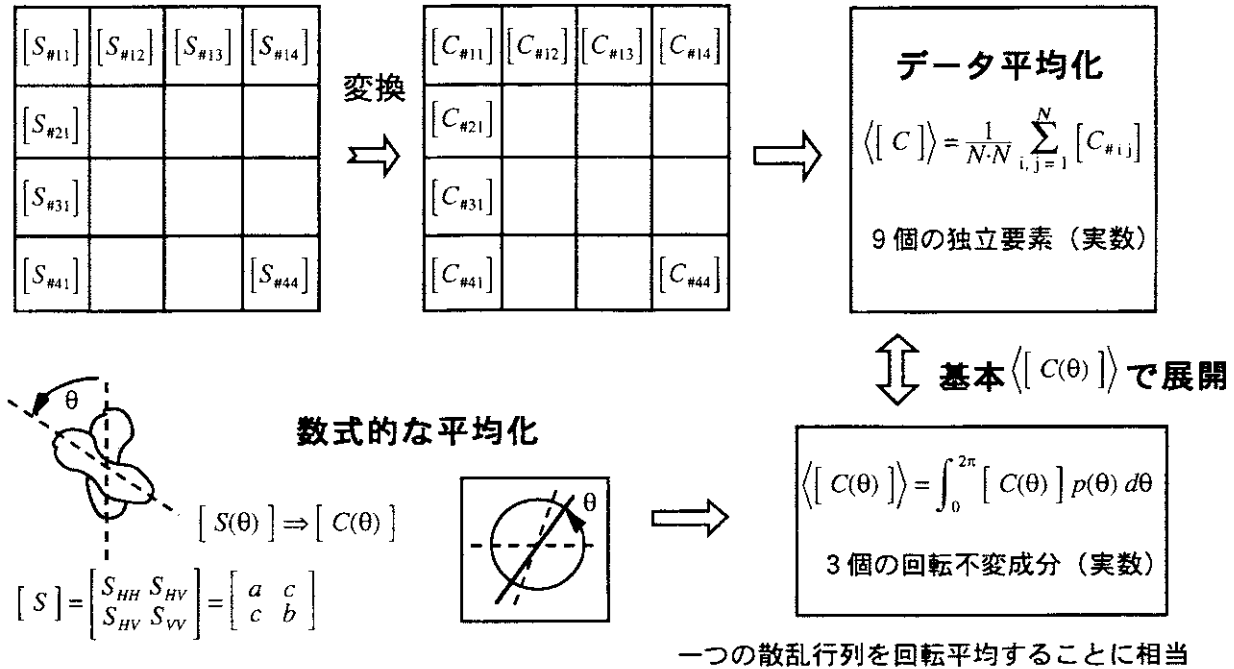


図6.5 モデル展開原理

■体積散乱モデルの基本Covariance行列

ランダムワイヤからなる体積散乱に対して平均化Covariance行列として

$$\text{確率密度関数 } p(\theta) = p = \frac{1}{2\pi} \text{ のとき, } \quad \langle [C] \rangle_{vol}^{hv} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (6.5.1)$$

$$\text{確率密度関数 } p(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta \text{ の場合, } \quad \langle [C] \rangle_{vol}^{hv} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (6.5.2)$$

を採用する．

■2回反射モデルの基本Covariance行列

2回反射のモデルは2面のコーナーリフレクタであるが，必ずしも面を構成している媒質が金属とは限らない．例えば，地面と木の幹によって構成される2回反射構造などが該当する．木から構成される垂直面の反射係数を R_v ，地面の反射係数を R_g （フレネルの反射係数），水平偏波でそれぞれ， R_{th} ， R_{gh} とする．また，植生を透過する際に位相回転や減衰を受けるので，その影響を伝搬定数 γ_v ， γ_h に取り込む．2回反射成分のhhとvvは必ずしも位相差が180度だけ変化しているとは限らない．これらを

考慮して複素数 α を導入すると、散乱行列は以下のようにモデル化できるであろう。

$$[S]_{tree} \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{j2\gamma_h} R_{gh} R_{th} & 0 \\ 0 & e^{j2\gamma_v} R_{gv} R_{tv} \end{bmatrix} = e^{j2\gamma_v} R_{gv} R_{tv} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5.3)$$

$$\alpha = e^{j2(\gamma_h - \gamma_v)} \frac{R_{gh} R_{th}}{R_{gv} R_{tv}} \propto \frac{S_{hh}}{S_{vv}} \quad (\text{Copol ratioの逆数}) \quad (6.5.4)$$

この2回反射構造は角度 θ に対して植生のようにランダムとはならないので、角度に対する積分は行わない。2次統計量は正規化の後、

$$\begin{aligned} \langle |S_{hh}|^2 \rangle &= |\alpha|^2, & \langle |S_{vv}|^2 \rangle &= 1, & \langle |S_{hv}|^2 \rangle &= 0, \\ \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \alpha, & \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= 0, & \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= 0 \end{aligned}$$

で与えられる。その結果、集合平均Covariance行列は次のように書ける。

$$\langle [C] \rangle_{double}^{hv} = \begin{bmatrix} \langle |S_{hh}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle & \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{hh}^* \rangle & 2 \langle |S_{hv}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle \\ \langle S_{vv} S_{hh}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{vv} S_{hv}^* \rangle & \langle |S_{vv}|^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5.6)$$

$\langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle = \alpha$ の位相は 180° とは限らないが、diplaneの散乱を想定するとその近くになるであろう。

待て！ このモデルは誘電体コーナーリフレクタの実験データと一致しない。誘電体コーナーリフレクタではhh成分の方が大きい。逆に以下の方法が良いのではないか？

$$[S]_{tree} \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{j2\gamma_h} R_{gh} R_{th} & 0 \\ 0 & e^{j2\gamma_v} R_{gv} R_{tv} \end{bmatrix} = e^{j2\gamma_h} R_{gh} R_{th} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (6.5.7)$$

$$\alpha = e^{j2(\gamma_v - \gamma_h)} \frac{R_{gv} R_{tv}}{R_{gh} R_{th}} \propto \frac{S_{vv}}{S_{hh}} \quad (\text{Copol ratio}) \quad (6.5.8)$$

この2回反射構造は角度 θ に対して植生のようにランダムとはならないので、角度に対する積分は行わない。2次統計量は正規化の後、

$$\begin{aligned} \langle |S_{hh}|^2 \rangle &= 1, & \langle |S_{vv}|^2 \rangle &= |\alpha|^2, & \langle |S_{hv}|^2 \rangle &= 0, \\ \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \alpha^*, & \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= 0, & \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= 0 \end{aligned}$$

で与えられる。その結果、平均Covariance行列は次のように書ける。

$$\langle [C] \rangle_{double}^{hv} = \begin{bmatrix} \langle |S_{hh}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle & \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{hh}^* \rangle & 2 \langle |S_{hv}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle \\ \langle S_{vv} S_{hh}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{vv} S_{hv}^* \rangle & \langle |S_{vv}|^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha^* \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & |\alpha|^2 \end{bmatrix} \quad (6.5.9)$$

$\langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle = \alpha$ の位相は 180° とは限らないが、diplaneの散乱を想定するとその近くになるであろう。

■表面散乱モデルの基本Covariance行列

表面散乱に対して、1次Bragg反射モデルを使い、散乱行列を

$$[S]_{surface} \Rightarrow \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5.10)$$

とおく。表面も角度 θ に対してランダムな向きにはならないので、平均Covariance行列は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \langle |S_{hh}|^2 \rangle &= |\beta|^2, & \langle |S_{vv}|^2 \rangle &= 1, & \langle |S_{hv}|^2 \rangle &= 0 \\ \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \beta, & \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= 0, & \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\langle [C] \rangle_{surface}^{hv} = \begin{bmatrix} |\beta|^2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^* & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5.11)$$

■円偏波発生電力

Covariance行列の c_{12}, c_{23} 成分に現れる値を使い、Helixから発生する電力 f_c を次のように割り当てる。

$$\frac{f_c}{4} = \frac{1}{2} \left| \text{Im} \left\langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle \right| \quad (6.5.12)$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \left\langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle > 0 & \quad \text{では 右回り円偏波} \\ \text{Im} \left\langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle < 0 & \quad \text{では 左回り円偏波} \end{aligned}$$

このように割り当てると、従来考慮されていない項目 $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \neq 0, \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \neq 0$ を評価でき、この項の大きさから直接に円偏波発生電力を考えることができる。

注) Freeman & Durdenの展開方法は単純に計算が実行でき、なお物理モデルに基づいているので、比較的实际のSAR画像と地上ターゲットの相関がよい特徴がある。しかし、この展開方法は以下の4つの欠点がある。

1. $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \neq 0, \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \neq 0$ の場合は対応できない。
2. $P_v = 8 \langle |S_{HV}|^2 \rangle$ であり、HV成分は必ず体積散乱になってしまう。市街地などで必ずしも体積散乱だけでなく、交差偏波の発生が多いので物理現象と一致しない。
3. $\text{Re}(S_{HH} S_{VV}^*)$ が負の場合に (double bounceが主と想定して) $\beta = 1$ を設定
 $\text{Re}(S_{HH} S_{VV}^*)$ が正の場合に (surface scatteringが主と想定して) $\alpha = -1$ を設定
 など、強制的に変数を指定している。この値は金属ターゲットに相当するが、実際は誘電体である。
4. 未知数の f が負の値になることがある。散乱電力の寄与がマイナスを意味する。論文ではこの項目を0とみなして計算を行っている。

6.6 四成分分解法

市街地などで体積散乱だけでなく、交差偏波の発生が多い。そこで $\langle S_{HH}S_{HV}^* \rangle \neq 0$, $\langle S_{VV}S_{HV}^* \rangle \neq 0$ の場合にも対応できるように、Covariance 行列にHelixによる寄与（円偏波発生）を加え、観測Covariance行列を四成分（表面散乱，2回反射，体積散乱，円偏波発生電力）で展開する。図6.6にCovariance 行列による四成分分解の組み合わせを示す。四成分分解では、体積散乱は確率密度関数，2回反射は基本展開の違いにより、選択の余地がある。どの組み合わせで展開するかは、対象としているシーンにも依存するが、成分の求め方は同じなので太線の代表例を示す。

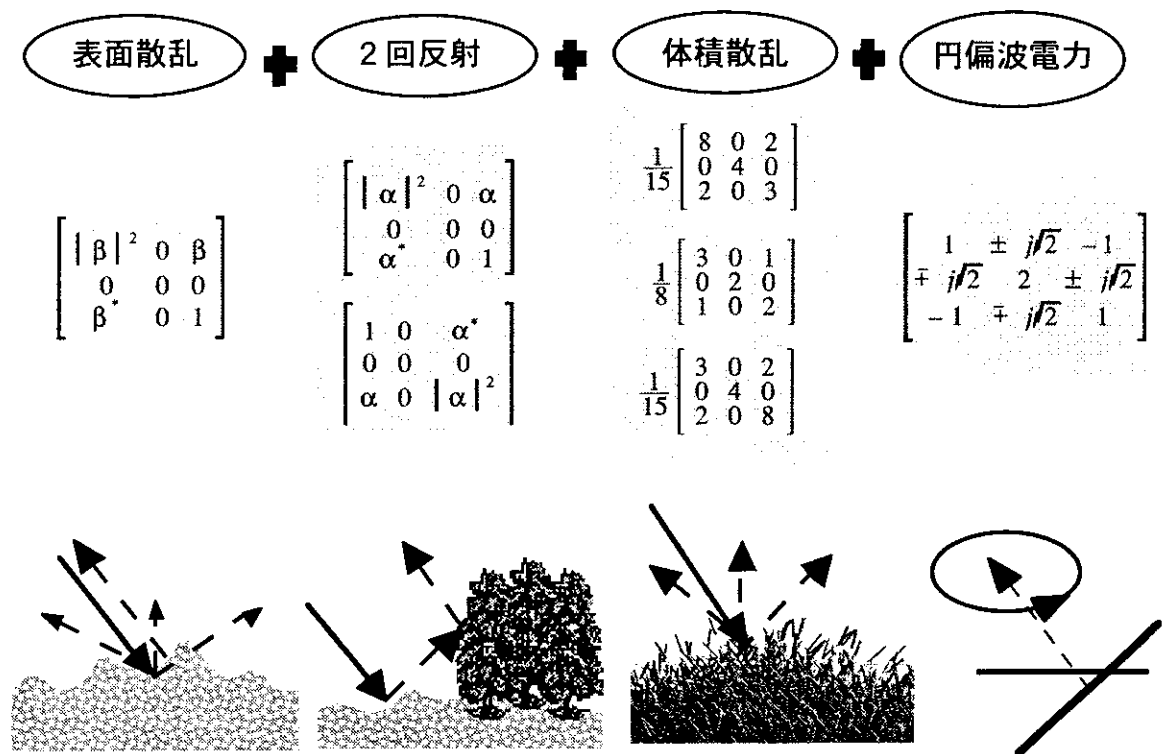


図6.6 Covariance 行列による四成分分解

★確率密度関数 $p(\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta$ の場合 （体積散乱で $\sigma_{HH} > \sigma_{VV}$ の場合）

$$\langle [C] \rangle^{HV} = f_s \langle [C] \rangle_{surface}^{HV} + f_d \langle [C] \rangle_{double}^{HV} + f_v \langle [C] \rangle_{vol}^{HV} + f_c \langle [C] \rangle_{circular}^{HV} \quad : \text{四成分散乱モデル}$$

$$= f_s \begin{bmatrix} |\beta|^2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + f_d \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f_v}{15} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \frac{f_c}{4} \begin{bmatrix} 1 & \pm j\sqrt{2} & -1 \\ \mp j\sqrt{2} & 2 & \pm j\sqrt{2} \\ -1 & \mp j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle |S_{HH}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle & \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{HV} S_{HH}^* \rangle & 2 \langle |S_{HV}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \\ \langle S_{VV} S_{HH}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle & \langle |S_{VV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \quad \text{観測値 (HVの記号を使う)} \quad (6.6.1)$$

ただし、 f_s , f_d , f_v , f_c は電力に関する未定定数である。また、 α , β は相対要素（未知数）である。Covariance 行列の要素を比較し、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
C_{11} \text{ 成分} & \quad \langle |S_{HH}|^2 \rangle = f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 + \frac{8}{15} f_v + \frac{f_c}{4} \\
C_{22} \text{ 成分} & \quad \langle |S_{HV}|^2 \rangle = \frac{2f_v}{15} + \frac{f_c}{4} \\
C_{33} \text{ 成分} & \quad \langle |S_{VV}|^2 \rangle = f_s + f_d + \frac{3}{15} f_v + \frac{f_c}{4} \\
C_{13} \text{ 成分} & \quad \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle = f_s \beta + f_d \alpha + \frac{2f_v}{15} - \frac{f_c}{4} \\
\text{ただし } C_{12}, C_{23} \text{ で} & \quad j \frac{f_c}{4} = \frac{1}{2} \left\{ \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle + \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \right\}, \quad \frac{f_c}{4} = \frac{1}{2} \text{Im} \left\{ \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle + \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \right\} \quad (6.6.2)
\end{aligned}$$

未定定数の決定： $f_s, f_d, f_v, f_c, \alpha, \beta$ について

$$\begin{aligned}
1. \quad \frac{f_c}{4} &= \frac{1}{2} \left| \text{Im} \left\{ \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle + \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \right\} \right| = \frac{1}{2} \left| \text{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \right| \text{ により直接 } \frac{f_c}{4} \text{ を求める.} \\
f_c &= 2 \left| \text{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \right| \quad (6.6.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Im} \left\{ \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle + \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle \right\} > 0 \text{ なら 右回り円偏波の発生 r-helix} \\
& \text{Im} \left\{ \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle + \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle \right\} < 0 \text{ なら 左回り円偏波の発生 l-helix} \\
2. \quad \langle |S_{hv}|^2 \rangle - \frac{f_c}{4} &= \frac{2f_v}{15} \text{ により直接 } f_v \text{ を求める.} \quad f_v = \frac{15}{2} \left(\langle |S_{hv}|^2 \rangle - \frac{f_c}{4} \right) \quad (6.6.4)
\end{aligned}$$

$$\text{その結果} \quad f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 = \langle |S_{HH}|^2 \rangle - \frac{8}{15} f_v - \frac{f_c}{4} = A \quad (\text{右辺は既知量}) \quad (6.6.5a)$$

$$f_s + f_d = \langle |S_{VV}|^2 \rangle - \frac{3}{15} f_v - \frac{f_c}{4} = B \quad (\text{右辺は既知量}) \quad (6.6.5b)$$

$$f_s \beta + f_d \alpha = \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle - \frac{2f_v}{15} + \frac{f_c}{4} = C \quad (\text{右辺は既知量}) \quad (6.6.5c)$$

(6.6.5)の3本の方程式に対して未知数が4つ $(\alpha, \beta, f_s, f_d)$ になるので,

$\text{Re} \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle$ が負の場合に (double bounceが主と想定して) $\beta = 1$ を設定

$\text{Re} \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle$ が正の場合に (surface scatteringが主と想定して) $\alpha = -1$ を設定

して, 未定定数を決定する. (詳細は付録6.6を参照)

$$\begin{aligned}
\text{Re} \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle < 0 \text{ では } \beta &= 1, \quad f_s = \frac{A B - |C|^2}{A + B - 2 \text{Re}(C)}, \quad f_d = B - f_s, \quad \alpha = \frac{C - f_s}{f_d} \\
\text{Re} \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle > 0 \text{ では } \alpha &= -1, \quad f_d = \frac{A B - |C|^2}{A + B + 2 \text{Re}(C)}, \quad f_s = B - f_d, \quad \beta = \frac{C + f_d}{f_s} \quad (6.6.6)
\end{aligned}$$

最終的に表面散乱電力 P_s , 2回反射電力 P_d , 体積散乱電力 P_v , 円偏波発生電力 P_c , と全電力 P (Span) には以下の関係がある.

$$\begin{aligned}
P_c &= f_c = 2 \left| \text{Im} \left\{ S_{HH} S_{HV}^* + S_{HV} S_{VV}^* \right\} \right| = 2 \left| \text{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \right| \\
P_v &= f_v = \frac{15}{2} \left(\langle |S_{HV}|^2 \rangle - \frac{1}{4} f_c \right) = 7.5 \left(\langle |S_{HV}|^2 \rangle - \frac{15}{8} P_c \right) \\
P_s &= f_s (1 + |\beta|^2), \quad P_d = f_d (1 + |\alpha|^2) \\
P &= P_s + P_d + P_v + P_c = \text{Trace} \left\{ [C] \right\}^{HV} = \langle |S_{HH}|^2 + 2 |S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 \rangle \quad (6.6.7)
\end{aligned}$$

★確率密度関数 $p(\theta) = p = \frac{1}{2\pi}$ の場合 (体積散乱で $\sigma_{HH} = \sigma_{VV}$ の場合)

$$\begin{aligned} \langle [C] \rangle^{HV} &= f_s \langle [C] \rangle_{surface}^{hv} + f_d \langle [C] \rangle_{double}^{hv} + f_v \langle [C] \rangle_{vol}^{hv} + f_c \langle [C] \rangle_{circular}^{hv} \\ &= f_s \begin{bmatrix} |\beta|^2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + f_d \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f_v}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \frac{f_c}{4} \begin{bmatrix} 1 & \pm j\sqrt{2} & -1 \\ \mp j\sqrt{2} & 2 & \pm j\sqrt{2} \\ -1 & \mp j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.6.8)$$

要素比較

$$\begin{aligned} C_{12} \text{ より} \quad \frac{f_c}{4} &= \frac{1}{2} \left| \text{Im} \left\{ \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle + \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \right\} \right| = \frac{1}{2} \left| \text{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \right| \\ C_{22} \text{ より} \quad f_v &= 8 \left(\langle |S_{HV}|^2 \rangle - \frac{f_c}{4} \right) \\ C_{11} \text{ より} \quad f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 &= \langle |S_{HH}|^2 \rangle - \frac{3}{8} f_v - \frac{f_c}{4} = A \quad (\text{右辺は既知量}) \\ C_{33} \text{ より} \quad f_s + f_d &= \langle |S_{VV}|^2 \rangle - \frac{3}{8} f_v - \frac{f_c}{4} = B \quad (\text{右辺は既知量}) \\ C_{13} \text{ より} \quad f_s \beta + f_d \alpha &= \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle - \frac{f_v}{8} + \frac{f_c}{4} = C \quad (\text{右辺は既知量}) \end{aligned} \quad (6.6.9)$$

と展開して同様な手順で散乱電力を求めることができる。(ほとんど変わらない結果となる)

$$\begin{aligned} \text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*) < 0 \text{ では} \quad \beta &= 1, \quad f_s = \frac{AB - |C|^2}{A + B - 2 \text{Re}(C)}, \quad f_d = B - f_s, \quad \alpha = \frac{C - f_s}{f_d} \\ \text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*) > 0 \text{ では} \quad \alpha &= -1, \quad f_d = \frac{AB - |C|^2}{A + B + 2 \text{Re}(C)}, \quad f_s = B - f_d, \quad \beta = \frac{C + f_d}{f_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{散乱電力} \quad P_c &= f_c = 2 \left| \text{Im} \left\{ S_{HH} S_{HV}^* + S_{HV} S_{VV}^* \right\} \right| = 2 \left| \text{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \right| \\ P_v &= f_v = 8 \left(\langle |S_{HV}|^2 \rangle - 2 P_c \right) = 8 \left(\langle |S_{HV}|^2 \rangle - 4 \left| \text{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \right| \right) \\ P_s &= f_s \left(1 + |\beta|^2 \right) \quad P_d = f_d \left(1 + |\alpha|^2 \right) \end{aligned} \quad (6.6.10)$$

さらに、強制的に最初から $f_c = 0$ とおくことにより A. Freeman の展開モデルと一致する。

四成分散乱モデルで分解した例を以下の図6.7、6.8に示す。

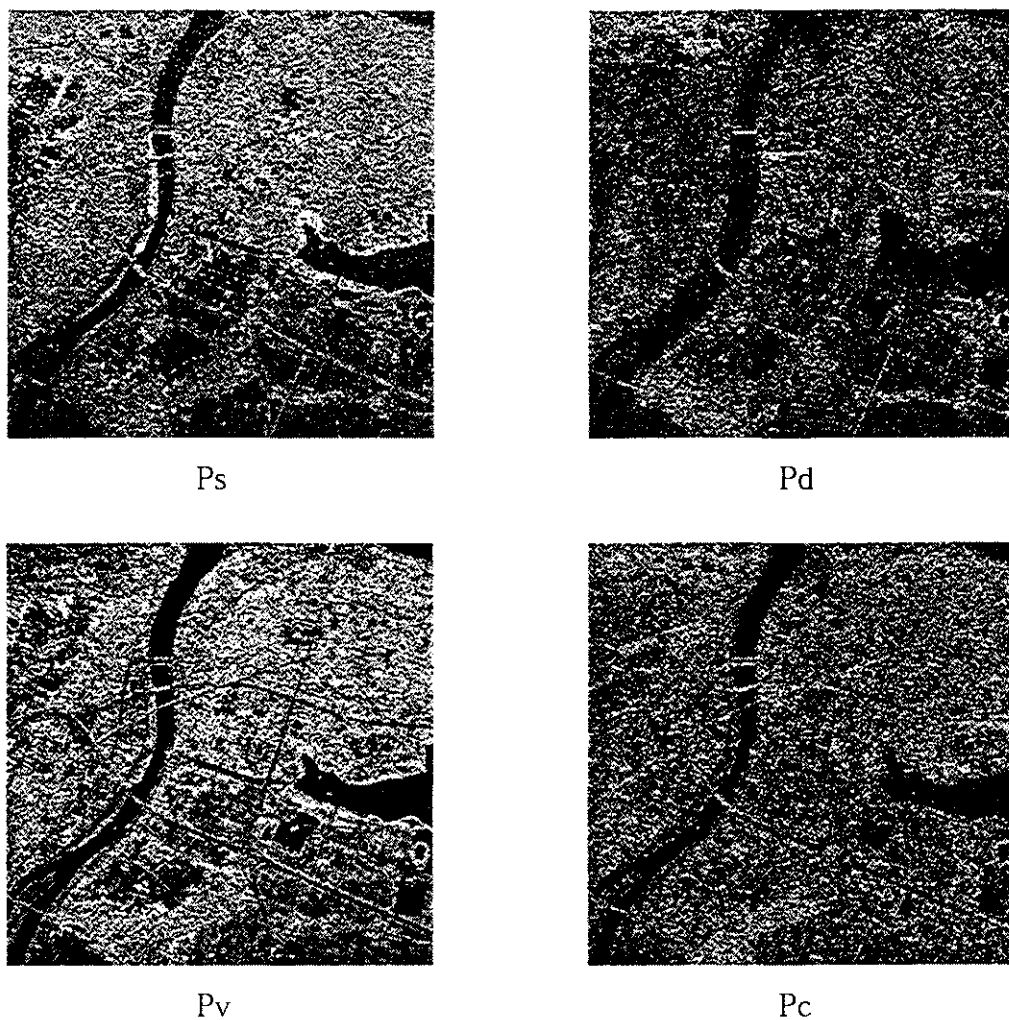


図6.7 四成分散乱モデル分解結果（Xバンド）

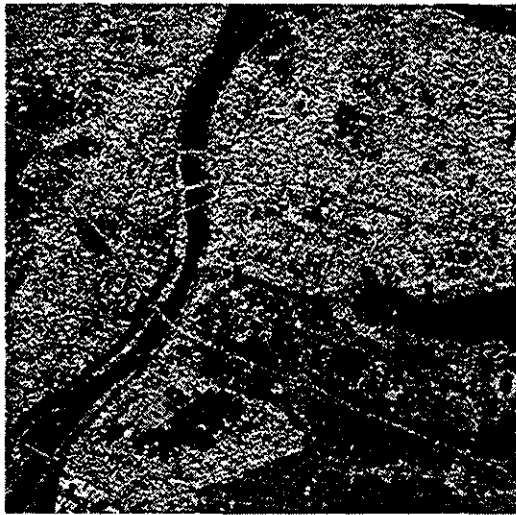
市街地、人工物体からPc成分が多く現れていることが分かる。また、Xバンドのデータのため、表面散乱成分Psが強く、体積散乱成分も植生があるところでは強く現れている。2回反射成分はレーダビームと直交している場所では比較的強く現れているが、直交していない場所では弱いので、妥当な結果と思われる。



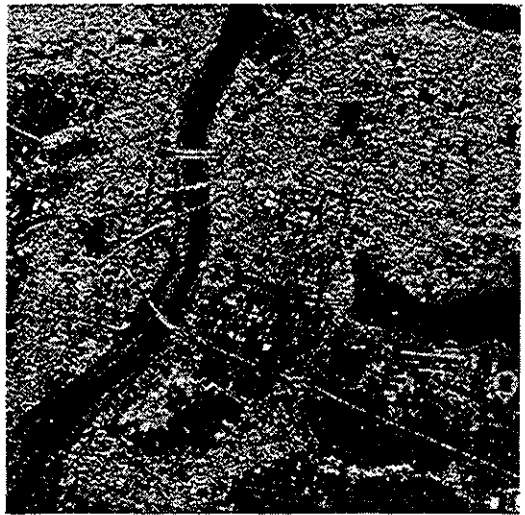
Ps



Pd



Pv



Pc

図6.8 四成分散乱モデル分解結果 (Lバンド)
2003年8月20日 鳥屋野潟周辺 L-bandのPi-SAR画像
平均化サイズ 5×5

2 回反射の展開行列を変更した場合

実データから β は 1 の近く、 α は -0.3 の近く、 $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ を想定して 2 回反射の Covariance 行列を変更したモデルも考えられる。

$$\begin{aligned} \langle [C] \rangle^{HV} &= f_s \langle [C] \rangle_{surface}^{hv} + f_d \langle [C] \rangle_{double}^{hv} + f_v \langle [C] \rangle_{vol}^{hv} + f_c \langle [C] \rangle_{circular}^{hv} \quad : 4 \text{ 成分散乱モデル} \\ &= f_s \begin{bmatrix} |\beta|^2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + f_d \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha^* \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & |\alpha|^2 \end{bmatrix} + \frac{f_v}{15} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \frac{f_c}{4} \begin{bmatrix} 1 & \pm j\sqrt{2} & -1 \\ \mp j\sqrt{2} & 2 & \pm j\sqrt{2} \\ -1 & \mp j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad \text{表面散乱} \qquad \qquad \text{2 回反射} \qquad \qquad \text{体積散乱} \qquad \qquad \text{円偏波} \end{aligned}$$

要素に対して次の式が成り立つ。

$$f_s |\beta|^2 + f_d = A = \langle |S_{HH}|^2 \rangle - \frac{8}{15} f_v - \frac{f_c}{4} \quad \text{右辺Aは分解方法によって変わる実数値} \quad (1)$$

$$f_s + f_d |\alpha|^2 = B = \langle |S_{VV}|^2 \rangle - \frac{3}{15} f_v - \frac{f_c}{4} \quad \text{右辺Bは分解方法によって変わる実数値} \quad (2)$$

$$f_s \beta + f_d \alpha^* = C = \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle - \frac{2}{15} f_v + \frac{f_c}{4} \quad \text{右辺Cは分解方法によって変わる複素数} \quad (3)$$

$$\text{ただし} \quad f_c = 2 \left| \text{Im} \langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \rangle \right|$$

$$P_v = f_v = \frac{15}{2} \left(\langle |S_{HV}|^2 \rangle - \frac{f_c}{4} \right) = \frac{15}{2} \left(\langle |S_{HV}|^2 \rangle - \frac{1}{2} \left| \text{Im} \langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \rangle \right| \right)$$

未定定数の求め方に関しては付録6.6を参照

このように、展開する Covariance 行列を変えることによって多くのモデルが構築できる。

どの展開方法が最も良いかは、実際のデータで調べてみる必要がある。

6.7 四成分分解法の適用範囲とアルゴリズム

4成分分解は、三成分分解に円偏波成分を加えたもので、実際のSAR画像への適用性はどの程度効果があるかを調べておかななくてはならない。分解法以前にSAR画像で統計的に知られていることは

$$\cdot \text{Co-Pol : X-Pol電力比は } \langle |S_{HH}|^2 \rangle : \langle |S_{HV}|^2 \rangle = 2 : 1 \text{ 程度}$$

Jian Yang, Ph.D dissertation, "On theoretical problems in radar polarimetry," Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Japan, 2000.

Y. Ke, "Notes on invariant characters of radar cross sections," 2001 CIE Int'l Conference on Radar Proc., pp.418-422, Oct. 2001.

$$\cdot \langle |S_{HH}|^2 \rangle, \langle |S_{VV}|^2 \rangle > \langle |S_{HV}|^2 \rangle$$

・森林などではHV成分が比較的強い。

もし、4成分分解を直接当てはめると、

$$P_c = 2 \left| \text{Im} \left\langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle \right|$$

により円偏波電力 P_c が最初に決まる。その後

$$P_v = \frac{15}{4} \left(2 \langle |S_{HV}|^2 \rangle - \left| \text{Im} \left\langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle \right| \right)$$

により体積散乱電力が求まる。

しかし、 $\frac{15}{2} \langle |S_{HV}|^2 \rangle$ に近い電力が割り当てられていることになる。時には大きすぎる。

このことが原因で、残りの f_s , f_d が時としてマイナスの値になることが出てくる。物理的に矛盾することである。これを回避するために統計的に知られている上記の事柄を分解アルゴリズムに加える。

$$2 \langle |S_{HV}|^2 \rangle \leq \langle |S_{HH}|^2 \rangle, \langle |S_{VV}|^2 \rangle \quad \text{にて } P_v \text{ (fv) が大きくなりすぎないようにする。}$$

$2 \langle |S_{HV}|^2 \rangle < \langle |S_{HH}|^2 \rangle, \langle |S_{VV}|^2 \rangle$ の場合は4成分分解

$2 \langle |S_{HV}|^2 \rangle > \langle |S_{HH}|^2 \rangle, \langle |S_{VV}|^2 \rangle$ の場合は、3成分分解（実際は2成分分解）に移行する

これは、受け入れられる条件のように思われる。

また、 $\langle |S_{HH}|^2 \rangle$ と $\langle |S_{VV}|^2 \rangle$ の大小関係により、森林の分布を考慮して適切なCovariance行列を選ぶようにする。 $10 \log \frac{8}{3} = 4.26 \text{ dB}$ なので、2 dB刻みで実測データに対応する体積散乱Covarianceを選ぶ。

- 4 dB	- 2 dB	0 dB	2 dB	4 dB
$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$	

その結果、分類アルゴリズムはフローチャートのようなになる。

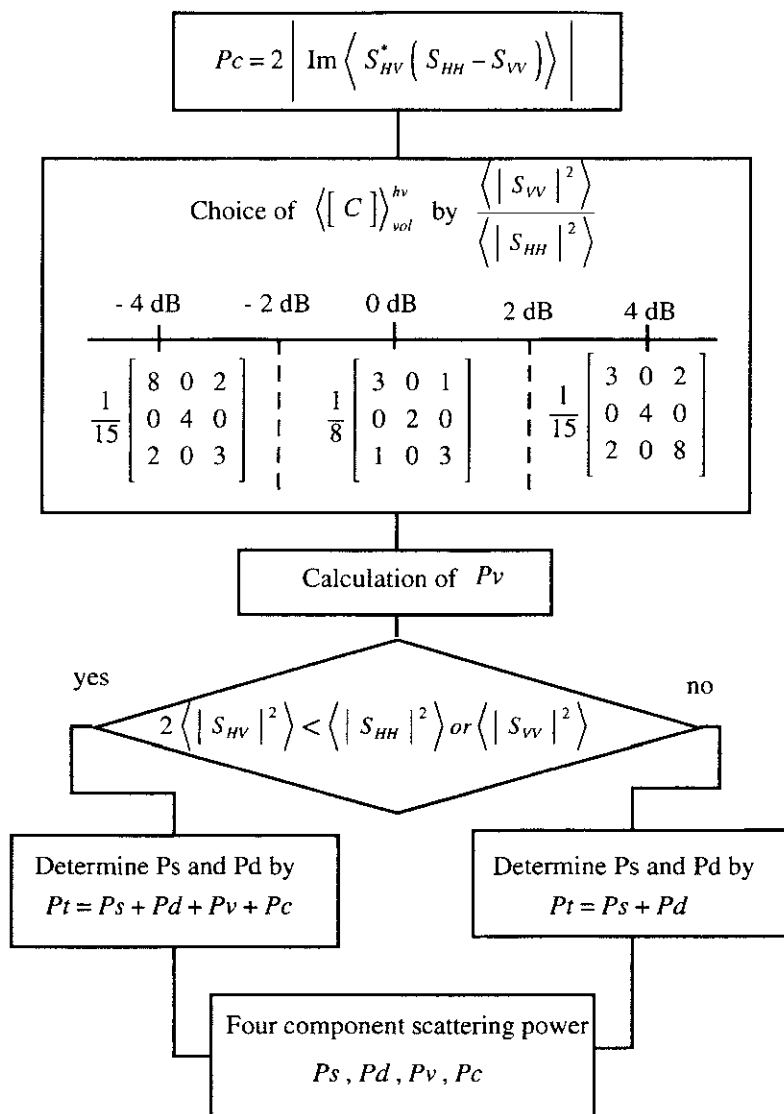


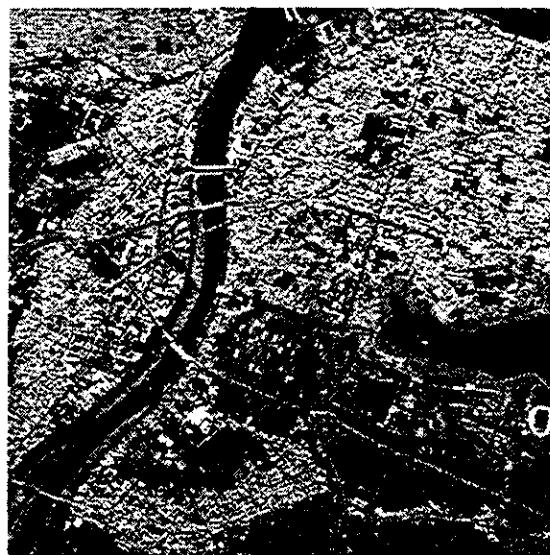
図6.9 四成分分解のアルゴリズム

6.8 四成分分解法の検証例

このアルゴリズムで再度、4成分分解したLバンドの結果を以下に示す。

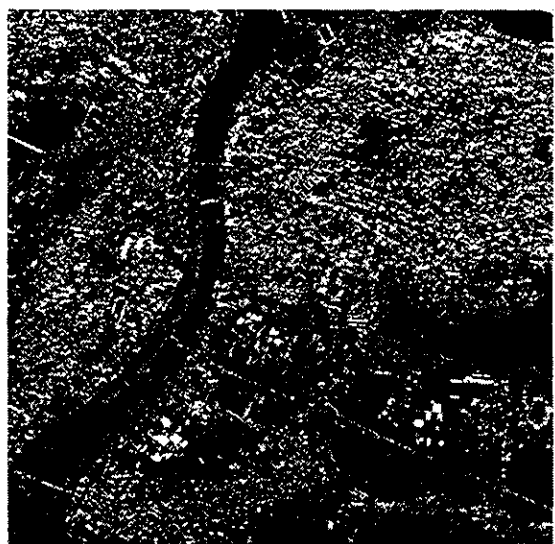


HH (Red), HV (green), VV (blue)

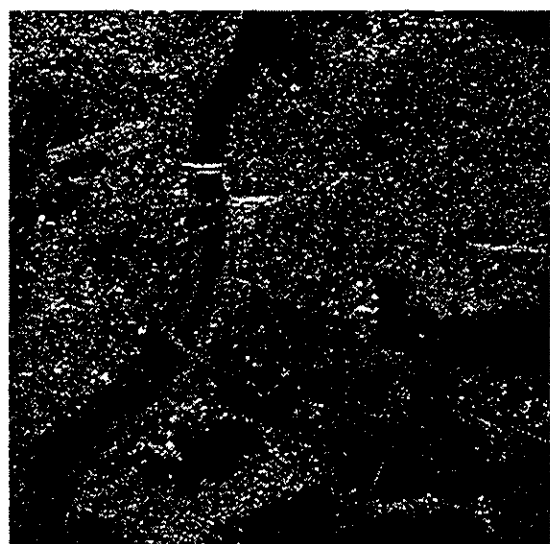


Pd (red), Pv (green), Ps (blue)

非常によく分類されているように思われる。また、円偏波成分は



RHC



LHC

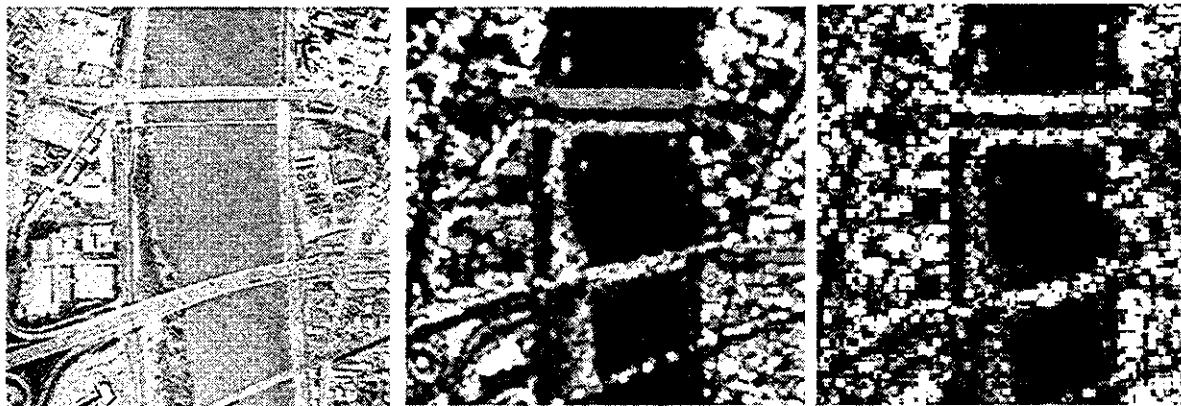
円偏波の画像としては、RHC+LHCである。分離して示したが、RHCの方が大きな値として出力されているように思われる。ほぼ同程度の値となることが想定されるが、偏りのある原因はデータそのものに依存しているのではないかと考えられる。他のCalibrationされたデータでも解析を行う必要がある。

新潟市の鳥屋野潟で、信濃川に掛かる橋の領域について分解結果を検証してみた。
物理現象の分かっている川、橋の2回散乱の数値を調べたものが次の図である。

航空写真

4成分分解結果

L-band

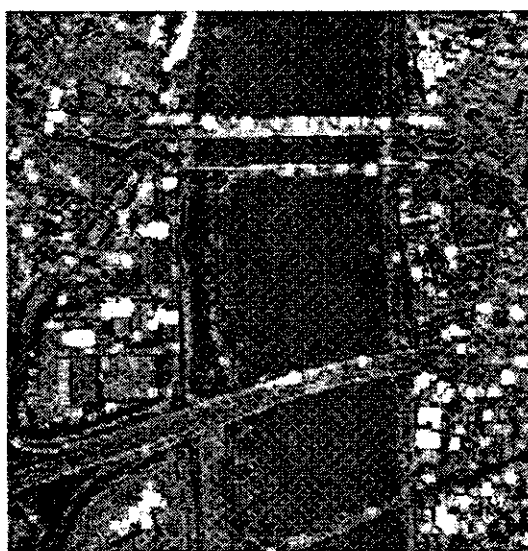


分類画像

新潟市の信濃川 にかかる橋	赤：2回反射	P_d	P_c 円偏波発生成分 (人工物体に関連)
	緑：体積散乱	P_v	
	青：一回反射	P_s	

赤：橋での2回反射は、川面と橋の側面の2回反射が想定される。
 緑：交差偏波成分が大きく寄与しているので、市街地では人工物体と植物の合計であろう。
 青：単純にレーダ側を向いている面からの散乱と思われる。
 白（右）：円偏波を発生している所であるが、人工物からのものが多い。

特に円偏波発生成分に関して、航空写真に重ねてみたものが次の図である。



これから、人工物体の所で強く発生していることが確認できる。以上の結果から、妥当な分解法と言えそうである。

付録6.1 Durdeen FreemanのOriginal三成分分解法 対称な体積散乱 $\sigma_{HH} = \sigma_{VV}$ その1

観測されたCovariance行列を以下のように3つの成分に展開する。対称な体積散乱を仮定。

$$\begin{aligned} \langle [C] \rangle &= f_s \langle [C] \rangle_{\text{surface}} + f_d \langle [C] \rangle_{\text{double}} + f_v \langle [C] \rangle_{\text{vol}} \\ &= f_s \begin{bmatrix} |\beta|^2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + f_d \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f_v}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A6.1.1})$$

ただし、 f_s , f_d , f_v は電力寄与分である。これから要素の関係を調べると

$$\begin{aligned} C_{11} \quad \langle |S_{HH}|^2 \rangle &= f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 + f_v \\ C_{22} \quad \langle |S_{HV}|^2 \rangle &= \frac{f_v}{3} \\ C_{33} \quad \langle |S_{VV}|^2 \rangle &= f_s + f_d + f_v \\ C_{13} \quad \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle &= f_s \beta + f_d \alpha + \frac{f_v}{3} \\ C_{12}, C_{21} \quad \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle &= 0, \quad \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{A6.1.2})$$

未定定数 ($f_s, f_d, f_v, \alpha, \beta$) の求め方: $f_v = 3 \langle |S_{HV}|^2 \rangle$ により直接 f_v を求める。その結果,

$$\begin{aligned} f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 &= \langle |S_{HH}|^2 \rangle - f_v = A \\ f_s + f_d &= \langle |S_{VV}|^2 \rangle - f_v = B \\ f_s \beta + f_d \alpha &= \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle - \frac{f_v}{3} = C \end{aligned} \quad (\text{A6.1.3})$$

3本の方程式に対して変数が4つになるので,

$\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*)$ が負の場合に (double bounceが主と想定して) $\beta = 1$ を設定

$\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*)$ が正の場合に (surface scatteringが主と想定して) $\alpha = -1$ を設定

して、変数を決定する。

未定定数が求められると、電力はCovariance行列のSpanから直接求められる。

$$\begin{aligned} P &= P_s + P_d + P_v = \langle |S_{HH}|^2 + 2|S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 \rangle \\ P_s &= f_s (1 + |\beta|^2) \quad P_d = f_d (1 + |\alpha|^2) \quad P_v = \frac{8}{3} f_v = 8 \langle |S_{HV}|^2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A6.1.4})$$

なお、文献では、 $f_v = 3 \langle |S_{HV}|^2 \rangle$ が求められた後、 f_s, f_d, α, β を求める際に $f_v = 0$ とおき、

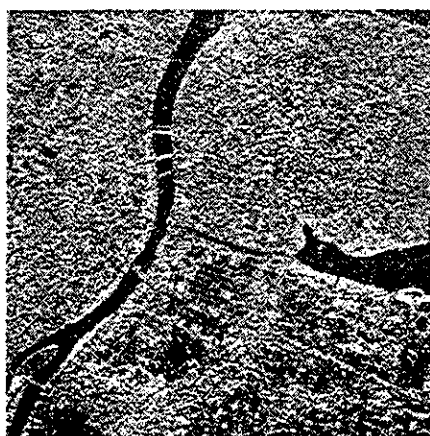
$$\begin{aligned} \langle |S_{HH}|^2 \rangle &= f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 \\ \langle |S_{VV}|^2 \rangle &= f_s + f_d \\ \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle &= f_s \beta + f_d \alpha \end{aligned} \quad (\text{A6.1.5})$$

この3つの式から変数を決定している。つまり、一旦 P_v を求めてから、その後に0と置いて P_s, P_d を求め

ている。この点是不合理と思われる。しかし、出力した画像結果としては妥当な値に見える。次に画像例を示す。



$P_s (P_c = 0)$



$P_s (P_v \text{無視})$



$P_d (P_c = 0)$



$P_d (P_v \text{無視})$



$P_v (P_c = 0)$



P_v

付録6.2 三成分分解法 (体積散乱の項を変更 $\sigma_{HH} > \sigma_{VV}$) その2

観測Covariance行列を以下のように展開する。体積散乱を変更 ($\sigma_{HH} > \sigma_{VV}$)

$$\begin{aligned} \langle [C] \rangle &= f_s \langle [C] \rangle_{surface} + f_d \langle [C] \rangle_{double} + f_v \langle [C] \rangle_{vol} \\ &= f_s \begin{bmatrix} |\beta|^2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + f_d \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f_v}{15} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A6.2.1)$$

ただし, f_s , f_d , f_v は電力寄与分である。これから要素の関係を調べると

$$\begin{aligned} C_{11} \quad \langle |S_{HH}|^2 \rangle &= f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 + \frac{8}{15} f_v \\ C_{22} \quad \langle |S_{HV}|^2 \rangle &= \frac{2}{15} f_v \\ C_{33} \quad \langle |S_{VV}|^2 \rangle &= f_s + f_d + \frac{3}{15} f_v \\ C_{13} \quad \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle &= f_s \beta + f_d \alpha + \frac{2}{15} f_v \\ C_{12}, C_{21} \quad \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle &= 0, \quad \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle = 0 \end{aligned} \quad (A6.2.2)$$

未定定数 ($f_s, f_d, f_v, \alpha, \beta$) の求め方: $f_v = \frac{15}{2} \langle |S_{HV}|^2 \rangle$ により直接 f_v を求める。その結果,

$$\begin{aligned} f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 &= \langle |S_{HH}|^2 \rangle - \frac{8}{15} f_v = A \\ f_s + f_d &= \langle |S_{VV}|^2 \rangle - \frac{3}{15} f_v = B \\ f_s \beta + f_d \alpha &= \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle - \frac{2}{15} f_v = C \end{aligned} \quad (A6.2.3)$$

3本の方程式に対して変数が4つになるので,

$\text{Re}(S_{HH} S_{VV}^*)$ が負の場合に (double bounceが主と想定して) $\beta = 1$ を設定

$\text{Re}(S_{HH} S_{VV}^*)$ が正の場合に (surface scatteringが主と想定して) $\alpha = -1$ を設定

して, 変数を決定する。

未定定数が求められると, 電力はCovariance行列のSpanから直接求められる。

$$\begin{aligned} P &= P_s + P_d + P_v = \langle |S_{HH}|^2 + 2|S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 \rangle \\ P_s &= f_s (1 + |\beta|^2) \quad P_d = f_d (1 + |\alpha|^2) \quad P_v = f_v = \frac{15}{2} \langle |S_{HV}|^2 \rangle \end{aligned} \quad (A6.2.4)$$

付録6.3 三成分分解法 （体積散乱の項を変更 $\sigma_{HH} < \sigma_{VV}$ ） その3

観測されたCovariance行列を以下のように展開する．体積散乱を変更（ $\sigma_{HH} < \sigma_{VV}$ ）

$$\begin{aligned} \langle [C] \rangle &= f_s \langle [C] \rangle_{\text{surface}} + f_d \langle [C] \rangle_{\text{double}} + f_v \langle [C] \rangle_{\text{vol}} \\ &= f_s \begin{bmatrix} |\beta|^2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + f_d \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f_v}{15} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A6.3.1})$$

ただし、 f_s 、 f_d 、 f_v は電力寄与分（未定定数）である．これから要素の関係を調べると

$$\begin{aligned} C_{11} \quad \langle |S_{HH}|^2 \rangle &= f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 + \frac{3}{15} f_v \\ C_{22} \quad \langle |S_{HV}|^2 \rangle &= \frac{2}{15} f_v \\ C_{33} \quad \langle |S_{VV}|^2 \rangle &= f_s + f_d + \frac{8}{15} f_v \\ C_{13} \quad \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle &= f_s \beta + f_d \alpha + \frac{2}{15} f_v \\ C_{12}, C_{23} \quad \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle &= 0, \quad \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{A6.3.2})$$

未定定数（ $f_s, f_d, f_v, \alpha, \beta$ ）の求め方： $f_v = \frac{15}{2} \langle |S_{HV}|^2 \rangle$ により直接 f_v を求める．その結果、

$$\begin{aligned} f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 &= \langle |S_{HH}|^2 \rangle - \frac{3}{15} f_v = A \\ f_s + f_d &= \langle |S_{VV}|^2 \rangle - \frac{8}{15} f_v = B \\ f_s \beta + f_d \alpha &= \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle - \frac{2}{15} f_v = C \end{aligned} \quad (\text{A6.3.3})$$

3本の方程式に対して変数が4つになるので、

$\text{Re}(S_{HH} S_{VV}^*)$ が負の場合に（double bounceが主と想定して） $\beta = 1$ を設定

$\text{Re}(S_{HH} S_{VV}^*)$ が正の場合に（surface scatteringが主と想定して） $\alpha = -1$ を設定

して、変数を決定する．

未定定数が求められると、電力はCovariance行列のSpanから直接求められる．

$$\begin{aligned} P &= P_s + P_d + P_v = \langle |S_{HH}|^2 + 2|S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 \rangle \\ P_s &= f_s (1 + |\beta|^2) \quad P_d = f_d (1 + |\alpha|^2) \quad P_v = f_v = \frac{15}{2} \langle |S_{HV}|^2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A6.3.4})$$

付録6.4 Durden, Freemanの体積散乱Covariance行列について

ランダムワイヤーからのCovariance行列について：体積散乱要素について
(HV偏波成分をカットした場合のCovariance行列要素について)

Canopy の基本散乱行列として

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{HH} & 0 \\ 0 & S_{VV} \end{bmatrix} \quad (\text{A6.4.1})$$

を仮定する．要素の S_{HH} ， S_{VV} は複素数であり，この場合には $S_{HV} = 0$ とする． $S_{HV} \neq 0$ のターゲットでは以下の議論は当てはまらない．特にHelixには該当しないので注意が必要である．

上記は 1 本のワイヤーターゲットの散乱行列で，傾き角は考えていない．Canopyは任意の方向を向いたワイヤーターゲットの集合である．その散乱行列から集合体としてのCovariance行列の要素を導出する．

$S_{HV} = 0$ なので任意の角度 θ だけ傾いた散乱行列要素は

$$\begin{aligned} S_{hh} &= S_{HH} \cos^2 \theta + S_{VV} \sin^2 \theta \\ S_{hv} &= S_{vh} = (S_{VV} - S_{HH}) \sin \theta \cos \theta \\ S_{vv} &= S_{HH} \sin^2 \theta + S_{VV} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{A6.4.2})$$

となり，集合平均は確率密度関数 $p(\theta)$ をかけて積分し

$$\langle S_{hh} S_{hh}^* \rangle = \int_0^{2\pi} S_{hh} S_{hh}^* p(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (S_{HH} \cos^2 \theta + S_{VV} \sin^2 \theta) (S_{HH}^* \cos^2 \theta + S_{VV}^* \sin^2 \theta) p(\theta) d\theta$$

などの計算を経て以下の式となる．

$$\begin{aligned} \langle S_{hh} S_{hh}^* \rangle &= I_1 |S_{HH}|^2 + 2I_2 \operatorname{Re}(S_{HH} S_{VV}^*) + I_3 |S_{VV}|^2 \\ \langle S_{vv} S_{vv}^* \rangle &= I_3 |S_{HH}|^2 + 2I_2 \operatorname{Re}(S_{VV} S_{HH}^*) + I_1 |S_{VV}|^2 \\ \langle S_{hv} S_{hv}^* \rangle &= I_2 |S_{HH}|^2 - 2I_2 \operatorname{Re}(S_{HH} S_{VV}^*) + I_2 |S_{VV}|^2 \\ \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= I_2 (|S_{HH}|^2 + |S_{VV}|^2) + (I_1 + I_3) \operatorname{Re}(S_{HH} S_{VV}^*) + j(I_1 - I_3) \operatorname{Im}(S_{HH} S_{VV}^*) \\ \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= I_5 |S_{VV}|^2 - I_4 |S_{HH}|^2 + (I_4 - I_5) \operatorname{Re}(S_{HH} S_{VV}^*) + j(I_4 + I_5) \operatorname{Im}(S_{HH} S_{VV}^*) \\ \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle &= I_4 |S_{VV}|^2 - I_5 |S_{HH}|^2 - (I_4 - I_5) \operatorname{Re}(S_{HH} S_{VV}^*) - j(I_4 + I_5) \operatorname{Im}(S_{HH} S_{VV}^*) \end{aligned} \quad (\text{A6.4.3})$$

ただし，

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta p(\theta) d\theta, & I_2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta p(\theta) d\theta \\ I_3 &= \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta p(\theta) d\theta, & I_4 &= \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^3 \theta p(\theta) d\theta \\ I_5 &= \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cos \theta p(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (\text{A6.4.4})$$

もし，確率密度関数 $p(\theta)$ が一様の場合， $p(\theta) = p$ (定数) とおいて

$$\begin{aligned} I_1 &= p \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = p \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{4} p \\ I_2 &= p \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = p \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{4 \cdot 2} \right) d\theta = \frac{\pi}{4} p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= p \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta = p \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right) d\theta = \frac{3\pi}{4} p \\
I_4 &= p \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = 0, \quad I_5 = p \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^3 \theta d\theta = 0
\end{aligned} \tag{A6.4.5}$$

したがって、平均化後の要素は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\langle S_{hh} S_{hh}^* \rangle &= \left\{ |S_{HH}|^2 + \frac{2}{3} \operatorname{Re}(S_{HH} S_{VV}^*) + |S_{VV}|^2 \right\} \frac{3\pi}{4} p \\
\langle S_{vv} S_{vv}^* \rangle &= \left\{ |S_{HH}|^2 + \frac{2}{3} \operatorname{Re}(S_{HH} S_{VV}^*) + |S_{VV}|^2 \right\} \frac{3\pi}{4} p \\
\langle S_{vh} S_{vh}^* \rangle &= \left\{ \frac{1}{3} |S_{HH}|^2 - \frac{2}{3} \operatorname{Re}(S_{HH} S_{VV}^*) + \frac{1}{3} |S_{VV}|^2 \right\} \frac{3\pi}{4} p \\
\langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle &= \left\{ \frac{1}{3} (|S_{HH}|^2 + |S_{VV}|^2) + 2 \operatorname{Re}(S_{HH} S_{VV}^*) \right\} \frac{3\pi}{4} p \\
\langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle &= 0, \quad \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle = 0
\end{aligned} \tag{A6.4.6}$$

もし、基本のワイヤーとして $[S] = \begin{bmatrix} S_{HH} & 0 \\ 0 & S_{VV} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

を選び、散乱行列要素から直接計算しやすいように、仮に $p(\theta) = \frac{4}{3\pi}$ を選定すれば、

$$\langle S_{hh} S_{hh}^* \rangle = \langle S_{vv} S_{vv}^* \rangle = |1|^2 = 1 \quad \langle S_{hv} S_{hv}^* \rangle = \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle = \frac{1}{3} \quad \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle = \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle = 0$$

が得られ、平均Covariance行列は以下のようになる。

$$\langle [C] \rangle_{\text{wire}} = \begin{bmatrix} \langle S_{hh} S_{hh}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle & \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{hh}^* \rangle & 2 \langle S_{hv} S_{hv}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle \\ \langle S_{vv} S_{hh}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{vv} S_{hv}^* \rangle & \langle S_{vv} S_{vv}^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A6.4.7}$$

となる。ただし、この表現は $\text{Span} \langle C \rangle_{\text{wire}} = 1$ とならない。一様分布では本来 $p(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ である。

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{ の場合には } \langle [C] \rangle_{\text{wire}} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

となり、行列全体にかかる係数が変わるだけなので、Covariance行列を求める際には、計算しやすいように散乱行列の要素から $\langle S_{hh} S_{hh}^* \rangle$ などを計算しておいて、最後に $\text{Trace } C=1$ となるように係数を決めてもよい。付録6.5を参照。

$$\langle [C] \rangle_{\text{wire}} = \frac{1}{\text{Trace}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{A6.4.8}$$

同様に、 $\text{Trace} \langle [C] \rangle = 1$ となるように以下が求められる

$$\text{垂直ワイヤ} \quad [S]_{v\text{-wire}}^{HV} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \langle [C] \rangle_{v\text{-wire}}^{hv} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{A6.4.10})$$

$$\text{水平ワイヤ} \quad [S]_{h\text{-wire}}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \langle [C] \rangle_{h\text{-wire}}^{hv} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{A6.4.11})$$

この結果、垂直でも水平でも、ワイヤについては同じ形の $\langle [C] \rangle_{\text{wire}}$ が得られることが分かる。

この対称系の分布は、Xバンドなどの表面散乱が主体となる周波数では妥当であろう。Lバンドなどの植生を透過する周波数帯では後方散乱断面積がHとVで異なるため、それを考慮した非対称の $\langle [C] \rangle_{\text{wire}}$ を選んだ方が自然である。

■■ 付録6.5 Covariance全体にかかる係数について ■■

観測されたCovariance行列をTrace=1となるCovariance行列の和で表してみる.

$$\begin{aligned}
 \langle [C] \rangle &= f_s \langle [C] \rangle_{\text{surface}} + f_d \langle [C] \rangle_{\text{double}} + f_v \langle [C] \rangle_{\text{vol}} \\
 &= \frac{f'_s}{|\beta|^2 + 1} \begin{bmatrix} |\beta|^2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f'_d}{|\alpha|^2 + 1} \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f'_v}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A6.5.1}$$

要素を比較して

$$\begin{aligned}
 C_{11} \quad \langle |S_{HH}|^2 \rangle &= \frac{|\beta|^2}{|\beta|^2 + 1} f'_s + \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + 1} f'_d + \frac{3}{8} f'_v \\
 C_{33} \quad \langle |S_{VV}|^2 \rangle &= \frac{1}{|\beta|^2 + 1} f'_s + \frac{1}{|\alpha|^2 + 1} f'_d + \frac{3}{8} f'_v \\
 C_{13} \quad \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle &= \frac{\beta}{|\beta|^2 + 1} f'_s + \frac{\alpha}{|\alpha|^2 + 1} f'_d + \frac{3}{8} f'_v \\
 \langle |S_{HV}|^2 \rangle &= \frac{f'_v}{8} \\
 \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle &= 0, \quad \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle = 0
 \end{aligned} \tag{A6.5.2}$$

これを解くと、電力は

$$\begin{aligned}
 P_s &= f'_s, \quad P_d = f'_d, \quad P_v = f'_v \\
 P &= P_s + P_d + P_v = f'_s + f'_d + f'_v = \langle |S_{HH}|^2 + 2|S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{A6.5.3}$$

となり、前に示した変数で

$$f'_d = f_d \left(1 + |\alpha|^2 \right) = P_v, \quad f'_s = f_s \left(1 + |\beta|^2 \right) = P_s, \quad f'_v = \frac{8}{3} f_v = P_v \tag{A6.5.4}$$

と置いたものに等しい。したがって、Covariance全体にかかる係数については最終の電力表現として整合を取ることができる。そのため、要素間の関係が保たれていれば、Covariance全体の係数の値はどのようなにとってもかまわない。

付録6.6 α, β, f_s, f_d の導出について

三成分分解でも四成分分解でも、未定定数 α, β, f_s, f_d を決めるための方程式は以下の形になる。

$$f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 = A \quad \text{右辺Aは分解方法によって異なる実数値} \quad (1)$$

$$f_s + f_d = B \quad \text{右辺Bは分解方法によって異なる実数値} \quad (2)$$

$$f_s \beta + f_d \alpha = C \quad \text{右辺Cは分解方法によって異なる複素数} \quad (3)$$

Durden, Freeman流

◆ $\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*)$ が負の場合に (double bounceが主と想定して) $\beta = 1$ を設定し、残りの変数を決める。

具体的に $\beta = 1$ を代入すると

$$f_s + f_d \alpha = C \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{C - f_s}{f_d}$$

$$f_s + f_d |\alpha|^2 = A \quad \Rightarrow \quad f_s + \frac{|C - f_s|^2}{f_d} = A$$

$$f_s + f_d = B \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} |C - f_s|^2 &= (A - f_s) f_d = (A - f_s) (B - f_s) \\ |C|^2 - 2 f_s \text{Re}(C) + f_s^2 &= AB - A f_s - B f_s + f_s^2 \end{aligned}$$

$\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*) < 0$ では

$$\beta = 1, \quad f_s = \frac{AB - |C|^2}{A + B - 2 \text{Re}(C)}, \quad f_d = B - f_s, \quad \alpha = \frac{C - f_s}{f_d} \quad (6.6.1)$$

◆ $\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*)$ が正の場合に (surface scatteringが主と想定して) $\alpha = -1$ を設定し、残りの変数を決める。

$\alpha = -1$ を代入すると

$$f_s \beta - f_d = C \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{C + f_d}{f_s}$$

$$f_s |\beta|^2 + f_d = A \quad \Rightarrow \quad \frac{|C + f_d|^2}{f_s} + f_d = A$$

$$f_s + f_d = B \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} |C + f_d|^2 &= (A - f_d) f_s = (A - f_s) (B - f_d) \\ |C|^2 + 2 f_d \text{Re}(C) + f_d^2 &= AB - A f_d - B f_d + f_d^2 \end{aligned}$$

$\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*) > 0$ では

$$\alpha = -1, \quad f_d = \frac{AB - |C|^2}{A + B + 2 \text{Re}(C)}, \quad f_s = B - f_d, \quad \beta = \frac{C + f_d}{f_s} \quad (6.6.2)$$

もし、数値計算やPi-SARデータによって α や β の値が想定されるなら、 $\alpha = -1$ ， $\beta = 1$ を仮定しなくても良い。現実にはSARのデータに一致しそうな値を代入して求めることも考えられる。

$$f_s |\beta|^2 + f_d |\alpha|^2 = A \quad \text{右辺Aは分解方法によって異なる実数値} \quad (1)$$

$$f_s + f_d = B \quad \text{右辺Bは分解方法によって異なる実数値} \quad (2)$$

$$f_s \beta + f_d \alpha = C \quad \text{右辺Cは分解方法によって異なる複素数} \quad (3)$$

山口流

◆ $\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*)$ が負の場合に (double bounceが主と想定して) $\beta = \beta'$ を設定し、残りの変数を決める。

$$\beta = \beta' \quad (\text{推定値1}) \quad \text{より} \quad f_s \beta' + f_d \alpha = C \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{C - f_s \beta'}{f_d}$$

$$f_s |\beta'|^2 + \frac{|C - f_s \beta'|^2}{f_d} = A, \quad f_d = B - f_s \quad \Rightarrow$$

$$|C - f_s \beta'|^2 = (A - f_s |\beta'|^2) f_d = (A - f_s |\beta'|^2) (B - f_s)$$

$$|C|^2 - 2 f_s \text{Re}(C \beta') = AB - B |\beta'|^2 f_s - A f_s \quad f_s = \frac{AB - |C|^2}{A + B |\beta'|^2 - 2 \text{Re}(C \beta')}$$

したがって

$\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*) < 0$ では $\beta = \beta'$ (適当な値を指定する. $\beta' = \frac{S_{hh}}{S_{vv}}$, 平地での値. $\beta' \leq 1$)

$$\beta = \beta', \quad f_s = \frac{AB - |C|^2}{A + B |\beta'|^2 - 2 \text{Re}(C \beta')}, \quad f_d = B - f_s, \quad \alpha = \frac{C - f_s \beta'}{f_d} \quad (6.6.3)$$

◆ $\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*)$ が正の場合に (surface scatteringが主と想定して) $\alpha = \alpha'$ を設定し、残りの変数を決める。

$$\alpha = \alpha' \quad (\text{推定-1} \sim -0.3) \quad \text{より} \quad f_s \beta + f_d \alpha' = C \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{C - f_d \alpha'}{f_s}$$

$$\frac{|C - f_d \alpha'|^2}{f_s} + f_d |\alpha'|^2 = A \quad \Rightarrow \quad |C - f_d \alpha'|^2 = (A - f_d |\alpha'|^2) f_s = (A - f_d |\alpha'|^2) (B - f_d)$$

$$|C|^2 - 2 \text{Re}(C \alpha') f_d = AB - B |\alpha'|^2 f_d - A f_d \quad f_d = \frac{AB - |C|^2}{A + B |\alpha'|^2 - 2 \text{Re}(C \alpha')}$$

したがって

$\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*) > 0$ では $\alpha = \alpha'$ (適当な値を指定する. $\alpha' = \frac{S_{vv}}{S_{hh}}$ は2回散乱の値, $-1 < \text{Re}(\alpha') < -0.3$)

$$\alpha = \alpha', \quad f_d = \frac{AB - |C|^2}{A + B |\alpha'|^2 - 2 \text{Re}(C \alpha')}, \quad f_s = B - f_d, \quad \beta = \frac{C - f_d \alpha'}{f_s} \quad (6.6.4)$$

< f_s, f_d, α, β の求め方について> 展開行列を変更した場合

三成分分解でも四成分分解でも、未定定数 α, β, f_s, f_d を決めるための方程式は以下の形になる。

$$f_s |\beta|^2 + f_d = A \quad \text{右辺Aは分解方法によって変わる実数値} \quad (4)$$

$$f_s + f_d |\alpha|^2 = B \quad \text{右辺Bは分解方法によって変わる実数値} \quad (5)$$

$$f_s \beta + f_d \alpha^* = C \quad \text{右辺Cは分解方法によって変わる複素数} \quad (6)$$

Durden, Freeman流

◆ $\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*)$ が負の場合に (double bounceが主と想定して) $\beta = 1$ を設定し、残りの変数を決める。

具体的に $\beta = 1$ (仮定) を代入すると

$$f_s + f_d \alpha^* = C \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = \frac{C - f_s}{f_d}$$

$$f_s + \frac{|C - f_s|^2}{f_d} = B, \quad f_s + f_d = A \quad \Rightarrow \quad |C - f_s|^2 = (B - f_s) f_d = (B - f_s)(A - f_s)$$

$$|C|^2 + 2 f_s \text{Re}(C) = AB - A f_s - B f_s$$

$\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*) < 0$ では

$$\beta = 1, \quad f_s = \frac{AB - |C|^2}{A + B - 2 \text{Re}(C)}, \quad f_d = A - f_s, \quad \alpha = \frac{C - f_s}{f_d} \quad (6.6.5)$$

◆ $\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*)$ が正の場合に (surface scatteringが主と想定して) $\alpha = -1$ を設定し、残りの変数を決める。 $\alpha = -1$ (仮定) より

$$f_s \beta - f_d = C \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{C + f_d}{f_s}$$

$$\frac{|C + f_d|^2}{f_s} + f_d = A, \quad f_s + f_d = B \quad \Rightarrow \quad |C + f_d|^2 = (A - f_d) f_s = (A - f_d)(B - f_d)$$

$$|C|^2 + 2 f_d \text{Re}(C) = AB - A f_d - B f_d$$

$\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*) > 0$ では

$$\alpha = -1, \quad f_d = \frac{AB - |C|^2}{A + B + 2 \text{Re}(C)}, \quad f_s = B - f_d, \quad \beta = \frac{C + f_d}{f_s} \quad (6.6.6)$$

もし、数値計算やPi-SARデータによって α や β の値が想定されるなら、 $\alpha = -1$ ， $\beta = 1$ を仮定しなくても良い。現実にはSARのデータに一致しそうな値を代入して求めることも考えられる。

$$f_s |\beta|^2 + f_d = A \quad \text{右辺Aは分解方法によって変わる実数値} \quad (4)$$

$$f_s + f_d |\alpha|^2 = B \quad \text{右辺Bは分解方法によって変わる実数値} \quad (5)$$

$$f_s \beta + f_d \alpha^* = C \quad \text{右辺Cは分解方法によって変わる複素数} \quad (6)$$

山口流

◆ $\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*)$ が負の場合に (double bounceが主と想定して) $\beta = \beta'$ を設定し、残りの変数を決める。

$$\beta = \beta' \quad (\text{推定値1}) \quad \text{より} \quad f_s \beta' + f_d \alpha^* = C \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = \frac{C - f_s \beta'}{f_d}$$

$$f_s + \frac{|C - f_s \beta'|^2}{f_d} = B, \quad f_d = A - f_s |\beta'|^2 \quad \Rightarrow$$

$$|C - f_s \beta'|^2 = (B - f_s) f_d = (B - f_s) (A - f_s |\beta'|^2)$$

$$|C|^2 - 2 f_s \text{Re}(C^* \beta') = AB - B |\beta'|^2 f_s - A f_s \quad f_s = \frac{AB - |C|^2}{A + B |\beta'|^2 - 2 \text{Re}(C^* \beta')}$$

したがって

$\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*) < 0$ では $\beta = \beta'$ (適当な値を指定する. $\beta' = \frac{S_{hh}}{S_{vv}}$, 平地での値. $\beta' \leq 1$)

$$\beta = \beta', \quad f_s = \frac{AB - |C|^2}{A + B |\beta'|^2 - 2 \text{Re}(C^* \beta')}, \quad f_d = A - f_s |\beta'|^2, \quad \alpha = \frac{C - f_s \beta'}{f_d} \quad (6.6.7)$$

◆ $\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*)$ が正の場合に (surface scatteringが主と想定して) $\alpha = \alpha'$ を設定し、残りの変数を決める。

$$\alpha = \alpha' \quad (\text{推定}-1 \sim -0.3) \quad \text{より} \quad f_s \beta + f_d \alpha'^* = C \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{C - f_d \alpha'^*}{f_s}$$

$$\frac{|C - f_d \alpha'^*|^2}{f_s} + f_d = A \quad \Rightarrow \quad |C - f_d \alpha'^*|^2 = (A - f_d) f_s = (A - f_d) (B - f_d |\alpha'|^2)$$

$$|C|^2 - 2 \text{Re}(C \alpha'^*) f_d = AB - A |\alpha'|^2 f_d - B f_d \quad f_d = \frac{AB - |C|^2}{A |\alpha'|^2 + B - 2 \text{Re}(C \alpha'^*)}$$

したがって

$\text{Re}(S_{hh} S_{vv}^*) > 0$ では $\alpha = \alpha'$ (適当な値を指定する. $\alpha' = \frac{S_{vv}}{S_{hh}}$ は2回散乱の値, $-1 < \text{Re}(\alpha') < -0.3$)

$$\alpha = \alpha', \quad f_d = \frac{AB - |C|^2}{A |\alpha'|^2 + B - 2 \text{Re}(C \alpha'^*)}, \quad f_s = B - f_d |\alpha'|^2, \quad \beta = \frac{C - f_d \alpha'^*}{f_s} \quad (6.6.8)$$

付録6.7 各種基本ターゲットの集合平均Covariance行列（再掲載）

$$\langle [C] \rangle^{hv} = \langle [C(\theta)] \rangle^{HV} = \begin{bmatrix} \langle |S_{hh}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle & \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{hh}^* \rangle & 2 \langle |S_{hv}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{hv} S_{vv}^* \rangle \\ \langle S_{vv} S_{hh}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{vv} S_{hv}^* \rangle & \langle |S_{vv}|^2 \rangle \end{bmatrix}$$

$$[S]_{plate}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \langle [C] \rangle_{plate}^{hv} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S]_{diplane}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \langle [C] \rangle_{diplane}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \langle S_{hh} S_{vv}^* \rangle \text{ が負の値}$$

$$[S]_{wire}^{HV} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \langle [C] \rangle_{vol}^{hv} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad p(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{垂直ワイヤの集合} \quad \langle [C] \rangle_{vol}^{hv} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin \theta & \text{for } 0 < \theta < \pi \\ 0 & \text{for } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{水平ワイヤの集合} \quad \langle [C] \rangle_{vol}^{hv} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin \theta & \text{for } 0 < \theta < \pi \\ 0 & \text{for } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$[S]_{r-helix}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix} \quad \langle [C] \rangle_{r-helix}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & j\sqrt{2} & -1 \\ -j\sqrt{2} & 2 & j\sqrt{2} \\ -1 & -j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle \text{ の虚数部が正}$$

$$[S]_{l-helix}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} \quad \langle [C] \rangle_{l-helix}^{hv} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -j\sqrt{2} & -1 \\ j\sqrt{2} & 2 & -j\sqrt{2} \\ -1 & j\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \langle S_{hh} S_{hv}^* \rangle \text{ の虚数部が負}$$

第7章 偏波相関係数について

POLSAR(Polarimetric Synthetic Aperture Radar)の画像解析では、偏波情報を有効利用していかに希望するターゲットを識別したり、特徴量を求めるかということを目指している。画像の1ピクセルが1つの散乱行列に対応している。独立な情報量は通常5個（3つの振幅と2つの相対位相）あり、単一偏波の画像（振幅と位相）に比べて多い。しかし、画像解析では、ピクセル単位で処理を行うことは少なく、平均化をはじめとする統計処理が多く使われる。その理由はSpeckleノイズ低減、誤差の低減のためである。また、散乱行列のみでは統計処理に不都合であり、さらに、同じターゲットでも入射角やlook angleが異なると散乱行列も異なった値をとり、それを別のターゲットと誤認識することを防ぐためである。従来、用いられてきた偏波パラメータにはCovariance, Coherency, Mueller行列などがある。そして、それらの行列の統計的性質に基づいて、decompositionや相関係数・固有値解析などが行われてきた。

一方、実験事実として平地の草木や植生などでは $\langle S_{HH}S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VH}S_{HV}^* \rangle \approx 0$ が知られている。この現象に基づいて、物理的・数学的なモデルも構成されている[1]-[4]。しかし、この仮定が成り立たない場合（Reflection Symmetryが成り立たない場合）、別の手法で補う必要がある。例えば、SARの飛行パスと市街地の道路が平行な場合には道路と壁面の2面コーナーリフレクタ構造から大きな散乱波がレーダに戻ってくるが、建物の向きがSAR飛行パスと平行でないとレーダに戻ってくるRCS(Radar Cross Section)は小さい。そして、小さなRCSの中で交差偏波成分が相対的に大きくなる実験的事実がある。これらの散乱特性は電磁界理論的には当然予想されることであるが、SARの飛行方向が変わるだけでこれらのターゲットを正確に検出できなくなることは実際上望ましくない。コンクリートで作られている建物は典型的な人工物である。

そこで、このような人工物に対しても偏波情報を有効利用し、検出に対応できるパラメータを検討する。着目したのは相関係数である。複素信号の信号処理では相関やコヒーレンスといった概念が重要である。複素信号 $s_1(x)$ 、 $s_2(x)$ では、次の恒等式が成り立つ。

$$\left| \int_a^b s_1(x) s_2^*(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b |s_1(x)|^2 dx \int_a^b |s_2(x)|^2 dx \quad (7.1)$$

この恒等式から

$$0 \leq \frac{\left| \int_a^b s_1(x) s_2^*(x) dx \right|}{\sqrt{\int_a^b |s_1(x)|^2 dx \int_a^b |s_2(x)|^2 dx}} \leq 1 \quad (7.2)$$

が成り立つ。そこで、複素信号 $s_1(x)$ 、 $s_2(x)$ を散乱行列要素に置き換え、複素相関係数あるいは複素コヒーレンスが定義できる。

$$\gamma = \frac{\langle s_1 s_2^* \rangle}{\sqrt{\langle s_1 s_1^* \rangle \langle s_2 s_2^* \rangle}} \quad (7.3)$$

平均化操作は画像処理での操作とモデル定式化での操作は異なっている。ここでは、測定データだけでも解析が可能なCovariance行列を基本に役立ちそうな相関係数の表現を導出する。基底変換し、その特徴を調べ、相関係数位相 ϕ_{RR-LL} 、 ϕ_{XX-YY} などが有効であることを示す。2次統計量の強度だけではターゲットの検出に限界があるので、平均化操作によって導かれる位相を考慮する。

7.1 散乱ベクトル k_L

POLSAR画像では画像中の1ピクセルが散乱行列に対応している。散乱行列は直線偏波の水平H、垂直Vの組み合わせで取得されることが多いので、散乱行列は通常次のような直線偏波基底HVで表現されている。

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} \quad (7.1.1)$$

Monostatic Radarを仮定すると、理論的には $S_{HV} = S_{VH}$ が成り立つので、HV基底での散乱行列の独立要素は S_{HH} 、 S_{HV} 、 S_{VV} である。

散乱行列のSpanは散乱波の全電力の相当し、偏波基底には依らない不変量である。例えば、HV基底で測定しても円偏波RL基底で測定しても、次の関係が成り立つ。

$$Span[S] = |S_{HH}|^2 + 2|S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 = |S_{RR}|^2 + 2|S_{RL}|^2 + |S_{LL}|^2 = const. \quad (7.1.2)$$

通常1ピクセルの中には数多くの散乱体があり、それらの散乱点が寄り集まって散乱行列を構成している。ピクセル毎の偏波画像解析ではspeckle noiseの影響が出たり、誤差が含まれるので、全体としてSAR画像評価する場合には統計的な手法が必要となってくる。

統計的に扱うために、散乱行列の全ての情報を保持したベクトルとして、散乱行列の要素を順次並べた散乱ベクトル k_L が次のように定義されている[3]・

$$k_L = \begin{bmatrix} S_{HH} \\ \sqrt{2} S_{HV} \\ S_{VV} \end{bmatrix} \quad (7.1.3)$$

含まれる情報量は同じなので、散乱ベクトルと散乱行列は等価である。

7.2 Covariance 行列と相関係数 (HV基底)

HV基底の集合平均Covariance 行列は k_L を使って以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \langle [C] \rangle^{HV} &= \frac{1}{n} \sum k_L k_L^\dagger = \frac{1}{n} \sum \begin{bmatrix} S_{HH} \\ \sqrt{2} S_{HV} \\ S_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH}^* & \sqrt{2} S_{HV}^* & S_{VV}^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle |S_{HH}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle & \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{HV} S_{HH}^* \rangle & 2 \langle |S_{HV}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{HV} S_{VV}^* \rangle \\ \langle S_{VV} S_{HH}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle & \langle |S_{VV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

$\langle \bullet \rangle$ は空間的な集合平均、 $*$ は複素共役を表す。各要素は電力に関連した2次統計量である。対角成分の和(Trace)は散乱行列のSpanの集合平均になっていることが分かる。(逆に対角成分の和がspanとなるように k_L を定義している。)

$$Trace \langle [C] \rangle = \langle |S_{HH}|^2 + 2|S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 \rangle = \langle Span[S] \rangle = Total\ power\ of\ [C] \quad (7.2.2)$$

$\langle [C] \rangle$ の対角成分は各偏波チャンネルの電力を表す実数であり、非対角項は相関係数に対応した複素数である。

さて、Covariance 行列要素同士の関係を調べるためには何らかの正規化が必要となる。そこで、HH偏波での散乱断面積

$$\sigma_{HH} = \langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle = \langle |S_{HH}|^2 \rangle \quad (7.2.3)$$

によって $\langle [C] \rangle$ を正規化する。電力比を

$$g = \frac{\langle S_{VV} S_{VV}^* \rangle}{\langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle} = \frac{\langle |S_{VV}|^2 \rangle}{\langle |S_{HH}|^2 \rangle}, \quad e = \frac{\langle S_{HV} S_{HV}^* \rangle}{\langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle} = \frac{\langle |S_{HV}|^2 \rangle}{\langle |S_{HH}|^2 \rangle} \quad (7.2.4)$$

とおき、添え字に基底 X, Y, A, B を含めて、各偏波間の複素相関係数を

$$\gamma_{XY-AB} = \text{Cor}(XY, AB) = \frac{\langle S_{XY} S_{AB}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{XY} S_{XY}^* \rangle \langle S_{AB} S_{AB}^* \rangle}} \quad (7.2.5)$$

にて定義する。

$$\gamma_{HH-VV} = \text{Cor}(HH, VV) = \frac{\langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle \langle S_{VV} S_{VV}^* \rangle}} \quad (7.2.5)$$

$$\gamma_{HH-HV} = \text{Cor}(HH, HV) = \frac{\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{HH} S_{HH}^* \rangle \langle S_{HV} S_{HV}^* \rangle}} \quad (7.2.6)$$

$$\gamma_{VV-HV} = \text{Cor}(VV, HV) = \frac{\langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{VV} S_{VV}^* \rangle \langle S_{HV} S_{HV}^* \rangle}} \quad (7.2.7)$$

最終的に集合平均Covariance 行列 $\langle [C] \rangle$ は相関係数と電力比によって次のように表される。

$$\langle [C] \rangle^{HV} = \sigma_{HH} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}e \gamma_{HH-HV} & \sqrt{g} \gamma_{HH-VV} \\ \sqrt{2}e \gamma_{HH-HV}^* & 2e & \sqrt{2}eg \gamma_{HV-VV} \\ \sqrt{g} \gamma_{HH-VV}^* & \sqrt{2}eg \gamma_{HV-VV}^* & g \end{bmatrix} \quad (7.2.8)$$

その結果、 γ_{HH-HV} 、 γ_{HH-VV} 、 γ_{HV-VV} が重要なパラメータになることが分かる。

今までに、AIRSARをはじめ各種の航空機SARによって、地上観測が行われてきたが、実験的事実として海洋、草地、森林などでは $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ が成り立つことが知られている。この特性をもつターゲットをReflection Symmetricなターゲットと言う。この条件の下では、 $\langle [C] \rangle$ は次の対称な形になる。

$$\langle [C] \rangle^{HV} = \begin{bmatrix} \langle |S_{HH}|^2 \rangle & 0 & \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle \\ 0 & 2 \langle |S_{HV}|^2 \rangle & 0 \\ \langle S_{VV} S_{HH}^* \rangle & 0 & \langle |S_{VV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (7.2.9)$$

$$\langle [C] \rangle^{HV} = \sigma_{HH} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{g} \gamma_{HH-VV} \\ 0 & 2e & 0 \\ \sqrt{g} \gamma_{HH-VV}^* & 0 & g \end{bmatrix} \quad (7.2.10)$$

Covariance Matrixの利点は、森林などの分布した自然ターゲットに対して偏波チャネルの電力の測定により、ほとんどの重要な要素が決まることである。そして、相関係数自身をターゲットの偏波依存特性として分類に用いることができる。画像処理では散乱行列要素を直接平均化するだけの簡単な演算で行える利点がある。特に、 $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ の場合には、相関係数は γ_{HH-VV} だけでよい。

しかし、 $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \neq 0, \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \neq 0$ の場合は、 γ_{HH-VV} だけでは一般にターゲット分類がうまく機能していない。 γ_{HH-VV} は重要な相関係数であるが、そのほかにもNon Reflection Symmetry Targetを扱えるように散乱行列を基本としてCovariance行列の基底を変えて妥当な項目を探すことが重要である。そこで、各種の偏波基底で相関係数を調べてみよう。

7.3 円偏波基底でのCovariance行列と相関係数 (RL)

円偏波Covariance 行列は以下のように定義される。各要素は円偏波電力に関連した2次統計量の要素である。

$$\begin{aligned} \langle [C] \rangle^{RL} &= \frac{1}{n} \sum \mathbf{k}_L^{RL} \mathbf{k}_L^{RL\dagger} = \frac{1}{n} \sum \begin{bmatrix} S_{RR} \\ \sqrt{2} S_{RL} \\ S_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{RR}^* & \sqrt{2} S_{RL}^* & S_{LL}^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle |S_{RR}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{RR} S_{RL}^* \rangle & \langle S_{RR} S_{LL}^* \rangle \\ \sqrt{2} \langle S_{RL} S_{RR}^* \rangle & 2 \langle |S_{RL}|^2 \rangle & \sqrt{2} \langle S_{RL} S_{LL}^* \rangle \\ \langle S_{LL} S_{RR}^* \rangle & \sqrt{2} \langle S_{LL} S_{RL}^* \rangle & \langle |S_{LL}|^2 \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

行列要素同士の関係を調べるために円偏波基底でも、RR偏波の散乱断面積

$$\sigma_{RR} = \langle S_{RR} S_{RR}^* \rangle = \langle |S_{RR}|^2 \rangle \quad (7.3.2)$$

によって $\langle [C] \rangle^{RL}$ を正規化する。電力比を

$$g = \frac{\langle S_{LL} S_{LL}^* \rangle}{\langle S_{RR} S_{RR}^* \rangle} = \frac{\langle |S_{LL}|^2 \rangle}{\langle |S_{RR}|^2 \rangle}, \quad e = \frac{\langle S_{RL} S_{RL}^* \rangle}{\langle S_{RR} S_{RR}^* \rangle} = \frac{\langle |S_{RL}|^2 \rangle}{\langle |S_{RR}|^2 \rangle} \quad (7.3.3)$$

とおき、相関係数を

$$\gamma_{RR-LL} = \text{Cor}(RR, LL) = \frac{\langle S_{RR} S_{LL}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{RR} S_{RR}^* \rangle \langle S_{LL} S_{LL}^* \rangle}} \quad (7.3.4)$$

$$\gamma_{RR-RL} = \text{Cor}(RR, RL) = \frac{\langle S_{RR} S_{RL}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{RR} S_{RR}^* \rangle \langle S_{RL} S_{RL}^* \rangle}} \quad (7.3.5)$$

$$\gamma_{LL-RL} = \text{Cor}(LL, RL) = \frac{\langle S_{LL} S_{RL}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{LL} S_{LL}^* \rangle \langle S_{RL} S_{RL}^* \rangle}} \quad (7.3.6)$$

と表記すると, Covariance 行列 $\langle [C] \rangle^{RL}$ は相関係数と電力比によって表される.

$$\langle [C] \rangle^{RL} = \sigma_{RR} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}e \gamma_{RR-RL} & \sqrt{g} \gamma_{RR-LL} \\ \sqrt{2}e \gamma_{RR-RL}^* & 2e & \sqrt{2eg} \gamma_{RL-LL} \\ \sqrt{g} \gamma_{RR-LL}^* & \sqrt{2eg} \gamma_{RL-LL}^* & g \end{bmatrix} \quad (7.2.7)$$

円偏波の場合でも, γ_{RR-RL} , γ_{RR-LL} , γ_{RL-LL} の3つの相関係数が重要である. しかし, 円偏波基底での概念は理解できても具体的な値が何を表しているのか分かりにくいので, これらの相関係数を直線偏波での要素で表してみる.

散乱行列を次式により円偏波基底に変換する.

$$[S(RL)] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} [S(HV)] \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.8)$$

$$[S(HV)] = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \quad (7.3.9)$$

簡単のため,
とおくと

$$[S(RL)] = \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{LR} & S_{LL} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a-b-j2c & -j(a+b) \\ -j(a+b) & b-a-j2c \end{bmatrix} \quad (7.3.10)$$

これより円偏波基底の平均化Covariance 行列の各要素は次式にて与えられる.

$$4 \langle |S_{RR}|^2 \rangle = \langle |a-b-j2c|^2 \rangle \quad (7.3.11a)$$

$$4 \langle |S_{LL}|^2 \rangle = \langle |a-b+j2c|^2 \rangle \quad (7.3.11b)$$

$$4 \langle |S_{RL}|^2 \rangle = \langle |a+b|^2 \rangle \quad (7.3.11c)$$

$$4 \langle S_{RR} S_{LL}^* \rangle = \left\langle 4|c|^2 - |b-a|^2 + j \operatorname{Re} \left\{ 4c^* (a-b) \right\} \right\rangle \quad (7.3.11d)$$

$$4 \langle S_{RR} S_{RL}^* \rangle = \left\langle \left(2c + j(a-b) \right) \left(a^* + b^* \right) \right\rangle \quad (7.3.11e)$$

これらの項目は相関係数の分子を表しているので, この形から直ちに相関係数が導かれる.

ここで $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ の場合に, 各要素がどのように近似されるかを調べておこう.

$$\begin{aligned}
4 \langle |S_{RR}|^2 \rangle &= 4 \langle |S_{LL}|^2 \rangle \approx \langle 4|c|^2 + |a-b|^2 \rangle && \text{実数となる} \\
4 \langle |S_{RL}|^2 \rangle &\approx \langle |a+b|^2 \rangle && \text{実数となる} \\
4 \langle S_{RR} S_{LL}^* \rangle &\approx \langle 4|c|^2 - |b-a|^2 \rangle && \text{実数となる} \\
4 \langle S_{RR} S_{RL}^* \rangle &\approx \langle (j(a-b))(a^*+b^*) \rangle = j \langle |a|^2 - |b|^2 + 2 \operatorname{Im}(ab^*) \rangle && \text{純虚数となる}
\end{aligned}$$

したがって $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ の場合には、相関係数 γ_{RR-LL} は次式で与えられる。

$$\gamma_{RR-LL} = \frac{\langle S_{RR} S_{LL}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{RR} S_{RR}^* \rangle \langle S_{LL} S_{LL}^* \rangle}} = |\gamma_{RR-LL}| \angle \varphi_{RR-LL} = \frac{\langle 4|c|^2 - |a-b|^2 \rangle}{\langle 4|c|^2 + |a-b|^2 \rangle} \quad \text{実数} \quad (7.3.12)$$

$$\gamma_{RR-RL} = \frac{\langle S_{RR} S_{RL}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{RR} S_{RR}^* \rangle \langle S_{RL} S_{RL}^* \rangle}} = \frac{j \langle |a|^2 - |b|^2 + 2 \operatorname{Im}(ab^*) \rangle}{\sqrt{\langle 4|c|^2 + |a-b|^2 \rangle \langle |a+b|^2 \rangle}} \quad \text{純虚数} \quad (7.3.11b)$$

一方、 $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \neq 0, \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \neq 0$ の場合、これらの項目がExplicitな形で出現する項目として $\langle S_{RR} S_{LL}^* \rangle$ がある。相関係数として表現すれば

$$\gamma_{RR-LL} = \frac{\langle S_{RR} S_{LL}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{RR} S_{RR}^* \rangle \langle S_{LL} S_{LL}^* \rangle}} = |\gamma_{RR-LL}| \angle \varphi_{RR-LL} = \frac{\langle 4|c|^2 - |a-b|^2 + j \operatorname{Re} \{ 4c^* (a-b) \} \rangle}{\sqrt{\langle |a-b-j2c|^2 \rangle \langle |a-b+j2c|^2 \rangle}} \quad (7.3.12a)$$

$$\varphi_{RR-LL} = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Re} \langle 4 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \rangle}{\langle 4|S_{HV}|^2 - |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle} \quad (7.3.12b)$$

が得られる。この相関係数には上記のように $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ の場合、 $4|S_{HV}|^2$ と $|S_{HH} - S_{VV}|^2$ の大小関係により $\varphi_{RR-LL} \approx \pi, 0$ となる特徴がある。そのとき γ_{RR-LL} は複素平面上のほぼ実軸に位置する。

一方、 $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \neq 0, \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \neq 0$ の場合、 φ_{RR-LL} は $\pi, 0$ 以外の値を持つ。

$\operatorname{Re} \langle 4 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \rangle \neq 0$ のターゲットとはどのようなものであろうか？ 該当するものは回転した Diplane と Wire だけである。これら2つのターゲットの特徴は偏波依存性が強いことである。これらのターゲットが複雑に絡み合って集合平均の値として出てくる場合、複雑な散乱過程があることがわかる。
(Coherency行列の T_{23} 成分の実部と一致する)

もし基底変換を仮に

$$\begin{bmatrix} S(RL) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(HV) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.13)$$

と選んだ場合は

$$\begin{bmatrix} S(RL) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a-b+j2c & +j(a+b) \\ +j(a+b) & b-a+j2c \end{bmatrix} \quad (7.3.14)$$

$$\begin{aligned} 4 \langle S_{RR} S_{RR}^* \rangle &= \langle |a-b+j2c|^2 \rangle \\ 4 \langle S_{RR} S_{LL}^* \rangle &= \langle (a-b+j2c) [(b-a)^* - j2c^*] \rangle = \langle 4|c|^2 - |b-a|^2 - j2 \operatorname{Re} \{ 2c^* (a-b) \} \rangle \\ 4 \langle S_{RR} S_{RL}^* \rangle &= \langle -j(a-b+j2c)(a^*+b^*) \rangle = \langle (2c-j(a-b))(a^*+b^*) \rangle \\ 4 \langle S_{RL} S_{RL}^* \rangle &= \langle |a+b|^2 \rangle \\ 4 \langle S_{LL} S_{LL}^* \rangle &= \langle |a-b-j2c|^2 \rangle \end{aligned} \quad (7.3.15)$$

$$\begin{aligned} 4 \langle S_{RR} S_{LL}^* \rangle &= \langle 4|c|^2 - |b-a|^2 - j2 \operatorname{Re} \{ 2c^* (a-b) \} \rangle \quad \text{より} \\ -\Phi_{RR-LL} &= \tan^{-1} \frac{\langle 2 \operatorname{Re} \{ 2c^* (a-b) \} \rangle}{\langle 4|c|^2 - |b-a|^2 \rangle} = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Re} \left\{ \langle 4 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \rangle \right\}}{\langle 4|S_{HV}|^2 - |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle} \end{aligned} \quad (7.3.16)$$

となり、位相の符号が反転する。また、 $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ の条件では、結果的に相関係数は

$$\gamma_{RR-LL} = \frac{\langle 4|S_{HV}|^2 - |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle}{\langle 4|S_{HV}|^2 + |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle} \quad (\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0) \quad (7.3.17)$$

が得られ、円偏波基底での相関係数表現は変わらない。

なお,

$$\gamma_{RR-RL} = \operatorname{Cor}(RR, RL) = \frac{\langle S_{RR} S_{RL}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{RR} S_{RR}^* \rangle \langle S_{RL} S_{RL}^* \rangle}}$$

は変形しても特に簡単にならないので、このままの形式で止める。

さらに、散乱行列を θ だけ回転させた場合の平均化Covariance行列の要素からも位相を考察してみる。
回転前後での円偏波の要素には次の関係がある。

$$\begin{aligned}
S_{RR}(\theta) &= S_{RR} e^{j2\theta} & S_{RL}(\theta) &= S_{RL} & S_{LL}(\theta) &= S_{LL} e^{-j2\theta} \\
\langle |S_{RR}(\theta)|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle |a-b-j2c|^2 \rangle & \langle |S_{RL}(\theta)|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle |a+b|^2 \rangle \\
\langle |S_{LL}(\theta)|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle |a-b+j2c|^2 \rangle \\
\langle S_{RR}(\theta) S_{LL}^*(\theta) \rangle &= \frac{1}{4} \langle (a-b-j2c)(b-a-j2c)^* e^{j4\theta} \rangle \\
\langle S_{RR}(\theta) S_{RL}^*(\theta) \rangle &= \frac{j}{4} \langle (a-b-j2c)(a+b)^* e^{j2\theta} \rangle \\
\langle S_{RL}(\theta) S_{LL}^*(\theta) \rangle &= \frac{j}{4} \langle (a-b+j2c)^*(a+b) e^{j2\theta} \rangle
\end{aligned} \tag{7.3.18}$$

これから

$$4 \langle S_{RR}(\theta) S_{LL}^*(\theta) \rangle = \left\langle 4|c|^2 - |a-b|^2 + j \operatorname{Re} \left\{ 4c^*(a-b) \right\} \right\rangle e^{j4\theta}$$

が得られ、RRとLLチャンネルの位相差

$$\boxed{\Phi_{RR-LL} = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Re} \langle 4 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \rangle}{\langle 4 |S_{HV}|^2 - |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle}} \tag{7.3.19}$$

は(7.3.12b)と同じ表現になる。

従って回転角に関係なく重要な役割を果たしていることがわかる。

γ_{RR-LL} は振幅と位相を含め複雑な散乱を起こすターゲットに対してSensitiveな指標であろうことが期待される。ただし、このパラメータはCovariance行列の対角成分には現れないので、電力には直接関係しない。

7.4 45°-135° 直線偏波基底でのCovariance行列と相関係数 (XY)

直線偏波基底HVを±45°傾けた45°-135°基底では、回転の方向と角度によって散乱行列が変わる。そこで、新たな基底の散乱行列の添え字としてXYにて表すことにする。例えば、+45°だけH方向を回転したとき、新たな+45°回転した方向をX軸に対応させ、それに伴いV方向を135°に傾いたY軸にとる。角度θ=+45°だけ回転した散乱行列は次の形になる。

$$\begin{bmatrix} S(XY) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(HV) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.1)$$

$$\begin{bmatrix} S(HV) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{bmatrix} S(XY) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{XX} & S_{XY} \\ S_{YX} & S_{YY} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a+b+2c & b-a \\ b-a & a+b-2c \end{bmatrix} \quad (7.4.2)$$

Covariance matrixの要素は

$$4 \langle S_{XX} S_{XX}^* \rangle = 4 \langle |S_{XX}|^2 \rangle = \langle |a+b+2c|^2 \rangle \quad (7.4.3a)$$

$$4 \langle S_{XX} S_{YY}^* \rangle = \langle |a+b|^2 - 4|c|^2 - j \operatorname{Im} \{ 4c^* (a+b) \} \rangle \quad (7.4.3b)$$

$$4 \langle S_{XX} S_{XY}^* \rangle = \langle (a+b+2c)(b^*-a^*) \rangle \quad (7.4.3c)$$

$$4 \langle S_{XY} S_{XY}^* \rangle = 4 \langle |S_{XY}|^2 \rangle = \langle |a-b|^2 \rangle \quad (7.4.3d)$$

$$4 \langle S_{YY} S_{YY}^* \rangle = 4 \langle |S_{YY}|^2 \rangle = \langle |a+b-2c|^2 \rangle \quad (7.4.3e)$$

この中で特徴的な項目は $\langle S_{XX} S_{YY}^* \rangle$ であり、その相関係数は次式となる。

$$\gamma_{XX-YY} = \frac{\langle S_{XX} S_{YY}^* \rangle}{\sqrt{\langle |S_{XX}|^2 \rangle \langle |S_{YY}|^2 \rangle}} = \frac{\langle |a+b|^2 - 4|c|^2 - j \operatorname{Im} \{ 4c^* (a+b) \} \rangle}{\sqrt{\langle |a+b+2c|^2 \rangle \langle |a+b-2c|^2 \rangle}} \quad (7.4.4)$$

その位相角は

$$\phi_{XX-YY} = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im} \langle 4 S_{HV}^* (S_{HH} + S_{VV}) \rangle}{\langle 4 |S_{HV}|^2 - |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle} \quad (7.4.5)$$

にて与えられる。

電柱や、ビルかどの垂直エッジ稜線など、垂直に立っているワイヤと見なせる構造に対して、45°-135°基底では γ_{XX-YY} の振幅は1に近いと予想される。また、(40)からも分かるように、 $c = S_{HV} = 0$ では $\gamma_{XX-YY} = 1$ となる。しかし、複雑な散乱特性を示す垂直構造では $c = S_{HV} \neq 0$ となり、この位相 ϕ_{XX-YY} も複雑なターゲットの検出パラメータになると思われる。一方、自然地形では $\langle S_{HV}^* S_{HH} \rangle \approx \langle S_{HV}^* S_{VV} \rangle \approx 0$ のため、位相項(XXとYYチャンネルの位相差)は $\phi_{XX-YY} \approx 0$ となる。

なお、 $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ の場合の相関係数を求めておく。この条件では、要素は次のように近似できる。

$$\begin{aligned}
4 \langle |S_{XX}|^2 \rangle &= \langle |a+b+2c|^2 \rangle \approx \langle |a+b|^2 + 4|c|^2 \rangle \\
4 \langle |S_{YY}|^2 \rangle &= \langle |a+b-2c|^2 \rangle \approx \langle |a+b|^2 + 4|c|^2 \rangle \\
4 \langle |S_{XY}|^2 \rangle &= \langle |a-b|^2 \rangle \\
4 \langle S_{XX} S_{YY}^* \rangle &\approx \langle |a+b|^2 - 4|c|^2 \rangle \\
4 \langle S_{XX} S_{XY}^* \rangle &\approx \langle |b|^2 - |a|^2 - j \operatorname{Im}(a^* b) \rangle
\end{aligned} \tag{7.4.6}$$

相関係数の定義より

$$\gamma_{XX-YY} = \operatorname{Cor}(45^\circ 45^\circ - 135^\circ 135^\circ) = \frac{\langle S_{XX} S_{YY}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{XX} S_{XX}^* \rangle \langle S_{YY} S_{YY}^* \rangle}} \tag{7.4.7}$$

$$\gamma_{XX-XY} = \operatorname{Cor}(45^\circ 45^\circ - 45^\circ 135^\circ) = \frac{\langle S_{XX} S_{XY}^* \rangle}{\sqrt{\langle S_{XX} S_{XX}^* \rangle \langle S_{XY} S_{XY}^* \rangle}} \tag{7.4.8}$$

これに代入して以下の近似式が導かれる。

$$\gamma_{XX-YY} = \gamma_{45^\circ 45^\circ - 135^\circ 135^\circ} = \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 - 4|S_{HV}|^2 \rangle}{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 + 4|S_{HV}|^2 \rangle} \tag{7.4.9}$$

$$\gamma_{XX-XY} = \gamma_{45^\circ 45^\circ - 45^\circ 135^\circ} = \frac{\langle |b|^2 - |a|^2 - j \operatorname{Im}(a^* b) \rangle}{\sqrt{\langle |a+b|^2 + 4|c|^2 \rangle \langle |a-b|^2 \rangle}} \tag{7.4.10}$$

$$\angle \gamma_{XX-XY} = \tan^{-1} \frac{\langle \operatorname{Im}(a^* b) \rangle}{\langle |a|^2 - |b|^2 \rangle} \tag{7.4.11}$$

なお、 $\theta = -45^\circ \Rightarrow 135^\circ$ （X軸が -45° ，Y軸が $+45^\circ$ 方向）と選んでも同じ結果が得られるので、 $45^\circ - 135^\circ$ 直線偏波基底での相関係数 γ_{XX-YY} は実数である。通常、レーダ画像では $|S_{HH} + S_{VV}|^2 \gg 4|S_{HV}|^2$ が成り立つので、この値はほぼ1に近くなるであろう。

（ほとんどのターゲットで1に近いと言うことは、逆にターゲットの区別ができないであろう）

7.5 有効と思われる相関係数

以上をまとめて、自然ターゲット分類に有効と思われる相関係数は次のようになる。

◆ For natural distributed targets with $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$

$$\gamma_{RR-LL} = \frac{\langle 4 |S_{HV}|^2 \rangle - \langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle}{\langle 4 |S_{HV}|^2 \rangle + \langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle} \quad (7.5.1)$$

$$\gamma_{45^\circ 45^\circ - 135^\circ 135^\circ} = \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle - \langle 4 |S_{HV}|^2 \rangle}{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle + \langle 4 |S_{HV}|^2 \rangle} \quad (7.5.2)$$

$$\angle \gamma_{45^\circ 45^\circ - 135^\circ 135^\circ} = \tan^{-1} \frac{\langle \text{Im} (S_{HH}^* S_{VV}) \rangle}{\langle |S_{HH}|^2 - |S_{VV}|^2 \rangle} \quad (7.5.3)$$

着目したい項目として γ_{RR-LL} も $\gamma_{45^\circ 45^\circ - 135^\circ 135^\circ}$ も実数になることである。逆に考えると、位相角をもつ（複素数の） γ_{RR-LL} が計算結果として生じたら、その領域は植生、海などの分布した Reflection Symmetry target ではない。

◆ $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \neq 0$, $\langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \neq 0$ に対して、都合のよいと思われる相関係数は

$$\gamma_{RR-LL} = |\gamma_{RR-LL}| \angle \phi_{RR-LL} = \frac{\left\langle 4 |S_{HV}|^2 - |S_{HH} - S_{VV}|^2 + j \text{Re} \left\{ 4 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle |S_{HH} - S_{VV} - j 2 S_{HV}|^2 \right\rangle \left\langle |S_{HH} - S_{VV} + j 2 S_{HV}|^2 \right\rangle}} \quad (7.5.4)$$

$$\phi_{RR-LL} = \tan^{-1} \frac{\text{Re} \left\langle 4 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle}{\left\langle 4 |S_{HV}|^2 - |S_{HH} - S_{VV}|^2 \right\rangle} \quad (7.5.5)$$

$$\gamma_{XX-YY} = |\gamma_{XX-YY}| \angle \phi_{XX-YY} = \frac{\left\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 - 4 |S_{HV}|^2 - j \text{Im} \left\{ 4 S_{HV}^* (S_{HH} + S_{VV}) \right\} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle |S_{HH} + S_{VV} + 2 S_{HV}|^2 \right\rangle \left\langle |S_{HH} + S_{VV} - 2 S_{HV}|^2 \right\rangle}} \quad (7.5.6)$$

$$\phi_{XX-YY} = \tan^{-1} \frac{\text{Im} \left\langle 4 S_{HV}^* (S_{HH} + S_{VV}) \right\rangle}{\left\langle 4 |S_{HV}|^2 - |S_{HH} + S_{VV}|^2 \right\rangle} \quad (7.5.7)$$

一方, Pauli 散乱ベクトル \mathbf{k}_p を用いて集合平均のCoherency行列が定義されている.

$$\begin{aligned} [T] &= \frac{1}{n} \sum \mathbf{k}_p \otimes \mathbf{k}_p^\dagger = \frac{1}{n} \sum \begin{bmatrix} S_{HH} + S_{VV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ 2S_{HV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH}^* + S_{VV}^* & S_{HH}^* - S_{VV}^* & 2S_{HV}^* \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle & \langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle & \langle 2S_{HV}^*(S_{HH} + S_{VV}) \rangle \\ \langle (S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle & \langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle & \langle 2S_{HV}^*(S_{HH} - S_{VV}) \rangle \\ \langle 2S_{HV}(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle & \langle 2S_{HV}(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle & \langle 4|S_{HV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Coherency行列からも相関係数を定義することはできる. これら2つの集合平均行列には次の関係がある.

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} [C] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.5.8)$$

表現方法に違いはあるが, これら2つの集合平均行列は同じ情報を持っている.

7.6 POLSAR画像解析例

相関係数の位相 ϕ_{RR-LL} , ϕ_{XX-YY} に着目してPOLARSAR画像の解析を行ってみた. 使用したデータは, X-band Pi-SAR image データセット(Data No. 6012)であり, 新潟市西部の領域である. このデータには新潟大学やその周辺が含まれている. 家屋や大学の建物の向きはSAR飛行パスと斜めに傾いており, 数多くの人工物体があるが, レーダ画像にはそれほど強く映らない. 図7.1に散乱ベクトルを基準とした画像を示す. 右下半分が大学である. この地域の地形や建物などはよく分かっているのて, 図7.1の中に囲った領域A, B, C, Dで9*9のwindow sizeを用いて円偏波相関係数の値を調べてみた. 図2にその結果を示す. これらの領域は

- Box A 住宅地 (Reflection Symmetryを持たない領域)
- Box B 松林 (Reflection Symmetryを持つ領域)
- Box C 日本海 (Reflection Symmetryを持つ領域)
- Box D 畑と松 (Reflection Symmetryを持つ領域)

に対応している. 図7.2から分かるように, ターゲット毎に相関係数が集まっている特徴が現れている. そして, 住宅地 (人工物) では予想されるように ϕ_{RR-LL} が0や π から離れている.

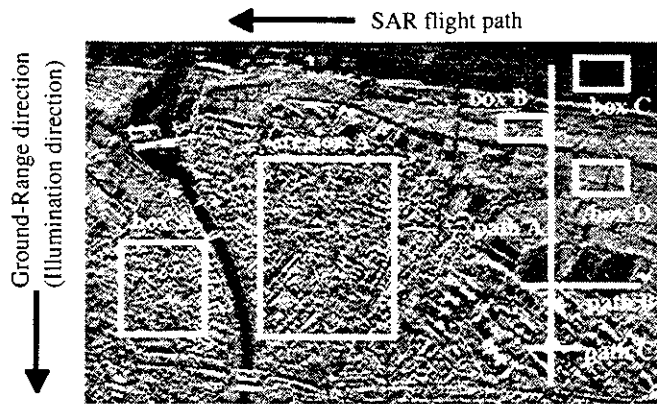


図7.1 新潟大学周辺のX-band Pi-SAR 画像

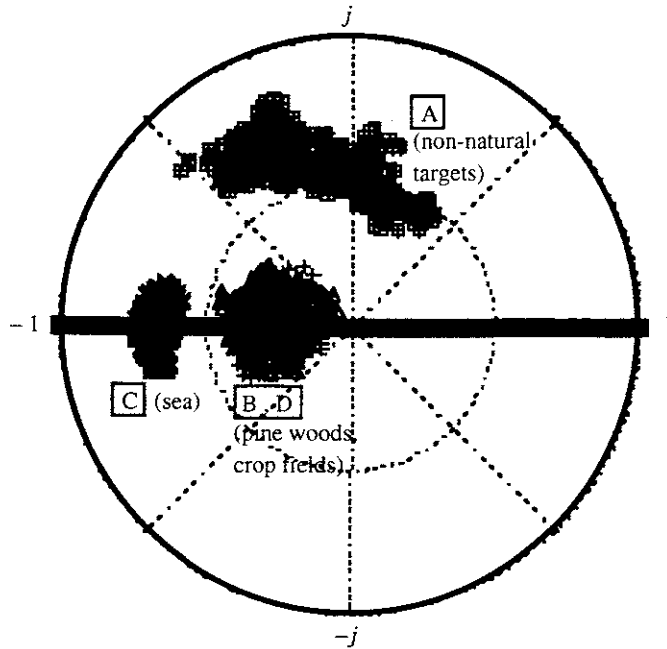


図7.2 円偏波相関係数値の分布

そこで、図7.2を基準に $-\frac{3}{4}\pi \leq \phi_{rr} \leq \frac{3}{4}\pi$ の範囲にはいる9*9の集合平均ミクセルを白、それ以外の場所を黒とした2値画像を作成し、図7.1にoverlayした。その結果を図7.3に示す。

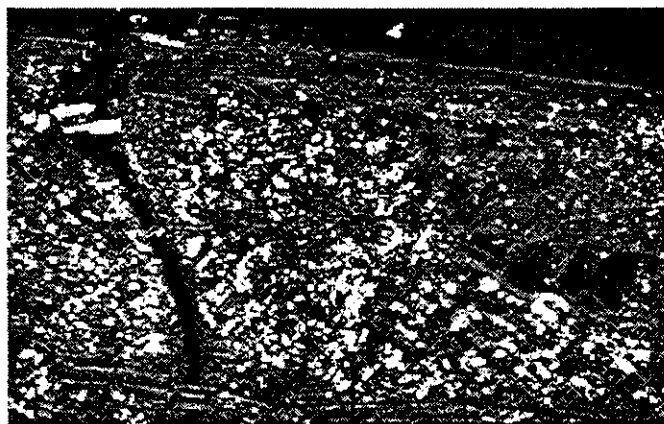


図7.3 Overlay image of ϕ_{RR-LL} and target vector

この結果から、建物（人工物）が良く検出されていることが分かる。大学の建物の向きはSAR飛行方向と斜めになっており、RCSが小さくても検出できていることが分かる。

この結果の妥当性を確かめるために、図7.1に引いたpath A, B, Cに沿って $\sin(\phi_{rr})$ を調べてみた。図

7.4にその値と実際の地表との関係を示す.

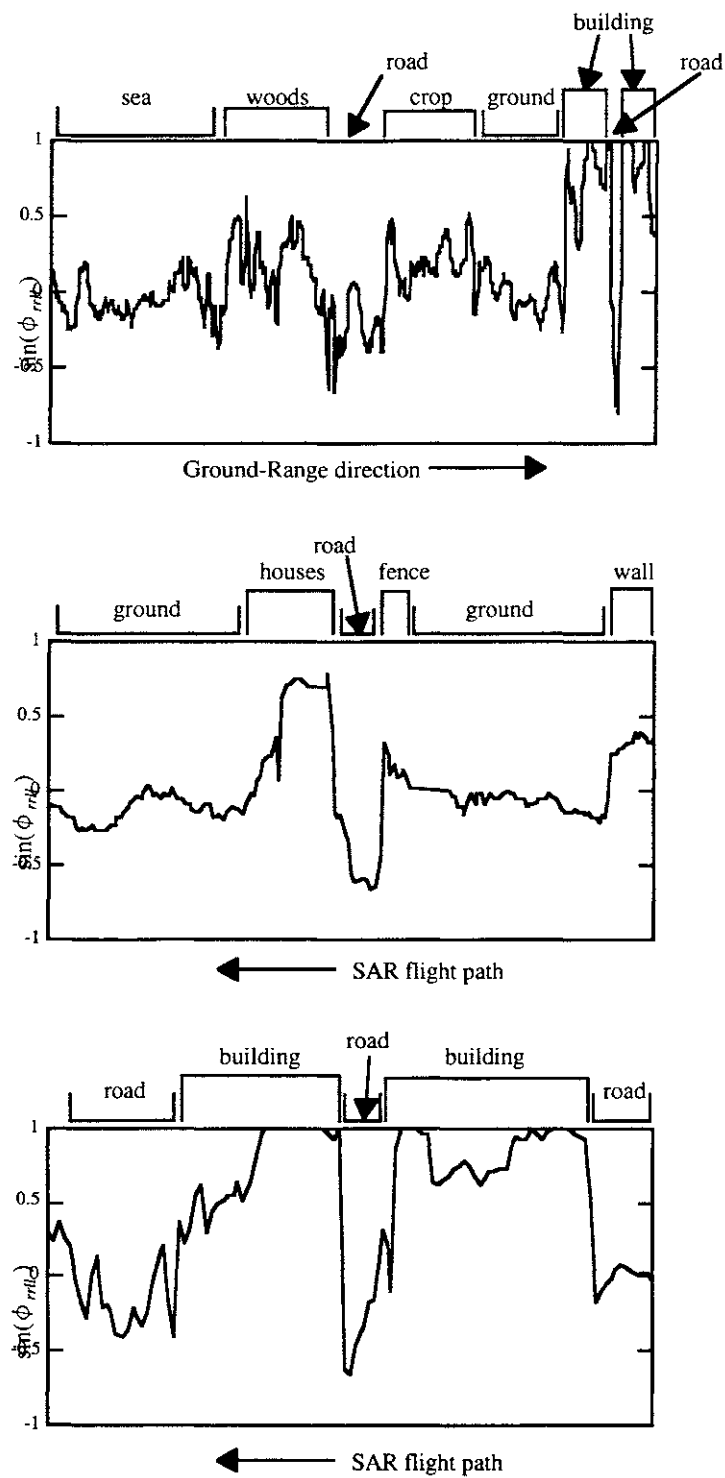


図7.4 Phaseと実際の地表との関係

$\sin(\phi_m)$ は建物の位置では1に近づき、グラウンドや道路では0に近い値をとっている. SARの飛行方向が斜めになっていても人工物体では大きな値をとることから, 位相情報の有用性が確認できる.

References

- [1] S. R. Cloude, and E. Pottier, "A review of target decomposition theorems in radar polarimetry," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 34, no. 2, pp. 498-518, Mar. 1996.
- [2] S. R. Cloude, and E. Pottier, "An entropy based classification scheme for land applications of polarimetric SAR," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 35, no. 1, pp. 68-78, Jan. 1997.
- [3] A. Freeman, and S. Durden, "A three-component scattering model for polarimetric SAR data," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 36, no. 3, pp. 963-973, May 1998.
- [4] J. J. van Zyl, "Unsupervised classification of scattering mechanisms using radar polarimetry data," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 27, no. 1, pp. 36-45, Jan. 1989.
- [5] M. Murase, Y. Yamaguchi, and H. Yamada, "Polarimetric correlation coefficient applied to tree classification," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E84-B, no. 12, pp. 1835-1840, Dec. 2001.
- [6] Y. Yamaguchi, K. Kimura, and H. Yamada, "ALOS-PALSAR image simulation in various polarization basis," *International Geoscience and Remote Sensing Symposium 2002*, CD-ROM, June 2002.
- [7] Y. Jin, and F. Chen, "Polarimetric scattering indexes and information entropy of the SAR imagery for surface monitoring," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 40, no. 11, pp. 2502-2506, Nov. 2002.
- [8] Koji Kimura, Y. Yamaguchi, H. Yamada, "Circular polarization correlation coefficient for detection of non-natural targets aligned not parallel to SAR flight path in the X-band POLSAR image analysis," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E87-B, no. 10, pp. 3050-3056, Oct. 2004.

第8章 Coherency 行列と散乱電力分解

8.1 行列の定義

◆Pauli 散乱ベクトル k_p

偏波解析を統計的に扱うために、散乱行列の全ての情報を保持したベクトルとしてPauli 散乱ベクトル k_p が定義されている。Monostatic の場合には $S_{HV} = S_{VH}$ なので、散乱行列 $[S]$ とPauli matrixの積のTraceとり、次の形になる。

$$k_p = \left[\frac{1}{2} \text{Trace}([S] \sigma_0), \frac{1}{2} \text{Trace}([S] \sigma_1), \frac{1}{2} \text{Trace}([S] \sigma_2) \right]^T \quad (8.1.1)$$

$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$: Pauli matrix

$$\sigma_0 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.1.2)$$

この散乱ベクトル k_p は以下の式と同等である。Coherency ベクトルとも言う。

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{HH} + S_{VV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ 2S_{HV} \end{bmatrix} \quad (8.1.3)$$

この散乱ベクトルの大きさは散乱行列のSpanと等しく、全電力となる。含まれる情報量は同じなので、散乱行列と散乱ベクトルは等価である。

$$|k_p|^2 = |S_{HH}|^2 + 2|S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 = \text{Span}[S] \quad (8.1.4)$$

なお、散乱行列の要素を順次並べた散乱ベクトル k_L (Covariance行列で使用) との間には次の関係がある。

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{HH} + S_{VV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ 2S_{HV} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH} \\ \sqrt{2} S_{HV} \\ S_{VV} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} k_L \quad (8.1.5)$$

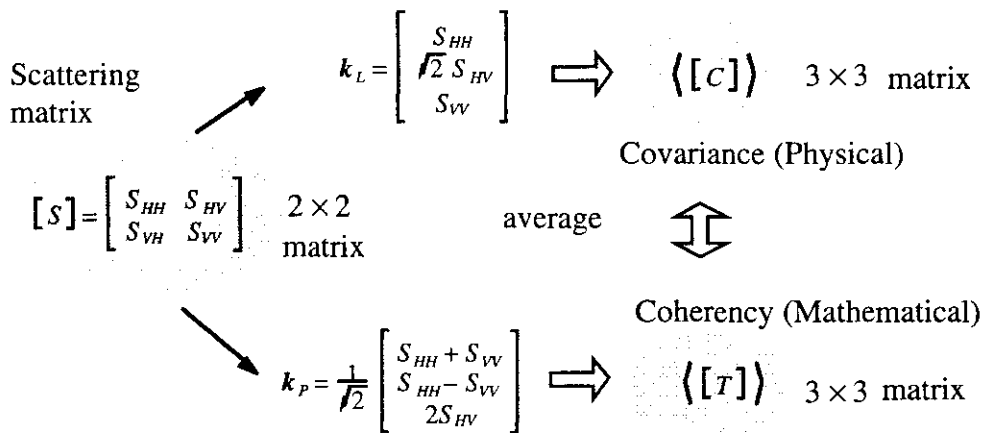


図8.1 2つのアプローチ

◆Coherency行列 $[T]$

Pauli 散乱ベクトル \mathbf{k}_p を使ってCoherency行列 $[T]$ が定義される。対角要素の和は全電力と等しい。

$$\begin{aligned}
 [T] &= \mathbf{k}_p \mathbf{k}_p^{*T} = \mathbf{k}_p \mathbf{k}_p^\dagger = \begin{bmatrix} S_{HH} + S_{VV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ 2S_{HV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH}^* + S_{VV}^* & S_{HH}^* - S_{VV}^* & 2S_{HV}^* \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{|S_{HH} + S_{VV}|^2}{2} & \frac{(S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^*}{2} & (S_{HH} + S_{VV})S_{HV}^* \\ \frac{(S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^*}{2} & \frac{|S_{HH} - S_{VV}|^2}{2} & (S_{HH} - S_{VV})S_{HV}^* \\ S_{HV}(S_{HH} + S_{VV})^* & S_{HV}(S_{HH} - S_{VV})^* & 2|S_{HV}|^2 \end{bmatrix} \quad (8.1.6)
 \end{aligned}$$

$$\text{Trace}[T] = \frac{|S_{HH} + S_{VV}|^2}{2} + \frac{|S_{HH} - S_{VV}|^2}{2} + 2|S_{HV}|^2 = \text{Span}[S] = \|\mathbf{k}_p\|^2 \quad (8.1.7)$$

◆平均化coherency 行列 $\langle [T] \rangle$

POL-SAR画像解析では、平均化した値が必要になる。ここでは平均化した値や行列を $\langle \bullet \rangle$ のように表す。

$$\begin{aligned}
 \langle [T] \rangle &= \frac{1}{n} \sum^n [T] = \frac{1}{n} \sum^n \mathbf{k}_p \mathbf{k}_p^\dagger \\
 &= \begin{bmatrix} \left\langle \frac{|S_{HH} + S_{VV}|^2}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{(S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^*}{2} \right\rangle & \left\langle (S_{HH} + S_{VV})S_{HV}^* \right\rangle \\ \left\langle \frac{(S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^*}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{|S_{HH} - S_{VV}|^2}{2} \right\rangle & \left\langle (S_{HH} - S_{VV})S_{HV}^* \right\rangle \\ \left\langle S_{HV}(S_{HH} + S_{VV})^* \right\rangle & \left\langle S_{HV}(S_{HH} - S_{VV})^* \right\rangle & \left\langle 2|S_{HV}|^2 \right\rangle \end{bmatrix} \quad (8.1.8)
 \end{aligned}$$

8.2 具体的なPOL-SAR画像例

Pi-SARによってデータ取得されたX-bandの新潟市鳥屋野潟周辺画像を図8.2に示す。この図は9 * 9ピクセルの平均化Coherency行列の要素を画像化したものである。



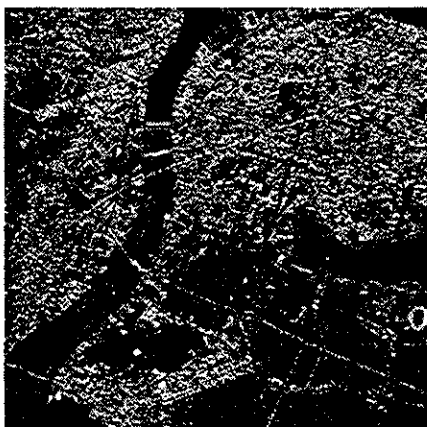
$$\frac{1}{2} \left\langle \left| S_{HH} + S_{VV} \right|^2 \right\rangle$$

表面散乱に対応



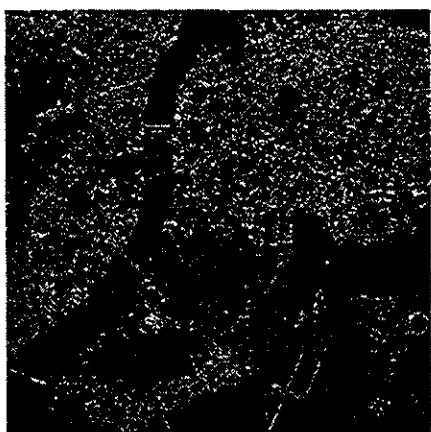
$$\frac{1}{2} \left\langle \left| S_{HH} - S_{VV} \right|^2 \right\rangle$$

2回反射に対応



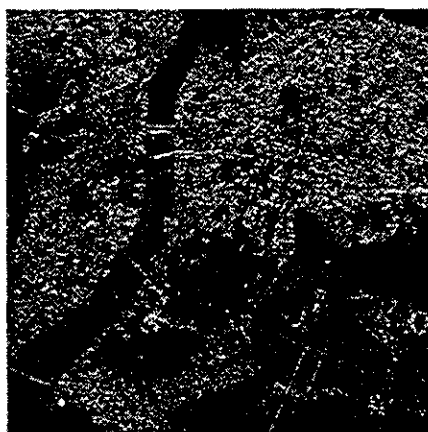
$$\left\langle 2 \left| S_{HV} \right|^2 \right\rangle$$

交差偏波成分



$$\text{Re} \left\langle \left(S_{HH} + S_{VV} \right) S_{HV}^* \right\rangle$$

ワイヤの集合？



$$\text{Im} \left\langle \left(S_{HH} + S_{VV} \right) S_{HV}^* \right\rangle$$

??



$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\langle \left(S_{HH} + S_{VV} \right) \left(S_{HH} - S_{VV} \right)^* \right\rangle$$

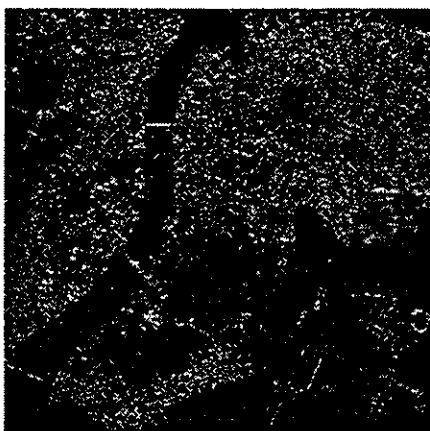


$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\langle \left(S_{HH} + S_{VV} \right) \left(S_{HH} - S_{VV} \right)^* \right\rangle = \operatorname{Im} \left\langle S_{HH}^* S_{VV} \right\rangle$$



$$\operatorname{Re} \left\langle \left(S_{HH} - S_{VV} \right) S_{HV}^* \right\rangle$$

wire, diplaneの集合



$$\operatorname{Im} \left\langle \left(S_{HH} - S_{VV} \right) S_{HV}^* \right\rangle$$

helix成分の集合

図8.2 Coherency 行列の要素画像

X-bandの新潟市鳥屋野潟周辺 9*9 window

8.3 平均化行列の形

平均化行列の形として以下の項目で分類されている。

◆ Reflection symmetry

実験的事実として、平坦な自然地形の植生では $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle = \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle = 0$ が成り立つことが知られている。植生などのNatural distributed targetに相当する。この関係が成り立つ場合、

$$\langle (S_{HH} + S_{VV}) S_{HV}^* \rangle \approx 0, \quad \langle (S_{HH} - S_{VV}) S_{HV}^* \rangle \approx 0 \quad (8.3.1)$$

となる。これらの性質をもつターゲットはReflection symmetricなターゲットと呼ばれる。この場合、平均coherency 行列やCovariance行列は次の形になる。Natural distributed targetの他にDiplaneが該当する。

$$\langle [T] \rangle = \begin{bmatrix} x & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \quad \langle [C] \rangle = \begin{bmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \langle (S_{HH} + S_{VV}) S_{HV}^* \rangle \approx 0 \\ \langle (S_{HH} - S_{VV}) S_{HV}^* \rangle \approx 0 \end{cases}$$

行列中の x は0でない要素を表しており、行列は5つの要素で構成される。

$$\langle [T] \rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle & \langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle & 0 \\ \langle (S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle & \langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle 4|S_{HV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (8.3.2)$$

◆ Rotation symmetry

次に、Rotation symmetry とは、Transverse面内でターゲットが回転しても、散乱特性が変化しない性質を指す。Rotation symmetric (roll invariant) なターゲットが存在する場合、Coherency行列は次式で表される。これは回転操作後に角度平均化した平均化Coherency行列に対応している。 $T_{23} \neq 0$ 成分はhelixが該当する。

$$\begin{aligned} \langle (S_{HH} - S_{VV}) S_{HV}^* \rangle &\neq 0 \\ \langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle &= \langle (S_{HH} + S_{VV}) S_{HV}^* \rangle = 0 \\ \left| \langle (S_{HH} - S_{VV})^2 \rangle \right| &= 4 \left| \langle S_{HV}^2 \rangle \right| \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

$$\langle [T] \rangle = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle & \langle 2S_{HV}^*(S_{HH} - S_{VV}) \rangle \\ 0 & \langle 2S_{HV}(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle & \langle 4|S_{HV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (8.3.4)$$

$\langle S_{HV}^*(S_{HH} - S_{VV}) \rangle \neq 0$ が特徴になっている。

◆ Azimuthal symmetry

Azimuthal symmetric なターゲットは、Reflection symmetry , Rotation symmetry の両方の性質を有する。この場合、Coherency行列はReflection symmetry , Rotation symmetryに関する2つのCoherency行列のANDで構成され、次式のように対角成分のみで表される。ランダムワイヤが該当する。

$$\begin{aligned} \langle (S_{HH} - S_{VV}) S_{HV}^* \rangle &= 0 \\ \langle (S_{HH} + S_{VV}) (S_{HH} - S_{VV})^* \rangle &= \langle (S_{HH} + S_{VV}) S_{HV}^* \rangle = 0 \\ \left| \langle (S_{HH} - S_{VV})^2 \rangle \right| &= 4 \left| \langle S_{HV}^2 \rangle \right| \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

$$\langle [T] \rangle = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle 4|S_{HV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (8.3.6)$$

これらの名称は行列要素や散乱過程の考察から生まれたものであるが、画像例でも分かるようにターゲットは複雑であり、

Reflection symmetry

Rotation symmetry

Azimuthal symmetry

によって単独に分離できるものではない。それぞれが組み合わさって表現されていると考えるべきである。

Matrix Form

Reflection symmetry $\langle [T] \rangle = \begin{bmatrix} x & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$

Rotation symmetry $\langle [T] \rangle = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{bmatrix}$

Azimuthal symmetry $\langle [T] \rangle = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$

8.4 数学的な平均化

Coherency行列の要素の数学的平均化操作は、散乱行列から出発して回転による積分により行う。記号の煩雑さを避けるために仮に $S_{HH} = a$, $S_{VV} = b$, $S_{HV} = c$ とおく。

$$\mathbf{k}_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \\ 2c \end{bmatrix} \quad (8.4.1)$$

この表示により

$$[T] = \mathbf{k}_p \mathbf{k}_p^{*T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |a+b|^2 & (a+b)(a-b)^* & 2c^*(a+b) \\ (a-b)(a+b)^* & |a-b|^2 & 2c^*(a-b) \\ 2c(a+b)^* & 2c(a-b)^* & 4|c|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & A & B \\ A^* & D & E \\ B^* & E^* & C \end{bmatrix} \quad (8.4.2)$$

となる。ただし、A・Sは各要素に対応している。

ターゲットがレーダ照射方向と垂直な面内で θ だけ傾いた場合に、散乱ベクトルは回転行列 $[R(\theta)]$ を掛けることによって得られるので、

$$[T(\theta)] = \mathbf{k}_p(\theta) \mathbf{k}_p(\theta)^{*T} = [R(\theta)] [T] [R(\theta)]^{*T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (8.4.3)$$

詳しく書き下すと

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & A & B \\ A^* & D & E \\ B^* & E^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S & A & B \\ A^* & D & E \\ B^* & E^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & A \cos 2\theta + B \sin 2\theta & -A \sin 2\theta + B \cos 2\theta \\ A^* & D \cos 2\theta + E \sin 2\theta & -D \sin 2\theta + E \cos 2\theta \\ B^* & E^* \cos 2\theta + C \sin 2\theta & -E^* \sin 2\theta + C \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad \text{なので}$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & A \cos 2\theta + B \sin 2\theta & -A \sin 2\theta + B \cos 2\theta \\ A^* & D \cos 2\theta + E \sin 2\theta & -D \sin 2\theta + E \cos 2\theta \\ B^* & E^* \cos 2\theta + C \sin 2\theta & -E^* \sin 2\theta + C \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

その要素は次式となる。

$$\begin{aligned} T_{11} &= S \\ T_{12} &= A \cos 2\theta + B \sin 2\theta & T_{21} &= A^* \cos 2\theta + B^* \sin 2\theta \\ T_{13} &= -A \sin 2\theta + B \cos 2\theta & T_{31} &= -A^* \sin 2\theta + B^* \cos 2\theta \\ T_{22} &= D \cos^2 2\theta + C \sin^2 2\theta + E \sin 2\theta \cos 2\theta + E^* \sin 2\theta \cos 2\theta \\ T_{33} &= D \sin^2 2\theta + C \cos^2 2\theta - E \sin 2\theta \cos 2\theta - E^* \sin 2\theta \cos 2\theta \\ T_{23} &= E \cos^2 2\theta - E^* \sin^2 2\theta - D \sin 2\theta \cos 2\theta + C \sin 2\theta \cos 2\theta \\ T_{32} &= E^* \cos^2 2\theta - E \sin^2 2\theta - D \sin 2\theta \cos 2\theta + C \sin 2\theta \cos 2\theta \end{aligned}$$

◆ 平均操作

確率密度関数を $p(\theta)$ とし、次の積分によって角度 θ についての平均化を行う。

$$\langle [T(\theta)] \rangle = \int_0^{2\pi} [T(\theta)] p(\theta) d\theta \quad (8.4.4)$$

確率密度関数が一様と仮定して $p(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ とした場合、平均値は以下のようなになる。

$$\langle [T(\theta)] \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [T(\theta)] d\theta = \begin{bmatrix} \langle T(\theta)_{11} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle T(\theta)_{22} \rangle & \langle T(\theta)_{23} \rangle \\ 0 & \langle T(\theta)_{32} \rangle & \langle T(\theta)_{33} \rangle \end{bmatrix} \quad (8.4.5)$$

$$\begin{aligned} \langle T(\theta)_{11} \rangle &= S = \frac{1}{2} |a+b|^2 \\ \langle T(\theta)_{22} \rangle &= \langle T(\theta)_{33} \rangle = \frac{D+C}{2} = \frac{1}{4} |a-b|^2 + |c|^2 \\ \langle T(\theta)_{12} \rangle &= \langle T(\theta)_{21} \rangle = \langle T(\theta)_{13} \rangle = \langle T(\theta)_{31} \rangle = 0 \\ \langle T(\theta)_{23} \rangle &= \frac{E-E^*}{2} = \frac{1}{2} \left\{ c^* (a-b) - c (a-b)^* \right\} = j \operatorname{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} \\ \langle T(\theta)_{32} \rangle &= -\langle T_{23} \rangle = -j \operatorname{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

その結果、数式的な平均化では以下の表現となる。(Rotation Symmetryの形式となる)

$$\langle [T(\theta)] \rangle = \begin{bmatrix} \frac{|a+b|^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} |a-b|^2 + |c|^2 & j \operatorname{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} \\ 0 & -j \operatorname{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} & \frac{1}{4} |a-b|^2 + |c|^2 \end{bmatrix} \quad (8.4.7)$$

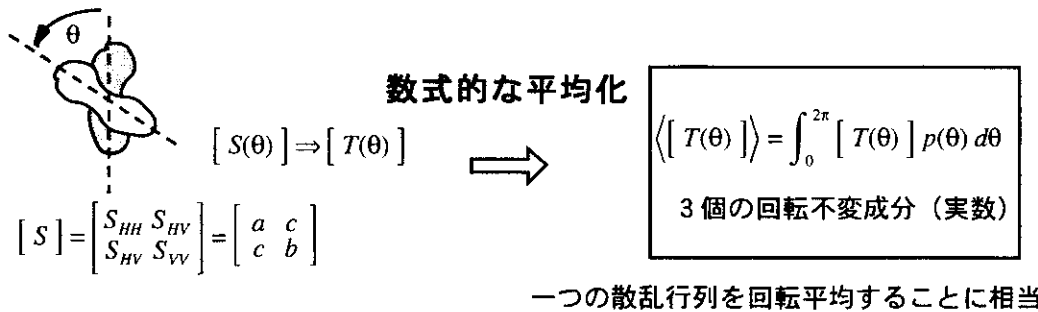


図8.3 数式的な平均化

◆ 固有値について

ところで、 $\langle [T(\theta)] \rangle$ は形式的に次の形になっている。

$$\langle T(\theta) \rangle = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & jc' \\ 0 & -jc' & b' \end{bmatrix} \quad (8.4.8)$$

$$a', b', c' \text{ は実数 } \quad a' = \frac{|a+b|^2}{2}, \quad b' = \frac{1}{4}|a-b|^2 + |c|^2, \quad c' = \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\}$$

その固有値は固有値方程式より以下のように求めることができる。

$$\begin{bmatrix} a' - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b' - \lambda & jc' \\ 0 & -jc' & b' - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = a' &= \frac{|a+b|^2}{2} \Rightarrow \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle}{2} = \langle 2A_0 \rangle : \text{Huynenn parameter} \\ \lambda_2 = b' + c' &= \frac{1}{4}|a-b|^2 + |c|^2 + \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \left\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 + 4|S_{HV}|^2 \right\rangle + \text{Im} \left\langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle = \langle B_0 + F \rangle : \text{Huynenn parameter} \\ \lambda_3 = b' - c' &= \frac{1}{4}|a-b|^2 + |c|^2 - \text{Im} \left\{ c^* (a-b) \right\} \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \left\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 + 4|S_{HV}|^2 \right\rangle - \text{Im} \left\langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle = \langle B_0 - F \rangle : \text{Huynenn parameter} \end{aligned}$$

(8.4.9)

$$\text{Anisotropy : } A = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{2c'}{2b'} = \frac{\text{Im} \left\{ 4c^* (a-b) \right\}}{|a-b|^2 + 4|c|^2} \Rightarrow \frac{\text{Im} \left\langle 4 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle}{\left\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 + 4|S_{HV}|^2 \right\rangle} = \frac{\langle F \rangle}{\langle B_0 \rangle}$$

Coherency行列の利点は、直交分解が可能という点である。Coherency, Covariance 2つの集合平均行列とも共通点は数学的に

- ・ Positive semi-definite Hermite行列 なので 正の固有値をもつ。
- ・ 固有値は電力に関係している
- ・ 固有ベクトルは互いに直交する
- ・ 集合平均を取らない場合は, rank=1
- ・ 通常はrank=3であり, この場合は3つの直交分解が可能

◆ 平均化Coherency行列のまとめ

$$\langle [T] \rangle = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad \text{画像における平均化処理の形式}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle}{2} & \frac{\langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle}{2} & \langle (S_{HH} + S_{VV})S_{HV}^* \rangle \\ \frac{\langle (S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle}{2} & \frac{\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle}{2} & \langle (S_{HH} - S_{VV})S_{HV}^* \rangle \\ \langle S_{HV}(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle & \langle S_{HV}(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle & \langle 2|S_{HV}|^2 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle [T(\theta)] \rangle = \text{角度回転した積分後の形式}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{|S_{HH} + S_{VV}|^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}|S_{HH} - S_{VV}|^2 + |S_{HV}|^2 & j \operatorname{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \\ 0 & -j \operatorname{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} & \frac{1}{4}|S_{HH} - S_{VV}|^2 + |S_{HV}|^2 \end{bmatrix}$$

固有値は

$$\langle [T(\theta)] \rangle = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}|S_{HH} + S_{VV}|^2 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{4}|S_{HH} - S_{VV}|^2 + |S_{HV}|^2 + \operatorname{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4}|S_{HH} - S_{VV}|^2 + |S_{HV}|^2 - \operatorname{Im} \left\{ S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Anisotropy : } A = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{\operatorname{Im} \left\{ 4 S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\}}{|S_{HH} - S_{VV}|^2 + 4|S_{HV}|^2}$$

$$\text{Total Power : } TP = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{Tr} \langle [T(\theta)] \rangle$$

8.5 基本ターゲットのCoherency行列

観測データを使って、Coherency行列の要素を出力すると、ピクセル平均化後の値には数学的な平均化と異なり、値をもつ項目がある。角度について積分する数学的な平均化では、十分に多くのピクセル数平均を取ることに該当しているため、有限のピクセル数の平均では0にならずに、値が残る項目が出てくる。

そこで、残る値が何に起因しているのか？対応するターゲットを調べておく必要がある。

$$\langle [T] \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle}{2} & \frac{\langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle}{2} & \langle (S_{HH} + S_{VV})S_{HV}^* \rangle \\ \frac{\langle (S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle}{2} & \frac{\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle}{2} & \langle (S_{HH} - S_{VV})S_{HV}^* \rangle \\ \langle S_{HV}(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle & \langle S_{HV}(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle & \langle 2|S_{HV}|^2 \rangle \end{bmatrix}$$

基本ターゲットのCoherency行列は以下のように与えられる。

$[T(\theta)]^{HV}$ は単一のターゲットが角度 θ 傾いた場合の行列である。

$\langle [T(\theta)] \rangle^{HV}$ は角度分布が一様で、それを平均した場合に導かれる値である。

◆Plate	$[T(\theta)]_{plate}^{HV} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\langle [T(\theta)] \rangle_{plate}^{HV} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
◆Diplane	$[T(\theta)]_{diplane}^{HV} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2} & \\ 0 & -\frac{\sin 4\theta}{2} & \sin^2 2\theta \end{bmatrix}$	$\langle [T(\theta)] \rangle_{diplane}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
◆Wire	$[T(\theta)]_{wire}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2} & \\ -\sin 2\theta & -\frac{\sin 4\theta}{2} & \sin^2 2\theta \end{bmatrix}$	$\langle [T(\theta)] \rangle_{wire}^{HV} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
◆Right helix	$[T(\theta)]_{r-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix}$	$\langle [T(\theta)] \rangle_{r-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix}$
◆Left helix	$[T(\theta)]_{l-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix}$	$\langle [T(\theta)] \rangle_{l-helix}^{HV} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix}$

8.6 物理散乱モデルとの対応：散乱電力分解への準備

Coherency行列を使って散乱波の分解を試みる。Covarianceの場合と同様にmodel-fitの考え方をとると散乱過程の物理モデルが必要となる。体積散乱，表面散乱，2回反射について対応するCoherency行列を調べよう。

■Volume Scattering Model: 体積散乱について

$$\text{ワイヤ } [S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{あるいは} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{を選ぶと} \quad \langle [T(\theta)] \rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ここでは体積散乱のCoherency行列 $[T]_{vol}$ として次のようにおく。

$$\langle [T(\theta)] \rangle \Rightarrow \langle [T] \rangle_{vol} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Trace} \langle [T] \rangle_{vol} = 1 \quad (8.6.1)$$

■Surface Scattering Model : 表面散乱について

フレネルの反射係数をつかって $[S] = \begin{bmatrix} R_h & 0 \\ 0 & R_v \end{bmatrix}$ とおく。

なめらかな表面からの反射係数は各種文献に掲載されているように次式で与えられる。

$$R_h = \frac{\cos \theta - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta}} \quad R_v = \frac{(\epsilon_r - 1) \left\{ \sin^2 \theta - \epsilon_r (1 + \sin^2 \theta) \right\}}{\left(\epsilon_r \cos \theta + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta} \right)^2}$$

これを使って，散乱ベクトルを作ると

$$\mathbf{k}_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} R_h + R_v \\ R_h - R_v \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{R_h + R_v}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ただし} \quad \beta = \frac{R_h - R_v}{R_h + R_v}$$

大まかな計算では $R_h \approx -0.5$, $R_v \approx -0.55$ 程度になるので， $|\beta| \ll 1$ を想定する。

$$[T]_{surface} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \langle |R_h + R_v|^2 \rangle & \langle (R_h + R_v)(R_h - R_v)^* \rangle & 0 \\ \langle (R_h - R_v)(R_h + R_v)^* \rangle & \langle |R_h - R_v|^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

係数を無視して表面散乱のCoherency行列 $[T]_{surface}$ として次のようにおく。

$$[T]_{surface} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \beta^* & 0 \\ \beta & |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle [T] \rangle_{surface} = \begin{bmatrix} 1 & \beta^* & 0 \\ \beta & |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.6.2)$$

■Double bounce Model: 2 回反射モデルについて

2 回反射のモデルは 2 面のコーナリフレクタであるが、必ずしも面を構成している媒質が金属とは限らない。例えば、地面と木の幹によって構成される 2 回反射構造などが該当する。木から構成される垂直面の反射係数を R_v 、地面の反射係数を R_{gv} （フレネルの反射係数）、水平偏波でそれぞれ、 R_{th} 、 R_{gh} とする。また、植生を透過する際に位相回転や減衰を受けるので、その影響を伝搬定数 γ_v 、 γ_h に取り込む。2 回反射成分で hh と vv 成分の位相差が 180 度だけ変化しているとは限らない。その結果、散乱行列は以下のようにモデル化できるであろう。

$$\begin{aligned}
 [S]_{ree} &\Rightarrow \begin{bmatrix} e^{j2\gamma_h} R_{gh} R_{th} & 0 \\ 0 & e^{j2\gamma_v} R_{gv} R_{tv} \end{bmatrix} = e^{j2\gamma_v} R_{gv} R_{tv} \begin{bmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \alpha' &= e^{j2(\gamma_h - \gamma_v)} \frac{R_{gh} R_{th}}{R_{gv} R_{tv}} \quad (-1 \text{ に近い}) \\
 k_p &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 + \alpha' \\ 1 - \alpha' \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |\alpha| \ll 1 \quad \text{と仮定できるので,} \\
 \Rightarrow [T]_{double} &= \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha & 0 \\ \alpha^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{とモデル化する.} \tag{8.6.3}
 \end{aligned}$$

例えば、FDTD による数値計算例で、金属の Diplane では

$$[S]_{diplane} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.45 - j1.02 & 0 \\ 0 & 0.21 + j1.03 \end{bmatrix} \quad \frac{[T]_{diplane}}{T_{22}} = \begin{bmatrix} 0.102 & 0.036 + j0.317 & 0 \\ 0.036 - j0.317 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

損失誘電体では、フレネルの反射係数を使って

$$[S]_{diplane}^{dielectric} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.255 - j0.041 & 0 \\ 0 & -0.059 + j0.021 \end{bmatrix} \quad \frac{[T]_{diplane}}{T_{22}} = \begin{bmatrix} 0.377 & 0.612 + j0.055 & 0 \\ 0.612 - j0.055 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。

■円偏波発生

Helix は円偏波を発生する。平均化 Coherency 行列から分かるように、 T_{23} 成分に $\pm j$ の特徴が現れる。符号によって右回りと左回り成分を区別し、同時に Trace によって電力成分を考慮することができる。

$$\begin{aligned}
 [S]_{r-helix}^{HV} &= \frac{e^{j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} & [T]_{circular}^{r-helix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix} & \langle [T(\theta)] \rangle_{circular}^{r-helix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix} \\
 [S]_{l-helix}^{HV} &= \frac{e^{-j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} & [T]_{circular}^{l-helix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} & \langle [T(\theta)] \rangle_{circular}^{l-helix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix} \tag{8.6.4}
 \end{aligned}$$

8.7 物理散乱モデルによるCoherency行列の四成分分解（表面，二回反射，体積散乱，円偏波発生）

8.6の結果をまとめて物理散乱モデルを次の平均化Coherency行列で表す。

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cc} \text{表面散乱} & \text{2回反射} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \text{体積散乱} & \text{円偏波発生} \end{array} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & \beta^* & 0 \\ \beta & |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha & 0 \\ \alpha^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm j \\ 0 & \mp j & 1 \end{bmatrix} \\
 \\
 & \langle [T] \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle}{2} & \frac{\langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle}{2} & \langle (S_{HH} + S_{VV})S_{HV}^* \rangle \\ \frac{\langle (S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle}{2} & \frac{\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle}{2} & \langle (S_{HH} - S_{VV})S_{HV}^* \rangle \\ \langle S_{HV}(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle & \langle S_{HV}(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle & \langle 2|S_{HV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \\
 \\
 & \langle [T] \rangle = f_s [T]_{\text{surface}} + f_d [T]_{\text{double}} + f_v \langle [T] \rangle_{\text{vol}} + f_c \langle [T] \rangle_{\text{circular}} \\
 \\
 & = f_s \begin{bmatrix} 1 & \beta^* & 0 \\ \beta & |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + f_d \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha & 0 \\ \alpha^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{f_v}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f_c}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm j \\ 0 & \mp j & 1 \end{bmatrix} \quad (8.7.1)
 \end{aligned}$$

ただし， f_s ， f_d ， f_v ， f_c は電力寄与である。Coherency 行列の要素を比較し，次式が得られる。

$$T_{23} \quad \frac{f_c}{2} = \left| \text{Im} \langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \rangle \right| > 0 \quad \text{ただし以下の符号に注意。} \quad (8.7.2)$$

$$\text{Im} \langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \rangle > 0 \text{ なら r-helix} \quad \text{Im} \langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \rangle < 0 \text{ なら l-helix}$$

$$T_{33} \quad \langle 2|S_{HV}|^2 \rangle = \frac{f_v}{4} + \frac{f_c}{2} \quad (8.7.3)$$

$$T_{22} \quad \frac{\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle}{2} = f_s |\beta|^2 + f_d + \frac{f_v}{4} + \frac{f_c}{2} \quad (8.7.4)$$

$$T_{11} \quad \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle}{2} = f_s + f_d |\alpha|^2 + \frac{f_v}{2} \quad (8.7.5)$$

$$T_{12} \quad \frac{\langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle}{2} = f_s \beta^* + f_d \alpha \quad (8.7.6)$$

未知数の求め方

$$\frac{f_c}{2} = \left| \operatorname{Im} \left\langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle \right| \quad (8.7.7)$$

$$\frac{f_v}{4} = \left\langle 2 | S_{HV} |^2 \right\rangle - \frac{f_c}{2} \quad (8.7.8)$$

より

$$f_s | \beta |^2 + f_d = A \Leftarrow \frac{\left\langle | S_{HH} - S_{VV} |^2 \right\rangle}{2} - \frac{f_v}{4} - \frac{f_c}{2} \quad \text{known} \quad (8.7.9)$$

$$f_s + f_d | \alpha |^2 = B \Leftarrow \frac{\left\langle | S_{HH} + S_{VV} |^2 \right\rangle}{2} - \frac{f_v}{2} \quad \text{known} \quad (8.7.10)$$

$$f_s \beta^* + f_d \alpha = C \Leftarrow \frac{\left\langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \right\rangle}{2} \quad \text{known} \quad (8.7.11)$$

3本の方程式に対して未知数が4つ(f_s, f_d, α, β)になる。何かの近似が必要となる。

$\operatorname{Re} \langle S_{HH}^* S_{VV} \rangle > 0$ なら $\beta^* = 0$ とおいて2回反射のみを選ぶ

$$f_d = A \quad f_d \alpha = C \text{ より } \alpha = \frac{C}{f_d}, \quad f_s = B - f_d | \alpha |^2 = B - \frac{|C|^2}{A} \quad (8.7.12)$$

$\operatorname{Re} \langle S_{HH}^* S_{VV} \rangle < 0$ なら $\alpha = 0$ とおいて1回反射のみを選ぶ

$$f_s = B \quad f_s \beta^* = C \text{ より } \beta^* = \frac{C}{f_s}, \quad f_d = A - f_s | \beta^* |^2 = A - \frac{|C|^2}{B} \quad (8.7.13)$$

以上が求まったら電力は以下の式で求めることができる。

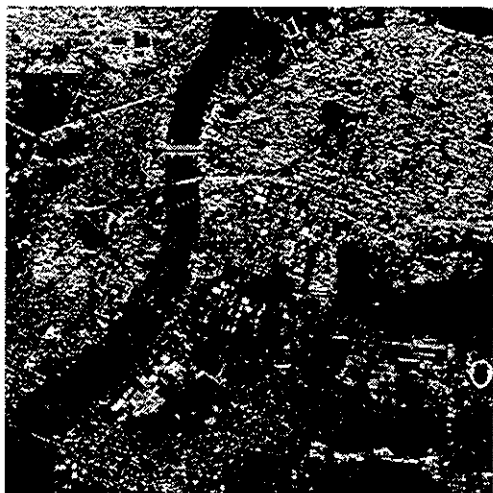
$$P_s = f_s (1 + | \beta |^2) \quad P_d = f_d (1 + | \alpha |^2) \quad (8.7.14)$$

$$P_c = f_c = 2 \left| \operatorname{Im} \left\langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle \right| = 2 \left| \operatorname{Im} \left\langle S_{HH} S_{HV}^* + S_{HV} S_{VV}^* \right\rangle \right| \quad \text{Covarianceでの結果と同じ}$$

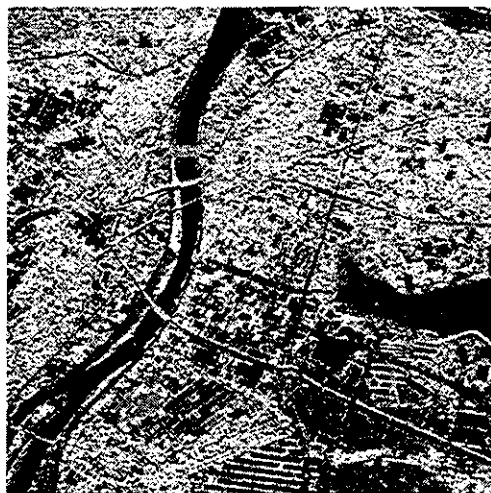
$$P_v = f_v = \left\langle 8 | S_{HV} |^2 \right\rangle - 2 P_c = \left\langle 8 | S_{HV} |^2 \right\rangle - 4 \left| \operatorname{Im} \left\langle S_{HV}^* (S_{HH} - S_{VV}) \right\rangle \right| \quad \text{Covarianceと同じ}$$

8.8 Coherency行列の四成分分解例

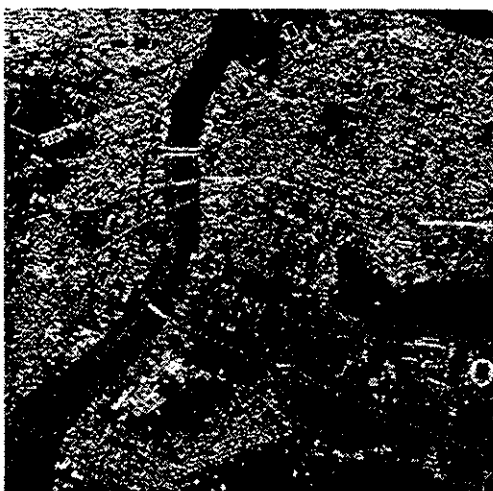
まず、2003年8月20日 鳥屋野潟周辺 L-bandのPi-SAR画像 (coherence) , 平均化サイズ 5×5 を見てみよう.



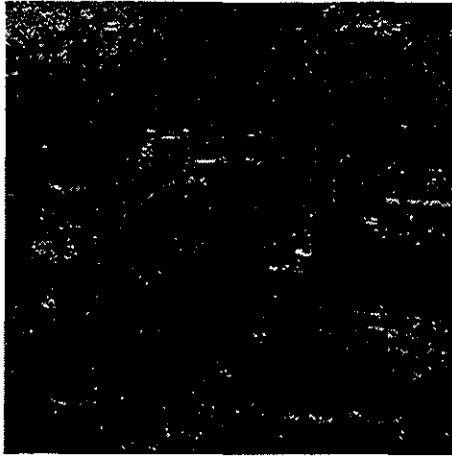
$$\frac{1}{2} \left\langle \left| S_{HH} + S_{VV} \right|^2 \right\rangle$$



$$\frac{1}{2} \left\langle \left| S_{HH} - S_{VV} \right|^2 \right\rangle$$



$$\left\langle 2 \left| S_{HV} \right|^2 \right\rangle$$



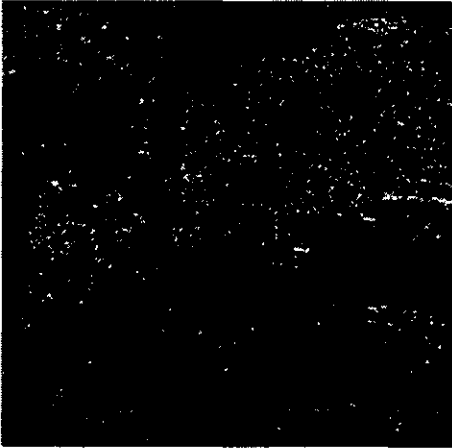
$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\langle \left(S_{HH} + S_{VV} \right) \left(S_{HH} - S_{VV} \right)^* \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \left\langle \left| S_{HH} \right|^2 - \left| S_{VV} \right|^2 \right\rangle$$



$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\langle \left(S_{HH} + S_{VV} \right) \left(S_{HH} - S_{VV} \right)^* \right\rangle$$

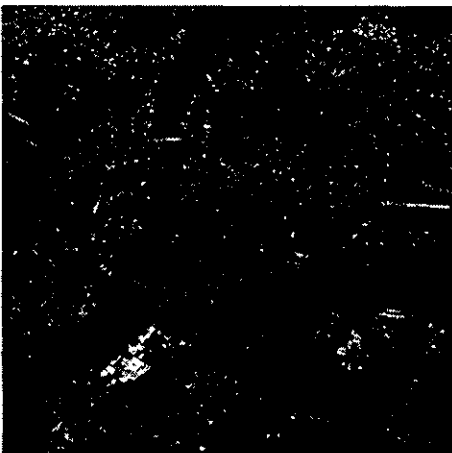
$$= \operatorname{Im} \left\langle S_{HH}^* S_{VV} \right\rangle$$



$$\operatorname{Re} \left\langle \left(S_{HH} + S_{VV} \right) S_{HV}^* \right\rangle$$



$$\operatorname{Im} \left\langle \left(S_{HH} + S_{VV} \right) S_{HV}^* \right\rangle$$



$$\operatorname{Re} \left\langle \left(S_{HH} - S_{VV} \right) S_{HV}^* \right\rangle$$



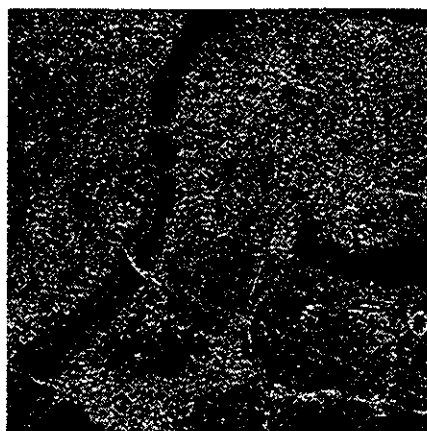
$$\operatorname{Im} \left\langle \left(S_{HH} - S_{VV} \right) S_{HV}^* \right\rangle$$

図8.4 2003年8月20日 鳥屋野潟周辺 L-bandのPi-SAR画像 (coherence)
平均化サイズ 5×5

4成分で分解すると次のようになる.



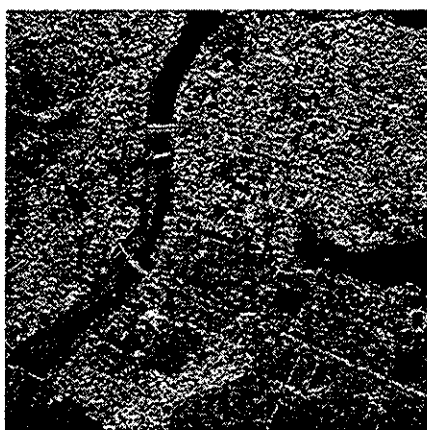
Ps



Pd



Pv



Pc

図8.5 2003年8月20日 鳥屋野潟周辺 L-band, coherencey行列に基づく4成分分解結果
平均化サイズ 5×5

この分解の検証が必要である

付録8.1 三成分分解（表面，二回反射，体積散乱）

3つの成分で分解することは形式的に可能であるが，展開項からわかるように， $|S_{HV}|^2$ はすべて体積散乱による影響になってしまい，実際の散乱課程と異なる．一応，計算した結果を示しておく．

$$\begin{aligned} \langle [T] \rangle &= f_s [T]_{\text{surface}} + f_d [T]_{\text{double}} + f_v \langle [T] \rangle_{\text{vol}} \\ &= f_s \begin{bmatrix} 1 & \beta^* & 0 \\ \beta & |\beta|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + f_d \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha & 0 \\ \alpha^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{f_v}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle}{2} & \frac{\langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle}{2} & \langle (S_{HH} + S_{VV})S_{HV}^* \rangle \\ \frac{\langle (S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle}{2} & \frac{\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle}{2} & \langle (S_{HH} - S_{VV})S_{HV}^* \rangle \\ \langle S_{HV}(S_{HH} + S_{VV})^* \rangle & \langle S_{HV}(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle & \langle 2|S_{HV}|^2 \rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし， f_s ， f_d ， f_v ， f_c は電力寄与である．Coherency 行列の要素を比較し，次式が得られる．成分を比較して

$$\begin{aligned} T_{33} & \quad \langle 2|S_{HV}|^2 \rangle = \frac{f_v}{4} \\ T_{11} & \quad \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle}{2} = f_s + f_d |\alpha|^2 + \frac{f_v}{2} \\ T_{22} & \quad \frac{\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle}{2} = f_s |\beta|^2 + f_d + \frac{f_v}{4} \\ T_{12} & \quad \frac{\langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle}{2} = f_s \beta^* + f_d \alpha \end{aligned}$$

未知数の求め方

$$\begin{aligned} f_v &= 8 \langle |S_{HV}|^2 \rangle \\ f_s |\beta|^2 + f_d &= A \leftarrow \frac{\langle |S_{HH} - S_{VV}|^2 \rangle}{2} - \frac{f_v}{4} \\ f_s + f_d |\alpha|^2 &= B \leftarrow \frac{\langle |S_{HH} + S_{VV}|^2 \rangle}{2} - \frac{f_v}{2} \\ f_s \beta^* + f_d \alpha &= C \leftarrow \frac{\langle (S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^* \rangle}{2} \end{aligned}$$

$\text{Re} \langle S_{HH}^* S_{VV} \rangle > 0$ なら $\beta = 0$ とおいて

$$f_d = A \quad f_d \alpha = C \text{ より } \alpha = \frac{C}{f_d}, \quad f_s = B - f_d |\alpha|^2 = B - \frac{|C|^2}{A}$$

$\text{Re} \langle S_{HH}^* S_{VV} \rangle < 0$ なら $\alpha = 0$ とおいて

$$f_s = B \quad f_s \beta^* = C \text{ より } \beta^* = \frac{C}{f_s}, \quad f_d = A - f_s |\beta^*|^2 = A - \frac{|C|^2}{B}$$

電力は
$$P_s = f_s \left(1 + |\beta|^2 \right) \quad P_d = f_d \left(1 + |\alpha|^2 \right) \quad P_v = f_v = \left\langle 8 |S_{HV}|^2 \right\rangle$$

注) $P_v = \left\langle 8 |S_{HV}|^2 \right\rangle$ はFreeman モデルと同じ結果である。

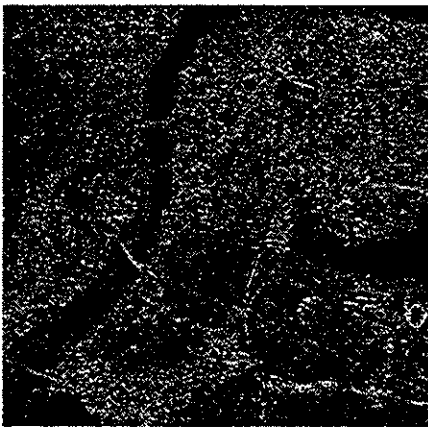
Pc=0とみなしたり，Pvを求めた後にそれを0とおき，Ps, Pdの画像を出力すると次のようになる。



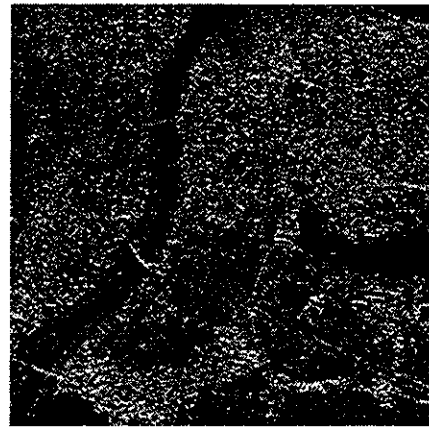
Ps (Pc = 0)



Ps (Pv除去)



Pd (Pc = 0)



Pd (Pv除去)



Pv (Pc = 0)



Pv (Pv除去)

3 component decomposition by coherency matrix

第9章 Coherency 行列とPolarimetric Entropy H/ Angle a /Anisotropy / TP

分解法は様々あるが、分解の一意性はどうか？と疑問も出てくる。いずれも偏波行列の成分を用いて分類に役立っているが、数学的には不明な点も多い。分解のuniquenessの観点から、ここでは少し散乱行列の変換について考察しておく。

後方散乱の散乱行列は、次の形に分解できる。

$$\begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{HV} & S_{VV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & c \\ c & a-d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

一般 sphere, plate diplane others

円偏波(RL) 基底では

$$\begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RL} \\ S_{RL} & S_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d-jc & -ja \\ -ja & -d-jc \end{bmatrix} = -ja \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} -jc \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

一般 sphere, plate diplane others

これら2つの式を比較して分かることは、行列式が+1のユニタリ基底変換を行った後の行列にも同じ形の行列が出現することである。

そこで、どんな基底であろうと式(9.1), (9.2)の形式の2×2の複素行列は次の3つの基本行列で表されることが予想される。これらの行列はPauli matrixと呼ばれ、次のように定義される。

$$\sigma_0 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

これらの行列は任意の2つの行列 $[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ の直交条件

$$A_{11} B_{11}^* + A_{12} B_{12}^* + A_{21} B_{21}^* + A_{22} B_{22}^* = 0 \quad (9.4)$$

を満足している。したがって、Pauli matrixは直交行列分解に使えることを示している。直交行列展開をしておけば、uniquenessは保証されるであろう。(9.1)の展開によれば

$$a = \frac{S_{HH} + S_{VV}}{2}, \quad d = \frac{S_{HH} - S_{VV}}{2}, \quad c = S_{HV} \quad (9.5)$$

である。

形式的な(9.1)の散乱モデルと数学的な直交性がどのように関わってくるのかS.R.Cloude[10], [11]によって、この直交分解とその成分をつかったCoherency Matrix の固有値と固有ベクトルからエントロピーが定義されている。以下にその概要を示す。

9.1 Coherency matrix と polarimetric entropy

まず、後方散乱行列 $[S]$ とPauli matrixの積のTraceとり、Coherency vector \mathbf{k}_p を定義する。

$$\mathbf{k}_p = \left[\frac{1}{2} \text{Trace}([S] \sigma_0), \frac{1}{2} \text{Trace}([S] \sigma_1), \frac{1}{2} \text{Trace}([S] \sigma_2) \right]^T \quad (9.6a)$$

$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$: Pauli matrix

この行列は以下の式と同等である。

$$\mathbf{k}_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{HH} + S_{VV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ 2S_{HV} \end{bmatrix} \quad (9.6b)$$

Coherency matrix $[T]$ を以下のように定義し、その固有値、固有ベクトルを求める。

$$[T] = \mathbf{k}_p \mathbf{k}_p^* = \begin{bmatrix} \frac{|S_{HH} + S_{VV}|^2}{2} & \frac{(S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^*}{2} & (S_{HH} + S_{VV})S_{HV}^* \\ \frac{(S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^*}{2} & \frac{|S_{HH} - S_{VV}|^2}{2} & (S_{HH} - S_{VV})S_{HV}^* \\ S_{HV}(S_{HH} + S_{VV})^* & S_{HV}(S_{HH} - S_{VV})^* & 2|S_{HV}|^2 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

$[T]$ の固有ベクトルを $\mathbf{e}_1 = [a \ b \ c]^T$ と置いたとき、 \mathbf{e}_1 が固有ベクトルになるためには式(9.8)を満たさなければならない。

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1 \quad (9.8)$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} r_a e^{j\theta_a} & r_b e^{j\theta_b} & r_c e^{j\theta_c} \end{bmatrix}^T = e^{j\theta_a} \begin{bmatrix} r_a & r_b e^{j(\theta_b - \theta_a)} & r_c e^{j(\theta_c - \theta_a)} \end{bmatrix}^T \quad (9.9)$$

とすると式(9.8)より、 $|a| \leq 1$ なので

$$|a| = \cos \alpha_1 \quad (9.10a)$$

と置くと

$$|b|^2 + |c|^2 = \sin^2 \alpha_1 \quad (9.10b)$$

よって

$$|b| = \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \quad (9.10c)$$

$$|c| = \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \quad (9.10d)$$

と書くことができる。以上より、固有ベクトルは次のように置くことができる。

$$\mathbf{e}_1 = e^{j\theta_a} \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \cos \beta_1 e^{j\delta_1} & \sin \alpha_1 \sin \beta_1 e^{j\gamma_1} \end{bmatrix}^T \quad (9.11a)$$

$$\mathbf{e}_2 = e^{j\theta_a} \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \cos \beta_2 e^{j\delta_2} & \sin \alpha_2 \sin \beta_2 e^{j\gamma_2} \end{bmatrix}^T \quad (9.11b)$$

$$\mathbf{e}_3 = e^{j\theta_a} \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 \cos \beta_3 e^{j\delta_3} & \sin \alpha_3 \sin \beta_3 e^{j\gamma_3} \end{bmatrix}^T \quad (9.11c)$$

これから、 $[T]$ は次のように対角化することができる。 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は固有値である。

$$[T] = [U] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} [U]^* \quad (9.12)$$

$$[U] = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]$$

$[U]$: ユニタリ行列

固有ベクトルの α は散乱メカニズムを表し、 β はLOSに対するターゲットの傾き、 δ と γ は定義のとおり
の位相である。以上より、 $[T]$ の固有ベクトルによって角度 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めることができるので、固
有値を用いてエントロピー H と α を定義する。

$$H = \sum_{i=1}^3 P_i (-\log_3 P_i) \quad \text{但し,} \quad P_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \quad (9.13)$$

Alphabar

$$\alpha = P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + P_3 \alpha_3 \quad (9.14)$$

対角化された $[T]$ から得られるAnisotropy係数 A と全電力 TP は、次のように定義される。

$$A = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \quad TP = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (9.15)$$

9.2 平均化されたCoherency matrixとエントロピー

POL-SAR画像解析では、単一のピクセルからの散乱行列だけでは教師付きデータを作成しても誤差が
含まれるため、ターゲットの領域を表している数個のピクセルや、平均化した代表値としての値が必要
になる。そこで、統計量的なデータに対して、画像の各ピクセルごとに得られたcoherency matrix $[T_i]$ の
平均coherency matrix $\langle [T] \rangle$ とエントロピー H を以下のように定義する。

$$T_i = k_i k_i^* \quad \langle [T] \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad (9.16)$$

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i} \quad H = \sum_{i=1}^3 P_i (-\log_3 P_i) \quad (9.17)$$

さて、同じターゲットであるが、各ピクセルごとに傾き角が異なるような散乱行列が得られた場合を
想定する。傾き角が異なっても、本質的に同じターゲットからの散乱行列なので、その散乱行列は以下
のような対角行列の形でかける。この形式は散乱行列を固有基底で見たものに相当する。

$$[S] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

この場合、

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \varepsilon & \mu & 0 \\ \mu^* & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |a+b|^2 & (a+b)(a-b)^* & 0 \\ (a-b)(a+b)^* & |a-b|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{|a+b|^2}{2} \quad \mu = \frac{(a+b)(a-b)^*}{2} \quad v = \frac{|a-b|^2}{2} \quad (9.20)$$

次に、傾き角 θ を考慮した一般的な $[T_i]$ は、以下のような回転行列を掛けて次式のように表される。

$$\begin{aligned} [T(\theta)] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \mu & 0 \\ \mu^* & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon & \mu \cos 2\theta & \mu \sin 2\theta \\ \mu^* \cos 2\theta & v \cos^2 2\theta & v \cos 2\theta \sin 2\theta \\ \mu^* \sin 2\theta & v \cos 2\theta \sin 2\theta & v \sin^2 2\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.21)$$

そこで、全ての角度 θ について一様と仮定して平均をとると、以下のようになる。

$$\langle [T(\theta)] \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [T(\theta)] d\theta = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v}{2} \end{bmatrix} \quad (9.22)$$

例えば、例題を考えてみよう。

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{プレート} \quad [S] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \langle [T(\theta)] \rangle = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \\ e_1 &= [1 \ 0 \ 0]' \quad \cos \alpha_1 = 1 \quad \alpha_1 = 0^\circ \\ P_1 &= 1 \quad H = 0 \quad TP = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{ワイヤ} \quad [S(\theta)] &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad \langle [T(\theta)] \rangle = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \\ e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ \cos 2\theta \ \sin 2\theta]' \quad \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha_1 = 45^\circ \\ H &= 0.95 \quad TP = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \text{リフレクタ} \quad [S(\theta)] &= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \quad \langle [T(\theta)] \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \\ e_1 &= [0 \ \cos 2\theta \ \sin 2\theta]' \quad \cos \alpha_1 = 0 \quad \alpha_1 = 90^\circ \\ H &= 0.63 \quad TP = 2 \end{aligned}$$

得られた H が各ターゲットのエントロピーの上限値である。さらに、エントロピーが最も高くなるような $\langle [T(\theta)] \rangle$ は、次のような形になる。

$$\langle [T(\theta)] \rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{bmatrix} \quad (9.23)$$

このようにエントロピー H は0から1までの範囲をとり、散乱のランダム性を表している。 $H=0$ で1つの散乱メカニズム（表面散乱）が発生することを表しており、 $H=1$ で3つの散乱メカニズムが同程度で発生する（完全にランダムな散乱である）ことを表している。

角度 α は偏波依存性を表す値で、 0° でプレート、 45° でワイヤ、 90° でコーナーリフレクタ、ヘリックスになる。ワイヤとコーナーリフレクタが同じ角度に現れることはない。

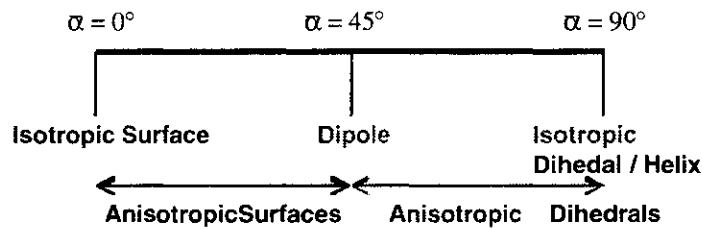


図9.1 α の値とターゲットの対応

9.3 分類手法

エントロピーと α を軸にとった図9.1がターゲット分類によく使われる。（曲線は各 α に対するエントロピーの上限を表しており、曲線の内部（左側）に分類された値が必ず入る。）

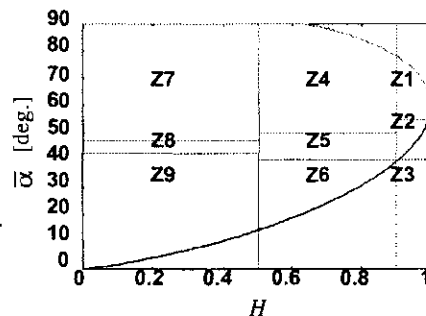


図9.2 エントロピーHと α による分類方法

Entropy H, α の値によって、散乱過程を以下の領域に分類することができる。

- Z9 : Low Entropy Surface Scatterer
- Z8 : Low Entropy Dipole Scattering
- Z7 : Low Entropy Multiple Scattering Events
- Z6 : Medium Entropy Surface Scatterer
- Z5 : Medium Entropy Vegetation Scattering
- Z4 : Medium Entropy Multiple Scattering
- Z3
- Z2 : High entropy Vegetation Scattering
- Z1 : High Entropy Multiple Scattering

なお、Hの問題点として固有値が $\lambda_2 \neq \lambda_3$ の場合に、Hが一意に決まらないという点がある。例えば、

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0.3 & \quad P_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{1}{1 + 1 + 0.3} = \frac{1}{2.3} \quad P_2 = \frac{1}{2.3} \quad P_3 = \frac{0.3}{2.3} \\ & \quad H = -\frac{1}{2.3} \log_3 \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.3} \log_3 \frac{1}{2.3} - \frac{0.3}{2.3} \log_3 \frac{0.3}{2.3} = 0.9 \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.4, \lambda_3 = 0.4 & \quad P_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{1}{1 + 0.4 + 0.4} = \frac{1}{1.8} \quad P_2 = \frac{0.4}{1.8} \quad P_3 = \frac{0.4}{1.8} \\ & \quad H = -\frac{1}{1.8} \log_3 \frac{1}{1.8} - \frac{0.4}{1.8} \log_3 \frac{0.4}{1.8} - \frac{0.4}{1.8} \log_3 \frac{0.4}{1.8} = 0.9 \end{aligned}$$

となり、共に $H=0.9$ となってしまふ。したがって、同じターゲットと認識してしまう。

そこで、Anisotropy A や全電力 TP が役に立つ。これらは偏波基底に依存しない回転不変量である。Anisotropy A は散乱過程を表すパラメータであり、 $A=0$ は $\lambda_2=\lambda_3=0$ あるいは $\lambda_2=\lambda_3\neq 0$ の場合に相当する。 $\lambda_2=\lambda_3=0$ は、1つの散乱メカニズムしかない場合、 $\lambda_2=\lambda_3\neq 0$ は3つの散乱メカニズムのうち2つ寄与が同じ場合である。一方、 $A=0$ は $\lambda_2\neq 0, \lambda_3=0$ の場合に相当する（散乱メカニズムが2つ）。このような場合には

$$\begin{aligned} \lambda_1=1, \lambda_2=1, \lambda_3=0.3 \text{ では } & A=0.54 \\ \lambda_1=1, \lambda_2=0.4, \lambda_3=0.4 & A=0 \end{aligned}$$

となり、区別できる。そこで、 $\cdot (1-H)(1-A)$ $\cdot H(1-A)$ $\cdot HA$ $\cdot (1-H)A$

などの指標に分けることが考えられるが、 H が小さい領域で noise に大きく影響される。依然として $\lambda_2=\lambda_3\neq 0$ の場合は同じターゲットと認識してしまう。

このような場合は、RCSに関連している TP を使う方が良い。

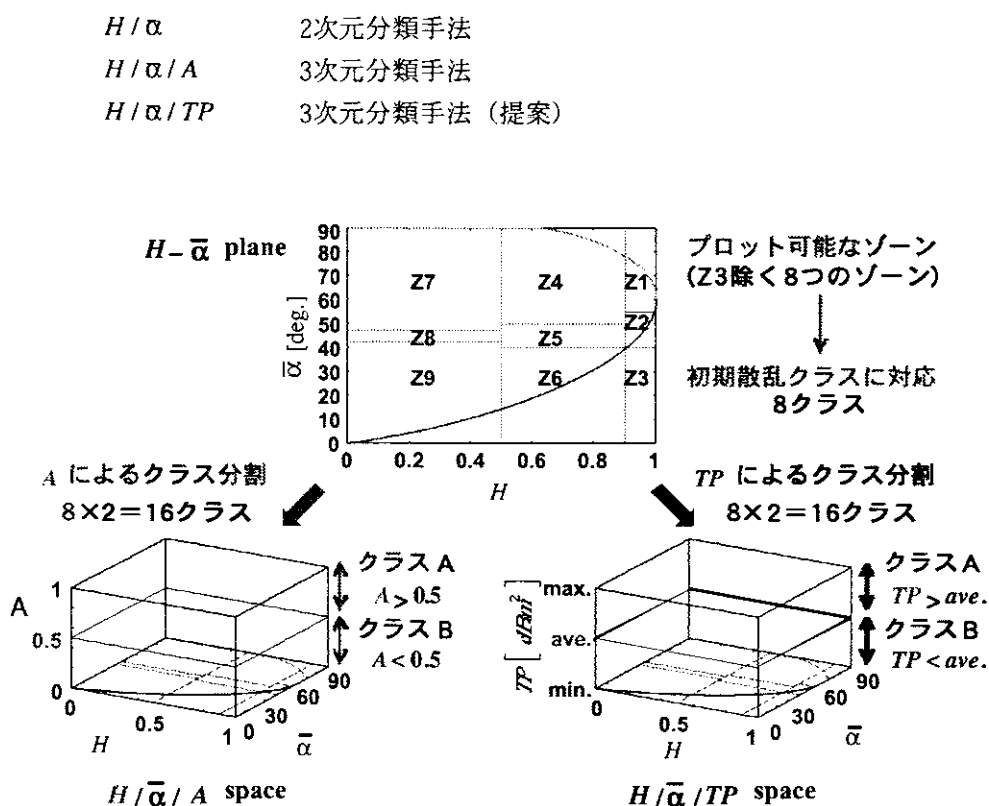
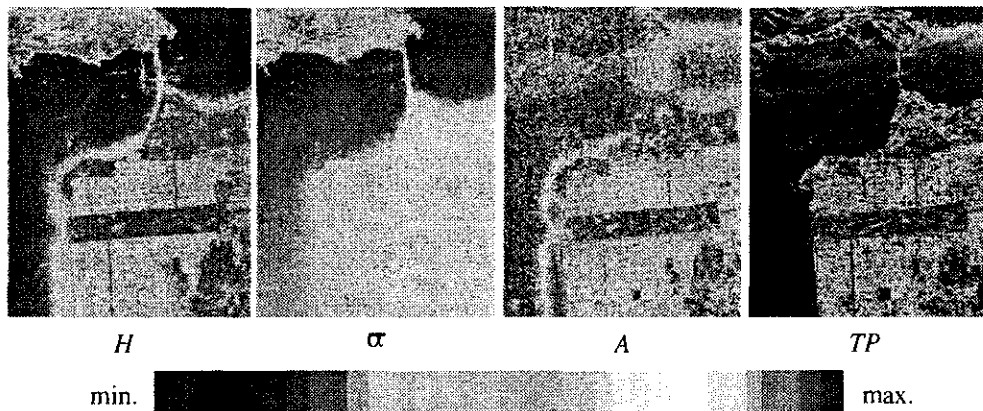


図9.3 分類手法（2次元から3次元へ）

9.4 分類結果

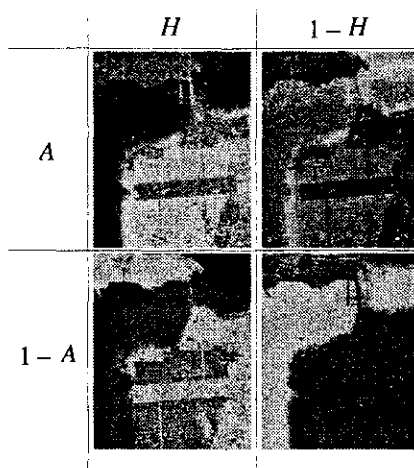
このようにして、次元を増やして、POLARS画像を分類した結果を次に示す。

$H, \bar{\alpha}, A, TP$



散乱パラメータ画像 (サンフランシスコベイエリア)

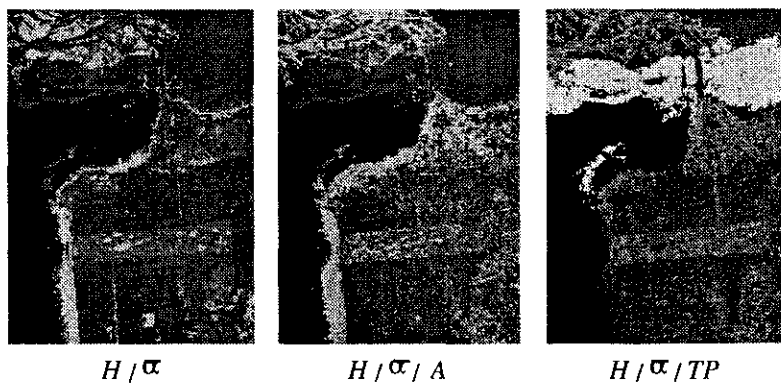
H, A 合成画像



min max

- A single dominant scattering process
- Two scattering mechanisms with a dominant process and a second one.
- Two scattering mechanisms with the same probability
- A random scattering process

地表面分類結果 (サンフランシスコベイエリア)



$H - \bar{\alpha}, H/\bar{\alpha}/TP$ 詳細かつ高精度に地表面を分類

$H/\bar{\alpha}/TP$ 植生領域の分類に関して最も高精度
(ターゲットのRCSに関する情報の利用による)

TP に関するクラス分割による分類結果の変化



TP2分割

TP4分割

TP6分割

TP8分割

TP 6分割 ➡ 植生における誤分類が最も少ない

各種解析の結果、以下のことが分かる。

$H / \bar{\alpha} / TP$ 分類

- ・ 詳細かつ高精度な地表面の分類が可能
- ・ ターゲットのRCSに関する情報により、植生、市街地の高精度な分類が可能
- ・ ターゲットの偏波散乱特性が類似している場合に特に有効

$H / \bar{\alpha} / A$ 分類

- ・ ターゲットの偏波散乱特性の相違が明確である場合、詳細かつ高精度な地表面の分類が可能
- ・ ターゲットの散乱特性が類似する場合、ターゲットの誤分類、分類精度が劣化

第10章 偏波校正

偏波解析では、散乱行列が正しく測定されているという大前提のもとで行われている。ところが、具体的なレーダ装置で測定を行うと、散乱行列に必ず測定誤差が入ってくる。図10.1は、レーダの測定誤差要因を示している。

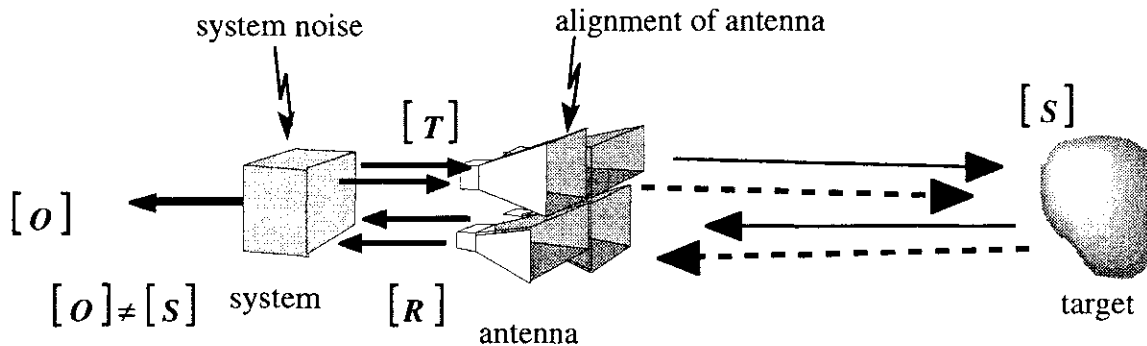


図10.1 測定誤差要因

誤差要因として考えられるものは

- ・ アンテナの配置による誤差（monostatic radarでは送受信位置が完全に一致すべきであるが、送信アンテナと受信アンテナの位置は必ずしもぴったりと一致していない場合が多い。）
- ・ アンテナの放射パターンによって生ずる誤差（ビームの中心と端では利得が異なる。また、主ビーム以外の方向で必ずしも放射電磁界のH偏波とV偏波が直線偏波となっていなかったり、互いに直交していないなど。）
- ・ 各偏波信号の電気経路長が異なるために生ずる偏波間の位相誤差
- ・ 受信系での個別の機器の振幅や位相誤差
- ・ システムノイズ
- ・ その他

これらのハードウェア誤差を完全に取り除くことはできないので、逆に、理論的に分かっているターゲットを測定し、そのターゲットの散乱行列を理想的な理論値になるように測定データを補正することが行われている。それが偏波校正である。測定した散乱行列より、正しい散乱行列を得る処理を偏波校正処理と呼ぶ。

一般に、システムノイズ N を含めて、測定される散乱行列 O は次式で表すことができる。

$$O = Y e^{j\theta} R^T S T + N \quad (10.1)$$

式の中で Y は絶対振幅項、 R 、 T は送受信系における振幅、位相に関する誤差行列である。誤差行列の中には、HV偏波間のcross-talk、HH-VV間の利得imbalanceなどが含まれており、これらの誤差を取り除くには本来ハードウェア自体の情報が必要となるが、それは止めて、取得された画像だけを使って偏波情報の校正ができれば便利である。以下に、式(10.1)によって表されるモデルに基づく代表的な2つの偏波校正法(Van Zyl method, developed at JPL, and Quegan's method)について述べる。これらの手法では、偏波画像中に自然の草木などの分布ターゲットと3面コーナリフレクタからのエコーがあれば、偏波校正が可能な手法であり、良く用いられている。

10.1 Van Zyl's method (also known as POLCAL at JPL)^[1]

[1] J. J. van Zyl , "Calibration of polarimetric radar images using only image parameters and trihedral corner reflectors," IEEE Trans. Geoscience Remote Sensing, vol.28, no.3, pp.337-348, 1990.

$N=0$ と仮定すると、測定散乱行列 \mathbf{O} と理論上の散乱行列 \mathbf{S} は、cross-talk の要素 δ_1 , δ_2 , Co-pol channel imbalance の要素 f を用いて次式のように書ける。

$$\mathbf{O} = Y e^{j\theta} \mathbf{R}^T \mathbf{S} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & \delta_2 \\ \delta_1 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{HH} & S_{VH} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta_1 \\ \delta_2 & f \end{pmatrix} \quad (10.1.1)$$

ここで、誤差要因を項目別に分けて表現できれば便利なので、変形してみる。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T &= \begin{pmatrix} 1 & \delta_2 \\ \delta_1 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta_2/f \\ \delta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} = \mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_c^T \\ \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} 1 & \delta_1 \\ \delta_2 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta_1 \\ \delta_2/f & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_c \mathbf{T}_x \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x &= \mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & \delta_1 \\ \delta_2/f & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{T}_c &= \mathbf{R}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

そのため、 \mathbf{R} , \mathbf{T} はcross-talkに関する項を含む行列 \mathbf{R}_x , \mathbf{T}_x とimbalanceに関する項を含む行列 \mathbf{R}_c , \mathbf{T}_c の積で表すことができる。したがって、測定散乱行列 \mathbf{O} は

$$\mathbf{O} = \mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_c^T \mathbf{S} \mathbf{T}_c \mathbf{T}_x = \mathbf{R}_x^T \mathbf{W} \mathbf{T}_x \quad (10.1.4)$$

と表される。この式の中で、

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_c^T \mathbf{S} \mathbf{T}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{HH} & S_{VH} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{HH} & f S_{VH} \\ f S_{VH} & f^2 S_{VV} \end{pmatrix} \quad (10.1.5)$$

であり、2つの誤差要因に完全に分離することが可能となる。そのため、 δ_1 と δ_2/f を求めるcross-talk校正ステップと、 f を求めるimbalance校正ステップを別々に実行することができる。

10.1.1 cross-talk 校正

cross-talk校正ステップでは δ_1 と δ_2/f を求める。式(10.1.4)のモデルにより測定散乱行列は次のようにかける。

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} Z_{HH} & Z_{VH} \\ Z_{VH} & Z_{VV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta_2/f \\ \delta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{HH} & W_{VH} \\ W_{VH} & W_{VV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta_1 \\ \delta_2/f & 1 \end{pmatrix} \quad (10.1.4)$$

この式から、cross-talkに関する項は次式のように得られる。

$$\delta_1 = \frac{\Delta P + 4 P^* \langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle \langle Z_{HH} Z_{VV}^* \rangle}{\Delta^2 - 16 \langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle^2 | \langle Z_{HH} Z_{VV}^* \rangle |^2} \quad (10.1.6-1)$$

$$\delta_2/f = \frac{\Delta Q + 4 Q^* \langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle \langle Z_{HH} Z_{VV}^* \rangle}{\Delta^2 - 16 \langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle^2 | \langle Z_{HH} Z_{VV}^* \rangle |^2} \quad (10.1.6-2)$$

ただし,

$$\Delta = \langle Z_{HH} Z_{HH}^* \rangle \langle Z_{VV} Z_{VV}^* \rangle - | \langle Z_{HH} Z_{VV}^* \rangle |^2 - 4 \langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle^2 \quad (10.1.6-3)$$

$$P = \langle Z_{HH} Z_{HV}^* \rangle \langle Z_{VV} Z_{VV}^* \rangle - \langle Z_{HH} Z_{VV}^* \rangle \langle Z_{VV} Z_{HV}^* \rangle - 2 \langle Z_{VV} Z_{HV}^* \rangle \langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle \quad (10.1.6-4)$$

$$Q = \langle Z_{HH} Z_{HH}^* \rangle \langle Z_{VV} Z_{HV}^* \rangle - \langle Z_{HH} Z_{HV}^* \rangle \langle Z_{HH} Z_{VV}^* \rangle - 2 \langle Z_{HH} Z_{HV}^* \rangle \langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle \quad (10.1.6-5)$$

なお, $\langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle$ は途中段階の項目であるが, 測定散乱行列 \mathbf{O} は与えられているので, 式(10.1.4)より

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{O} \mathbf{T}_x^{-1} \quad (10.1.7)$$

$\langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle$ は次式のように表される.

$$\begin{aligned} \langle W_{VH} W_{VH}^* \rangle &\approx \langle Z_{VH} Z_{VH}^* \rangle + | \delta_1 |^2 \langle Z_{HH} Z_{HH}^* \rangle \\ &\quad + | \delta_2/f |^2 \langle Z_{VV} Z_{VV}^* \rangle - \delta_1 \langle Z_{HH} Z_{VH}^* \rangle \\ &\quad - \delta_1^* \langle Z_{VH} Z_{HH}^* \rangle - (\delta_2/f) \langle Z_{VV} Z_{VH}^* \rangle \\ &\quad - (\delta_2/f)^* \langle Z_{VH} Z_{VV}^* \rangle + \delta_1 (\delta_2/f)^* \langle Z_{HH} Z_{VV}^* \rangle \\ &\quad + \delta_1^* (\delta_2/f) \langle Z_{VV} Z_{HH}^* \rangle \end{aligned} \quad (10.1.8)$$

δ_1 , δ_2/f を求める手順としては,

step1) 式(10.1.8)において, 最初に $\delta_1 = 0$, $\delta_2/f = 0$ として $\langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle$ を求める.

step2) 式(10.1.6-1)～式(10.1.6-5)にstep1で得られる $\langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle$ を代入して, δ_1 , δ_2/f を求める.

step3) step2で得られた δ_1 , δ_2/f を式(10.1.8)に代入し再び $\langle W_{HV} W_{HV}^* \rangle$ を求める.

step4) δ_1 , δ_2/f が収束するまで, 式(10.1.8)の演算結果を式(10.1.6)への代入し, 式(10.1.6)の演算結果を式(10.1.8)の代入することを繰り返す.

10.1.2 相対振幅位相較正

Imbalance較正ステップでは f を求める. 式(10.1.5)より次式が得られる.

$$\frac{W_{VV}^* W_{VV}}{W_{HH}^* W_{HH}} = |f|^4 \frac{S_{VV}^* S_{VV}}{S_{HH}^* S_{HH}} \quad (10.1.9)$$

Trihedral corner reflector $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{HH} & S_{VH} \\ S_{VH}^* & S_{VV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を較正用ターゲットとして用いた場合, 次の2つの式が成り立つ.

$$\frac{S_{VV}^* S_{VV}}{S_{HH}^* S_{HH}} = 1 \quad (10.1.10-1)$$

$$\arg(S_{HH}^* S_{VV}) = 0 \quad (10.1.10-2)$$

従って, f に関しては次式が成り立つ.

$$|f| = \left[\frac{W_{VV}^* W_{VV}}{W_{HH}^* W_{HH}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (10.1.11-1)$$

$$\arg(f) = \frac{1}{2} \arg(W_{HH}^* W_{VV}) \quad (10.1.11-2)$$

これにより、 f が得られ、既に求まっている δ_1 、 δ_2/f を使って S が求められることになる。 f は HHとVVチャンネルの相対振幅・位相誤差を表しているので、相対振幅位相校正ともいわれる。

この手法は、画像データが $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ となる方向依存性が無く、表面散乱が支配的であり、海域、草地などが該当する地上ターゲットで占められていることを前提としており、較正パラメータは反復して推定される。したがって、解の収束問題を伴い、収束しない場合には適用できない。そして、画像中にTrihedral corner reflectorのエコーがあることが必要である。

また、この手法は、対称化されたデータ($O_{HV} = O_{VH}$) に対して適用可能である。測定散乱行列 O は式(10.1.1)において、 $R^T = T \left(\delta_1 = \delta_3, \delta_2 = \delta_4, f = f_1 = f_2 \right)$ となっている。Pi-SAR画像データでは、 $O_{HV} \neq O_{VH}$ であるため、Van Zyl 氏の手法を適用するには、前処理として対称化処理を施す必要がある。対称化処理は次式のように表される。

$$O'_{HV} = \frac{1}{2} \left\{ O_{HV} + O_{VH} \left\langle \left| \frac{O_{HV}}{O_{VH}} \right|^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} \exp \left(-j \arg \langle O_{HV} O_{VH}^* \rangle \right) \right\} \quad (10.1.12)$$

10.2 Quegan's method^[2]

[2] S. Quegan, "A Unified Algorithm for Phase and Cross-Talk Calibration of Polarimetric Data-Theory and Observation," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 32, no. 1, pp. 89-99, Jan. 1994.

次に、較正パラメータの反復推定を行わないQuegan氏の偏波較正法を取り上げる。この偏波較正法は、基本的にVan Zyl methodに基づくものであるが、測定covariance行列より直ちに較正パラメータの推定が可能であり、相反性が成り立たなくても適用できるという利点がある($\mathbf{R} \neq \mathbf{T}$)。

式のパラメータ (Y は絶対振幅, θ は絶対位相, \mathbf{S} は正しい散乱行列) は同様であるが, \mathbf{R} , \mathbf{T} をそれぞれ受信, 送信における振幅, 位相誤差を表す行列とし, 次式のように想定しておく。

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \delta_1 \\ \delta_2 & f_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \delta_3 \\ \delta_4 & f_2 \end{pmatrix} \quad (10.2.1)$$

δ_1, δ_2 は受信側におけるHV, VH偏波成分に関するクロストーク, δ_3, δ_4 は送信側におけるHV, VH偏波成分に関するクロストーク, f_1, f_2 はそれぞれ受信, 送信におけるインバランスを表す。 Y, θ を含めたこれらのパラメータが較正パラメータとなる。この偏波較正法における仮定は以下のとおりである。

仮定1-1) $S_{HV} = S_{VH}$ である。

仮定1-2) $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ である。

仮定1-3) 式(10.2.1)の行列 \mathbf{R}, \mathbf{T} のクロストーク項(非対角要素) $r_{ij}, t_{ij} (i \neq j)$ は、対角要素と比べて小さい。

以上の仮定に基づき、式(10.1)を次式のように置く。なお、絶対位相項は除外する。

$$\mathbf{O} = \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} O_{11} &= S_{HH} t_{11} r_{11} + S_{HV} t_{21} r_{11} + S_{VH} t_{11} r_{12} + S_{VV} t_{21} r_{12} \\ O_{12} &= S_{HH} t_{12} r_{11} + S_{HV} t_{22} r_{11} + S_{VH} t_{12} r_{12} + S_{VV} t_{22} r_{12} \\ O_{21} &= S_{HH} t_{11} r_{21} + S_{HV} t_{21} r_{21} + S_{VH} t_{11} r_{22} + S_{VV} t_{21} r_{22} \\ O_{22} &= S_{HH} t_{12} r_{21} + S_{HV} t_{22} r_{21} + S_{VH} t_{12} r_{22} + S_{VV} t_{22} r_{22} \end{aligned}$$

ここで、 $S_{HV} = S_{VH}$ 、非対角項同士の積は十分小さいとして書き変える。

$$\mathbf{O} \Rightarrow \begin{pmatrix} O_{11} \\ O_{21} \\ O_{12} \\ O_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} t_{11} & r_{11} t_{21} + r_{12} t_{11} & r_{12} t_{21} \\ r_{21} t_{11} & r_{22} t_{11} & r_{22} t_{21} \\ r_{11} t_{12} & r_{11} t_{22} & r_{12} t_{22} \\ r_{21} t_{12} & r_{21} t_{22} + r_{22} t_{12} & r_{22} t_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{HH} \\ S_{HV} \\ S_{VV} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{O} = \mathbf{M} \mathbf{S} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} & S_{VV} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} r_{11} t_{11} & r_{11} t_{21} + r_{12} t_{11} & r_{12} t_{21} \\ r_{21} t_{11} & r_{22} t_{11} & r_{22} t_{21} \\ r_{11} t_{12} & r_{11} t_{22} & r_{12} t_{22} \\ r_{21} t_{12} & r_{21} t_{22} + r_{22} t_{12} & r_{22} t_{22} \end{bmatrix} \quad (10.2.2)$$

S を得るためには、測定散乱行列の O から M 全体を導ければよい。 R 、 T 個々の行列を考える必要はない。較正では電界を基本とした散乱行列ではなく、電力を基本としたcovariance行列を使う。

仮定1-2)より、草地など $\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle \approx \langle S_{VV} S_{HV}^* \rangle \approx 0$ の特徴をもつ領域では、次式で表されるcovariance行列を持つ。

$$\langle C_s \rangle = \langle S S^{*T} \rangle = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \rho \\ 0 & \sigma_{21} & 0 \\ \rho & 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (10.2.3)$$

ただし

$$\sigma_{11} = \langle |S_{HH}|^2 \rangle, \quad \sigma_{21} = \langle |S_{HV}|^2 \rangle, \quad \sigma_{22} = \langle |S_{VV}|^2 \rangle, \quad \rho = \langle S_{HH} S_{VV}^* \rangle$$

実際に観測されるcovariance行列は、次のように表すことができる。

$$C = O O^{*T} = M S S^{*T} M^{*T} = M C_s M^{*T} \quad (10.2.4)$$

そこで、これらのcovariance行列の比較により、 M を導き出す（較正を行う）。測定行列 C と行列 R 、 T との関係は、式(10.2.5)、仮定1-3)に基づき、付録の式(A-1)-(A-10)によって表される。

ただし M は大きな行列なので、分かりやすくするために行列 M を以下のパラメータ

- (1)クロストーク比 $u = r_{21} / r_{11}$, $v = t_{21} / t_{22}$, $w = r_{12} / r_{22}$, $z = t_{12} / t_{11}$
- (2)全体のシステムゲイン $Y = r_{22} t_{22} \rightarrow$ 式(10.1)の絶対振幅 Y に対応
- (3)受信チャネルインバランス $k = r_{11} / r_{22} \rightarrow$ 式(10.2.1)のインバランス f_1 に対応
- (4)送受信のインバランス比 $\alpha = \frac{r_{22} t_{11}}{r_{11} t_{22}}$
- (5)cross-pol電力項 $\beta = \left| \frac{r_{21} t_{12}}{r_{11} t_{22}} \right|^2 \sigma_{12} = |k Y|^2 \sigma_{12}$

を用いて書き直すと、次式のとおりとなる。

$$M = r_{22} t_{22} \begin{bmatrix} \frac{r_{11} t_{11}}{r_{22} t_{22}} & \frac{r_{11} t_{21} + r_{12} t_{11}}{r_{22} t_{22}} & \frac{r_{12} t_{21}}{r_{22} t_{22}} \\ \frac{r_{21} t_{11}}{r_{22} t_{22}} & \frac{t_{11}}{t_{22}} & \frac{t_{21}}{t_{22}} \\ \frac{r_{11} t_{12}}{r_{22} t_{22}} & \frac{r_{11}}{r_{22}} & \frac{r_{12}}{r_{22}} \\ \frac{r_{21} t_{12}}{r_{22} t_{22}} & \frac{r_{21}}{r_{22}} + \frac{t_{12}}{t_{22}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{r_{11}}{r_{22}}, \quad \alpha = \frac{r_{22} t_{11}}{r_{11} t_{22}} \quad \text{とおくと} \quad \frac{t_{11}}{t_{22}} = k \alpha, \quad \text{さらに} \quad v = \frac{t_{21}}{t_{22}}, \quad w = \frac{r_{12}}{r_{22}} \quad \text{とおく.}$$

$$M = r_{22} t_{22} \begin{bmatrix} k^2 \alpha & k \frac{t_{21}}{t_{22}} + \frac{r_{12}}{r_{22}} k \alpha & \frac{r_{12} t_{21}}{r_{22} t_{22}} \\ \frac{r_{21}}{r_{22}} k \alpha & k \alpha & \frac{t_{21}}{t_{22}} \\ \frac{t_{12}}{t_{22}} k & k & \frac{r_{12}}{r_{22}} \\ \frac{r_{21} t_{12}}{r_{22} t_{22}} & \frac{r_{21}}{r_{22}} + \frac{t_{12}}{t_{22}} & 1 \end{bmatrix} = r_{22} t_{22} \begin{bmatrix} k^2 \alpha & k v + w k \alpha & v w \\ \frac{r_{21}}{r_{22}} k \alpha & k \alpha & v \\ \frac{t_{12}}{t_{22}} k & k & w \\ \frac{r_{21} t_{12}}{r_{22} t_{22}} & \frac{r_{21}}{r_{22}} + \frac{t_{12}}{t_{22}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$u = \frac{r_{21}}{r_{11}}, \quad z = \frac{t_{12}}{t_{11}} \quad \text{とおく.} \quad \frac{r_{21}}{r_{22}} = \frac{r_{11}}{r_{22}} u, \quad \frac{t_{12}}{t_{22}} = \frac{t_{11}}{t_{22}} z = k \alpha z$$

$$\begin{bmatrix} k^2 \alpha & k v + w k \alpha & v w \\ k u k \alpha & k \alpha & v \\ k \alpha k & k & w \\ k z k \alpha & k u + k \alpha z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & v + \alpha w & v w \\ \alpha u & \alpha & v \\ \alpha z & 1 & w \\ \alpha u z & u + \alpha z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = Y \begin{bmatrix} \alpha & v + \alpha w & v w \\ \alpha u & \alpha & v \\ \alpha z & 1 & w \\ \alpha u z & u + \alpha z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.2.5)$$

k, α は、1に近い値をとると考えられ、 u, v, w, z は仮定1-3)より1より小さいことが分かる。測定 covariance 行列の各要素を上記のパラメータを用いて表すと、付録の式(A-11)-(A-17)のとおりになる。

また、azimuthal symmetry である ($\langle S_{HH} S_{HV}^* \rangle = \langle S_{VH} S_{HV}^* \rangle = 0$) distributed target の散乱特性を表す式 (10.2.3) の要素は次式で表される。 α (送受信のインバランス比) はターゲットに依存しないパラメータであり、 β はターゲットの cross-pol 電力に比例するパラメータである。

$$\sigma_{11} = \frac{1}{|Y|^2} \frac{1}{|k|^4} \frac{C_{11}}{|\alpha|^2} \quad (10.2.6.1)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{|Y|^2} \frac{1}{|k|^2} \beta \quad (10.2.6.2)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{|Y|^2} C_{44} \quad (10.2.6.3)$$

$$\rho = \frac{1}{|Y|^2} \frac{1}{k^2} \frac{C_{14}}{\alpha} \quad (10.2.6.4)$$

式(A-11)-(A-17)を用いて、まず、クロストーク比 u, v, w, z に関する式を導出する。(A-11)～(A-14)の右辺第3項を無視することにより、次式が得られる。

$$z C_{11} = C_{31} - w C_{41} \quad (10.2.7-1)$$

$$w C_{44} = C_{34} - z C_{14} \quad (10.2.7-2)$$

$$u C_{11} = C_{21} - v C_{41} \quad (10.2.7-3)$$

$$v C_{44} = C_{24} - u C_{14} \quad (10.2.7-4)$$

したがって、上式からクロストーク比に関しては、次のように求まる。

$$u = (C_{44} C_{21} - C_{41} C_{24}) / \Delta \quad (10.2.7-5)$$

$$v = (C_{11} C_{24} - C_{21} C_{14}) / \Delta \quad (10.2.7-6)$$

$$z = (C_{44} C_{31} - C_{41} C_{34}) / \Delta \quad (10.2.7-7)$$

$$w = (C_{11} C_{34} - C_{31} C_{14}) / \Delta \quad (10.2.7-8)$$

$$\Delta = C_{11} C_{44} - |C_{14}|^2 \quad (10.2.7-9)$$

ただし、 u, v, w, z が仮定3)を満たさないような大きな値を取る場合は、較正結果は無効となる。

次にインバランス比 α について考える。(A-15), (A-17)より次式が得られる.

$$|\alpha|^2 \beta = C_{22} - u C_{12} - v C_{42} \quad (10.2.8-1)$$

$$\alpha^* \beta = C_{32} - z C_{12} - w C_{42} \quad (10.2.8-2)$$

従って, インバランス比 α , cross-pol電力項 β が次式のとおりとなる.

$$\alpha_1 = \frac{C_{22} - u C_{12} - v C_{42}}{X}, \quad \beta_1 = \frac{|X|^2}{C_{22} - u C_{12} - v C_{42}} \quad (10.2.8-3)$$

ただし, $X = C_{32} - z C_{12} - w C_{42}$ である. また, (A-16)より次式のように直接 β を得て, (A-17)に代入することにより, α , β の別解が次式のように表される.

$$\alpha_2 = \frac{X^*}{C_{33} - z^* C_{31} - w^* C_{34}}, \quad \beta_2 = C_{33} - z^* C_{31} - w^* C_{34} \quad (10.2.8-4)$$

(10.2.8-3), (10.2.8-4)のいずれの場合も, $\alpha^* \beta = X$ が成り立つ. また β が実数であるから, α に関する2つの解の位相項は同じとなるが, 振幅は異なる.

システムノイズが無視できない場合について考える. ここで, 2つの仮定を行う.

仮定2-1) 信号とノイズは無相関であり, 偏波チャネル i において平均0, 分散 N_i のノイズを含む.

仮定2-2) 観測されるco-polチャネルでは, cross-polチャネルと比べて非常に大きな電力を受信するため, ノイズによる影響を受けない.

従って, $u, v, w, z, \alpha^* \beta$ は変化しないが, (A-15), (A-16)で表される C_{22}, C_{33} に関しては, 次式のとおりとなる.

$$C_{22} = u C_{12} + v C_{42} + |\alpha|^2 \beta + N_2 \quad (10.2.9-1)$$

$$C_{33} = z^* C_{31} + w^* C_{34} + \beta + N_3 \quad (10.2.9-2)$$

(10.2.9-1)より, α の値は次式で表される.

$$\alpha = \frac{C_{22} - u C_{12} - v C_{42} - N_2}{\alpha^* \beta} \quad (10.2.10)$$

また,

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{N_2}{\alpha^* \beta}, \quad \alpha_2 = \alpha \left(1 + \frac{N_3}{\beta} \right)^{-1} \quad (10.2.11)$$

が導かれる. $N_2 \approx N_3$ とし, ノイズの項を消去すると, 方程式

$$f(\alpha) = |\alpha|^2 + \frac{|\alpha|}{|\alpha_2|} \left(1 - |\alpha_1 \alpha_2| \right) - 1 = 0 \quad (10.2.12)$$

が導かれ, 方程式の解は次式で表される.

$$|\alpha| = \frac{|\alpha_1 \alpha_2| - 1 + \sqrt{\left(|\alpha_1 \alpha_2| - 1 \right)^2 + 4 |\alpha_2|^2}}{2 |\alpha_2|} \quad (10.2.13)$$

式(10.2.13)によって得られる解を用いて, $\alpha^* \beta$ が既知であり, β が実数であることから, α および β が得

られる。式(10.2.9)の右辺において、 β の項が他の項に比べてはるかに大きい場合、

$$|\alpha|^2 \approx \frac{C_{22}}{C_{33}} = \frac{\langle |O_{VH}|^2 \rangle}{\langle |O_{HV}|^2 \rangle} \quad (10.2.14)$$

となる。

k, Y に関しては式(10.2.6)のみに含まれていることから、絶対振幅、インバランスの導出はこの式を利用すればよい。ここで、 $|Y|^2$ は観測領域内で変化しない限り、相対振幅・位相較正に影響しない。また、インバランス k の位相項 $2 \arg(k)$ は、 ρ の位相誤差として含まれる。

HH-VV偏波間の相関係数 $cor(HH, VV)$ は、較正処理が行われていない画像からでも正確に得ることができ、 k, Y による影響がない。

$$cor(HH, VV) = \frac{|\rho|}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} = \frac{|C_{14}|}{\sqrt{C_{11}C_{44}}} \quad (10.2.15)$$

この指標は、位相較正を行う上で有効である。HH-VV偏波間の位相差が既知であるターゲット (triangular corner reflector, slightly rough surfaceなど) が画像データ中に存在するならば、位相較正が可能である。

式(10.2.5)より、

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & P_{12} & P_{13} & 0 \\ -(z + \alpha^* u)/D & \alpha^*/D & 1/D & -(w + \alpha^* v)/D \\ 0 & P_{32} & P_{33} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{O} = \mathbf{A} \mathbf{O} \quad (10.2.16-1)$$

$$\hat{S} = Y \begin{bmatrix} k^2 S_{HH} & k S_{HV} & S_{VV} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} O_{HH} & O_{HV} & O_{VH} & O_{VV} \end{bmatrix}^T \quad (10.2.16-2)$$

$$D = 1 + |\alpha|^2, \quad P_{12} = \alpha^* \left\{ (u^* - \alpha^* z^*) - \alpha^* (v + \alpha w) \right\} \quad (10.2.16-3)$$

$$P_{13} = -\alpha^* \left\{ (v + \alpha w) + \alpha (u^* - \alpha^* z^*) \right\}, \quad P_{32} = |\alpha|^2 \left\{ (v^* - \alpha^* w^*) - \alpha^* (u + \alpha z) \right\} \quad (10.2.16-4)$$

$$P_{33} = -|\alpha|^2 \left\{ (u + \alpha z) + \alpha (v^* - \alpha^* w^*) \right\} \quad (10.2.16-5)$$

と表される。ここで、行列 \mathbf{A} の (2, 2) 要素, (2, 3) 要素に着目すると、対称化処理

$$\frac{\alpha^*}{D} = \frac{1}{1 + |\alpha|^2} \left\{ O_{VH} + O_{HV} \left(\frac{\langle |O_{VH}|^2 \rangle}{\langle |O_{HV}|^2 \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-j \arg \langle O_{VH} O_{HV}^* \rangle \right) \right\} \quad (10.2.17)$$

に対応しており、(2, 1) 要素, (2, 4) 要素はクロストーク除去に対応している。すなわち、偏波較正処理と対称化処理が、1 つの処理として統合されていることがわかる。ただし、このステップにおいて、次式が成り立つ必要がある。

$$\arg(\alpha) \approx -\arg(C_{32}), \quad |\alpha| \approx 1 \quad (10.2.18)$$

付録(A-17)より、 $\arg(\alpha) \approx -\arg(C_{32})$ は明らかである。式(10.1.12)と比較すると、重み係数、位相項が異なっており、式(10.1.12)において最適な対称化が行われていないことがわかる。

次に、Van Zyl 氏の手法との関係について示す。対称化済みの画像データにおいて、位相較正、対称化された測定散乱行列 O' は次式で表される。

$$O' = \begin{bmatrix} e^{-j(\phi+2\delta)} O_{HH} \\ e^{-j\delta} (O_{VH} + e^{-j\phi} O_{HV}) / (1 + |\alpha|) \\ O_{VV} \end{bmatrix}^T \quad (10.2.19)$$

ϕ は $\arg(\alpha)$ の推定値であり $\phi = -\arg(C_{32})$ ， δ は $\arg(k)$ の推定値である。 δ は $\arg(\rho)$ が既知であるターゲットより得られ、 $\arg(\rho)$ は式(10.2.6-4)より次式で表されることがわかる。

$$\arg(\rho) = \arg(C_{14}) - \arg(\alpha) - \arg(k^2) \quad (10.2.20)$$

Van Zyl氏の偏波較正法において、測定散乱行列 O' は次式で表される。

$$O' = R'^T S R'$$

この式において、式(10.2.6)より次式が成り立つ。

$$(r'_{22})^2 \approx Y \quad (10.2.21-1)$$

$$(r'_{11}/r'_{22})^2 \approx k^2 e^{-2j\delta} |\alpha| \quad (10.2.21-2)$$

$$r'_{11}/r'_{22} \approx k e^{-j\delta} (1 + |\alpha|) / 2 \quad (10.2.21-3)$$

(10.2.21-2)、(10.2.21-3)を同時に満たすのは次式が成り立つ場合である。

$$|\alpha| \approx 1 \quad (10.2.23)$$

10.3 偏波較正例

以上2つの偏波較正法を用いて、実際に新潟大学周辺のL-bandのPi-SAR画像データ(2000年10月2日観測、1600×1600ピクセル)を用いて、各較正パラメータのレンジ方向における変化の様子を調べた。表1にPi-SAR画像データの指標を示す。また、図10.2に Van Zyl 氏の偏波較正法を適用した場合に推定されるクロストーク項の変化を示す。なお、最大反復回数1000回、収束条件を

$$\Delta\alpha = |\alpha_i - \alpha_{i-1}| < 10^{-5}$$

とした。式の中の α_i, α_{i-1} はそれぞれ i 回目、 $(i-1)$ 回目の $\delta_1, \delta_2/f$ の演算結果である。さらに、図9-2～図9-7に Quegan 氏の偏波較正法を適用した場合に推定されるパラメータ $\alpha, C_{22}, \beta, N_2, uC_{12}, vC_{42}$ の変化を示す。なお、各較正パラメータは4×1600ルック処理によって得ている。

図9-1を見ると、推定されるクロストーク項の振幅はレンジ方向に対して一定でなく、変動が大きい。原因としては、入射角の変化がクロストーク項に依存することと、あるいは反復推定において局所解で収束してしまったことが考えられる。次に図9-2～9-4を見ると、 β は C_{22} とほぼ同等の値を示しており、

β 以外の項 N_2 , $u C_{12}$, $v C_{42}$ は無視できるほど小さいことがわかる. Far range (レンジピクセルポイント 380-400) では β , C_{22} , $u C_{12}$, $v C_{42}$ のいずれも 0 に近い値を示している. 従って, Far range 以外において, 式(10.2.12)が成り立つことがわかる. 次に図9-6~9-7を見ると, Far range (レンジピクセルポイント 380-400) で α の振幅が 1 とはかけ離れた値となっているが, それ以外では α の振幅はレンジ方向に対して 1 に近い一定の値を示している. α の位相に関しても振幅と同様に, Far range 以外ではレンジ方向に対して変化が見られず, 平均で 5° となっている. 従って, クロストーク除去と対称化処理が, 1 つの処理として統合が可能であるということである(式(10.2.16)参照).

以上の結果から, Quegan 氏の手法は

- (1) 相反性が成り立つという仮定が必要ない.
- (2) 測定 covariance 行列を用いて, 較正パラメータの直接推定が可能である.
- (3) 最適な対称化処理とクロストーク較正の一括処理が可能である.
- (4) 較正パラメータがレンジ方向に対してほぼ一定である.

という点から, VanZyl 氏の手法よりも優れていると言える. 以下に両手法を用いた偏波較正結果を示す. 相対振幅位相較正用ターゲットとして, 海岸沿いに配置している 4 体の 3 面リフレクタを用いている. 図9-8は配置された 3 面リフレクタを表している. 図9-9に偏波較正前後のリフレクタの平均偏波シグネチャを示す. 図より, Quegan 氏の偏波較正法を適用することによって, 偏波散乱特性が良好に補正されていることがわかる. 偏波較正後の直線偏波成分合成画像を図9-10に, HH-VV 偏波間相関係数画像を図9-11に示す. なお, 図9-10, 9-11において 16 ルック処理を行っている. 水田, 海域では, co-pol チャンネルと cross-pol チャンネルの相関が低くなっている.

表1. Pi-SAR 画像の分解能, ピクセルサイズ, 入射角

周波数		1.27 [GHz]
分解能 [m]	Azimuth	3.00
	Slant-range	3.00
ピクセル サイズ[m]	Azimuth	2.50
	Ground-range	2.50
入射角[deg]		44.4 - 57.5

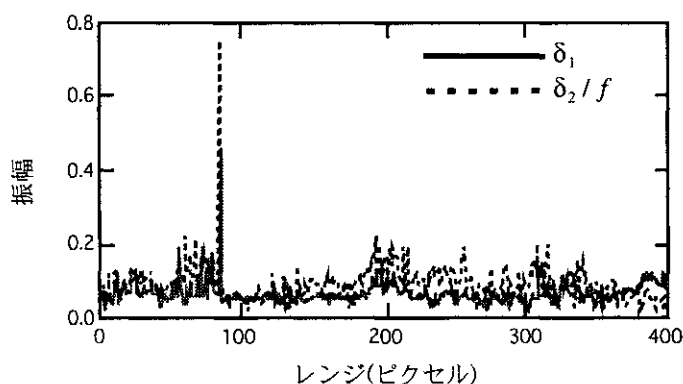


図9-1. $\delta_1, \delta_2/f$ の変化

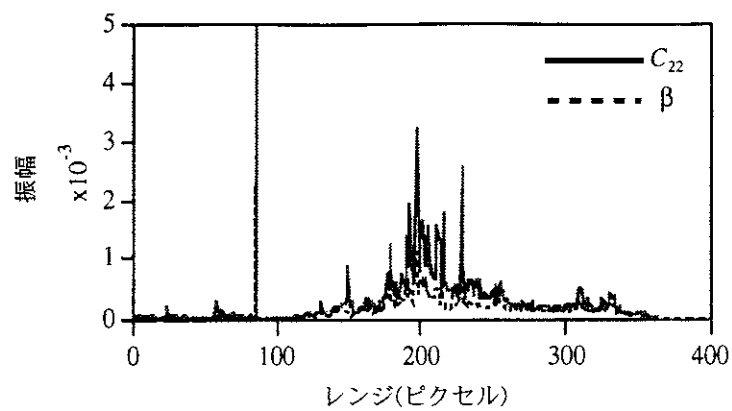


図9-2. C_{22}, β の変化

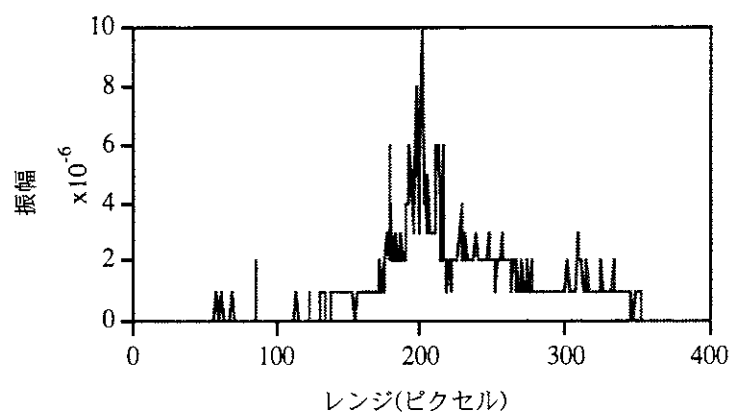


図9-3. N_2 の変化

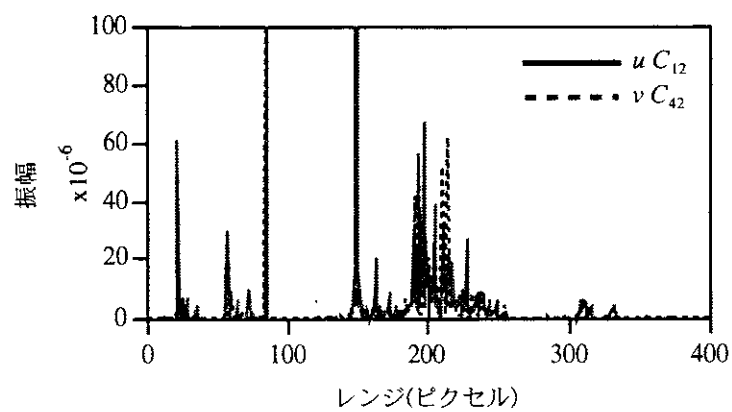


図9-4. uC_{12}, vC_{42} の変化

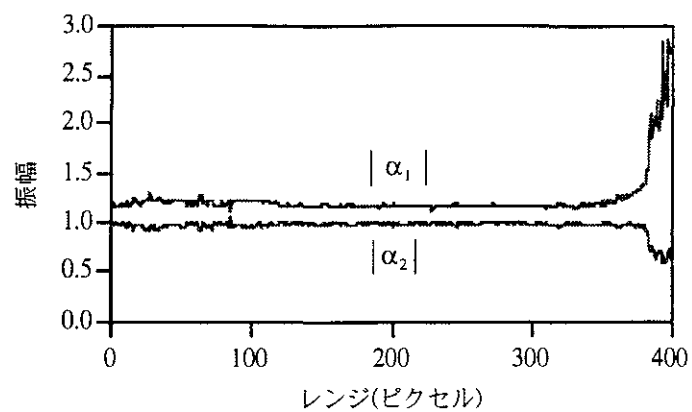


図9-5. $|\alpha_1|, |\alpha_2|$ の変化

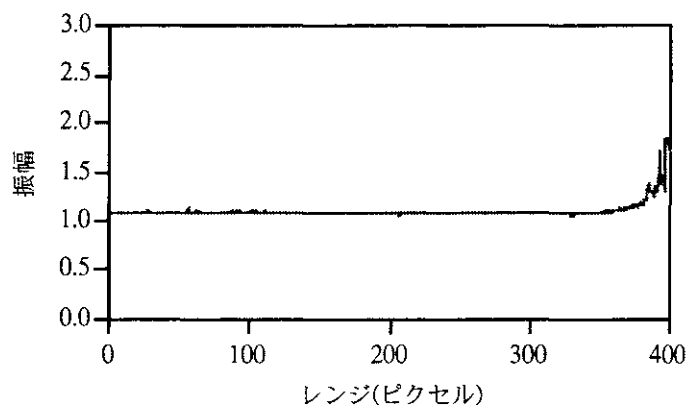


図9-6. $|\alpha|$ の変化

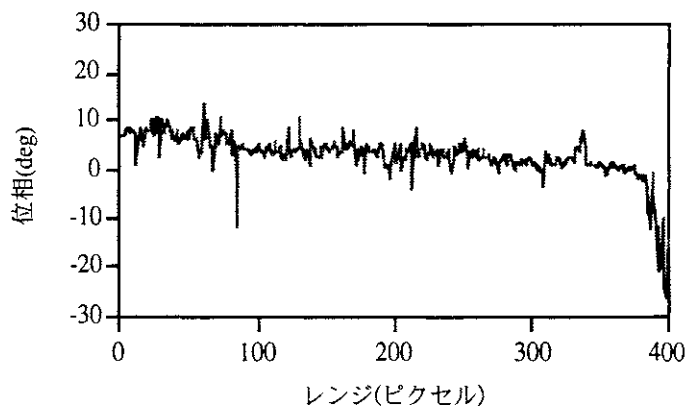
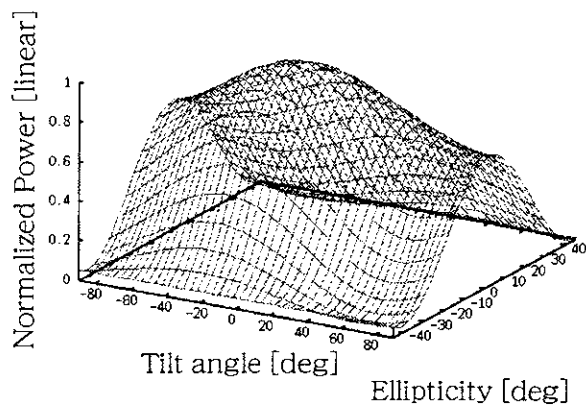


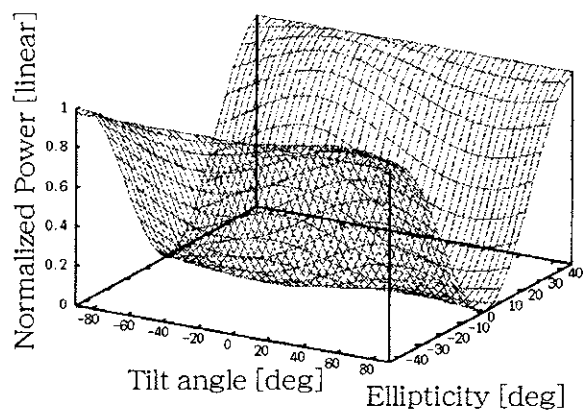
図9-7. $\arg(\alpha)$ の変化



図9-8. 配置された3面リフレクタ

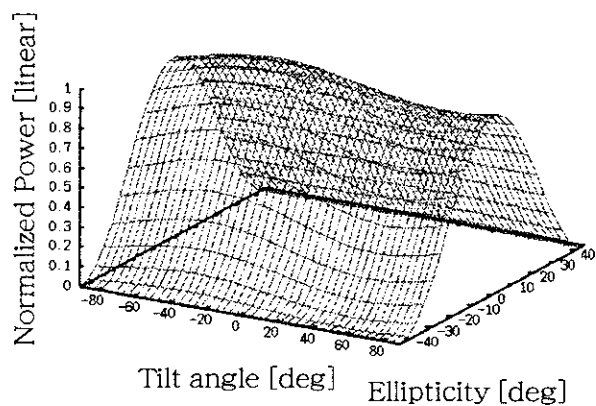


(a) Co-pol.

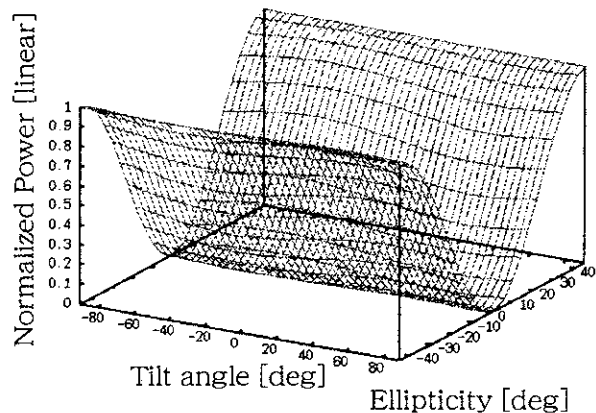


(b) X-pol.

図9-9-1. 偏波較正前の3面リフレクタの偏波シグネチャ

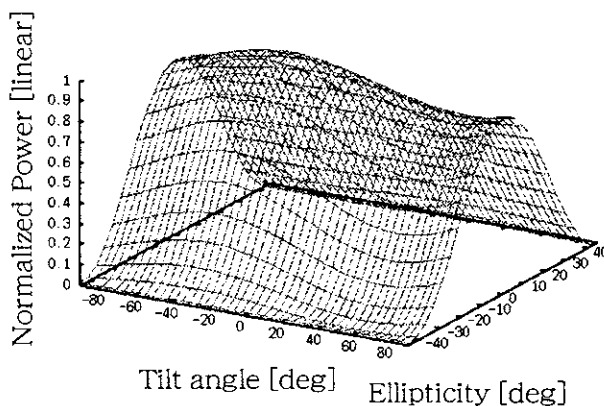


(a) Co-pol.

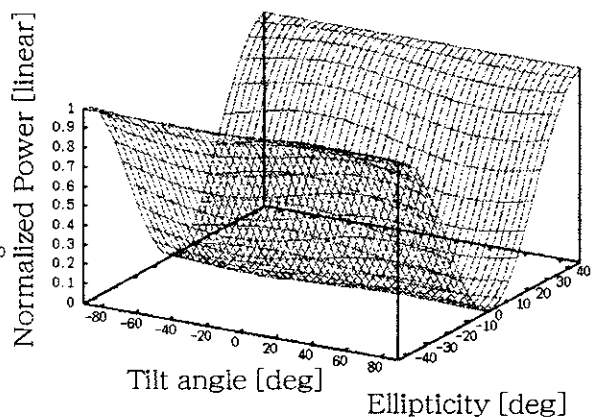


(b) X-pol.

図9-9-2. 偏波較正後の3面リフレクタの偏波シグネチャ (Quegan氏の手法適用)



(a) Co-pol.



(b) X-pol.

図9-9-3. 偏波較正後の3面リフレクタの偏波シグネチャ (Van Zyl氏の手法適用)



|HH| |HV| |VV|

図9-10. 偏波較正後の直線偏波成分合成画像



(a) $\rho(HH, VV)$



(b) $\rho(HV, VV)$

図9-11. 相関係数画像 (HV基底)

max



min

付録 covariance行列と行列 R ， T との関係

仮定1-3)より，covariance行列の各要素は，行列 R ， T の要素を用いて次式で表される．

$$C_{11} = |r_{11} t_{11}|^2 \sigma_{11} \quad (A-1)$$

$$C_{22} = |r_{21} t_{11}|^2 \sigma_{11} + |r_{22} t_{21}|^2 \sigma_{22} + |r_{22} t_{11}|^2 \sigma_{12} + 2 \operatorname{Re} \left(r_{21} r_{22}^* t_{11} t_{21}^* \rho \right) \quad (A-2)$$

$$C_{33} = |r_{11} t_{12}|^2 \sigma_{11} + |r_{12} t_{22}|^2 \sigma_{22} + |r_{11} t_{22}|^2 \sigma_{12} + 2 \operatorname{Re} \left(r_{11} r_{12}^* t_{12} t_{22}^* \rho \right) \quad (A-3)$$

$$C_{44} = |r_{22} t_{22}|^2 \sigma_{22} \quad (A-4)$$

$$C_{21} = r_{11}^* r_{21} |t_{11}|^2 \sigma_{11} + r_{11}^* r_{22} t_{11}^* t_{21} \rho^* + r_{22} t_{11} \left(r_{11}^* t_{21}^* + r_{12}^* t_{11}^* \right) \sigma_{12} \quad (A-5)$$

$$C_{31} = t_{11}^* t_{12} |t_{11}|^2 \sigma_{11} + r_{11}^* r_{12} t_{11}^* t_{22} \rho^* + r_{11} t_{22} \left(r_{11}^* t_{21}^* + r_{12}^* t_{11}^* \right) \sigma_{12} \quad (A-6)$$

$$C_{41} = r_{11}^* r_{22} t_{11}^* t_{22} \rho^* \quad (A-7)$$

$$C_{24} = t_{21}^* t_{22} |r_{22}|^2 \sigma_{22} + r_{21} r_{22}^* t_{11}^* t_{22} \rho + r_{22} t_{11} \left(r_{21}^* t_{22}^* + r_{22}^* t_{12}^* \right) \sigma_{12} \quad (A-8)$$

$$C_{34} = r_{12} r_{22}^* |t_{22}|^2 \sigma_{22} + r_{11} r_{22}^* t_{12}^* t_{22} \rho + r_{11} t_{22} \left(r_{21}^* t_{22}^* + r_{22}^* t_{12}^* \right) \sigma_{12} \quad (A-9)$$

$$C_{32} = r_{11} r_{21}^* t_{11}^* t_{12} \sigma_{12} + r_{12} r_{22}^* t_{21}^* t_{22} \sigma_{22} + r_{11} r_{22}^* t_{11}^* t_{22} \sigma_{12} + r_{12} r_{21}^* t_{11}^* t_{22} \rho^* + r_{11} r_{22}^* t_{12}^* t_{21} \rho \quad (A-10)$$

上の式をクロストーク比 u ， v ， w ， z ，インバランス比 α ，cross-pol電力項 β を用いて表すと，次式のとおりとなる．

$$C_{21} = u C_{11} + v C_{41} + \alpha \beta \left(v^* + \alpha^* w^* \right) \quad (A-11)$$

$$C_{24} = v C_{44} + u C_{14} + \alpha \beta \left(u^* + \alpha^* z^* \right) \quad (A-12)$$

$$C_{31} = z C_{11} + w C_{41} + \beta \left(v^* + \alpha^* w^* \right) \quad (A-13)$$

$$C_{34} = w C_{44} + z C_{14} + \beta \left(u^* + \alpha^* z^* \right) \quad (A-14)$$

$$C_{22} = u C_{12} + v C_{42} + |\alpha|^2 \beta \quad (A-15)$$

$$C_{33} = z^* C_{31} + w^* C_{34} + \beta \quad (A-16)$$

$$C_{32} = u^* C_{31} + v^* C_{34} + \alpha^* \beta = z C_{12} + w C_{42} + \alpha^* \beta \quad (A-17)$$