

偏波による 2 次元合成開口 FM-CW映像レーダの研究

課題番号 07650479

平成8年度科学研究費補助金 (基盤研究(C))

研 究 成 果 報 告 書

平 成 9 年 3 月

研究代表者 山 口 芳 雄

(新潟大学工学部情報工学科)

I はしがき

この報告書は平成5-6年度の文部省科学研究費補助金、一般研究(C)、課題番号07650479「偏波による2次元合成開口FM-CW映像レーダの研究」の成果をまとめたものである。

レーダは電波の反射波の時間遅れを利用して、ターゲットまでの距離を測定し、また、反射波の強さから、ターゲットを推定するものであった。しかし、ハードウェア技術の進展に伴い、反射波の振幅のみではなく、位相も測れるようになって、合成開口レーダなどイメージング利用へと進展してきた。そして、ターゲットも軍用だけではなく、環境計測をはじめとする民生用に広がりを見せ、従来の方法だけでは対処できない状況が生じてきている。そこで、レーダを高性能化するため、センサー自身の電波の特徴を調べると、ベクトル性質をもつことが分かっている。レーダポーラリメトリーはその電波のベクトル性質である“偏波”をレーダセンシングに利用する理論と技術である。

レーダポーラリメトリーに関する最初の研究は1940年代にさかのぼり、George Sincalir が彼の名前で知られている散乱行列を導いた。そして、50年代初期にオハイオ州立大学のE.M. KennuaghはKennuagh行列として知られているレーダ散乱行列を導いている。偏光の概念は光学の分野で既に知られていたが、光学では座標の原点を物体においているMueller 行列で理論が展開されていた。レーダ自身に座標系の原点を置くこれらの定式化によって、レーダの最適受信の方法など、理論的に正しい方向へと展開していった。この頃の理論的側面を支えた貢献者は、V. H. Rumsey, G. A. Deschamps, M. L. Kales (1951)らである。Gravesも最適受信に関してpower matrixで知られているGraves matrixを導いている。しかし、レーダのハードウェアはまだ未熟であり、ポーラリメトリーは依然として認知されていない状態であった。理論的には様々な方法・側面から検討されていたが (J. R. Copeland (1960), S. H. Bickel (1965), P. Beckman (1968)), 特に、ポーラリメトリーに新しい時代を築き、功績の大きいのはJ. R. Huynenである。統一した理論を基に散乱行列とその拡張であるStokes行列を導き、ターゲットの性質や分解方法を提案している。Huynenパラメータや、特徴的偏波状態がポアンカレ球上でフォークの形を形成することなど、新たなページを開いた。それに続き、W.-M. Boerner は逆散乱問題での偏波の重要性を訴え、1980年代に入った。理論的な手直しや、拡張(D. Guili, A. B. Kostinski, 1986)が行われてきたが、ハードウェアとしての技術も進み、次第にポーラリメトリー理論の成果が実証されはじめた。NASAのFull polarimetric radarはポーラリメトリーの有用性を実証し(J. J. vanZyl, 1987), 多くの研究者の注目を引いた。その結果、ポーラリメトリックレーダを使った理論的、実験的な研究が盛んになり、現在に至っている。この間、W.-M. Boernerは偏波の重要性を訴え続け、ワークショップを数年毎に開催している。最近の研究の中では、ロシアでのPolarization Anisotoropy 研究 (A. I. Kozlov), Calibration (A. Freeman, 1990, M. W. Whitt, W. Wiesbeck, 1991), Decomposition (S. R. Cloude (1985), E. Krogager(1993))などが注目される。

では、レーダポーラリメトリーはどのような分野に役立つであろうか？一言でいえば、ターゲットのより詳しい情報が得られることである。

レーダポーラリメトリーでターゲットの散乱行列は最も基本的な計測量である。散乱行列の要素は、レーダの周波数、電波の入射角、送信・受信偏波の状態、ターゲットの向き、材質、大きさ、形状によって決まってくる。物理的なパラメータがあまりにも多いように思われる。しかし、ポーラリメトリックレーダができる前は、一つの偏波で測定を行っていた。一般的には円偏波がよく用いられている。これは、雨滴等のクラッタを防ぐためである。この一つの偏波で得られるものは、複素振幅の一つの情報でしかない。つまり、電波の持つベクトル性質の1成分しか取得していないことになる。ところが、それと直交す

る偏波の組み合わせで、ターゲットからの反射量を測定すれば、4倍以上に情報量が増える。今、円偏波基底の散乱行列を

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{LL} & S_{LR} \\ S_{RL} & S_{RR} \end{bmatrix}$$

とし、右回り R, 左回り L の組み合わせで後方散乱係数を取得したとすると、その要素数から、形式上では情報量は4倍であるが、さらに、各々が複素振幅を持つのでこの要素間の関係からターゲットに関する偏波情報が引き出せたり、偏波合成による電力が得られるのである。したがって、単に4倍に情報量が増えることだけではない点に注意が必要である。この点は最も重要なポイントである。取得された散乱行列は、ある周波数、入射角の変数となっているが、レーダシーン中のターゲットの偏波に関しては全ての情報を含むことになる。

レーダポーラリメトリは基本的に、散乱行列あるいはその拡張の Kennaugh 行列をベースにターゲットのもつ情報を取り扱っているが、一旦、正しい散乱行列が得られれば、それは具体的なレーダシステムから切り放される。この意味は、例えば、具体的な偏波状態とターゲットの条件のもとでデータが取得されても、散乱行列の要素の間には、ある種の不変量が存在し、それは取得の際の偏波状態に依存しない量となっている、ことなどを指している。それゆえ、散乱行列自身の持つ情報に重要性をおいていることになる。筆者は、数年来、次の項目を念頭に置き研究を進めてきた。

- ・ 理論的定式化
- ・ 最適受信の方法
- ・ ターゲットに固有の特徴的偏波状態
- ・ 偏波によるターゲットの強調
- ・ 偏波フィルタリング
- ・ ターゲットの分類・識別
- ・ ターゲットの分解
- ・ レーダシステム
- ・ レーダの偏波校正

この研究はポーラリメトリーを最大限に利用した FM-CW イメージングレーダの開発が目標であった。FM-CW レーダに対してこのレーダポーラリメトリの概念を導入し、散乱行列によって、いかにコントラストの高い偏波イメージングが達成できるか、あるいはどのようにターゲットの情報を引き出せるかを理論的、実験的に検討することを目的とした。従来、レーダポーラリメトリの理論は単一周波数を基本に構築されているが、FM-CW レーダは広い周波数を使う広帯域レーダである。そのため、如何に FM-CW レーダにレーダポーラリメトリの理論を組み込むことができるかが最大の問題点である。この研究では FM-CW レーダから得られるビートスペクトラムを合成開口処理し、ピクセル毎の複素反射係数値を散乱行列の要素に対応させた。そして、偏波による物体の散乱特性の違いをイメージングに役立てるための偏波基底変換理論を詳細に調べた。さらに L, X, Ku バンドの周波数帯で動作する直交2偏波 FM-CW レーダを作成し、そのレーダにより室内、及び野外での物体イメージングを行なった。偏波基底変換によるイメージング性能およびコントラストがどこまで改善されるかを検討した結果、FM-CW レーダが完全な Full-Polarimetric システムとして動作することが確認でき、画期的なイメージングレーダを構築することができた。一方、アメリカ NASA/JPL から Full Polarimetric data の提供を受け、それについてもポーラリメトリーがどのように貢献するかを検討した。

この成果は今後、3次元物体のイメージング、埋没物体探査への応用など、さらなる発展が期待できる。この研究を進めるにあたり、日頃お世話になっている新潟大学工学部情報工学科・仙石正和教授に感謝する。お手伝いいただいた新潟大学工学部情報工学科・山田寛喜講師、阿達透技官、さらに、共同研究者でもある大学院学生、卒業生の皆様に感謝します。

研究組織

研究代表者 山口芳雄 新潟大学・工学部・情報工学科・教授

研究経費

平成7年度	1600千円
平成8年度	500千円
計	2100千円

研究発表

(1) 学会誌等

- (1) Yoshio Yamaguchi, Toru Nishikawa, Masakazu Sengoku, Wolfgang -M. Boerner, "Two-dimensional and full polarimetric imaging by a synthetic aperture FM-CW radar," *IEEE Trans. Geoscience Remote Sensing*, vol.33, no.2, pp.421-427, Mar. 1995, 平成7年3月
- (2) Toshifumi Moriyama, Yoshio Yamaguchi, Hiroyoshi Yamada, Masakazu Sengoku, "Reduction of surface clutter by a polarimetric FM-CW radar in underground target detection," *IEICE Trans. Communication*, vol.E78-B, no.4, pp.625-629, April 1995, 平成7年4月
- (3) 山田寛喜, 山本一晶, 山口芳雄, 仙石正和, "電磁波散乱推定におけるRoot-MUSIC法の散乱パラメータ推定精度に関する検討," 電子情報通信学会論文誌 B-II, vol.J78-B-II, no.11, pp.692-700, 1995, 平成7年11月
- (4) Yoshio Yamaguchi, Yuji Takayanagi, Wolfgang -M. Boerner, Hyo J. Eom, Masakazu Sengoku, "Polarimetric enhancement in radar channel imagery," *IEICE Trans. Communication*, vol.E78-B, no.12, pp.1571-1579, Dec. 1995, 平成7年12月
- (5) Yoshio Yamaguchi, Takeshi Nagai, Hiroyoshi Yamada: "JERS-1 SAR image analysis by wavelet transform," *IEICE Trans. Communication*, vol.E78-B, no.12, pp.1617-1621, Dec. 1995, 平成7年12月
- (6) Yoshio Yamaguchi, Toru Nishikawa, Masakazu Sengoku, Wolfgang-M. Boerner, "Polarimetric imaging of linear targets by a synthetic aperture FM-CW radar," *Proc. of Third International Workshop on Radar Polarimetry*, vol.1, pp. 355-366, 1995, 平成7年3月
- (7) Yoshio Yamaguchi, Toshifumi Moriyama, Tatsuya Nakanishi, Hiroyoshi Yamada, Masakazu Sengoku, "Detection of objects in snowpack by a polarimetric synthetic aperture FM-CW radar," *Proc. of Third International Workshop on Radar Polarimetry*, vol.2, pp.522-531, Mar. 1995, 平成7年3月
- (8) Yoshio Yamaguchi, Katsutoshi Misawa, Takeshi Nagai, Hiroyoshi Yamada, Masakazu Sengoku., "JERS-1/SAR texture analysis by wavelet transform," *Asia Pacific Microwave Conference Proceedings*, vol.1, pp.390-393, Oct. 1995
- (9) Wolfgang-M.Boerner, Yoshio Yamaguchi, Yuji Takayanagi, Masakazu Sengoku, "Polarimetric enhancement of POL-SAR imagery applied to SIR-C/X-SAR polarimetric image data," *Asia Pacific Microwave Conference Proceedings*, vol.1, pp.394, Oct. 1995
- (10) Yoshio Yamaguchi, Hiroyuki Nihei, Wolfgang-M. Boerner, Hyo J. Eom, "2-dimensional polarimetric and synthetic aperture FM-CW radar imaging," *Asia Pacific Microwave Conference Proceedings*, vol.2, pp.494-497, Oct. 1995
- (11) Hiroyoshi Yamada, Yoshio Yamaguchi, "Estimation accuracy of scattering parameters of root-MUSIC and modified root-MUSIC algorithms," *Asia Pacific Microwave Conference Proceedings*, vol.2, pp.528-531, Oct. 1995
- (12) Yoshio Yamaguchi, Toshifumi Moriyama, "Polarimetric detection of objects buried in snowpack by a synthetic aperture FM-CW radar," *IEEE Trans. Geoscience Remote Sensing*, vol.34, no.1, pp.45-51, Jan. 1996, 平成8年1月
- (13) Hiroyoshi Yamada, Yoshio Yamaguchi, Masakazu Sengoku, "A time-domain scheme for the modified Root-MUSIC algorithm," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E79-B, no.4, pp.595-601, Apr. 1996, 平成8年4月
- (14) 猪又憲治, 山口芳雄, 山田寛喜, "偏波を考慮したDiffraction Tomographyにおける再構成実験結果に

ついて,” 電子情報通信学会論文誌 B-II, vol.J79-B-II, no.5, pp.302-305, May 1996, 平成8年5月

- (15) Yoshio Yamaguchi, Masakazu Sengoku, and Seiichi Motooka, “Using a van-mounted FM-CW radar to detect corner-reflector road-boundary markers,” *IEEE Trans. Instrument Measurement*, vol.45, no.4, pp.793-799, Aug. 1996
- (16) 笠原一, 森山敏文, 山口芳雄, 山田寛喜, “FM-CWレーダにおける等価STC回路について,” 電子情報通信学会論文誌 B-II, vol. J79-B-II, pp.583-588, Sept. 1996, 平成8年9月
- (17) Yoshio Yamaguchi, Yuji Takayanagi, Hiroyoshi Yamada, “Polarimetric calibration of an FM-CW Radar,” *Progress In Electromagnetic Research Symposium Proceedings*, p. 561, July 1996
- (18) Yoshio Yamaguchi, Masafumi Nakamura, Hiroyoshi Yamada, “Experimental result on the decomposition of target based on the scattering matrix obtained by FM-CW radar,” *Progress In Electromagnetic Research Symposium Proceedings*, p. 562, July 1996
- (19) Hiroyoshi Yamada, Kazunori Onishi, Yoshio Yamaguchi, “Indoor propagation analysis using a 2-dimensional polarization sensitive MUSIC algorithm,” *Proc. International Symposium on Multidimensional Mobile Communications '96*, July, pp.56-60, 1996.
- (20) Hiroyoshi Yamada, Toshiharu Yamakura, Yoshio Yamaguchi, “MUSIC algorithm for the delay time and the polarization estimation,” *Proc. of International Symposium on Antennas and Propagation*, vol.3, pp. 737-740, 1996, 平成8年9月
- (21) Jian Yang, Yoshio Yamaguchi, Hiroyoshi Yamada, Shiming Lin, “A new method for characterizing radar target,” *Proc. of International Symposium on Antennas and Propagation*, vol.4, pp.945-948, 1996, 平成8年9月
- (22) Jian Yang, Yoshio Yamaguchi, Hiroyoshi Yamada, Shiming Lin, “A new method to obtain the optimal polarization states in the co-polarized channel,” *Proc. of International Symposium on Antennas and Propagation*, vol.4, pp.1029-1032, 1996, 平成8年9月
- (23) Yoshio Yamaguchi, Yuji Takayanagi, Hiroyoshi Yamada, “Polarimetric calibration for a synthetic aperture FM-CW radar,” *Proc. of International Symposium on Antennas and Propagation*, vol.4, pp.1049-1052, 1996, 平成8年9月
- (24) Toshifumi Moriyama, Hajime Kasahara, Yoshio Yamaguchi, Hiroyoshi Yamada, “An equivalent time sensitivity control technique for polarimetric FM-CW radar,” *Proc. of International Symposium on Antennas and Propagation*, vol.4, pp.1053-1056, 1996, 平成8年9月
- (25) Toshifumi Moriyama, Yoshio Yamaguchi, Hiroyoshi Yamada, “Characteristics of the horn antenna for subsurface radar,” *Proc. of International Conference on Ground Penetrating Radar*, pp.73-76, 1996, 平成8年9月
- (26) Yoshiyuki Wakita, Yoshio Yamaguchi, “Estimation of the soil permittivity and conductivity by a GPR antenna,” *Proc. of International Conference on Ground Penetrating Radar*, pp.123-126, 1996
- (27) Hiroyoshi Yamada, Onishi, Yoshio Yamaguchi, “A simple calibration technique for the FM-CW subsurface radars using a quadrature signal transform,” *Proc. of International Conference on Ground Penetrating Radar*, pp.317-321, 1996, 平成8年10月
- (28) Yoshio Yamaguchi, Hajime Kasahara, Toshifumi Moriyama, Hiroyoshi Yamada, “Polarimetric detection of objects by a deep sounding FM-CW radar,” *Proc. of International Conference on Ground Penetrating Radar*, pp.373-376, 1996, 平成8年10月

(2) 口頭発表

- (29) 宮島 淳, 山口芳雄, 山田寛喜, 藤本京平, 仙石正和, “2次元格子分割を用いた誘電体円柱再構成,” 電子情報通信学会技術研究報告A・P94-95, 平成7年1月
- (30) 二瓶浩之, 山口芳雄, 山田寛喜, 藤本京平, 仙石正和, “2次元合成開口FM-CWレーダによるポーラリメトリックイメージング,” 電子情報通信学会技術研究報告A・P94-96, 平成7年1月
- (31) 青木和則, 藤本京平, 山田寛喜, 山口芳雄, “磁流ヘリカルアンテナの実験的考察,” 電子情報通信学会技術研究報告A・P94-99, 平成7年1月
- (32) 竹澤幸男, 仲山陽一, 藤本京平, 山田寛喜, 山口芳雄, “自己補対構造を取り入れたモノポールアンテナ系の特性,” 電子情報通信学会技術研究報告A・P94-102, 平成7年1月
- (33) 藤島秀騎, 盛永 修, 藤本京平, 山田寛喜, 山口芳雄, “自己補対構造による逆Lアンテナ(2),” 電子情報通信学会技術研究報告A・P94-103, 平成7年1月
- (34) 山本一晶, 山田寛喜, 山口芳雄, 藤本京平, 仙石正和, “Root Music法を用いた散乱推定に関する基礎的検討,” 電子情報通信学会技術研究報告A・P94-104, 平成7年1月
- (35) 笠原一, 山口芳雄, 森山敏文, 山田寛喜, “FM-CWレーダの深部探査性能の向上について,” 電子情報通信学会技術研究報告SANE95-50, 1995, 平成7年7月
- (36) 猪又憲治・山口芳雄・山田寛喜, “逆伝搬法を用いた物体の再構成実験結果について,” 電子情報通信学会技術研究報告SANE95-74, 1995, 平成7年10月
- (37) 高柳雄二・山口芳雄・山田寛喜, “FM-CWレーダによる散乱行列とその較正に関する検討,” 電子情報通信学会技術研究報告SANE95-75, 1995, 平成7年10月
- (38) 佐藤寛・山田寛喜・山口芳雄, “スーパーレゾリューション法を用いた円筒状散乱体のパラメータ推定,” 電子情報通信学会技術研究報告SANE95-76, 1995, 平成7年10月
- (39) 森谷昭弘・山田寛喜・山口芳雄, “偏波ステップ周波数レーダに関する基礎的検討,” 電子情報通信学会技術研究報告SANE95-77, 1995, 平成7年10月
- (40) 森山敏文, 山口芳雄, 山田寛喜, 阿部武雄, “地中探査レーダからの不要放射電磁波に関する検討,” 電子情報通信学会技術研究報告EMCJ95-63, 1995, 平成7年11月
- (41) 竹澤幸男, 藤本京平, 山田寛喜, 山口芳雄, “補対構造を用いた小形アンテナ系の特性,” 電子情報通信学会技術研究報告A・P95-, 平成7年12月
- (42) 山田寛喜, 山口芳雄, 仙石正和, “時間領域ノッチフィルタを併用した改良型Root-MUSICアルゴリズム,” 電子情報通信学会通信ソサイエティ大会, SB-1-7, 1995, 平成7年9月
- (43) 高柳雄二, 山口芳雄, 山田寛喜, “FM-CW RadarにおけるPolarimetric較正について,” 電子情報通信学会通信ソサイエティ大会, B-20, 1995, 平成7年9月
- (44) 森山敏文, 山田寛喜, 山口芳雄, 仙石正和, “Polarization anisotropy係数によるターゲット分類に関する検討,” 電子情報通信学会通信ソサイエティ大会, B-21, 1995, 平成7年9月
- (45) 笠原一, 森山敏文, 山田寛喜, 山口芳雄, “FM-CWレーダにおける地中深部物体の強調,” 電子情報通信学会通信ソサイエティ大会, B-22, 1995, 平成7年9月
- (46) 永井健, 山口芳雄, 山田寛喜, “ウェーブレット解析とファジィ推論によるJERS-1/SARの領域分割,” 電子情報通信学会信越支部大会, W4, 1995, 平成7年10月

- (47) 森山敏文, 山口芳雄, 笠原一, 山田寛喜, “時間微分信号を用いた偏波FM-CWレーダ,” 電子情報通信学会信越支部大会, W5, 1994, 平成7年10月
- (48) 大西和則, 山本一晶, 山田寛喜, 山口芳雄, “改良型Root-Music法によるの周波数減衰を有する局所散乱波推定,” 電子情報通信学会信越支部大会, F2, 1995, 平成7年10月
- (49) 竹澤幸男, 藤本京平, 山田寛喜, 山口芳雄, “自己補対構造を用いた小形アンテナ系の特性,” 電子情報通信学会信越支部大会, F5, 1995, 平成7年10月
- (50) 中村政文, 山口芳雄, 山田寛喜, “偏波散乱行列によるターゲットの分解に関する検討,” 電子情報通信学会技術研究報告A・P96-34, 平成8年6月
- (51) 山倉利春, 山田寛喜, 大西和則, 山口芳雄, “偏波を用いたMUSIC法の分解能特性に関する比較検討,” 電子情報通信学会技術研究報告A・P96-100, 平成8年12月
- (52) 中村政文, 高柳雄二, 山口芳雄, 山田寛喜, 中村寛, “ポーラリメトリックFM-CW Radarによるターゲットの分解,” 1996年電子情報通信学会総合大会, B-34, 1996, 平成8年3月
- (53) 山田寛喜, 山倉利春, 山口芳雄, “MUSICアルゴリズムによる散乱中心・偏波推定に関する考察,” 1996年電子情報通信学会総合大会, B-35, 1996, 平成8年3月
- (54) 竹中宏, 山口芳雄, 山田寛喜, 阿達透, “Bojarskiの恒等式を用いた伝導体のイメージング,” 平成8年度電子情報通信学会信越支部大会, E-1, pp.181-182, 1996, 平成8年9月
- (55) 伊藤孝充, 山口芳雄, 山田寛喜, 阿達透, “Diffraction Tomography 実験による任意形状物体の再構成,” 平成8年度電子情報通信学会信越支部大会, E-1, pp.185-186, 1996, 平成8年9月
- (56) 山倉利春, 山田寛喜, 山口芳雄, 阿達透, “直交する偏波成分を用いたMUSICアルゴリズム,” 平成8年度電子情報通信学会信越支部大会, E-1, pp.189-190, 1996, 平成8年9月
- (57) 大西和則, 山田寛喜, 山口芳雄, 阿達透, “2次元法による波源位置, 偏波状態推定,” 平成8年度電子情報通信学会信越支部大会, V-13, pp.25-26, 1996, 平成8年9月
- (58) 笠原一, 山口芳雄, 山田寛喜, “ホーンアンテナを用いたFM-CWレーダにおける分解能劣化補正の検討,” 平成8年度電子情報通信学会信越支部大会, V-14, pp.27-28, 1996, 平成8年9月
- (59) 永井健, 山口芳雄, 山田寛喜, “テクスチャ情報の時期変化を利用したJERS-1/SARの画像解析,” 平成8年度電子情報通信学会信越支部大会, V-15, pp.29-30, 1996, 平成8年9月
- (60) 山口芳雄, 永井健, 山田寛喜, “Radar PolarimetryのSAR画像の応用,” URSI-F 410回資料, 1996-12

II 研究成果

研究経過の概要

研究の前半は理論的な電磁波の偏波の取り扱い、すなわち偏波の表現方法、レーダ受信電力、物体の偏波散乱特性の表現、また、送信電波をコヒーレント波と仮定し、その偏波状態を変数にしたときにレーダに受信される電力がどのように変化するかを厳密に考察した。また、特徴的偏波状態の関係や、それによってレーダ画像がコントラストよくイメージングされうることを示した。ポーラリメトリー理論は単一周波数に基づく理論であるが、広帯域な掃引を行うFM-CWレーダに適応させる方法を研究した。そのため、合成開口FM-CWレーダから得られる高分解能な画像ピクセルを偏波毎にピックアップし、それぞれの偏波毎のピクセル値を物体の散乱行列に対応させることにより偏波の理論が適用できるのではないかと考え、シミュレーション及び実験を行った。また、ターゲットの認識や関しても散乱行列を直接分解する方法によって3成分に分解できることを検討した。

研究の後半は合成開口FM-CWレーダから散乱行列が得られることが確認できたので、イメージング実験による検証に主眼を移した。モデル実験より、種々の理論的成果の検証実験を行った。また、野外実験として、地中埋没物体の検出や、雪中埋没物体の検出などポーラリメトリーの利用によって従来不可能であったコントラストの良いレーダ画像を得ることができた。さらに、NASA JPLのデータにより、ポーラリメトリック理論の有効性も確認した。

本書の構成は以下の目次のようになっている。この報告書は、はじめてポーラリメトリーを学ぶ人にもテキストとなり得るようにできるだけ丁寧に書いたつもりであるが、いたらない点はお詫びしたい。

目次

第一章 場の方程式	-----	1
第2章 偏波状態の表現方法	-----	8
第3章 アンテナの偏波と受信電圧・電力について	-----	27
第4章 受信電力の最適化	-----	53
第5章 散乱行列を用いた偏波チャンネルの電力最適化	-----	55
第6章 Kennoughベクトルを用いた偏波チャンネルの電力最適化	-----	73
第7章 特徴的偏波状態の性質	-----	79
第8章 Polarimetric Contrast Enhancement	-----	86
第9章 ターゲットの分解	-----	91
第10章 FM-CWレーダ	-----	101
第11章 まとめ	-----	112
付録 関連した発表論文	-----	113

1 章 場の方程式と平面波

1.1 はじめに

レーダポーラリメトリとは電波の持つベクトル情報を利用する技術であり、最近のレーダセンシングには欠かせない道具となってきた。レーダセンシングには民生用、軍사용、さらに地球環境、惑星、宇宙など様々で広大な分野がある。特に最近は国境を越えた地球全体の環境の重要性が認識され、惑星地球号をどう保全し続けて行くかが大きな問題になっている。

この章では、レーダセンシングの基礎としての場の方程式、その解としての平面波など、電磁気学の初歩を述べる。

1.2 場の方程式

1.2.1 時間領域における Maxwell 方程式

時刻 t において空間の点 \mathbf{r} (位置ベクトル)で、電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と磁界 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ は次の Maxwell 方程式を満たしている。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

ここで、ベクトル \mathbf{B} は磁束密度、 \mathbf{D} は電束密度を表わす。場の発散から

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho \quad (1.5)$$

ただし、 \mathbf{J} は電流密度、 ρ は電荷密度である。場が存在する媒質中でその媒質の巨視的な性質は構成パラメータの誘電率 ϵ 、透磁率 μ 、導電率 σ によって記すことができる。媒質が均質であれば

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.8)$$

が成立する。式(1.6)-(1.8)は構成方程式と呼ばれている。

1.2.2 時間領域におけるベクトル波動方程式

式(1.2)において電流密度 \mathbf{J} は2つの成分に分解され、ソース電流 \mathbf{J}_s と導電電流 $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$ の和で表わされるので

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s \quad (1.9)$$

次のベクトル演算子の公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

を利用して式 (1.1), (1.2) に回転演算子($\nabla \times$)をかけることにより, \mathbf{E} と \mathbf{H} に関するベクトル波動方程式を得ることができる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon} \quad (1.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J}_s \quad (1.11)$$

一般的に言えば, 式 (1.10), (1.11) を満たす時間関数としての偏波状態表現を見いだすことが望ましいが, 今までにそのような表現方法は得られていない。そこで, ここでは波源の無い空間での平面波の伝搬を考え, 単一周波数領域で偏波状態がユニークに存在するケースを考察する。

1.2.3 周波数領域におけるベクトル波動方程式：ヘルムホルツ方程式

以下, IEEE Standard に定義された調和時間フェイザー (Phaser) の定義を採用する。角周波数 ω で調和時間振動をしている場での瞬時ベクトルを $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ とすれば,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{a}_x A_x(x, y, z, t) + \mathbf{a}_y A_y(x, y, z, t) + \mathbf{a}_z A_z(x, y, z, t) \quad (1.12)$$

となり, その観測量は実数であり, 一般的に次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{a}_x A_{mx} \cos(\omega t + \theta_x) + \mathbf{a}_y A_{my} \cos(\omega t + \theta_y) + \mathbf{a}_z A_{mz} \cos(\omega t + \theta_z) \\ &= \mathbf{a}_x \operatorname{Re} \left[A_{mx} e^{j(\omega t + \theta_x)} \right] + \mathbf{a}_y \operatorname{Re} \left[A_{my} e^{j(\omega t + \theta_y)} \right] + \mathbf{a}_z \operatorname{Re} \left[A_{mz} e^{j(\omega t + \theta_z)} \right] \\ &= \mathbf{a}_x \operatorname{Re} \left[A_{mx} e^{j\theta_x} e^{j\omega t} \right] + \mathbf{a}_y \operatorname{Re} \left[A_{my} e^{j\theta_y} e^{j\omega t} \right] + \mathbf{a}_z \operatorname{Re} \left[A_{mz} e^{j\theta_z} e^{j\omega t} \right] \\ &= \mathbf{a}_x \operatorname{Re} \left[A_{mx} (\cos \theta_x + j \sin \theta_x) e^{j\omega t} \right] + \mathbf{a}_y \operatorname{Re} \left[A_{my} (\cos \theta_y + j \sin \theta_y) e^{j\omega t} \right] \\ &\quad + \mathbf{a}_z \operatorname{Re} \left[A_{mz} (\cos \theta_z + j \sin \theta_z) e^{j\omega t} \right] \\ &= \mathbf{a}_x \operatorname{Re} \left[(A_{mx} \cos \theta_x + j A_{mx} \sin \theta_x) e^{j\omega t} \right] + \mathbf{a}_y \operatorname{Re} \left[(A_{my} \cos \theta_y + j A_{my} \sin \theta_y) e^{j\omega t} \right] \\ &\quad + \mathbf{a}_z \operatorname{Re} \left[(A_{mz} \cos \theta_z + j A_{mz} \sin \theta_z) e^{j\omega t} \right] \\ &= \mathbf{a}_x \operatorname{Re} \left[(A_{rx} + j A_{ix}) e^{j\omega t} \right] + \mathbf{a}_y \operatorname{Re} \left[(A_{ry} + j A_{iy}) e^{j\omega t} \right] + \mathbf{a}_z \operatorname{Re} \left[(A_{rz} + j A_{iz}) e^{j\omega t} \right] \\ &= \mathbf{a}_x \operatorname{Re} \left[\dot{A}_x e^{j\omega t} \right] + \mathbf{a}_y \operatorname{Re} \left[\dot{A}_y e^{j\omega t} \right] + \mathbf{a}_z \operatorname{Re} \left[\dot{A}_z e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{a}_x \dot{A}_x e^{j\omega t} + \mathbf{a}_y \dot{A}_y e^{j\omega t} + \mathbf{a}_z \dot{A}_z e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[(\mathbf{a}_x \dot{A}_x + \mathbf{a}_y \dot{A}_y + \mathbf{a}_z \dot{A}_z) e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

ここで、 Re は実数部をとることを意味する。

$$\dot{A}_x = A_{rx} + jA_{ix}, \dot{A}_y = A_{ry} + jA_{iy}, \dot{A}_z = A_{rz} + jA_{iz} \quad : \text{複素スカラー量} \quad (1.14)$$

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ はそれぞれ a_x, a_y, a_z 成分の位相量である。結果的に、

$$A(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ A(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right\} \quad (1.15)$$

$$A(\mathbf{r}) = a_x \dot{A}_x + a_y \dot{A}_y + a_z \dot{A}_z \quad (1.16)$$

と表現でき、この $A(\mathbf{r})$ をフェイザー (Phasor) 表現と言う。つまり、場のベクトルは $A(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$ という複素表現で表すことができ、フェイザー自身は複素表現で時間依存の項を取り除いたものである。したがって、目的とする観測量はフェイザーを使って解析し、その後 $e^{j\omega t}$ を掛け、実部をとれば得られることになる。

ソースの無い ($\rho=0, J_s=0$) 領域で(1.10), (1.11) はフェイザー表現により

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.18)$$

となる。複素伝搬定数 k を定義することによってヘルムホルツ方程式を得ることができる。

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.19)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.20)$$

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - j\omega\mu\sigma \quad (1.21)$$

(1.19), (1.20) に対する解は、

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y + k_z \mathbf{a}_z \quad (1.22)$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z \quad (1.23)$$

を使って

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(\pm j \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (1.24a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(\pm j \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (1.24b)$$

と書くことができる。 $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ は一定の値をもつ係数ベクトルである。それゆえ、時間を含めた観測量としての瞬時ベクトルは

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 \exp \left[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \right\} \quad (1.25a)$$

$$\mathbf{H}_+(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{H}_0 \exp \left[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \right\} \quad (1.25b)$$

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 \exp \left[j(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \right\} \quad (1.25c)$$

$$\mathbf{H}_-(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{H}_0 \exp \left[j(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \right\} \quad (1.25d)$$

となる。IEEE の定義によれば、 $\exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ は時間が進むにつれて正の \mathbf{r} 方向 (+) に進む波に対応し、 $\exp[j(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ は負の \mathbf{r} 方向 (-) に進む波を表わしている。特に、この位相表記は偏波変換など偏波解析を展開していく場合に基本となる量であるから注意を要する。例えば、物理学・光学の分野では工学とは複素共役の関係が用いられ、 $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ 、 $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)]$ がそれぞれ $+\mathbf{k}$ 、 $-\mathbf{k}$ 方向に進む波を表わしている。

式(1.25)において、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ であれば、場の位相は一定である。 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ となる \mathbf{r} は平面を定義するので、その平面では位相は一定である。それゆえ、式(1.25)は平面波を表すことになる。

損失がなく、等方性の媒質では、波数ベクトル(伝搬定数) \mathbf{k} は実数となり、その大きさは

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.26)$$

v は媒質中の電磁波の速度、 λ はその波長である。

1.2.4 単一周波数のTEM (Transverse Electro-Magnetic) 波

(1.1)のMaxwell 方程式にフェイザーを使えば、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j \omega \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.27)$$

$+\mathbf{r}$ 方向に向かう電界(1.25a)を代入して

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ &= \left[\left(-jk_y E_z + jk_z E_y \right) \mathbf{a}_x + \left(-jk_z E_x + jk_x E_z \right) \mathbf{a}_y + \left(-jk_x E_y + jk_y E_x \right) \mathbf{a}_z \right] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ -jk_x & -jk_y & -jk_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j \omega \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\text{従って,} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \quad (1.28)$$

$$\text{同様に} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \epsilon \mathbf{E} \quad (1.29)$$

また、 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0$ というソース無しの式から

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.30)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.31)$$

それゆえ、 \mathbf{E} と \mathbf{H} は互いに直交し、伝搬方向 \mathbf{k} にも垂直であることが分かる。即ち、 \mathbf{E} と \mathbf{H} は伝搬方向と垂直な断面(横断面: Transverse 面)に存在し、互いに直交しているの

TEM (Transverse Electro-Magnetic)波と呼ばれる。なお、ベクトル演算子は次のような対応関係になっていることに注意。

$$\nabla \times \rightarrow -j\mathbf{k} \times, \quad \nabla \cdot \rightarrow -j\mathbf{k} \cdot$$

波の進む方向は任意であるが、ここでは直角座標系の z 軸方向を電磁波の進む方向と考える。そのため TEM 波は z 軸に沿って伝搬し、 $\mathbf{k} = k\mathbf{a}_z$ となる。その電界・磁界は横断面 ($x-y$) 面の中に存在する。電界が(1.25a)で与えられれば、

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{a}_z \times \mathbf{E} = \frac{1}{\eta} \mathbf{a}_z \times \mathbf{E} \quad (1.32)$$

ここで、 η は媒質に損失のある場合の媒質の固有インピーダンスである。

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad (1.33)$$

そして、電界 \mathbf{E} と磁界 \mathbf{H} は右手座標系で図1.1に示すように互いに関係付けられている。

$$\mathbf{H}_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{1}{\eta} \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \pm \mathbf{a}_z \times \text{Re} \left\{ \frac{\mathbf{E}_{0\pm}}{\eta} \exp \left[j(\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \right\} \quad (1.34)$$

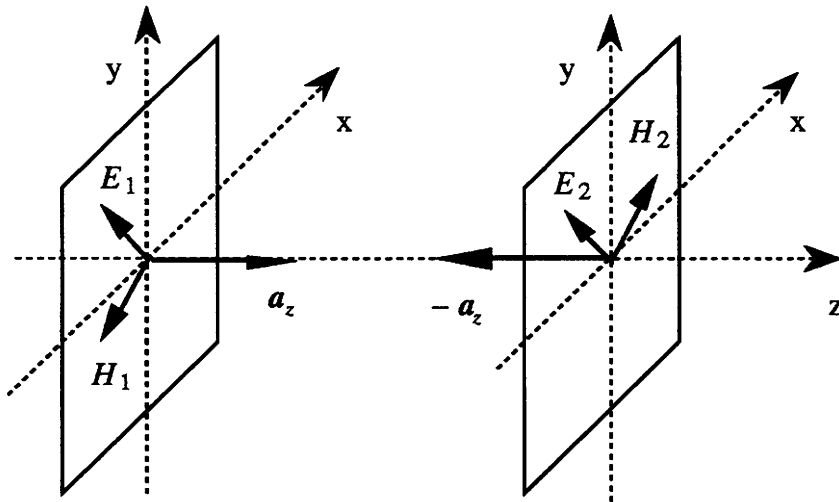


図1.1 電界・磁界ベクトルの方向

1.2.5 TEM 波のPower

Poynting の定理によれば、瞬時ベクトル \mathbf{E} 、 \mathbf{H} は瞬時 Poynting Vector \mathbf{S} と次の関係式で結ばれている。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.36)$$

従って

$$\mathbf{S}_{\pm}(z, t) = \mathbf{E}_{\pm}(z, t) \times \mathbf{H}_{\pm}(z, t) = \pm \mathbf{a}_z \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t \mp kz) \quad (1.37)$$

$z=\text{const}$ の面を考えたとき、時間平均の電力密度はそれゆえ、

$$\langle S_{\pm}(z, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \pm a_z \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t \mp k z) dt = \pm a_z \frac{E_0^2}{2\eta} \quad (1.38)$$

さて、瞬時Poynting Vector \mathbf{S} と、時間平均の電力密度流は上のように計算できるが、フェイザー表現を使った際に電力流を求めるのに都合の良い複素 Poynting Vector \mathbf{P} との関係を調べてみよう。まず、フェイザー表現を使ったMaxwell の方程式から次の関係が得られる。

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = -j \left[\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \right] - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* \quad (1.39)$$

複素 Poynting Vector \mathbf{P} は次のように定義されている。

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (1.40)$$

複素量の場のベクトル(フェイザー)を実部と虚部の2つに分解し、各々の成分を実ベクトルで表そう。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_R(\mathbf{r}) + j\mathbf{E}_I(\mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_R(\mathbf{r}) + j\mathbf{H}_I(\mathbf{r}) \quad (1.41)$$

複素 Poynting Vector \mathbf{P} はそれゆえ

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_R + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I + j \left(\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_R - \mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_I \right) \quad (1.42)$$

一方、瞬時ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right\} = \mathbf{E}_R \cos \omega t - \mathbf{E}_I \sin \omega t \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right\} = \mathbf{H}_R \cos \omega t - \mathbf{H}_I \sin \omega t \end{aligned} \quad (1.43)$$

であるので瞬時Poynting Vector \mathbf{S} は

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_R \cos^2 \omega t + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I \sin^2 \omega t - \left(\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_R + \mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_I \right) \sin \omega t \cos \omega t \quad (1.44)$$

となる。明らかに複素 Poynting Vector \mathbf{P} と瞬時Poynting Vector \mathbf{S} は違うことが分かる。これらを結び付ける関係は瞬時Poynting Vector の時間平均をとることによって時間依存の項を消去すればよい。

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) d(\omega t) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_R + \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{P} \} \quad (1.45)$$

つまり、瞬時Poynting Vector の時間平均は複素 Poynting Vector の実部から得られる。

$$\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} d(\omega t) = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \quad (1.46)$$

さて、上の例では、電界磁界を実部と虚部に分けてみたが、次に、座標系に関わる成分

に分けて考えてみよう。

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{E} \times \frac{1}{\eta} (\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}^*) = \frac{\mathbf{a}_z}{\eta} |\mathbf{E}|^2 \quad (1.47)$$

であるから、時間平均のエネルギーの流れは

$$\frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{a}_z}{2\eta} |\mathbf{E}|^2 \quad (1.48)$$

で与えられる。つまり、電界の大きさの 2 乗 $|\mathbf{E}|^2$ に比例する。一般性を持たせるために、電界の成分を複素数として

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y = \mathbf{a}_x (E_{xr} + j E_{xi}) + \mathbf{a}_y (E_{yr} + j E_{yi}) \quad (1.49)$$

と書くことができるので、Transverse面内で電界が任意の方向を向いていても

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|^2 &= \left| (\mathbf{a}_x E_{xr} + \mathbf{a}_y E_{yr}) + j (\mathbf{a}_x E_{xi} + \mathbf{a}_y E_{yi}) \right|^2 = (\mathbf{a}_x E_{xr} + \mathbf{a}_y E_{yr})^2 + (\mathbf{a}_x E_{xi} + \mathbf{a}_y E_{yi})^2 \\ &= |E_x|^2 + |E_y|^2 \end{aligned} \quad (1.50)$$

となり、エネルギーは各成分の 2 乗和で表されることになる。これは、一見当然のことであるが、後述するように偏波の観点からは $|\mathbf{E}|^2$ は偏波基底によらない不変量であり、また、直交する各成分は互いに独立にエネルギーを運ぶことを意味している。

2章 偏波状態の表現方法

1 はじめに

レーダポーラリメトリは最近の高精度レーダセンシング、イメージングには欠かせないものとなってきている。レーダセンシングは地中埋没物体の探査のみならず各種民生用、軍用、さらに地球環境、惑星、宇宙など様々で広大な分野がある。初期のレーダでは、ある周波数における電磁波の振幅のみを計測する比較的単純なものだったが、その後、広帯域のレーダシステムが構築され、周波数、散乱物体からの振幅情報に加え、相対や絶対位相が計れるようになった。しかし、一般に偏波についてはあまり考慮されておらず、仮に偏波を取り入れても、2偏波で取得したデータの比較等の程度であった。そこで、従来のレーダをさらに発展させるには周波数、振幅、相対・絶対位相に加えて、偏波情報を積極的に取り入れる必要がある。偏波を取り入れることにより、電磁波のすべての性質を利用したイメージコントラスト機能をもつ高精度なレーダを作ることができる。高性能能ポーラリメトリックイメージングレーダでは、完全な電波のベクトル性質を利用することが目的である。つまり、送信・受信電磁波の偏波状態を信号処理やイメージングに取り込むことである。レーダによる散乱物体の偏波の様子を表現するのにコヒーレント波の場合、 2×2 のSinclair散乱Matrix, 3×3 のCovariance Matrix, 4×4 のMueller (Kennaugh) Matrix, また、インコヒーレント波の場合は 4×4 のMueller (Kennaugh) Matrix が用いられる。本章では、まずレーダポーラリの基礎となる偏波状態の表現方法について詳しく紹介する。

2 偏波状態の表現

偏波とは、空間のある定まった点で単一の周波数をもつ電波の進行方向の後ろ側から電界ベクトルの先端を観測したときに、時間の関数として得られる軌跡のことである。一般に、時間的に調和振動している平面波の軌跡はだ円形となることが知られている。だ円を表わすのにellipticity angle, tilt angle, size, 相対位相, 偏波変換比, ストークスパラメータ, ポアンカレ球(Poincare Sphere)などがある。以下に偏波を表現する際に使われるいくつかの記号とその定義およびそれらの関係を示す。

2.1 一般的表現

等方性・均質媒質中で、単一周波数をもつTEM波の電界は横断面内で2つの直交成分に分解することができる。直交成分は最も分かり易いx-y-zの直角座標系の成分としよう。もし、この波が+z方向に伝搬するとすれば、空間と時間関数としての瞬時的な電界ベクトル $\mathbf{E}(z, t)$ (観測量でフェイザー表現ではない) は次のようにかける。

$$\mathbf{E}(z, t) = \begin{bmatrix} E_x(z, t) \\ E_y(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_x| \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ |E_y| \cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

ここで、 $|E_x|$, $|E_y|$ は振幅, ϕ_x , ϕ_y は絶対位相を表わす。 z 方向に伝搬する平面波なので、 z 成分は存在しない。各成分は時間と共に調和振動しているが、電界ベクトル $\mathbf{E}(z, t)$ の先端は時間の経過と共に動く。その軌跡を調べるため、空間座標を固定し、

$z=0$ 面をとると(2.1.1)は

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(t) \\ \varepsilon_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_x| \cos(\omega t + \phi_x) \\ |E_y| \cos(\omega t + \phi_y) \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

となり、各成分は

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(t) &= |E_x| \cos \omega t \cos \phi_x - |E_x| \sin \omega t \sin \phi_x \\ \varepsilon_y(t) &= |E_y| \cos \omega t \cos \phi_y - |E_y| \sin \omega t \sin \phi_y \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

である。時間変動の項を消去するために、 $\phi = \phi_y - \phi_x$ とおいて変形すると

$$\begin{aligned} |E_y| \varepsilon_x(t) \cos \phi_y - |E_x| \varepsilon_y(t) \cos \phi_x &= |E_x| |E_y| \sin \phi \sin \omega t \\ |E_y| \varepsilon_x(t) \sin \phi_y - |E_x| \varepsilon_y(t) \sin \phi_x &= |E_x| |E_y| \sin \phi \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

が得られる。これから時間関数 ωt の項を消去すると

$$\frac{\varepsilon_x^2(t)}{|E_x|^2} - \frac{2 \varepsilon_x(t) \varepsilon_y(t)}{|E_x| |E_y|} \cos \phi + \frac{\varepsilon_y^2(t)}{|E_y|^2} = \sin^2 \phi \quad (2.1.5)$$

これはだ円の方程式を表している。それ故、瞬時電界ベクトルの成分 $\varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t)$ は図2.1に示すようなだ円の軌跡を描くことがわかる。

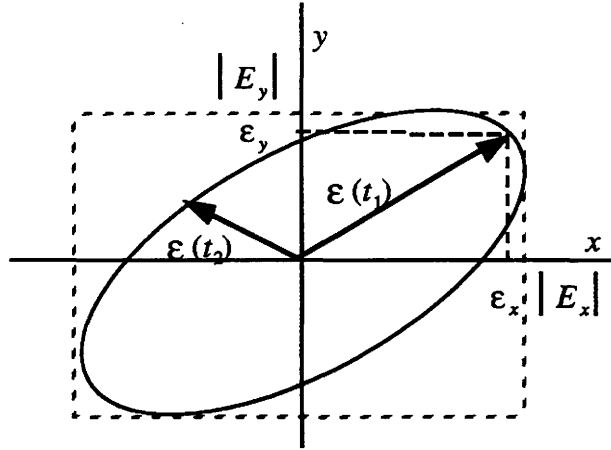


図2.1 電界ベクトル先端の軌跡

電界ベクトルの先端の軌跡は、一般的にはだ円であるが、その回転の向きは相対位相差に依存することが次式の展開よりわかる。今、時間と共に変化する x 成分と y 成分から作られる位相角を

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \tan^{-1} \frac{|E_y| \cos(\omega t + \phi_y)}{|E_x| \cos(\omega t + \phi_x)} \quad (2.1.6)$$

とすると、その時間による変化は微分操作

$$\frac{d\psi}{\cos^2\psi} = \frac{|E_y|}{|E_x|} \frac{-\omega \sin(\phi_y - \phi_x)}{\cos^2(\omega t + \phi_x)} dt$$

より,

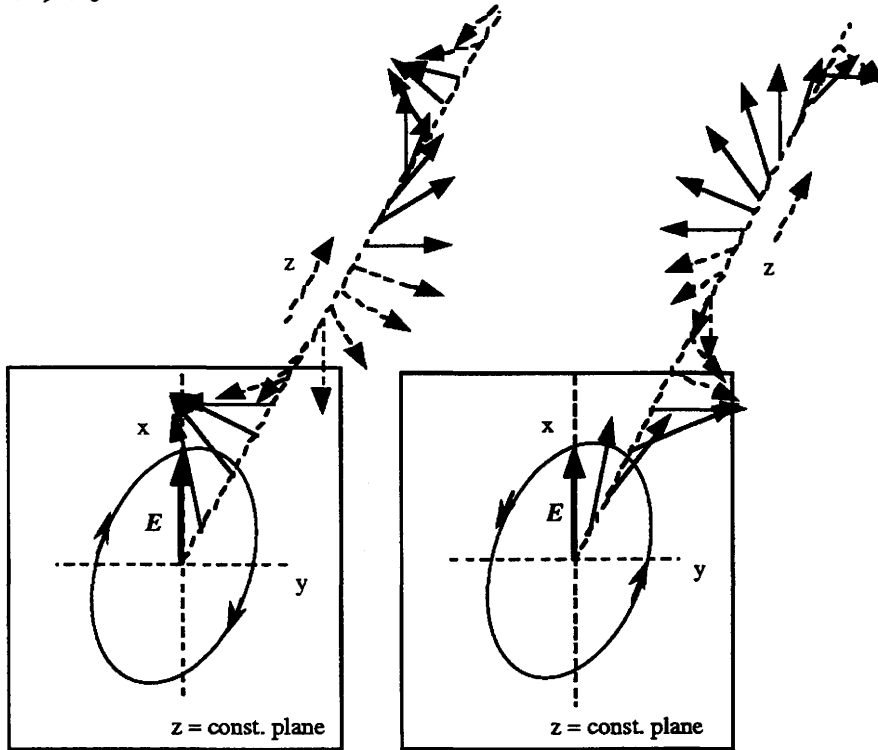
$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{|E_y|}{|E_x|} \cos^2\psi \frac{-\omega \sin\phi}{\cos^2(\omega t + \phi_x)} = \frac{|E_y|}{|E_x|} \frac{1}{1 + \tan^2\psi} \frac{-\omega \sin\phi}{\cos^2(\omega t + \phi_x)} \\ &= \frac{-\omega |E_x| |E_y| \sin\phi}{|E_x|^2 \cos^2(\omega t + \phi_x) + |E_y|^2 \cos^2(\omega t + \phi_y)} = \frac{-\omega |E_x| |E_y| \sin\phi}{|\epsilon(t)|^2} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

となる。これより,

$$0 < \phi < \pi \quad \text{に対して} \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} < 0 \quad (\text{左回り, 反時計回り}) \quad (2.1.8a)$$

$$-\pi < \phi < 0 \quad \text{に対して} \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} > 0 \quad (\text{右回り, 時計回り}) \quad (2.1.8b)$$

偏波の回転方向は、図2.2のように伝搬方向の後ろ側から電界ベクトルの先端を見たときに、時間の経過と共にどちら方向に回るかで決めている。IEEE Standardによれば、 $z=\text{const}$ の面内で、時間と共に時計回りに回転するものを「右回り」と定義し、逆に、反時計回りに回転するものを「左回り」と定義している。図2.2では3次元的に電界ベクトルを書いているので誤解は少ないと思われるが、 z 軸方向にのびる電界の回り方と $z=\text{const}$ 面内の回り方は、逆であることに注意されたい。 $z=\text{const}$ 面内で $x-y$ 平面の右手座標系は図のようになっているので、 $\frac{\partial\psi}{\partial t} > 0$ は時間と共に x 軸方向から y 軸方向に向うことになる。したがって、右回りである。



右回りだ円偏波

左回りだ円偏波

図2.2 偏波の回転方向 (handedness)

一方、図2.1や図2.3のように普通を書く直角座標系の $x-y$ 平面では、 z 軸は紙面から読者側に向き、また、電波は z の負の方向から正の方向に進むと仮定しているので、電波がやってくる方向を見込んでいることになる。図2.3のように書いた場合は、 $-\pi < \phi < 0$ $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} > 0\right)$ は反時計回りに回り、左回りに見えるが、電波の見る方向が逆であるので、右回りである。

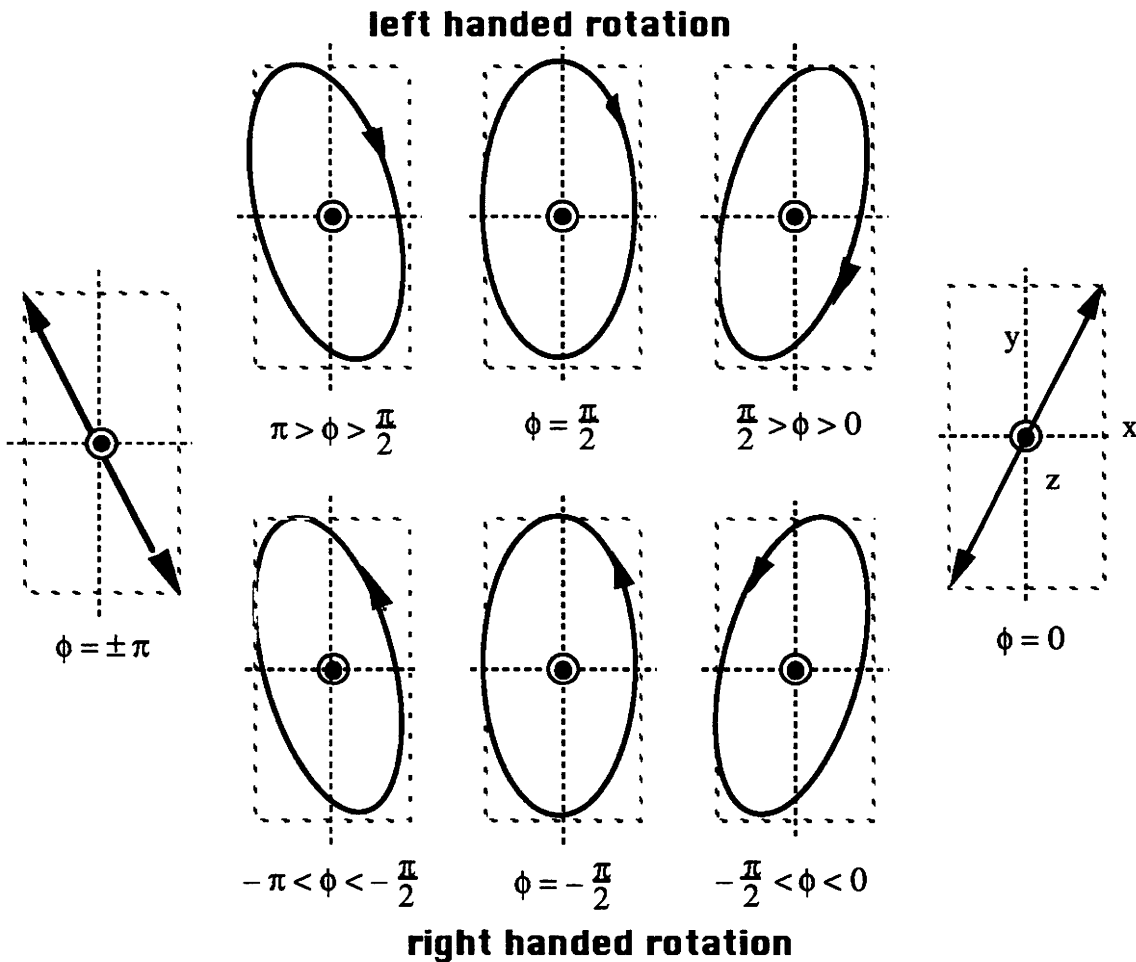


図2.3 一般的な円偏波

そこで、定義から $\phi = \phi_y - \phi_x$ のとり範囲を調べ、

- $0 < \phi < \pi$ は 左回り, Left handed rotation sense
- $-\pi < \phi < 0$ は 右回り, Right handed rotation sense

であると理解すればよい。それゆえ、相対位相差 $\phi = \phi_y - \phi_x$ を調べることでベクトル先端の回転方向がわかる。 $\phi > 0$ すなわち、 ϕ_y が ϕ_x より進んでいけば、左回りの円偏波となり、その逆では右回りの円偏波となる。もし、相対位相差 $\phi = \phi_y - \phi_x$ が π の整数倍ならば、2つの成分は同相・逆相となり、直線を描く。図2.3を参照。

2.2 幾何学的なパラメータの (τ, ε, A) をつかっただ円偏波表現

電界ベクトルの先端の軌跡は一般にだ円を描くので、だ円偏波を表現するのに図2.4に示すような幾何学的なパラメータの (τ, ε, A) をつかったほうが便利ことが多い。これらのパラメータはそれぞれ傾き角(orientation (tilt) angle) τ , ellipticity angle ε , size A であり、次のように定義されている。

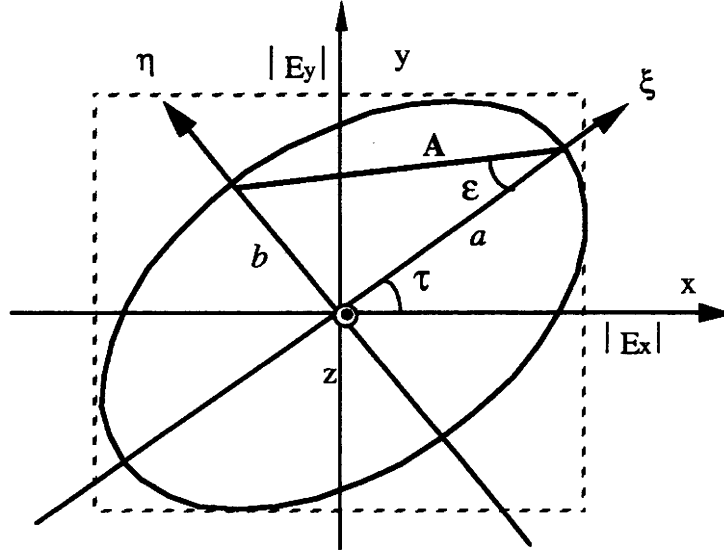


図2.3 だ円偏波を表すパラメータ

ellipticity angle ε は

$$\varepsilon = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.2.1)$$

で、 b はだ円の短軸、 a はだ円の長軸の長さである。左回りのだ円偏波に対して $\varepsilon > 0$ ，右回りのだ円偏波に対しては $\varepsilon < 0$ である。式(2.2.1)を参照。

傾き角 τ はだ円の長軸と正の x 軸のなす角度であり、その範囲は $(-\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2})$ である。

だ円の大きさは

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.2.2)$$

によって与えられる。 A^2 は電力を表す。この量は偏波情報とは直接に関係しない。

平面波の偏波状態はこれらの幾何学的パラメータによって定義することができる。ここで、単一周波数の平面波のだ円偏波状態を表わす2つのパラメータ $(|E_x|, |E_y|, \phi_x, \phi_y)$ ， (A, ε, τ) 間の関係を求めてみよう。

図2.3において ξ 軸と η 軸をそれぞれ、新しい長軸と短軸方向に選ぶ。この新しい座標系でだ円偏波は傾きのない正規のだ円となる。このだ円座標で電界の各成分は

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\omega t - kz + \phi_\xi) \\ b \cos(\omega t - kz + \phi_\eta) \end{bmatrix}$$

と書くことができるが、だ円の方程式(2.1.5)からも分かるように、位相的には

$\phi = \phi_\eta - \phi_\xi = \frac{\pi}{2}$ となり, (2.1.1) は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\omega t - kz + \phi_\xi) \\ b \cos(\omega t - kz + \phi_\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\omega t - kz + \phi_\xi) \\ -b \sin(\omega t - kz + \phi_\xi) \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

新しい軸はx-y 軸を τ だけ回転して得られるので, x-y 座標における電界は (ξ, η) 座標では次のように変換できる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

式(2.1.1) (2.2.3) を式(2.2.4) に代入することによって

$$\begin{aligned} |E_x| \cos(\omega t - kz + \phi_x) \cos \tau + |E_y| \cos(\omega t - kz + \phi_y) \sin \tau &= a \cos(\omega t - kz + \phi_\xi) \\ |E_x| \cos(\omega t - kz + \phi_x) \sin \tau - |E_y| \cos(\omega t - kz + \phi_y) \cos \tau &= b \sin(\omega t - kz + \phi_\xi) \end{aligned}$$

\sin, \cos 関数を展開し, $\sin(\omega t - kz)$, $\cos(\omega t - kz)$ の係数を比較すれば

$$\begin{aligned} |E_x| \cos \phi_x \cos \tau + |E_y| \cos \phi_y \sin \tau &= a \cos \phi_\xi \\ |E_x| \sin \phi_x \cos \tau + |E_y| \sin \phi_y \sin \tau &= a \sin \phi_\xi \\ |E_x| \cos \phi_x \sin \tau - |E_y| \cos \phi_y \cos \tau &= b \sin \phi_\xi \\ |E_x| \sin \phi_x \sin \tau - |E_y| \sin \phi_y \cos \tau &= -b \cos \phi_\xi \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

簡単な演算の結果, 次の関係式が得られる。

$$\frac{b}{a} = \frac{|E_x| \cos \phi_x \sin \tau - |E_y| \cos \phi_y \cos \tau}{|E_x| \sin \phi_x \cos \tau + |E_y| \sin \phi_y \sin \tau} \quad (2.2.6a)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{-|E_x| \sin \phi_x \sin \tau + |E_y| \sin \phi_y \cos \tau}{|E_x| \cos \phi_x \cos \tau + |E_y| \cos \phi_y \sin \tau} \quad (2.2.6b)$$

$$a^2 + b^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 \quad (2.2.7)$$

$$\frac{1}{2} \left(|E_x|^2 - |E_y|^2 \right) \sin 2\tau = |E_x| |E_y| \cos 2\tau \cos(\phi_y - \phi_x) \quad (2.2.8)$$

$\phi = \phi_y - \phi_x$ とおくことで

$$\tan 2\tau = \frac{2 |E_x| |E_y| \cos \phi}{|E_x|^2 - |E_y|^2} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} ab \sin^2 \phi_\xi + ab \cos^2 \phi_\xi &= |E_x| |E_y| \sin \phi_y \cos \phi_x - |E_x| |E_y| \sin \phi_x \cos \phi_y \\ ab &= |E_x| |E_y| \sin(\phi_y - \phi_x) = |E_x| |E_y| \sin \phi \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

となる。ellipticity の定義と(2.2.6)を使って

$$\sin 2\varepsilon = \frac{2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon} = \frac{2 \tan \varepsilon}{1 + \tan^2 \varepsilon} = \frac{2(b/a)}{1 + (b/a)^2} = \frac{2 |E_x| |E_y| \sin \phi}{|E_x|^2 + |E_y|^2} \quad (2.2.11)$$

(2.2.9), (2.2.11) から $\varepsilon, \tau, |E_x|, |E_y|, \phi$ の関係がわかる。また, (2.2.4)から,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a \cos(\omega t - kz + \phi_\xi) \\ -b \sin(\omega t - kz + \phi_\xi) \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t - kz + \phi_\xi) \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t - kz + \phi_\xi) \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \cos(\omega t - kz + \phi_\xi) \\ -\sin \varepsilon \sin(\omega t - kz + \phi_\xi) \end{bmatrix} = \text{Re} \left(A \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \exp \left\{ j(\omega t - kz + \phi_\xi) \right\} \right) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

(2.2.5)より,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \end{bmatrix} = \text{Re} \left(A \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} \exp \left\{ j(\omega t - kz + \phi_\xi) \right\} \right) \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} &= \text{Re} \left(\begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} \exp \left\{ j(\omega t - kz + \phi_x) \right\} \right) \quad \text{だから, 偏波状態は次のように書ける。} \\ &\quad \begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix} e^{j\phi_\xi} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

これらのパラメータによる偏波状態は1.4節で述べる。もし, 振幅を $A=1$ と正規化すれば, 絶対位相を除き, (2.2.13)は単位ベクトル $\begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix}$ を $-\tau$ だけ回転 $\begin{bmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{bmatrix}$ させたものに等しいと理解できる。

2.3 Jones Vectorによる表現

2.1節では電界を実数の測定できる量 ε として記述した。ここでは, 複素電界ベクトル (フェイザー) を考える。周波数 ω の場では瞬時ベクトルは次の形をとる。

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t) \right\} \quad (2.3.1)$$

電界ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は空間座標の関数であり, フェイザーである。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.3.2)$$

E_0 は複素振幅を持つベクトルで次の形式でかける。

$$E_0 = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \\ |E_z| e^{j\phi_z} \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

正の z 軸方向に伝搬する平面波に対しては

$$E(z) = \begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} e^{-jkz} \quad (2.3.4)$$

また、 z が一定の面では z に関する項を取り除くことができる。従って、 $z=0$ を考えてみると

$$E(0) = \begin{bmatrix} |E_x| e^{j\phi_x} \\ |E_y| e^{j\phi_y} \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

このベクトルは "Jones vector" と呼ばれている。絶対位相は伝搬距離によって大きく変化するので、一般に計測は難しい。そこで、 x 成分を実数化するように、 x の絶対位相 ϕ_x を抜き出すと、相対位相 $\phi = \phi_y - \phi_x$ を使い、次の形になる。

$$E(0) = E_0 = \begin{bmatrix} |E_x| \\ |E_y| e^{j\phi} \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

2.4 偏波比 (Polarization ratio) ρ による表現

どのような平面波でもその電界は2つの直交成分に分解できる。その成分は直線、円、だ円偏波の直交成分などであり、伝搬方向に垂直である。それゆえ、我々は2つの直交成分を偏波の基底として選ぶことができる。任意の偏波基底、即ち、単位ベクトル \hat{A} , \hat{B} をもつ偏波基底(AB)に対して、偏波状態を定義することができる。

$$E(A, B) = E_A \hat{A} + E_B \hat{B} \quad (2.4.1)$$

ここで、 E_A と E_B は複素数で、偏波比はつぎのように定義される。

$$\rho_{AB} = \frac{E_B}{E_A} = \frac{|E_B|}{|E_A|} e^{j(\phi_B - \phi_A)} = |\rho_{AB}| e^{j\phi_{AB}} \quad (2.4.2)$$

ϕ_{AB} は E_A と E_B の位相差である。この複素数の偏波比 ρ_{AB} は偏波基底(AB)に依存するが、Jones vector で電界を表現すると

$$E(AB) = \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \end{bmatrix} = |E_A| e^{j\phi_A} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix}$$

$$= |E_A| e^{j\phi_A} \frac{\sqrt{1 + \frac{E_B E_B^*}{E_A E_A^*}}}{\sqrt{1 + \frac{E_B E_B^*}{E_A E_A^*}}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix} = |E| e^{j\phi_A} \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_{AB} \rho_{AB}^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

$$|E| = \sqrt{E_A E_A^* + E_B E_B^*}$$

もし、振幅を $|E| = 1$ と選び、絶対位相 ϕ_A を無視すれば、上の表現式は

$$E(AB) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_{AB} \rho_{AB}^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_{AB} \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

となる。偏波比をつかったこの表現方法も偏波状態の1つの表し方であり、以後の解析によく用いる。例えば、直線偏波基底(HV)で左回り円偏波を表現しようとする場合、IEEEの定義では、 $|E_H| = |E_V|$ 、 $\phi_{HV} = \phi_V - \phi_H = \frac{\pi}{2}$ 、 $\rho_{HV} = j$ となるので

$$E(HV) = \frac{1}{\sqrt{1 + j(-j)}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

同様に右回り円偏波では

$$E(HV) = \frac{1}{\sqrt{1 - j(j)}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

IEEEの定義は、(2.4.5)、(2.4.6)のJones Vector表現で、互いに複素共役の関係にあるが、後の基底変換では、物理的現象にあわない大きな問題が生じてくる。ポーラリメトリ-では偏波比は重要な役割を果たすが、物理的には同じ偏波状態を表わしていても、偏波基底のとり方が異なると違った値となる。

2.4.1 直線偏波基底(HV)における偏波比 ρ_{HV} について

直線基底(HV)では偏波状態は $E(HV) = E_H \widehat{H} + E_V \widehat{V}$ であるので偏波比 ρ_{HV} は

$$\rho_{HV} = \frac{E_V}{E_H} = \frac{|E_V|}{|E_H|} e^{j(\phi_V - \phi_H)} = \tan \gamma_{HV} e^{j\phi_{HV}} \quad (2.4.7)$$

ここで γ_{HV} は図2.4に定義される角度である。

$$|E_H| = \sqrt{E_H^2 + E_V^2} \cos \gamma_{HV} \quad , \quad |E_V| = \sqrt{E_H^2 + E_V^2} \sin \gamma_{HV} \quad (2.4.8)$$

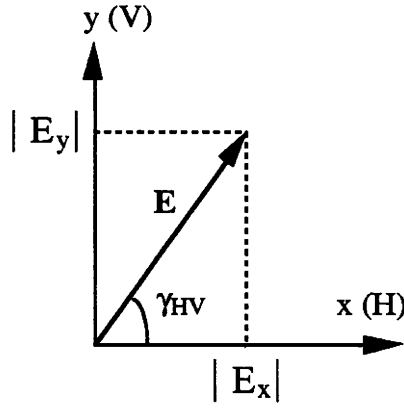


図2.4 電界成分と角度

これを(2.1.1)に代入して瞬時ベクトルは

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\epsilon}(z, t) &= \begin{bmatrix} \sqrt{E_H^2 + E_V^2} \cos \gamma_{HV} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ \sqrt{E_H^2 + E_V^2} \sin \gamma_{HV} \cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{E_H^2 + E_V^2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \cos \gamma_{HV} \\ \sin \gamma_{HV} e^{j\phi} \end{bmatrix} e^{j(\omega t - kz + \phi_x)} \right\} \\
 \phi &= \phi_y - \phi_x, \quad \alpha = \phi_x \quad x=H, y=V \text{ とすると一般形として} \\
 \boldsymbol{\epsilon}(z, t) &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma e^{j\phi} \end{bmatrix} e^{j(\omega t - kz + \alpha)} \right\} \tag{2.4.9}
 \end{aligned}$$

この[]で囲まれた項目はスピナーと呼ばれ、伝搬する波の時間、空間依存には無関係な量である。スピナーのパラメータ γ, ϕ はポアンカレー球上で偏波状態を指定するとき、使われる。図2.5はポアンカレー偏波球を示している。

球の表面上の点はある偏波状態を示しており、点Pは図に示されている角度 $2\gamma_{HV}$ と ϕ_{HV} あるいは幾何学的パラメータ $2\varepsilon, 2\tau$ によって指定できる。 $2\gamma_{HV} = 2\gamma$ は赤道上の点H (水平偏波を表す) から測った大圏行路距離HPを表し、 $0 \leq 2\gamma \leq \pi$ の範囲で球の裏側まで到達する。また、 $\phi_{HV} = \phi$ は点Hにおいて赤道とHPのなす角度($-\pi \leq \phi \leq \pi$)である。一方、幾何学的パラメータ (ε, τ) については 2τ が赤道面内でOH軸から測られる角度で、経度 ($-\pi \leq 2\tau \leq \pi$) に対応する。そして、 2ε は赤道面とOP軸のなす角度で、緯度 ($-\pi/2 \leq 2\varepsilon \leq \pi/2$) に対応している。

$$\begin{bmatrix} E_H \\ E_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{bmatrix}$$

ととることができる。偏波比はellipticity, tilt angleを使って

$$\rho = \frac{E_V}{E_H} = \frac{\sin \tau \cos \varepsilon + j \cos \tau \sin \varepsilon}{\cos \tau \cos \varepsilon - j \sin \tau \sin \varepsilon} = \frac{\tan \tau + j \tan \varepsilon}{1 - j \tan \tau \tan \varepsilon} \quad (2.4.15)$$

これから、実部、虚部を参照して

$$\begin{aligned} \rho_r + \rho_i \tan \varepsilon \tan \tau &= \tan \tau & \rho_i - \rho_r \tan \varepsilon \tan \tau &= \tan \varepsilon \\ \frac{\rho_i}{1 + |\rho|^2} &= \frac{\tan \varepsilon}{1 + \tan^2 \varepsilon} = \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon, & \frac{\rho_r}{1 - |\rho|^2} &= \frac{\tan \tau}{1 - \tan^2 \tau} = \frac{1}{2} \tan 2\tau \end{aligned}$$

$$\boxed{\tan 2\tau = \frac{2 \operatorname{Re}(\rho)}{1 - |\rho|^2}, \quad \tan 2\varepsilon = \frac{2 \operatorname{Im}(\rho)}{1 + |\rho|^2}} \quad (2.4.16)$$

2.4.2 円偏波基底(LR)における偏波比 ρ_{LR} について

円偏波基底で単位ベクトルは \hat{L} と \hat{R} で、 \hat{L} は左回り円偏波の単位ベクトル、 \hat{R} は右回り円偏波の単位ベクトルである。従って、円偏波基底を用いた平面波の偏波状態は

$$E(LR) = E_L \hat{L} + E_R \hat{R} \quad (2.4.15)$$

ここで E_L と E_R はLとRの成分である。振幅が1の左回り円偏波は円偏波基底で

$$E(LR) = 1 \hat{L} + 0 \hat{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.16)$$

と表わされ、同様に右回り円偏波は

$$E(LR) = 0 \hat{L} + 1 \hat{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.17)$$

となる。偏波基底が異なるため直線偏波基底の表現とは異なることに注意する必要がある。偏波比は定義により、

$$\rho_{LR} = \frac{E_R}{E_L} = \frac{|E_R|}{|E_L|} e^{j(\phi_R - \phi_L)} = |\rho_{LR}| e^{j\phi_{LR}} = \tan \gamma_{LR} e^{j\phi_{LR}} \quad (2.4.18)$$

これらのパラメータはポアンカレ球上で直線偏波の場合と同様に定義される。表1.1にくつかの偏波状態を示す。

2.4.3 直線偏波基底($45^\circ, 135^\circ$)での偏波比 $\rho_{45^\circ, 135^\circ}$

単位ベクトルが 45° と 135° にある直線偏波基底で偏波状態と偏波比は

$$\rho_{45^\circ 135^\circ} = \frac{E_{135^\circ}}{E_{45^\circ}} = \left| \frac{E_{135^\circ}}{E_{45^\circ}} \right| e^{j(\phi_{135^\circ} - \phi_{45^\circ})} = \left| \rho_{45^\circ 135^\circ} \right| e^{j\phi_{45^\circ 135^\circ}} = \tan \gamma_{45^\circ 135^\circ} e^{j\phi_{45^\circ 135^\circ}} \quad (2.4.19)$$

となる。

表1.1 正規化されたJones Vectorの幾何学的パラメータ (ϵ, τ) : (ellipticity, tilt angle) と polarization ratio ρ による偏波状態表現

Polarization	ϵ	τ	(HV) basis ρ_{HV} \mathbf{E}	45°135° basis $\rho_{45^\circ 135^\circ}$ \mathbf{E}	(LR) basis ρ_{LR} \mathbf{E}
Linear Horizontal	0	0	0 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	-1 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	1 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
Linear Vertical	0	$\frac{\pi}{2}$	∞ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	1 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	-1 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -j \\ j \end{bmatrix}$
45° Linear	0	$\frac{\pi}{4}$	1 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	j $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-j \\ 1+j \end{bmatrix}$
135° Linear	0	$-\frac{\pi}{4}$	-1 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	∞ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	-j $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1-j \\ -1+j \end{bmatrix}$
Left-Handed Circular	$\frac{\pi}{4}$		j $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$	j $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+j \\ -1+j \end{bmatrix}$	0 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Right-Handed Circular	$-\frac{\pi}{4}$		-j $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$	-j $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-j \\ -1-j \end{bmatrix}$	∞ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.5 ストークスパラメータ(ベクトル)による表現

前節では完全偏波について扱った。完全に偏波した波とは $|E_A|, |E_B|, \phi_{AB}$ が定数であるか、あるいは少なくとも時間に関して非常にゆっくり変動する波で、位相がそろっているコヒーレントな波とも等価である。しかし、位相がランダムに変わる波や部分的に偏波した波を扱うのには今までの手法で取り扱うことはできない。完全偏波も含め、これらのすべての波を取り扱うにはストークスパラメータを用いなければならない。ストークスパラメータは1852年に Sir George Stokes によって創られたものである。

2.5.1 完全偏波に対するストークスベクトル

もっとも単純なケースとして単一周波数の平面波は直線偏波(HV)基底においてストークスパラメータと次の関係で結ばれている。

$$\begin{aligned} g_0 &= |E_H|^2 + |E_V|^2 \\ g_1 &= |E_H|^2 - |E_V|^2 \\ g_2 &= 2 |E_H| |E_V| \cos \phi \\ g_3 &= 2 |E_H| |E_V| \sin \phi \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

$|E_H|$, $|E_V|$ と ϕ は E_H , E_V 成分の振幅, 相対位相である。完全偏波に対しては次の関係が成り立つ。

$$g_0^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \quad (2.5.2)$$

(2.5.1)からわかるように, g_0 は全電力, g_1 は水平偏波と垂直偏波の電力差, g_2 は45度か135度の傾き角での直線偏波電力, g_3 は円偏波成分電力を表わしている。もし,

g_1, g_2, g_3 のいずれかが0でなければ, 完全偏波した成分が存在することになる。ストークスパラメータは幾何学的パラメータとも関連しており, 次の関係が得られる。

$$g_0 = |E_H|^2 + |E_V|^2 = A^2 \quad (2.5.3)$$

$$\sin 2\varepsilon = \frac{g_3}{g_0}, \quad g_3 = g_0 \sin 2\varepsilon = A^2 \sin 2\varepsilon \quad (2.5.4)$$

$$\tan 2\tau = \frac{g_2}{g_1}, \quad g_2 = g_1 \tan 2\tau \quad (2.5.5)$$

(2.5.3)-(2.5.5)を(2.5.1) に代入して

$$g_1 = g_0 \cos 2\varepsilon \cos 2\tau = A^2 \cos 2\varepsilon \cos 2\tau \quad (2.5.6)$$

$$g_2 = g_0 \cos 2\varepsilon \sin 2\tau = A^2 \cos 2\varepsilon \sin 2\tau \quad (2.5.7)$$

それゆえ, ストークスパラメータはすべて A, ε, τ によって表わされるわけで, このパラメータを4行1列のコラム形式で書いたものをストークスベクトルと言う。このベクトルの成分 g_1, g_2, g_3 は図1.5に示したポアンカレー球の直角座標成分に対応している。

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_H|^2 + |E_V|^2 \\ |E_H|^2 - |E_V|^2 \\ 2 |E_H| |E_V| \cos \phi \\ 2 |E_H| |E_V| \sin \phi \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\tau \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\tau \cos 2\varepsilon \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.5.8)$$

2.5.2 部分偏波した波に対するストークスベクトル

部分偏波した波は完全偏波した(位相のそろった)波と位相のそろっていない波の和であり, Coherency Matrix $[J]$ によって定量的に定義される。このマトリックスは電界をそのエルミート共役で乗じたもので得られ, 次のように定義される。

$$[J] = \langle \mathbf{E} \mathbf{E}^+ \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_H E_H^* \rangle & \langle E_H E_V^* \rangle \\ \langle E_V E_H^* \rangle & \langle E_V E_V^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{HH} & J_{HV} \\ J_{VH} & J_{VV} \end{bmatrix} \quad (2.5.9)$$

ここで, $\langle \dots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (\dots) dt \right]$ で時間平均を表わし, ストークスベクトルを Coherency Matrix によって表わせば

$$\begin{aligned} g_0 &= |E_H|^2 + |E_V|^2 = \langle E_H E_H^* \rangle + \langle E_V E_V^* \rangle = J_{HH} + J_{VV} \\ g_1 &= |E_H|^2 - |E_V|^2 = \langle E_H E_H^* \rangle - \langle E_V E_V^* \rangle = J_{HH} - J_{VV} \\ g_2 &= 2 |E_H| |E_V| \cos \phi = \langle E_H E_V^* \rangle + \langle E_V E_H^* \rangle = J_{HV} + J_{VH} \\ g_3 &= 2 |E_H| |E_V| \sin \phi = -j \langle E_H E_V^* \rangle + j \langle E_V E_H^* \rangle = j(J_{HV} - J_{VH}) \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

部分偏波した波は完全偏波した波と偏波してない波の和であるので次のようにも書くことができる。

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} 1-p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + A^2 \begin{bmatrix} p \\ p \cos 2\varepsilon \cos 2\tau \\ p \cos 2\varepsilon \sin 2\tau \\ p \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.5.11)$$

p は偏波の度合いを示し, degree of polarization と呼ばれる。

$$p = \sqrt{1 - \frac{4 \det[J]}{(J_{HH} + J_{VV})^2}} = \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}}{g_0} \quad (2.5.12)$$

2.6 ポアンカレ球(Poincare Sphere)による表現

ポアンカレ球は偏波状態を視覚的に理解するのに都合がよい。すべての偏波状態と球の表面上の点に 1 対 1 の対応がある。

2.6.1 HV 基底における (ε, τ) と (γ_{HV}, ϕ_{HV}) を使ったポアンカレ球上の偏波状態

ポアンカレ球上の点 P はストークスベクトル成分 (g_1, g_2, g_3) を使って直角座標による表現ができる。また, この点は図1.5のように幾何学的なパラメータ (ε, τ) の緯度経度を使って表わすこともできる。即ち

$$\begin{aligned} \text{緯度} &= 2\varepsilon \\ \text{経度} &= 2\tau \end{aligned}$$

さらに (γ_{HV}, ϕ_{HV}) にても表現でき、式(2.5.3), (2.5.6)から

$$\frac{g_1}{g_0} = \cos 2\varepsilon \cos 2\tau = \cos 2\gamma_{HV} \quad (2.6.1)$$

$\cos 2\gamma_{HV}$ はストークスベクトル g がX軸となす角の方向余弦である。それゆえ、点Hから点Pまでのアーク距離(大圏行路距離)を $HP = g_0(2\gamma_{HV}) = 2\gamma_{HV}$ のように表わせる。角度 ϕ_{HV} は赤道と最大円のなす角度であり、XOY面とXOP面のなす角度に等しい。点PをXOZ面に投影すれば、XOZ面上の投影点P'から作られる角度 $\angle YOP' = \phi_{HV}$ となる。YOZ面で次の式が成り立つことがわかる。

$$\tan \phi_{HV} = \tan \angle YOP' = \frac{g_3}{g_2} \quad (2.6.2)$$

従って、ポアンカレー球上の点Pは同じ場所でも偏波状態の表現方法により、

$$\begin{aligned} &(2\gamma, \phi) \\ &(2\tau, 2\varepsilon) \\ &(g_1, g_2, g_3) \end{aligned}$$

によって表されることが分かる。図2.6にポアンカレー球といくつかの偏波状態を示す。重要な点として、ポアンカレー球上にある点を選ぶと球の真裏の点は直交した偏波状態になっていることである。

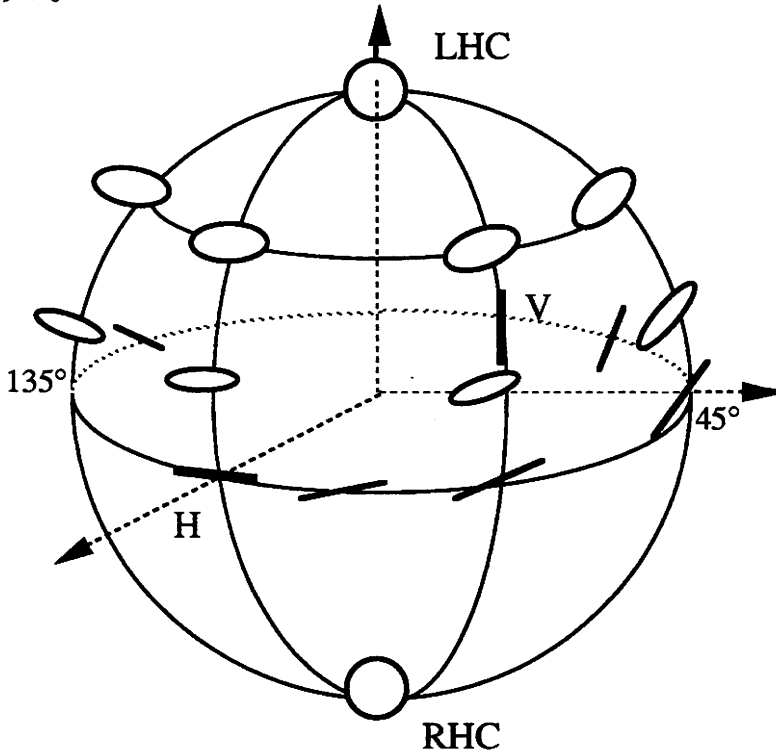


図2.6 ポアンカレー球といくつかの偏波状態(上半球は左回り, 下半球は右回り)

2.6.2 異なる偏波基底におけるポアンカレー球上の偏波比

ある一つの偏波状態はいろいろな偏波基底で表わすことができる。どのような偏波基底も2つの基底ベクトルからなり、その基底ベクトルは互いにポアンカレー球上でantipodal(球の真裏)点に位置する。偏波状態Pを3つの偏波基底(HV), $(45^\circ, 135^\circ)$, (LR)で表現すれば、

複素偏波比は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\rho_{HV} &= |\rho_{HV}| e^{j\phi_{HV}} = \tan \gamma_{HV} e^{j\phi_{HV}} & 0 \leq \gamma_{HV} \leq \frac{\pi}{2} \\ \rho_{45^\circ 135^\circ} &= |\rho_{45^\circ 135^\circ}| e^{j\phi_{45^\circ 135^\circ}} = \tan \gamma_{45^\circ 135^\circ} e^{j\phi_{45^\circ 135^\circ}} & 0 \leq \gamma_{45^\circ 135^\circ} \leq \frac{\pi}{2} \\ \rho_{LR} &= |\rho_{LR}| e^{j\phi_{LR}} = \tan \gamma_{LR} e^{j\phi_{LR}} & 0 \leq \gamma_{LR} \leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}\quad (2.6.3)$$

2.6.3 ストークスペクトルと偏波比の関係

まず、HV基底で定義された偏波比 ρ_{HV} を考えよう。 $\cos 2\gamma_{HV}$ はストークスペクトル g がX軸となす角の方向余絃であるので

$$\frac{g_1}{g_0} = \cos 2\gamma_{HV} = \frac{1 - \tan^2 \gamma_{HV}}{1 + \tan^2 \gamma_{HV}} = \frac{1 - |\rho_{HV}|^2}{1 + |\rho_{HV}|^2} \quad \therefore |\rho_{HV}| = \sqrt{\frac{g_0 - g_1}{g_0 + g_1}} \quad (2.6.4)$$

1.6.1節より

$$\phi_{HV} = \angle YOP' = \tan^{-1} \left(\frac{g_3}{g_2} \right), \quad \rho_{HV} = |\rho_{HV}| e^{j\phi_{HV}} = \sqrt{\frac{g_0 - g_1}{g_0 + g_1}} e^{j \tan^{-1} \left(\frac{g_3}{g_2} \right)} \quad (2.6.5)$$

完全偏波した波に対してはストークスペクトルは次のようになる。

$$g_1 = \frac{1 - |\rho_{HV}|^2}{1 + |\rho_{HV}|^2} = \cos 2\gamma_{HV} \quad (2.6.6)$$

$$g_2 = \frac{2 |\rho_{HV}| \cos \phi_{HV}}{1 + |\rho_{HV}|^2} = \frac{2 \tan \gamma_{HV} \cos \phi_{HV}}{1 + \tan^2 \gamma_{HV}} = \sin 2\gamma_{HV} \cos \phi_{HV} \quad (2.6.7)$$

$$g_3 = \frac{2 |\rho_{HV}| \sin \phi_{HV}}{1 + |\rho_{HV}|^2} = \sin 2\gamma_{HV} \sin \phi_{HV} \quad (2.6.8)$$

次に $45^\circ 135^\circ$ 基底では方向余絃 $\cos 2\phi_{45^\circ 135^\circ}$ は g とY軸のなす角度なので

$$g_0 = 1, \quad |\rho_{45^\circ 135^\circ}| = \sqrt{\frac{g_0 - g_2}{g_0 + g_2}}, \quad \phi_{45^\circ 135^\circ} = \tan^{-1} \left(-\frac{g_3}{g_1} \right) \quad (2.6.9)$$

$$\rho_{45^\circ 135^\circ} = \sqrt{\frac{g_0 - g_2}{g_0 + g_2}} e^{j \tan^{-1} \left(-\frac{g_3}{g_1} \right)} \quad (2.6.10)$$

$$g_1 = \frac{2 |\rho_{45^\circ 135^\circ}| \cos \phi_{45^\circ 135^\circ}}{1 + |\rho_{45^\circ 135^\circ}|^2} = -\sin 2\gamma_{45^\circ 135^\circ} \cos \phi_{45^\circ 135^\circ} \quad (2.6.11)$$

$$g_2 = \frac{1 - |\rho_{45^\circ 135^\circ}|^2}{1 + |\rho_{45^\circ 135^\circ}|^2} = \cos 2\gamma_{45^\circ 135^\circ} \quad (2.6.12)$$

$$g_3 = \frac{2 |\rho_{45^\circ 135^\circ}| \sin \phi_{45^\circ 135^\circ}}{1 + |\rho_{45^\circ 135^\circ}|^2} = \sin 2\gamma_{45^\circ 135^\circ} \sin \phi_{45^\circ 135^\circ} \quad (2.6.13)$$

一方, LR基底では方向余弦 $\cos 2\phi_{LR}$ は g と Z 軸のなす角度なので

$$\rho_{LR} = \sqrt{\frac{g_0 - g_3}{g_0 + g_3}} e^{j \tan^{-1}\left(-\frac{g_2}{g_1}\right)} \quad g_1 = \frac{2 |\rho_{LR}| \cos \phi_{LR}}{1 + |\rho_{LR}|^2} = \sin 2\gamma_{LR} \cos \phi_{LR}$$

$$g_2 = \frac{2 |\rho_{LR}| \sin \phi_{LR}}{1 + |\rho_{LR}|^2} = \sin 2\gamma_{LR} \sin \phi_{LR} \quad g_3 = \frac{1 - |\rho_{LR}|^2}{1 + |\rho_{LR}|^2} = \cos 2\gamma_{LR} \quad (2.6.14)$$

2.7 パラメータの相互変換

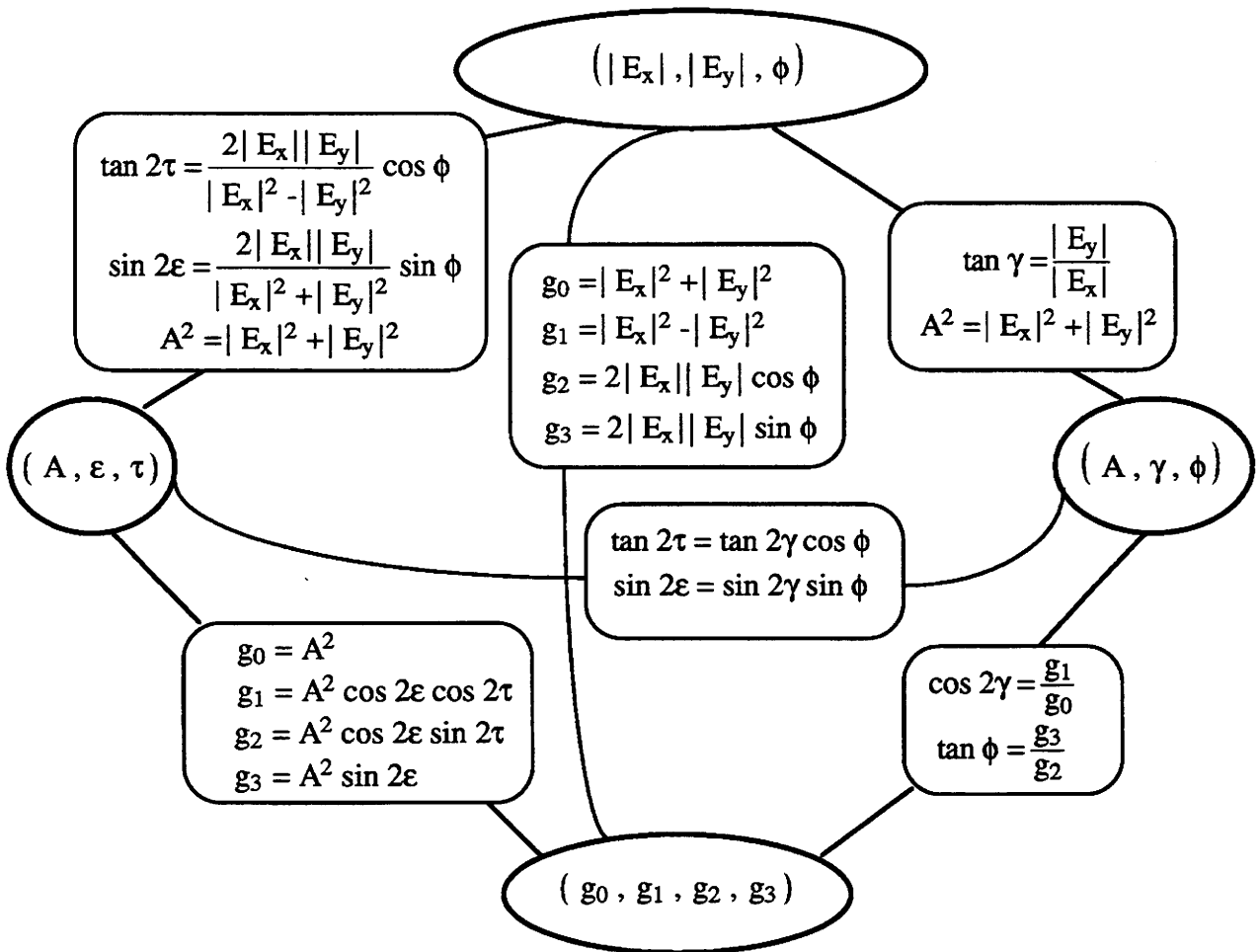


図2.7 だ円偏波を表すパラメータの相互関係

今まで、電界の振幅、位相から出発し、各種パラメータによってだ円偏波を表現してきた。表現方法に変化はあるが、本質的に同じものを指している。偏波状態を視覚的に捕えるにはポアンカレ球が最も優れている。これらのパラメータの相互関係を図2.7に示す。

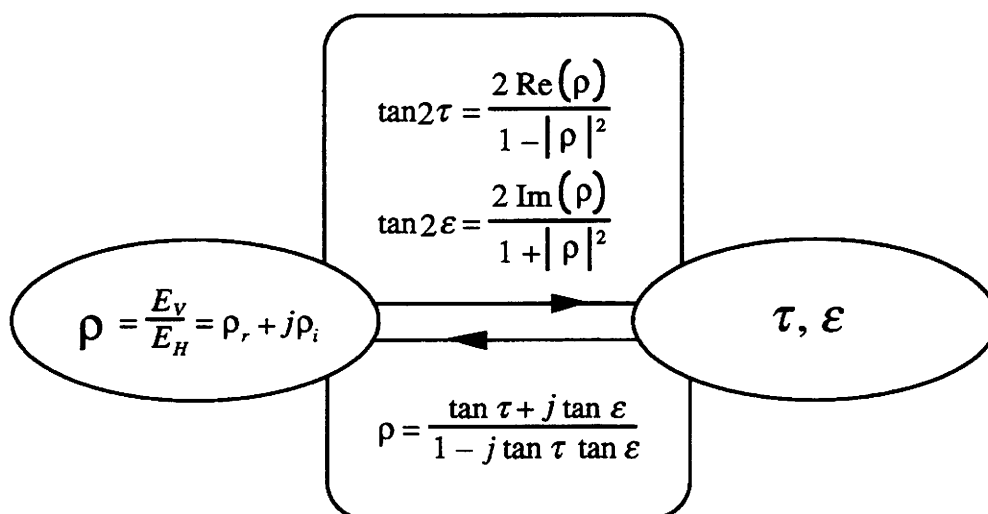


図2.8 偏波比とTilt and Ellipticity angle

ここでは偏波とだ円の表し方、およびパラメータの相互関係について示した。他にも表現方法があるかも知れないが、現在のところ図2.7の表現方法が一般的に用いられている。図2.8は、ここで最もよく使う偏波比とTilt and Ellipticity angleの関係である。これらの表現方法は偏波情報解析において重要な役割を果たしている。偏波情報の解析には散乱行列を使うもの、Mueller行列を使うものなど様々である。それぞれの方法において最も都合の良いものを選べばよい。

3 章 アンテナの偏波と受信電圧・電力について

この章ではレーダによる受信電力の表現について厳密に定式化する。はじめに基本的な事柄である相反定理から出発し、偏波の概念を取り入れた受信アンテナに誘導される電圧、電力の表現式を導く。また、散乱行列、レーダポーラリメトリの基本式、偏波によって如何に受信電力が変化するかを具体的な例で示す。

3.1 相反定理

図3.1に示すように線形で均質媒質中に置かれた電流源と磁流源 (J_1, M_1) 、 (J_2, M_2) の2組のソースを考えてみよう。これらのソースは各々Maxwell方程式を満たす。

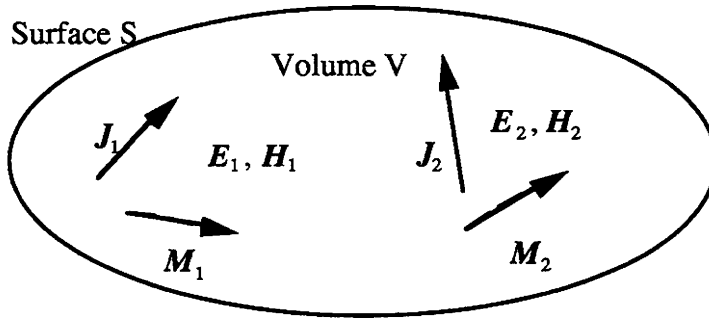


図3.1 ソースと場

$$\nabla \times H_1 = J_1 + j\omega\epsilon E_1 \quad \nabla \times E_1 = -M_1 - j\omega\mu H_1 \quad (3.1.1)$$

$$\nabla \times H_2 = J_2 + j\omega\epsilon E_2 \quad \nabla \times E_2 = -M_2 - j\omega\mu H_2 \quad (3.1.2)$$

ここで、 E_1, H_1 はソース J_1, M_1 によって、 E_2, H_2 はソース J_2, M_2 によって作られることを示している。ベクトル公式

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot \nabla \times A - A \cdot \nabla \times B$$

を使うと(3.1.1), (3.1.2)から

$$-\nabla \cdot (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) = E_1 \cdot J_2 - E_2 \cdot J_1 + H_2 \cdot M_1 - H_1 \cdot M_2 \quad (3.1.3)$$

この式を積分形で表せば

$$-\iint (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) \cdot n \, dS = \iiint (E_1 \cdot J_2 - E_2 \cdot J_1 + H_2 \cdot M_1 - H_1 \cdot M_2) \, dv \quad (3.1.4)$$

となり、この式はLorentz の相反定理と呼ばれている。

もし、考えている領域内にソースが無ければ

$$\iint (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) \cdot n \, dS = 0 \quad (3.1.5)$$

一方、面 S を無限遠に拡張すれば式(1.4)の左辺は消滅し

$$\iiint \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \right) dv = 0 \quad (3.1.6)$$

その結果,

$$\iiint \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \right) dv = \iiint \left(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1 \right) dv \quad (3.1.7)$$

が導かれる。この形式(3.1.7)が最も良く用いられ、ソースとソースによる場の結合を表している。この結合関係のことをReactionと呼び、左辺右辺をそれぞれ

$$\langle 1, 2 \rangle = \iiint \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \right) dv \quad (3.1.8a)$$

$$\langle 2, 1 \rangle = \iiint \left(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_1 \right) dv \quad (3.1.8b)$$

と記す。相反定理はこの表記を使うと

$$\langle 1, 2 \rangle = \langle 2, 1 \rangle \quad (3.1.9)$$

つまり、ソース2による場1へのReactionとソース1による場2へのReactionは等しいことを意味している。この相反定理を使って2つのアンテナ間の電流電圧を考えてみよう。簡単のため、磁流源が無い($\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = 0$)とする。考察の対象は図3.2のような無限に広い空間におかれた2つの電流源 $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ とそれによる場 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ に対応している。

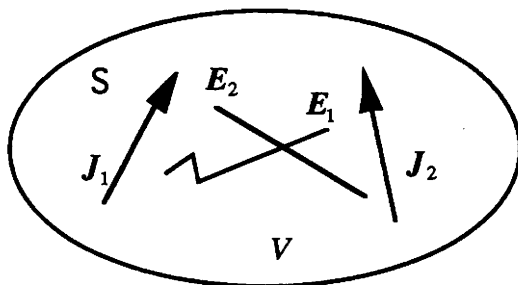


図3.2 2つの電流源と場

$$\langle 1, 2 \rangle = \iiint \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 dv = \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{I}_2 d\mathbf{L} = I_2 \int \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{L} = -I_2 V_1 \quad (3.1.10)$$

V_1 は \mathbf{J}_1 によって作られた電界 \mathbf{E}_1 を積分して得られた量で、 \mathbf{J}_2 の場所すなわちソース2に生ずる開放電圧である。一方,

$$\langle 2, 1 \rangle = \iiint \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 dv = \int \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{I}_1 d\mathbf{L} = I_1 \int \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{L} = -I_1 V_2 \quad (3.1.11)$$

V_2 は \mathbf{J}_2 によってソース1にできる電圧である。

もし、 $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ とすれば、 $V_1 = V_2$ となり、誘起される電圧は等しいことになる。これより、電流源をアンテナに置き換えて、 \mathbf{J}_1 をアンテナ1、 \mathbf{J}_2 をアンテナ2とする。同じ大きさの電流を交互に流したとすれば

アンテナ2	→ \mathbf{E}_2	→	アンテナ1に生ずる開放電圧
アンテナ1	→ \mathbf{E}_1	→	アンテナ2に生ずる開放電圧

が等しくなる。物理的には2つのアンテナを対向させたとき、一方のアンテナを送信、他方を受信とした場合と、その逆とした場合とも、同じ大きさの電流を送信アンテナに流せば受信アンテナに生ずる電圧は同じことを意味する。

3.2 受信電圧

この関係を図3.3に示す一般のアンテナ1と微小ダイポールアンテナ2に適応してみよう。図3.3では同じ座標系を使っていることに注意。まず、一般のアンテナに1A の電流を流せば、その電流によって場が励振され、微小ダイポール2の場所での電界は

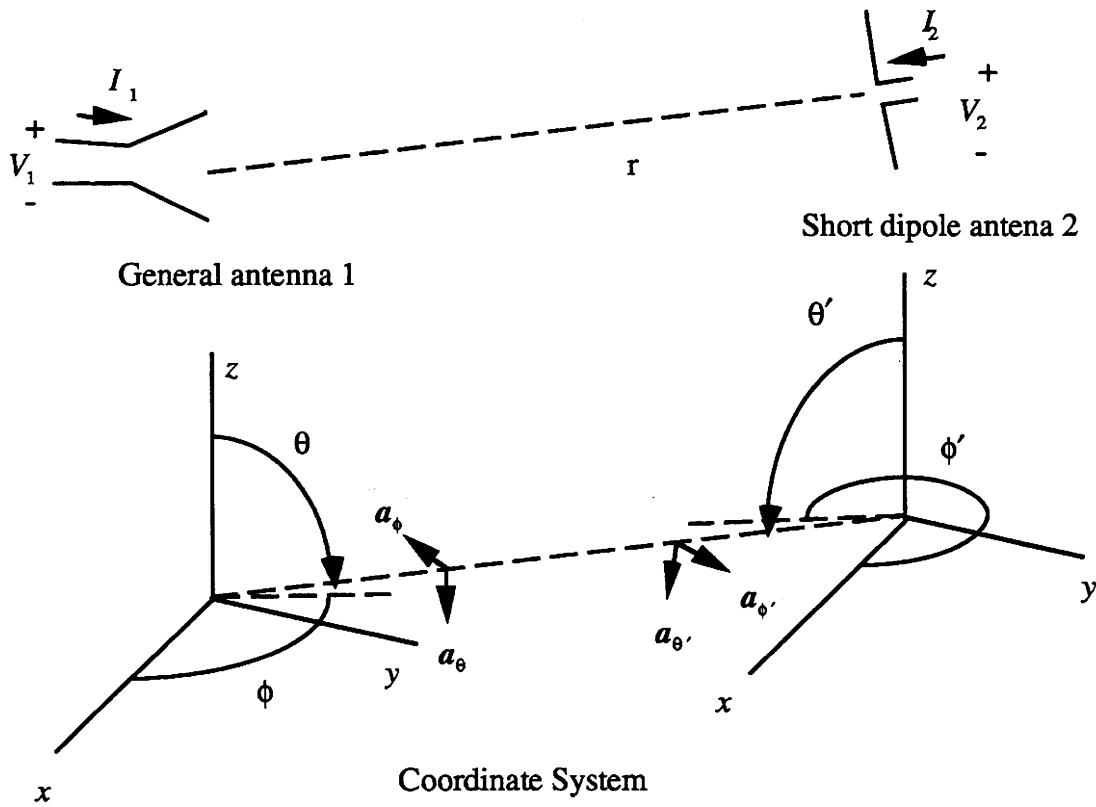


図3.3 一般のアンテナ1と微小ダイポールアンテナ2

$$\mathbf{E}_i = \frac{j Z_0 I}{2 \lambda r} e^{-j k r} \mathbf{h} = \frac{j Z_0}{2 \lambda r} e^{-j k r} \mathbf{h} \quad (3.2.1)$$

となる。ここで \mathbf{h} は一般的なアンテナ1の実効長(effective length)であり、微小ダイポールでは

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\theta, \phi) = a_\theta h_\theta = a_\theta L \sin \theta \quad (3.2.2)$$

によって与えられる。もし、 \mathbf{E}_i を楕円偏波にするようなアンテナであれば実効長 \mathbf{h} は複素量のベクトルとなる。

さて、微小ダイポール2の端子に生ずる開放電圧は

$$V_2 = \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{L} \quad (3.2.3)$$

L は微小ダイポールのベクトル的な長さである。 E_i は r 方向の成分を持っていないので、

$$\begin{aligned} V_2 &= E_\theta^i L_\theta + E_\phi^i L_\phi \\ L_\theta &= a_\theta \cdot L, \quad L_\phi = a_\phi \cdot L \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

それゆえ、微小ダイポール2の端子に生ずる開放電圧は次の形に書くことができる。

$$V_2 = \frac{j Z_0}{2 \lambda r} e^{-j k r} \mathbf{h} \cdot \mathbf{L} \quad (3.2.5)$$

次に、逆に微小ダイポール2に1Aの電流を流して一般のアンテナ1で受信することを考えてみよう。ダイポールによるアンテナ1の位置での場は

$$E_{\theta'}^i = \frac{j Z_0}{2 \lambda r} e^{-j k r} L_{\theta'}, \quad E_{\phi'}^i = \frac{j Z_0}{2 \lambda r} e^{-j k r} L_{\phi'} \quad (3.2.6)$$

座標系は同じであるが、 $a_\theta = a_{\theta'}$ 、 $a_\phi = -a_{\phi'}$ であるので

$$E_{\theta'}^i = E_\theta^i, \quad E_{\phi'}^i = -E_\phi^i, \quad L_{\theta'} = L_\theta, \quad L_{\phi'} = -L_\phi \quad (3.2.7)$$

それゆえ、アンテナ1に入射する電界は

$$\begin{aligned} E_{\theta'}^i &= \frac{j Z_0}{2 \lambda r} e^{-j k r} L_\theta, \quad -E_{\phi'}^i = \frac{j Z_0}{2 \lambda r} e^{-j k r} (-L_\phi) \\ \therefore \quad E^i &= \frac{j Z_0}{2 \lambda r} e^{-j k r} \mathbf{L} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

アンテナ1の開放電圧 V_1 は、相反定理から V_2 に等しい。それゆえ、

$$V_1 = V_2 = \frac{j Z_0}{2 \lambda r} e^{-j k r} \mathbf{L} \cdot \mathbf{h} \quad (3.2.9)$$

この内積のはじめの項は入射電界であり、それを E^i 、アンテナ1の実効長を \mathbf{h} としてアンテナ1の開放電圧は一般的に

$$V_1 = E^i \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot E^i \quad (3.2.10)$$

と書けることになる。すなわち、アンテナが送信として働くときの実効長 \mathbf{h} と入射電界 E^i にのみよって決まる複素スカラー量である。一般に、放射・受信電界は複素量のフェイザー表現で与えられ、 \mathbf{h} も E^i も複素ベクトルである。もし、 \mathbf{h} も E^i も互いに直交したベクトルであれば、開放電圧は0となる。 \mathbf{h} は偏波を扱う上で重要な概念で、どの方向にどれだけの電界成分を生ずるかを示しており、結果的にそのアンテナから生ずる偏波の状態を表していると考えてよい。注意すべき点として \mathbf{h} も E^i も同じ座標系で定義されていること、および誘導される開放電圧は内積の形式をしているが、電圧の物理的な定義からも分かるように複素共役の内積ではないことである。そのため、次の形式に書き改めた方が混乱は少ないように思われる。

$$V = \mathbf{h}^T \mathbf{E}^i = h_\theta E_\theta + h_\phi E_\phi \quad (3.2.11)$$

Tは転置を意味し、 $\mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} h_\theta & h_\phi \end{bmatrix}$ など2つの直交する成分からなっている。

受信アンテナに生ずる電圧が分かれば、その受信アンテナに付けられた整合負荷に供給される電力Pは電気回路理論からも分かるように

$$P = \frac{1}{8 R_a} V V^* = \frac{1}{8 R_a} |V|^2 \quad (3.2.12)$$

で与えられる。ただし、 R_a は受信アンテナ回路の整合インピーダンスである。

3.3 レーダポーラリメトリの基本式

レーダ(Radio Detection and Ranging)では送信アンテナから電波をターゲットに送り、ターゲットからの散乱波を受信アンテナで受信し、ターゲットの情報を取得する。その様子は図3.4のように示すことができる。一般に、ターゲットからの散乱パワーはレーダがどのような偏波状態で送信するかによって変わる。そして、送信の偏波と散乱波の偏波状態は異なり、また散乱波であっても散乱する方向によって偏波状態は一般に異なる。レーダターゲットはその意味で偏波の変換物体とも考えられる。散乱に関して偏波特性を扱う場合、座標系が重要な意味を持つてくる。その理由は、偏波の定義が電波の伝搬方向を後ろから見たときに空間の1点で電界の先端が描く軌跡のことを指しているの、偏波比、ストークスパラメータ等、全てこの定義に従っているためである。図3.4はレーダターゲットに対して3つの右手直角座標系を示したものである。z軸は電波の進行方向に一致するように選んである。これらの座標系と伝搬方向に対して、送信電界は送信アンテナから距離 r_1 の位置で

$$\mathbf{E}^i = \left(E_{x1}^i \mathbf{a}_{x1} + E_{y1}^i e^{j\theta_1} \mathbf{a}_{y1} \right) \exp \left\{ j \left(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 + \theta_1 \right) \right\} \text{ at } (x_1, y_1, z_1) \text{ coordinate} \quad (3.3.1)$$

θ_1 は絶対位相、また、この電界はターゲット座標系 (x_2, y_2, z_2) が (x_1, y_1, z_1) と対向していれば

$$\mathbf{E}^i = \left(E_{x2}^i \mathbf{a}_{x2} + E_{y2}^i e^{j\theta_2} \mathbf{a}_{y2} \right) \exp \left\{ j \left(\omega t + k r_1 + \theta_2 \right) \right\} \text{ at } (x_2, y_2, z_2) \text{ coordinate} \quad (3.3.2)$$

となり、互いに同じものを表している。なお、 \mathbf{a}_{x1} 、 \mathbf{a}_{y1} などは単位ベクトル、添え字iはターゲットに対するincidenceを表す。また、ターゲットに入射後散乱して距離 r_2 を伝搬し、受信アンテナに届くときは

$$\mathbf{E}^s = \left(E_{x2}^s \mathbf{a}_{x2} + E_{y2}^s e^{j\theta_2} \mathbf{a}_{y2} \right) \exp \left\{ j \left(\omega t - k r_2 + \theta_2 \right) \right\} \text{ at } (x_2, y_2, z_2) \text{ coordinate} \quad (3.3.3)$$

また、受信アンテナの実効長 \mathbf{h} は受信座標を使い

$$\mathbf{h} = \left(h_{x3} \mathbf{a}_{x3} + h_{y3} e^{j\theta_3} \mathbf{a}_{y3} \right) \exp \left\{ j \left(\omega t - k r + \theta_3 \right) \right\} \text{ at } (x_3, y_3, z_3) \text{ coordinate} \quad (3.3.4)$$

とすることが出来る。ここで、 ϕ は相対位相、 θ は絶対位相である。これらの式で (\bullet) の中は2次元の複素数ベクトルで座標系を含んだ偏波状態を表している。これを次の形式で書く。

$$\mathbf{E}^i = \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{bmatrix} \quad \text{at } (x_1, y_1) \text{ plane} \quad (3.3.5)$$

この表現には伝搬方向は含まれていないが、 $\exp\{\bullet\}$ の項から復元できる。 \mathbf{E}^t 、 \mathbf{E}^i 、 \mathbf{h} はそれぞれ、 $+z_1$ 、 $-z_1$ 、 r 方向に伝搬する波で、偏波状態が、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

で与えられれば、 \mathbf{h} に対しては左回り、 \mathbf{E}^i に対しては右回りの円偏波となる。

さて、ターゲットに入射する電界成分と散乱する電界成分は次のような一般的な行列形式で書くことができる。

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

この式はターゲット上で成立するもので、この表現では座標系を指定していない。散乱する方向が変われば行列の要素が変化し、座標系の変化によっても変化する。

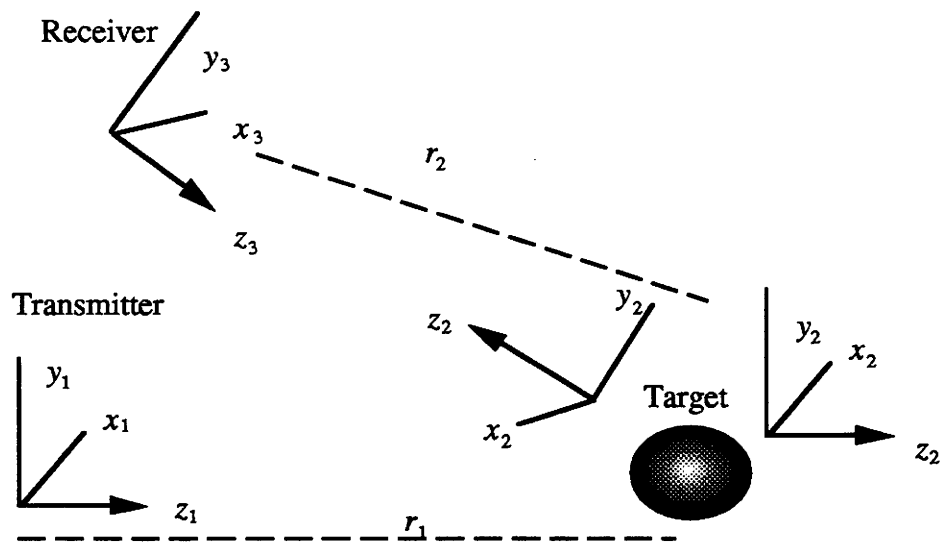


図3.4 レーダとターゲットの座標系

図3.4のように送信と受信の位置が異なる場合をレーダではbistatic、送信と受信が一致した場合をmonostaticと言う。従って、散乱波の偏波状態を定義するには座標系として x_2, y_2, z_2 が最も自然であるが、レーダの方からすると x_1, y_1, z_1 あるいは x_3, y_3, z_3 の座標系の方が好ましい。レーダの一般的な構成はmonostaticであるので $(x_1, y_1, z_1) = (x_3, y_3, z_3)$ 座標系が都合がよい。座標の原点をどこにとるかによって定式化が異なってくる。光学の分野では前方散乱で定式化がよく行なわれ、Mueller行列はその1つである。レーダ座標系を使って定式化が行なわれているものにSinclair scattering matrixがある。散乱波は座標系 x_3, y_3, z_3 で見たとき、

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4\pi} r_2} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} e^{-jk r_2} \quad (3.3.7)$$

によって定義できる。つまり、ある座標系を定めて、ベクトル成分を観測したとき、ベクトルとしてこの式の左辺のように表すことができる。右辺には送信ベクトルの座標系、そして散乱過程が含まれている。この式の行列部分をSinclair scattering matrixと呼ぶ。一般的には散乱行列あるいはS行列とも呼ばれる。

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

この行列要素は複素数で、互いに独立な量である。しかし、後方散乱(x_1, y_1, z_1) = (x_3, y_3, z_3)の場合には $S_{yx} = S_{xy}$ となる。以下に、これを示そう。 $r_1 = r_2 = r$ となるので、送信から距離 r にあるターゲットの入射する電界は

$$\begin{bmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{bmatrix} = \frac{j Z_0 I}{2 \lambda r} \begin{bmatrix} h_x^i \\ h_y^i \end{bmatrix} e^{-jk r} \quad (3.3.9)$$

送信と同じ位置にある受信アンテナに到達する電界は

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = \frac{j Z_0 I}{\sqrt{4\pi} 2 \lambda r^2} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x^i \\ h_y^i \end{bmatrix} e^{-j2kr} \quad (3.3.10)$$

受信アンテナの開放電圧は

$$V = \mathbf{h}_r^T \mathbf{E}^s = \frac{j Z_0 I}{\sqrt{4\pi} 2 \lambda r^2} \begin{bmatrix} h_x^r & h_y^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x^i \\ h_y^i \end{bmatrix} e^{-j2kr} \quad (3.3.11)$$

今、送信アンテナと受信アンテナを逆にしたら、受信電圧は

$$V = \mathbf{h}_i^T \mathbf{E}^s = \frac{j Z_0 I}{\sqrt{4\pi} 2 \lambda r^2} \begin{bmatrix} h_x^i & h_y^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x^r \\ h_y^r \end{bmatrix} e^{-j2kr} \quad (3.3.12)$$

この2つの電圧は相反定理により、等しくならなければならない。そのためには

$$S_{yx} = S_{xy} \quad (3.3.13)$$

が成り立つことが必要である。ただし、伝搬媒質がFaraday回転をもつような非等方性媒質ではこの条件は成り立たない。

3.4 受信電力の表現

さて、アンテナとターゲット間の距離は十分長く、散乱波も受信アンテナに入射する時は平面波になっていると仮定する。電界や電力について後方散乱の場合を考え、送受信アンテナが同一地点にあるとする。偏波状態に着目して考察する場合、今までの式の定数項は省いてもよい。そこで、座標系 x_1, y_1, z_1 を用いてレーダの受信電力を考える。レーダ送信の偏波状態を E^t 、ターゲットから受信アンテナに届く散乱波を E^s とすると、ベクトルの大きさを1に正規化したJones Vector 表現(3.5)を使って、

$$E^s = [S] E^t \quad (3.4.1)$$

受信アンテナの開放電圧は

$$V = h^T E^s = h_x E_x^s + h_y E_y^s \quad (3.4.2)$$

によって与えられる。 h は受信アンテナが送信アンテナとして動作したときの実効長である。 h も E^s も共にレーダ座標系 x_1, y_1, z_1 で表現されている。受信アンテナに付加された整合負荷に生ずる受信電力 P は

$$P = \frac{VV^*}{8R_a} = \frac{|V|^2}{8R_a} = \frac{1}{8R_a} |h_x E_x^s + h_y E_y^s|^2$$

であるが、比例定数分は偏波特性には影響しないので

$$P = VV^* = |V|^2 = |h^T E^s|^2 = |h^T [S] E^t|^2 \quad (3.4.3)$$

としてもかまわない。以上の結果をまとめると、式(3.4.1)-(3.4.3)がレーダポーラリメトリの基本式となる。

さて、レーダによる受信電力の偏波特性について考察する。アンテナとターゲット間の距離は十分長く、散乱波も受信アンテナに入射する時は平面波になっていると仮定する。受信電力は散乱波 E^s と h のベクトル成分によって変化する。具体的には散乱波 E^s は送信の偏波状態によって変化し、受信の h によって電力が変わる。これらを偏波比やストークスベクトルによって表してみよう。

3.4.1 偏波比による受信電力の表現

送信電界を正規化したJones Vector 表現を使って書くと

$$E^t = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \frac{|E^t| e^{j\phi}}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \quad (3.4.1.1)$$

したがって、

$$\mathbf{E}^s = \begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = [\mathbf{S}] \mathbf{E}^t = \frac{[\mathbf{S}]}{\sqrt{1 + \rho \rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \quad (3.4.1.2)$$

ここで注意すべき点は、ターゲットからの散乱電界を図3.5のようにレーダ側から見ていることである。

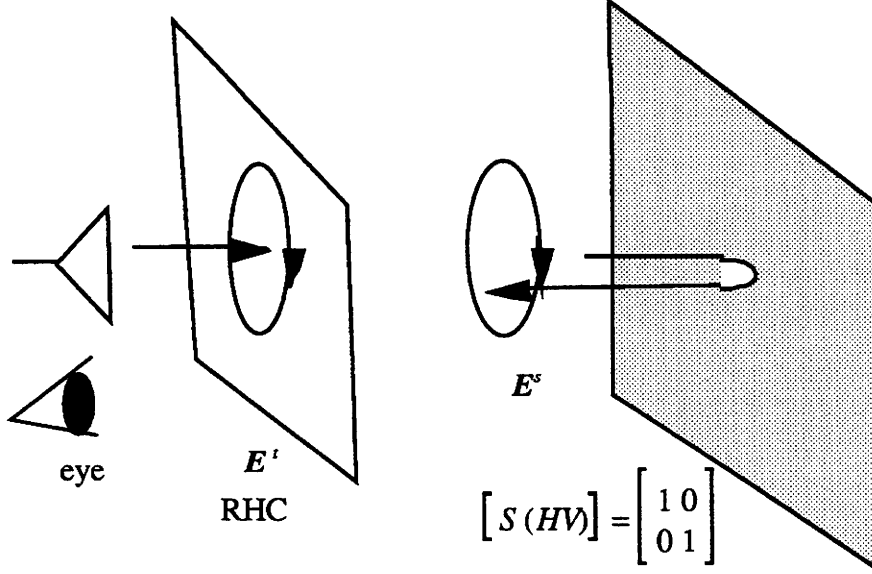


図3.5 送信と受信の偏波

もし、無限平板に向かって右回りの円偏波で送信したとすれば、散乱波が左回りの円偏波で帰ってくる。そして我々は左回りの偏波アンテナで受信すれば受信でき、右回りのアンテナでは受信できないことを知っている。これを Joens Vector で表すと

$$\mathbf{E}^t = \frac{1}{\sqrt{1 + (-j)(-j)^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad \text{RHC} \quad (3.4.1.3)$$

$$\mathbf{E}^s = [\mathbf{S}] \mathbf{E}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad \text{RHC} \quad (3.4.1.4)$$

レーダ側から見ると散乱波の回転方向は送信波と同じ右回りである。回転方向は同じであるが、伝搬方向は逆なので偏波の定義からは左回りといえる。受信アンテナの実効長=受信アンテナを送信アンテナとして動作させたときの偏波状態を

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \quad (3.4.1.5)$$

と取り、左回りのアンテナで受信した場合、

$$V = \mathbf{h}^T \mathbf{E}_s = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & +j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} 2 = 1 \quad \text{Max.} \quad (3.4.1.6)$$

右回りのアンテナで受信した場合、

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} 0 = 0 \quad \text{Min.} \quad (3.4.1.7)$$

となり、実験的事実と一致する。すなわち、 $\mathbf{h} = \mathbf{E}^{s*}$ とすることによって最大受信電力が

得られる。

直線の水平偏波で送受信した場合も同様に

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} 2 = 1 \text{ Max.} \quad (3.4.1.8)$$

送信が水平，受信が垂直では

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 0, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} 0 = 0 \text{ Min.} \quad (3.4.1.9)$$

となり，実験的事実と一致する。したがって， $V = \mathbf{h}^T \mathbf{E}_s$ の定式化は正しい。

くどのようなが，レーダポーラリメトリーでは散乱波 \mathbf{E}^s ， \mathbf{h} 共にレーダ座標から眺めたときのベクトルとして見ている。 \mathbf{h} は受信アンテナが送信として働くときの偏波を表すので，偏波の定義上問題はないが， \mathbf{E}^s はレーダに向かってくるベクトルをレーダ側から見ているので偏波の定義の方向と一致していない。しかし，座標系の原点はレーダに取るほうが都合がよいのでその意味で散乱波は単にベクトルとして考えるべきである。これを正しく理解していないと定式化に大きな誤りを生じ，混乱の因になる。

さて，レーダでは送信，受信の偏波をコントロールできる。そのため，3つの偏波チャンネルを考えることができる。

- 1) 送信と受信が同じ偏波チャンネル(Co-Polarization Channel) $\mathbf{h} = \mathbf{E}^t$
 - 2) 送信と受信が直交する偏波チャンネル(Cross-Polarization Channel) $\mathbf{h} = \mathbf{E}_\perp^t$
 - 3) 受信が散乱波を最大に受信するチャンネル(Matched-Polarization Channel) $\mathbf{h} = \mathbf{E}^{s*}$
- これらのチャンネルに対して受信電力は偏波比を使うと

$$P^c = \left| \mathbf{E}^{tT} [\mathbf{S}] \mathbf{E}^t \right|^2 = \left| \frac{\begin{bmatrix} 1, \rho \end{bmatrix} [\mathbf{S}] \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}}{1 + \rho \rho^*} \right|^2 \quad (3.4.1.10)$$

$$P^x = \left| \mathbf{E}_\perp^{tT} [\mathbf{S}] \mathbf{E}^t \right|^2 = \left| \frac{\begin{bmatrix} \rho^*, -1 \end{bmatrix} [\mathbf{S}] \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}}{1 + \rho \rho^*} \right|^2 \quad (3.4.1.11)$$

$$P^m = \left| \left([\mathbf{S}] \mathbf{E}^t \right)^{*T} [\mathbf{S}] \mathbf{E}^t \right|^2 = \left| \frac{\begin{bmatrix} 1, \rho^* \end{bmatrix} [\mathbf{S}]^{*T} [\mathbf{S}] \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}}{1 + \rho \rho^*} \right|^2 \quad (3.4.1.12)$$

と表現できる。

3.4.1.2 ストークスベクトルによる電力表現

正規化したJones Vector 表現を使って(3.4.1)式を書き換えると

$$\begin{bmatrix} E_x^s \\ E_y^s \end{bmatrix} = [\mathbf{S}] \begin{bmatrix} E_x^t \\ E_y^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^t \\ E_y^t \end{bmatrix} \quad (3.4.2.1)$$

これを展開して、つぎの式を作ることができる。

$$\begin{bmatrix} E_x^s E_x^{s*} \\ E_y^s E_y^{s*} \\ E_x^s E_y^{s*} \\ E_y^s E_x^{s*} \end{bmatrix} = [W] \begin{bmatrix} E_x^t E_x^{t*} \\ E_y^t E_y^{t*} \\ E_x^t E_y^{t*} \\ E_y^t E_x^{t*} \end{bmatrix} \quad (3.4.2.2)$$

ここで、

$$[W] = \begin{bmatrix} S_{xx} S_{xx}^* & S_{xy} S_{xy}^* & S_{xx} S_{xy}^* & S_{xy} S_{xx}^* \\ S_{yx} S_{yx}^* & S_{yy} S_{yy}^* & S_{yx} S_{yy}^* & S_{yy} S_{yx}^* \\ S_{xx} S_{yx}^* & S_{xy} S_{yy}^* & S_{xx} S_{yy}^* & S_{xy} S_{yx}^* \\ S_{yx} S_{xx}^* & S_{yy} S_{xy}^* & S_{yx} S_{xy}^* & S_{yy} S_{xx}^* \end{bmatrix} \quad (3.4.2.3)$$

さて、完全に偏波した波に対して送信，散乱，受信を表すcoherencyベクトルをつぎのように定義する。添え字tは送信，sは散乱，recは受信に対応している。このベクトルは光学の分野でよく用いられており，前方散乱を仮定している。

$$J_t = \begin{bmatrix} E_x^t E_x^{t*} \\ E_y^t E_y^{t*} \\ E_x^t E_y^{t*} \\ E_y^t E_x^{t*} \end{bmatrix}, \quad J_s = \begin{bmatrix} E_x^s E_x^{s*} \\ E_y^s E_y^{s*} \\ E_x^s E_y^{s*} \\ E_y^s E_x^{s*} \end{bmatrix}, \quad J_{rec} = \begin{bmatrix} h_x h_x^* \\ h_y h_y^* \\ h_x h_y^* \\ h_y h_x^* \end{bmatrix} \quad (3.4.2.4)$$

すると，散乱行列を使った偏波の散乱方程式は

$$J_s = [W] J_t \quad (3.4.2.5)$$

と等価になる。受信アンテナでのパワーPは

$$P = |h^T E^s|^2 = |h_x E_x^s + h_y E_y^s|^2 = J_{rec}^T J_s = J_{rec}^T [W] J_t \quad (3.4.2.6)$$

Tは転置を表す。ストークスベクトルもcoherencyベクトルを使って

$$g = \begin{bmatrix} E_x E_x^* + E_y E_y^* \\ E_x E_x^* - E_y E_y^* \\ E_x E_y^* + E_y E_x^* \\ j(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x E_x^* \\ E_y E_y^* \\ E_x E_y^* \\ E_y E_x^* \end{bmatrix} = [R] J \quad (3.4.2.7)$$

と表現できる。ただし[R]は

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & j & -j \end{bmatrix}, \quad [R]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ 0 & 0 & 1 & j \end{bmatrix} \quad (3.4.2.8)$$

従って,

$$\begin{aligned} g_t &= [R] J_t, & g_s &= [R] J_s, & g_{rec} &= [R] J_{rec}, \\ J_t &= [R]^{-1} g_t, & J_s &= [R]^{-1} g_s, & J_{rec} &= [R]^{-1} g_{rec} \end{aligned} \quad (3.4.2.9)$$

Mueller 行列はターゲット上に座標の原点をもつストークスベクトルの前方散乱を表す関係で用いられており,

$$g_s = [M] g_t \quad (3.4.2.10)$$

つぎの関係を使うと

$$J_s = [W] J_t, \quad [R]^{-1} g_s = [W] [R]^{-1} g_t, \quad g_s = [R] [W] [R]^{-1} g_t \quad (3.4.2.11)$$

Mueller 行列 $[M]$ は散乱行列の要素をもつ $[W]$ で表現できることになる。

$$[M] = [R] [W] [R]^{-1} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4.2.12)$$

ここで,

$$m_{00} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 + |S_{xy}|^2 + |S_{yx}|^2 + |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.4.2.13a)$$

$$m_{01} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 - |S_{xy}|^2 + |S_{yx}|^2 - |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.4.2.13b)$$

$$m_{02} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) + \operatorname{Re} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* + S_{yx} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.13c)$$

$$m_{03} = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) + \operatorname{Im} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* + S_{yx} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.13d)$$

$$m_{10} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 + |S_{xy}|^2 - |S_{yx}|^2 - |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.4.2.13e)$$

$$m_{11} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 - |S_{xy}|^2 - |S_{yx}|^2 + |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.4.2.13f)$$

$$m_{12} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) - \operatorname{Re} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* - S_{yx} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.13g)$$

$$m_{13} = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) - \operatorname{Im} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* - S_{yx} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.13h)$$

$$m_{20} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yx}^* \right) + \operatorname{Re} \left(S_{xy} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yx}^* + S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.13i)$$

$$m_{21} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yx}^* \right) - \operatorname{Re} \left(S_{xy} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yx}^* - S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.13j)$$

$$m_{22} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) + \operatorname{Re} \left(S_{xy} S_{yx}^* \right) = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* + S_{xy} S_{yx}^* \right) \quad (3.4.2.13k)$$

$$m_{23} = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) + \operatorname{Im} \left(S_{yx} S_{xy}^* \right) = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* + S_{yx} S_{xy}^* \right) \quad (3.4.2.13l)$$

$$m_{30} = -\operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yx}^* \right) - \operatorname{Im} \left(S_{xy} S_{yy}^* \right) = -\operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yx}^* + S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.13m)$$

$$m_{31} = -\operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yx}^* \right) + \operatorname{Im} \left(S_{xy} S_{yy}^* \right) = -\operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yx}^* - S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.13n)$$

$$m_{32} = -\operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) + \operatorname{Im} \left(S_{xy} S_{yx}^* \right) = -\operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* - S_{xy} S_{yx}^* \right) \quad (3.4.2.13o)$$

$$m_{33} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) - \operatorname{Re} \left(S_{xy} S_{yx}^* \right) = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* - S_{xy} S_{yx}^* \right) \quad (3.4.2.13p)$$

それゆえ、ストークスベクトルとMueller行列を使った受信パワー表現はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{J}_{rec}^T \mathbf{J}_s = \mathbf{J}_{rec}^T [\mathbf{W}] \mathbf{J}_t = \left([\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_{rec} \right)^T [\mathbf{W}] [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_t = \mathbf{g}_{rec}^T \left([\mathbf{R}]^{-1} \right)^T [\mathbf{W}] [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_t \\ &= \mathbf{g}_{rec}^T \left([\mathbf{R}]^{-1} \right)^T \left([\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{R}] \right) [\mathbf{W}] [\mathbf{R}]^{-1} \mathbf{g}_t = \mathbf{g}_{rec}^T \left([\mathbf{R}]^{-1} \right)^T \left([\mathbf{R}]^{-1} \right) [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_{rec}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \frac{1}{2} \mathbf{g}_{rec}^T [\mathbf{K}] \mathbf{g}_t \end{aligned} \quad (3.4.2.14)$$

後方散乱の場合、Mueller行列のみでは正しいパワーが与えられない。Mueller行列は座標の原点をターゲットに置く前方散乱について定義されているものであって、レーダに原点を置く後方散乱のものではない。後方散乱の行列はKennuagh行列と呼ばれ、

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \quad (3.4.2.15)$$

と定義されている。monostatic radar では $S_{yx} = S_{xy}$ であるので、Mueller行列の要素では

$$\begin{aligned} m_{01} &= m_{10}, \quad m_{02} = m_{20}, \quad m_{03} = -m_{30}, \\ m_{12} &= m_{21}, \quad m_{13} = -m_{31}, \quad m_{23} = -m_{32} \end{aligned} \quad (3.4.2.16)$$

が成り立つ。その結果、

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{01} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ -m_{30} & -m_{31} & -m_{32} & -m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{01} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{03} & m_{13} & m_{23} & -m_{33} \end{bmatrix}$$

(3.4.2.17)

となって、成分が実数であるから、実の対称行列となる。この場合の成分は

$$m_{00} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 + 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.4.2.18a)$$

$$m_{01} = m_{10} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 - |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.4.2.18b)$$

$$m_{02} = m_{20} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) + \operatorname{Re} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* + S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.18c)$$

$$m_{03} = -m_{30} = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) + \operatorname{Im} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* + S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.18d)$$

$$m_{11} = \frac{1}{2} \left(|S_{xx}|^2 - 2|S_{xy}|^2 + |S_{yy}|^2 \right) \quad (3.4.2.18e)$$

$$m_{12} = m_{21} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) - \operatorname{Re} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{xy}^* - S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.18f)$$

$$m_{13} = -m_{31} = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* \right) - \operatorname{Im} \left(S_{yx} S_{yy}^* \right) = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{xy}^* - S_{xy} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.18g)$$

$$m_{22} = \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) + |S_{xy}|^2 \quad (3.4.2.18h)$$

$$m_{23} = -m_{32} = \operatorname{Im} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.18i)$$

$$-m_{33} = |S_{xy}|^2 - \operatorname{Re} \left(S_{xx} S_{yy}^* \right) \quad (3.4.2.18j)$$

となる。monostaticな場合には、これら10個の要素のうち

$$m_{00} = m_{11} + m_{22} - m_{33} \quad (3.4.2.19)$$

が成り立つので、9個が独立である。

さて、3つの偏波チャンネルにおいて、ストークスペクトルとKennaugh行列による受信電力を考える。2と同様に

- 1) 送信と受信が同じ偏波チャンネル(Co-Polarization Channel) $\mathbf{h} = \mathbf{E}^t$
- 2) 送信と受信が直交する偏波チャンネル(Cross-Polarization Channel) $\mathbf{h} = \mathbf{E}_\perp^t$
- 3) 受信が散乱波を最大に受信するチャンネル(Matched-Polarization Channel) $\mathbf{h} = \mathbf{E}^{s*}$

Co-Pol.チャンネルに対して送信ストークスペクトルと受信ストークスペクトルが等しいので

$$\text{受信電力は } P^c = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T [\mathbf{K}]_c \mathbf{g}_t \quad (3.4.2.20)$$

ただし,

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [M] \quad (3.4.2.21)$$

Cross(X)-Polarization Channel では送信ストークスベクトルと受信ストークスベクトルが直交している。ポアンカレ球上で見ると分かるように送信ストークスベクトルに対して受信ストークスベクトルは球の真後ろに位置する。そのため,

$$\mathbf{g}_t = (1, x_1, x_2, x_3)^T \quad (3.4.2.22)$$

とすると

$$\mathbf{g}_{\text{rec}} = (1, -x_1, -x_2, -x_3)^T \quad (3.4.2.23)$$

となる。行列で書けば

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} P^x &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [M] \mathbf{g}_t = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [M] \mathbf{g}_t \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T [K]_x \mathbf{g}_t \end{aligned} \quad (3.4.2.24)$$

ただし,

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [M] \quad (3.4.2.25)$$

Matched Channel では散乱波のもつエネルギーを全て受信する。そのため、ストークスベクトルの定義から,

$$\mathbf{g}^s = \begin{bmatrix} g_0^s \\ g_1^s \\ g_2^s \\ g_3^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_x^s|^2 + |E_y^s|^2 \\ |E_x^s|^2 - |E_y^s|^2 \\ 2|E_x^s||E_y^s|\cos\phi \\ 2|E_x^s||E_y^s|\sin\phi \end{bmatrix} \quad (3.4.2.26)$$

の第1成分 g_0^s を受け取ることになる。これは送信ストークスベクトルと **Mueller** 行列の成分で書くと

$$P^m = |V|^2 = |E_s|^2 = g_0^s = m_{00} \times 1 + m_{01} x_1 + m_{02} x_2 + m_{03} x_3 \quad (3.4.2.27)$$

したがって、形式的にはつぎのように行列表現できる。

$$P^m = \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \mathbf{g}_t^T [\mathbf{K}]_m \mathbf{g}_t \quad (3.4.2.28)$$

$$[\mathbf{K}]_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \quad (3.4.2.29)$$

なお,

$$[\mathbf{K}]_m = \frac{1}{2} [\mathbf{K}]_c + \frac{1}{2} [\mathbf{K}]_x \quad (3.4.2.30)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \quad (3.4.2.31)$$

$$\text{が成り立つので} \quad P^m = P^c + P^x \quad (3.4.2.32)$$

この式からMatched Channelの電力はCo-Pol.とCross(X)-Polチャンネルの電力和で表現できることが分かる。

3.5 受信電力の例

送信・受信偏波の組み合わせは無限とおりある。偏波状態の1つ1つがポアンカレ球上の1点に対応するので、その1点を指定し、偏波を表現する場合、ストークスパラメータでも偏波比でも幾何学的パラメータでもよい。ここでは幾何学的パラメータのTilt angle τ , Ellipticity angle ε を用いて受信電力を表現することにする。ストークスベクトルは3次元の成分であるので3次元空間に電力の大きさを表現することが難しいためである。

完全に偏波した波に対して散乱行列[S]が与えられれば、Mueller行列[M]やKennaugh [K]行列がただちに導ける。そこで具体的な[S]を与えて偏波状態(ε, τ)によってどのように変わるかを示す。

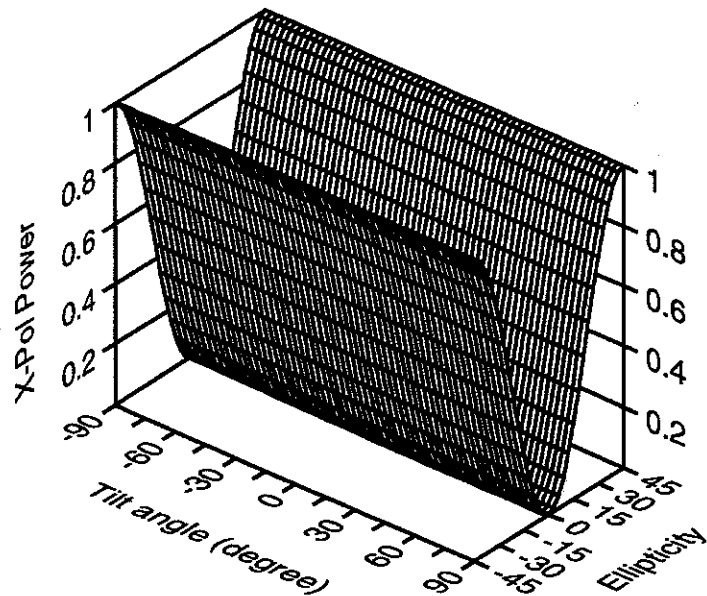
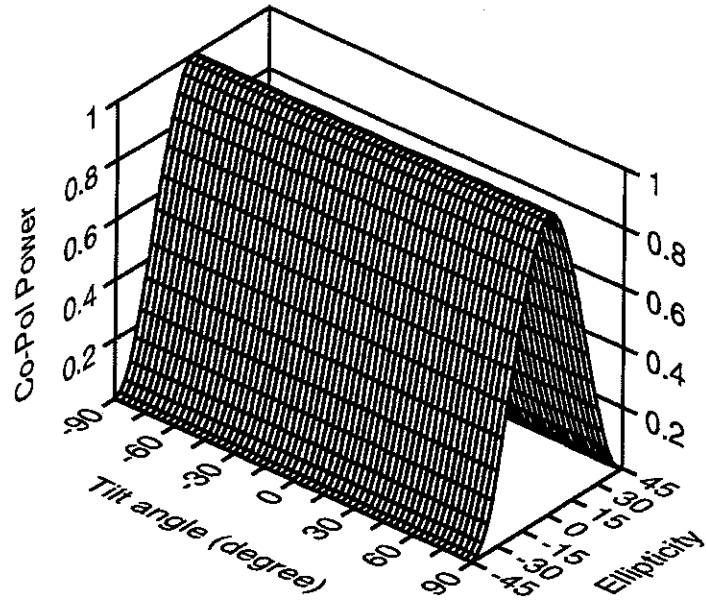
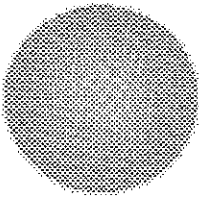
Sphere or flat plate

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



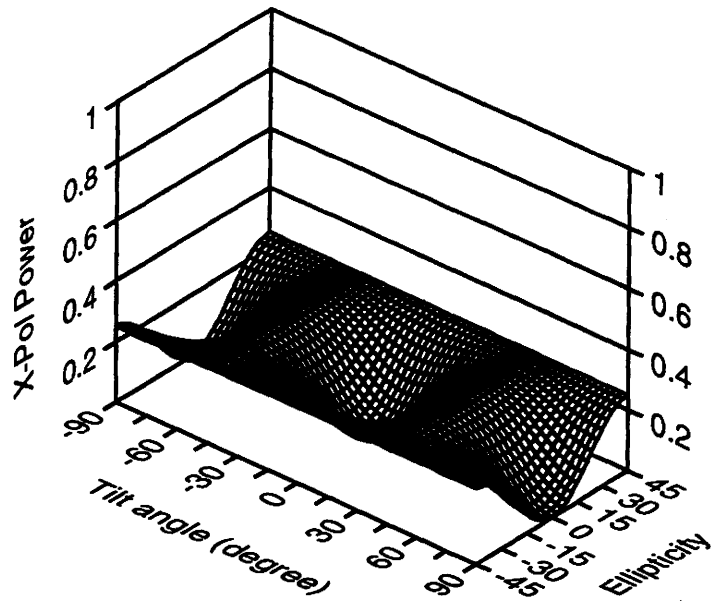
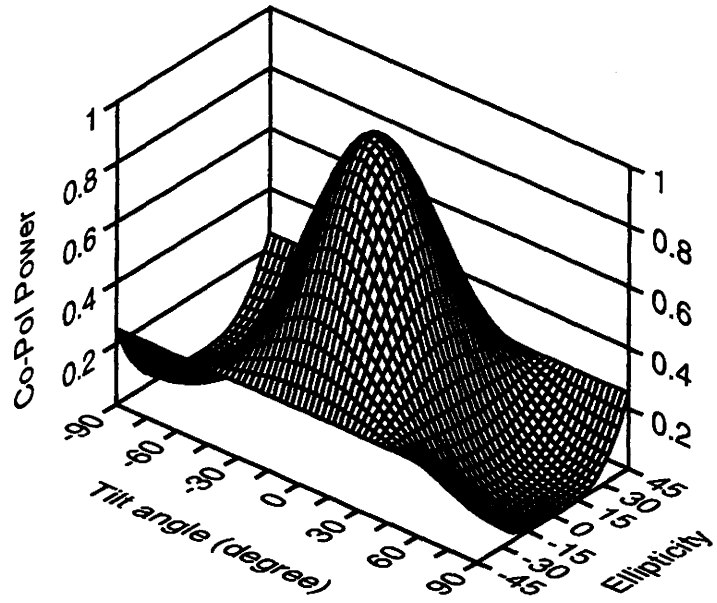
Horizontal Dipole

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



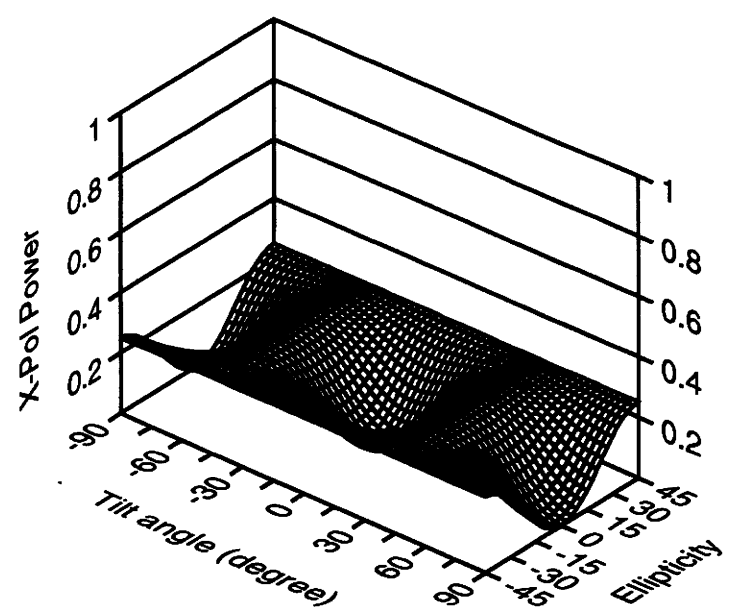
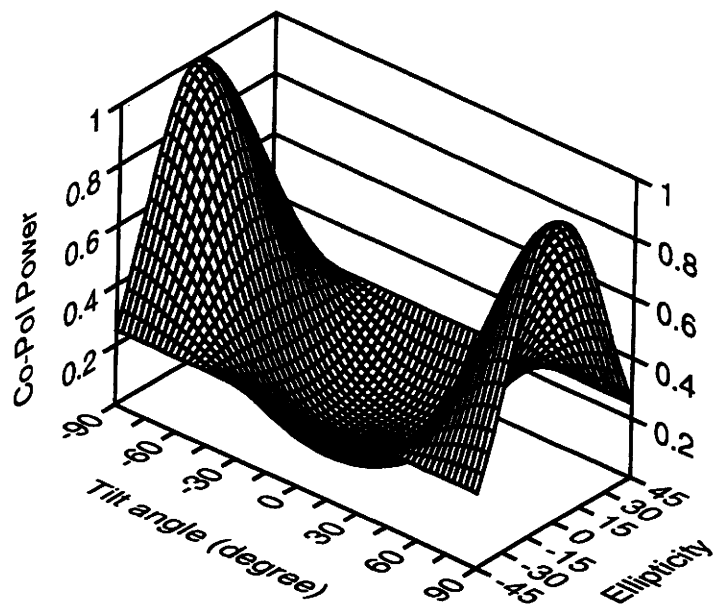
Vertical Dipole

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



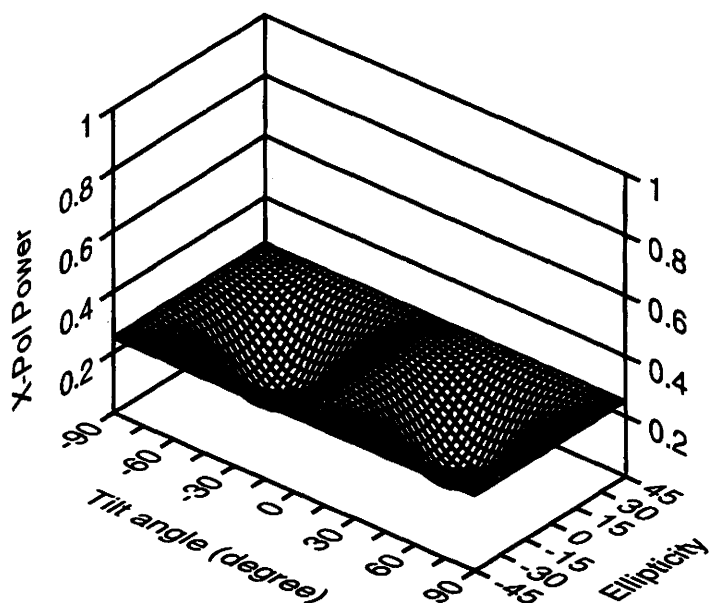
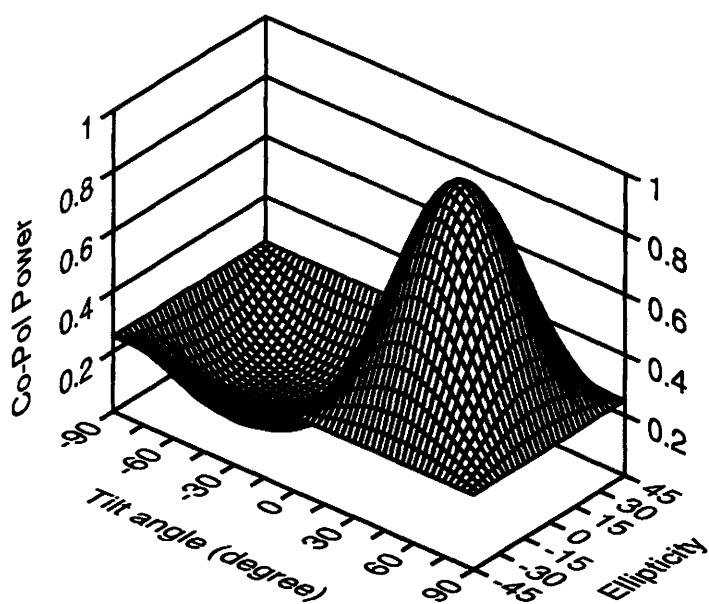
45 degree oriented dipole

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



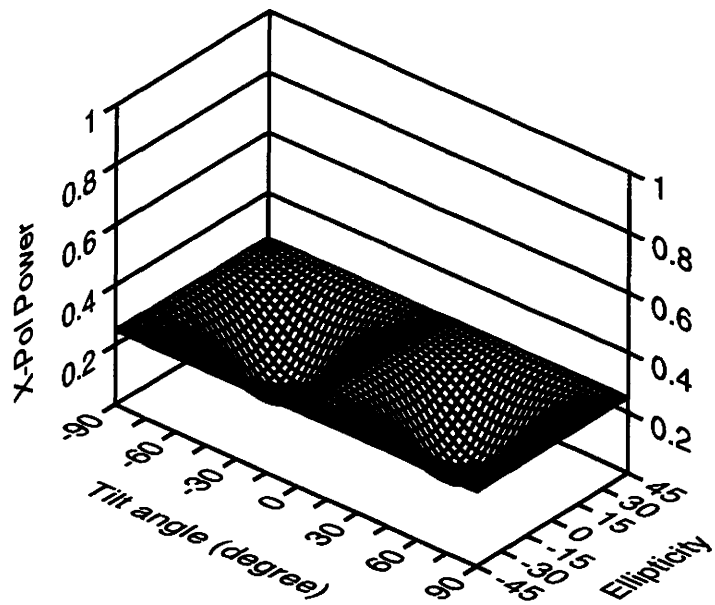
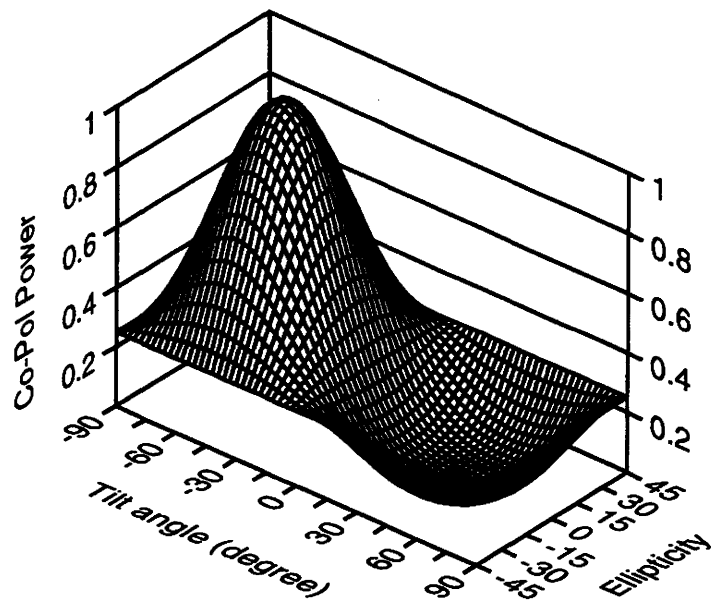
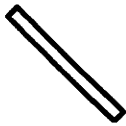
135(-45) degree oriented dipole

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



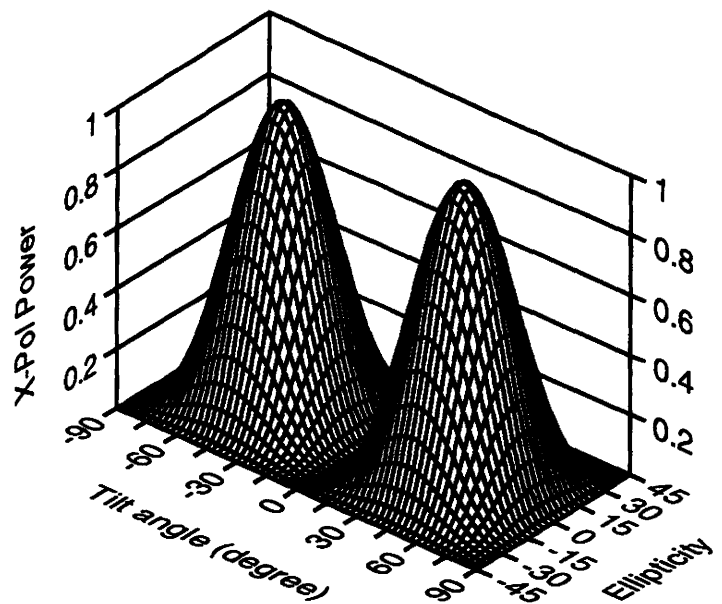
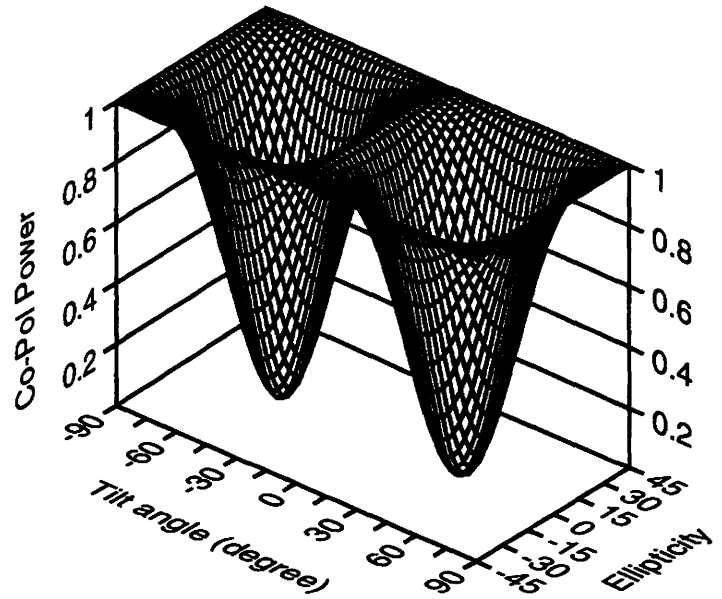
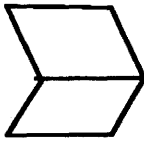
Corner reflector

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



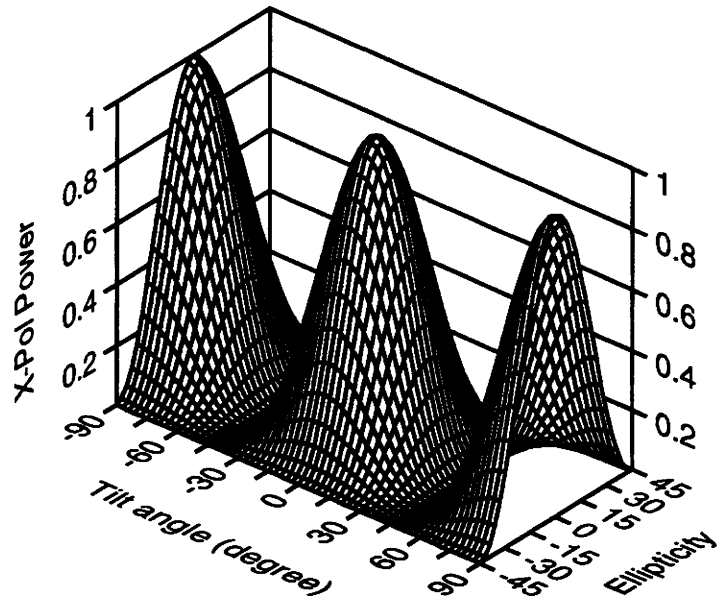
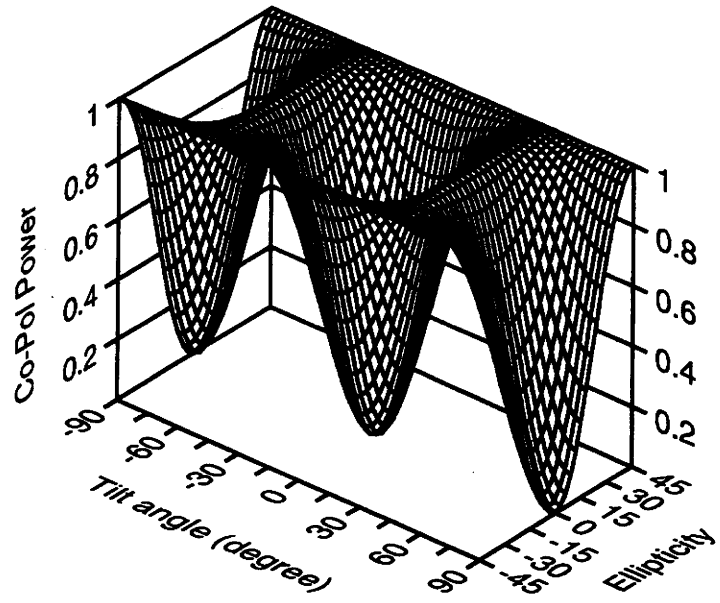
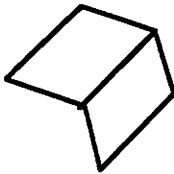
45 degree oriented corner reflector

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



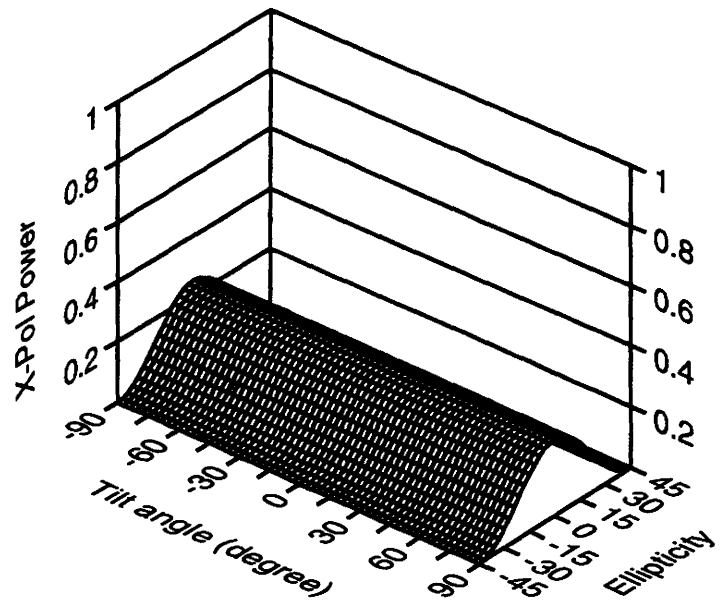
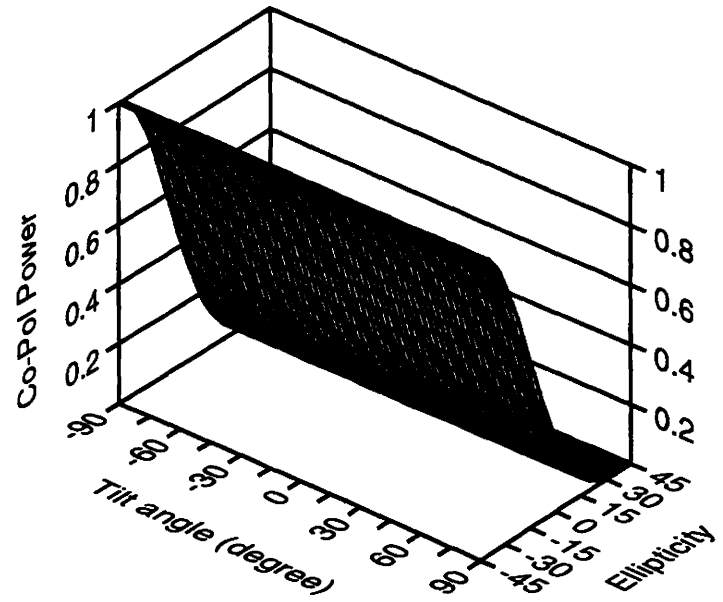
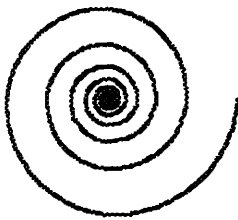
Left handed helix

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$



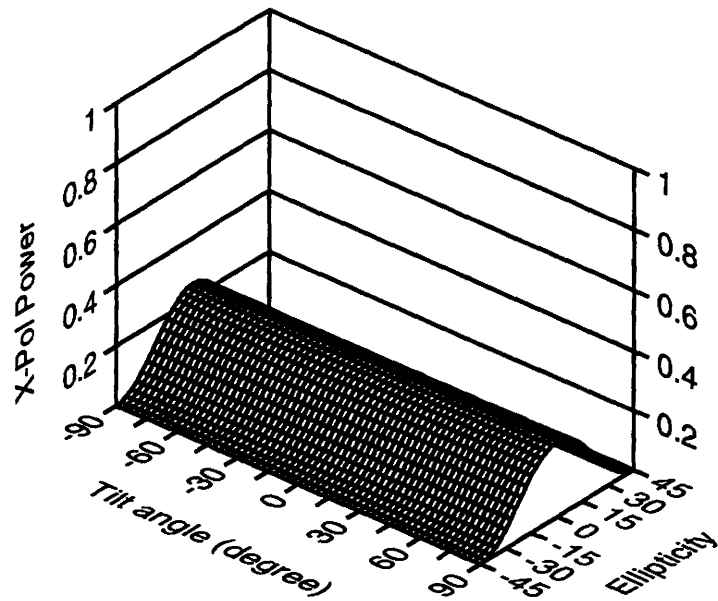
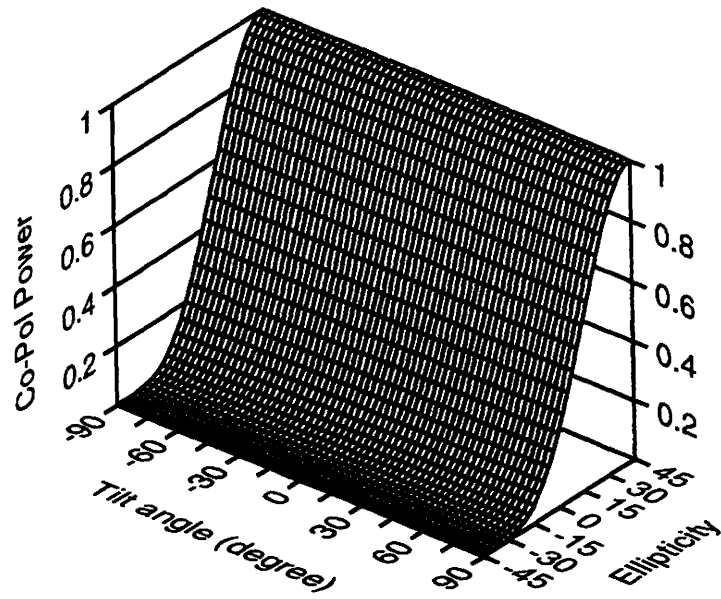
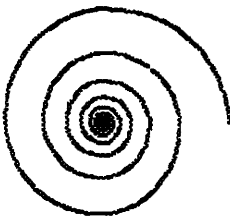
Right handed helix

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$



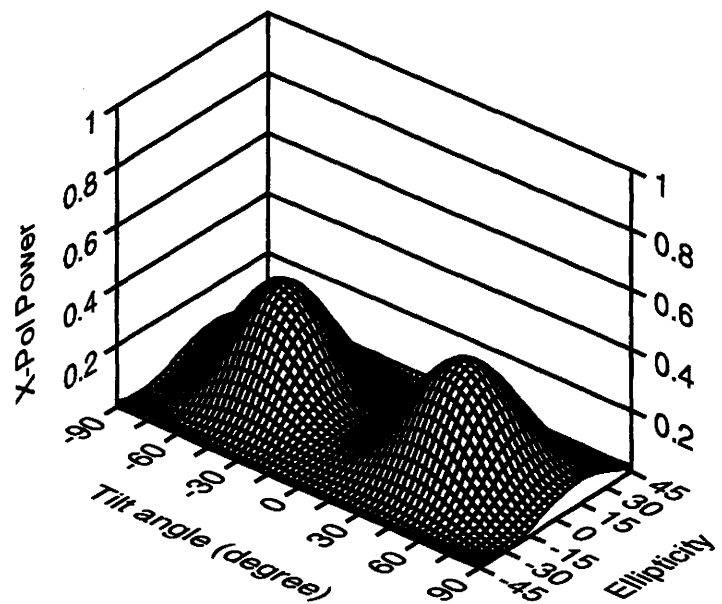
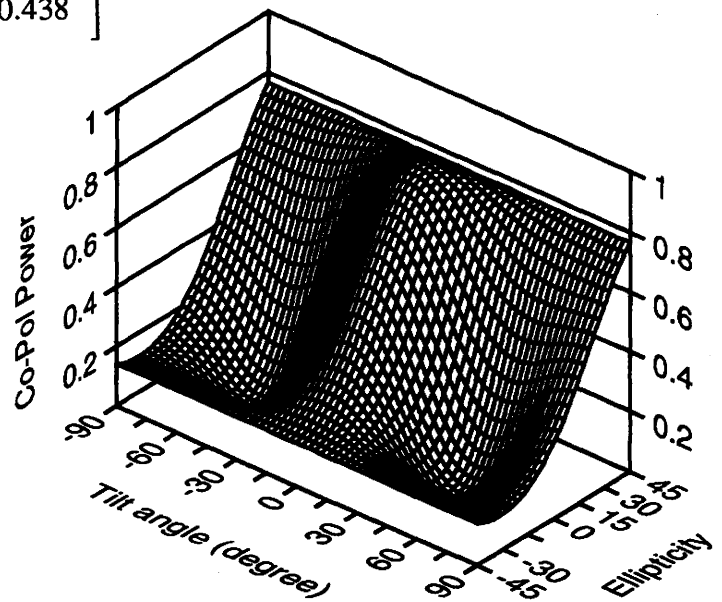
Special target 1

$$[S] = \begin{bmatrix} 0.75j & 0.25 \\ 0.25 & -0.5j \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.469 & 0.156 & 0 & 0.313 \\ 0.156 & 0.344 & 0 & 0.063 \\ 0 & 0 & -0.313 & 0 \\ -0.313 & -0.063 & 0 & -0.438 \end{bmatrix}$$

$$[K]_c = \begin{bmatrix} 0.469 & 0.156 & 0 & 0.313 \\ 0.156 & 0.344 & 0 & 0.063 \\ 0 & 0 & -0.313 & 0 \\ 0.313 & 0.063 & 0 & 0.438 \end{bmatrix}$$

$$[K]_x = \begin{bmatrix} 0.469 & 0.156 & 0 & 0.313 \\ -0.156 & -0.344 & 0 & -0.063 \\ 0 & 0 & 0.313 & 0 \\ -0.313 & -0.063 & 0 & -0.438 \end{bmatrix}$$



4章 受信電力の最適化

最適な偏波状態を求める問題は与えられた物体の偏波散乱特性に対して送信，受信の偏波をいかにしたら受信電圧や受信パワーが最大か最小になるかという問題と等価であり，そのような偏波状態を調べることである。

ところで，レーダからの反射波は，計測時間とその時間内でのターゲットの揺らぎによってコヒーレント波とインコヒーレント波に分類できる。計測時間が十分短ければ，ターゲットからの波は位相のそろったコヒーレント波になり，完全に偏波した波とすることができる。一方，計測時間内に揺らぎがあると波の位相はランダムになり，位相の不揃いな波が混合して帰ってくることになる。この波には全く位相のそろっていない部分と位相のそろった部分が含まれ，部分的に偏波した波と考えることができる。そのため各波に対して以下の図4.1に示すような方法で最適化について考える。このうち，偏波比による手法は完全偏波した波に有効であり，部分偏波した波に適用できない。一方，ストークスベクトルによる手法はどちらにも適用できる。

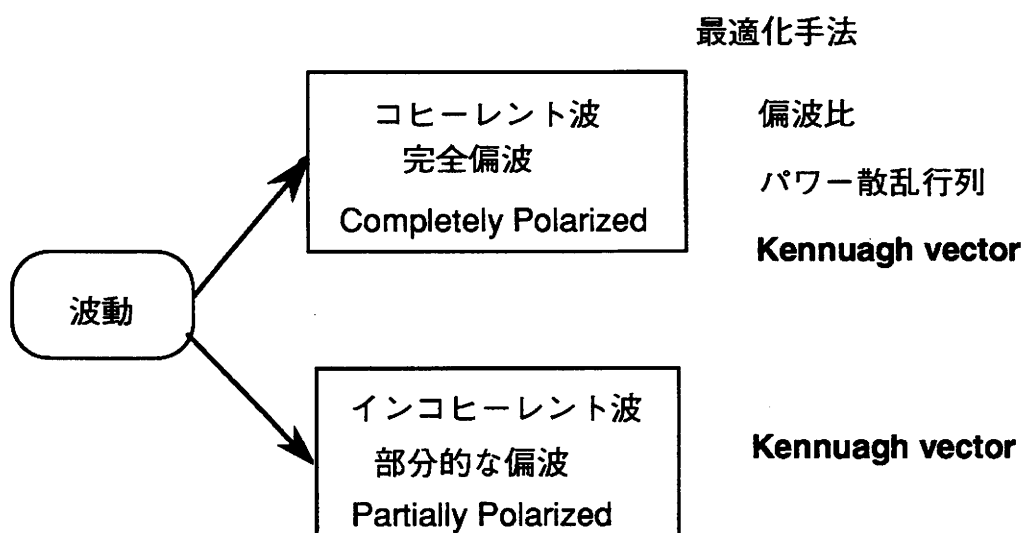


図4.1 完全偏波と部分偏波した波の最適化について

また，最適化についても何を最適化するかによって問題が異なってくる。図4.2はどこの電力の最適化を行なうかを示したものである。

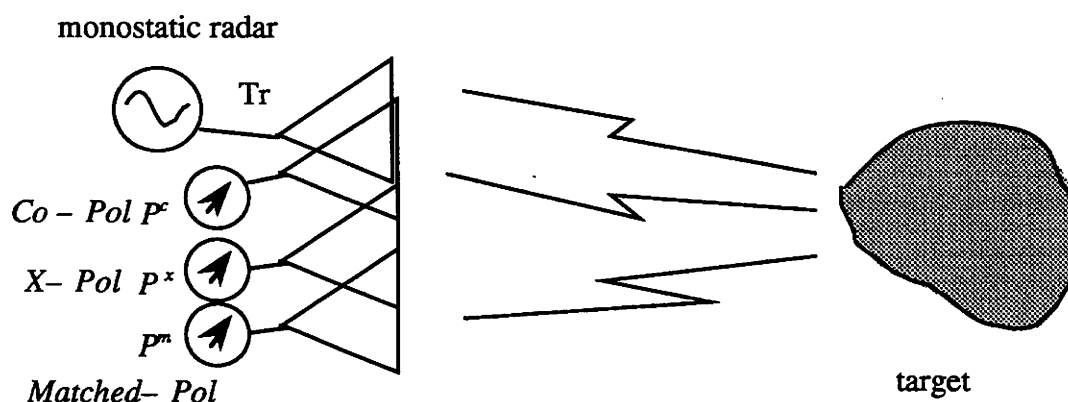


図4.2 受信電力の最適化

P^c は送信と同じ偏波状態のチャンネルで検出されるパワーを示し、 P^x は送信と直交する偏波チャンネルで検出されるパワーである。一方、 P^m はレーダに返って来る電波の強度を全て受信するものである。また、レーダも送受信アンテナの位置が同じmonostaticと位置が異なるbistaticの構成があり、組み合わせの数は多い。それゆえ、各場合に分けて考える必要がある。ここでは、monostaticでコヒーレントな波の場合を考えよう。

5章 散乱行列を用いた偏波チャンネル電力の最適化

レーダチャンネルの受信電圧は以前にも示したように

$$V = \mathbf{h}^T [\mathbf{S}] \mathbf{E}'$$

\mathbf{h} は受信アンテナが送信アンテナとして動作したときの実効長で、 $[\mathbf{S}]$ は2x2の複素数行列である。 $[\mathbf{S}]$ はターゲットの偏波散乱特性を示し、一般にレーダではコントロールできない。この受信電圧をレーダ側でコントロールできるのは \mathbf{E}' と \mathbf{h} である。 \mathbf{E}' と \mathbf{h} はベクトルであるのでベクトル変換によって最大最小などの極値を求めよう。電圧を直接ベクトル成分で展開すると非常に複雑となり、簡単に最大最小を求めることは困難になるので $[\mathbf{S}]$ を対角化して考えよう。ベクトル自身は基底変換によって変わらないので、ユニタリ行列を用いて $\mathbf{E}(\mathbf{XY}) = [\mathbf{T}] \mathbf{E}(\mathbf{AB})$ のように変換してみる。すると適当なユニタリ行列を用いて散乱行列を

$$[\mathbf{T}]^T [\mathbf{S}] [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$$

のように対角化できる。ただし、ベクトルを変換したときに基底も変わるので基底も含めて議論する必要がある。

5.1 偏波基底変換行列とベクトル変換行列

一般的な2つの偏波基底とその変換を考えてみよう。基底ベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} をもつ古い基底を (\mathbf{XY}) 、別の基底ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} をもつ新しい基底を (\mathbf{AB}) としよう。 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ はそれぞれ直交単位ベクトルの組である。例えば、 (\mathbf{XY}) 基底で

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{などが成り立つ。}$$

\mathbf{x}, \mathbf{y} を並べて書いたもの $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ は次のように行列となる。

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

さて、新しい基底の単位ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} を古い基底の \mathbf{x}, \mathbf{y} で表現すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{XY}) &= a_1 \mathbf{x} + a_2 \mathbf{y} \\ \mathbf{b}(\mathbf{XY}) &= b_1 \mathbf{x} + b_2 \mathbf{y} \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

行列形式では

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}] [\mathbf{T}] \tag{5.1.2}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad (5.1.3)$$

これは古い基底から新しい基底への単位ベクトルの基底変換であり，基底変換行列は

$$[T(XY \rightarrow AB)] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

となる。当然のことながら a_1, a_2 は古い基底(XY)を使って書き表わされた新しい基底(AB)における基底ベクトル a の成分であり，同様に b_1, b_2 も古い基底(XY)を使って書き表わされた b の成分である。

さて，一般のベクトル w はどの基底でも表現できる。

$$w = \alpha_1 a + \alpha_2 b = \beta_1 x + \beta_2 y \quad (5.1.5)$$

ここで， α_1, α_2 は w を(AB)基底で展開したときの係数(成分)であり， β_1, β_2 は w を(XY)基底で展開したときの係数(成分)である。ベクトル w は基底の表現には依らない。我々はベクトルを表現する際に，ふつう基底ベクトルの係数(成分)を使って次のように表している。

$$w = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}_{(AB)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{(XY)} \quad (5.1.6)$$

$$w_{(AB)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \text{あるいは} w_{(XY)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.7)$$

そこで基底も含めて(5.1.5)の w を忠実に行列表現すると

$$w = [a, b] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = [x, y] \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.8)$$

$[a, b] = [x, y][T]$ を用いれば

$$w = [x, y] \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = [x, y] \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.9)$$

従って，基底変換によるベクトル成分の間には次の関係が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = [T]^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.10)$$

つまり，ベクトル成分の変換行列は基底変換行列 $[T]$ の逆行列によって与えられる。このベクトル変換行列を $[U]$ としよう。

$$[U] = [T]^{-1} \quad (5.1.11)$$

以上のことから、 $XY \Rightarrow AB$ への基底変換は

$$\begin{aligned} [a, b] &= [x, y][T] \\ \text{new}(AB) &\Leftarrow \text{old}(XY) \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

ベクトル成分の変換は

$$\begin{aligned} E(AB) &= [T]^{-1} E(XY) = [U] E(XY) \\ \text{new}(AB) &\Leftarrow \text{old}(XY) \end{aligned} \quad (5.1.13a)$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= [T] E(AB) \\ \text{old} &\Leftarrow \text{new} \end{aligned} \quad (5.1.13b)$$

によって与えられることが分かる。

話は横道に逸れるが、もし仮に基底ベクトルの組を $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ の形式で書いたとすると(5.1.2)の表現は(5.1.1)より

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

となり、座標変換等でなじみのある形式となる。このとき

$$[T'] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

も基底変換行列と言い、例えば、直角座標と円筒座標の変換では

$$\begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [T'] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

となる。この形式でのベクトル変換行列は

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = [T'] \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

となって全く同じ形式を用いて表せる。この場合の $[T']$ は本文の $[U]$ に相当する。しかし、

本文ではベクトル表現を列ベクトル形式 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で統一しているので $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ の表現は使えない。そのため $[a, b]$ の形式を用いている。

さて、 $[T]$, $[T]^{-1}$, $[U]$ は実数行列か、複素行列かによって直交行列、ユニタリ行列でなければならない。もし、 $[T]$ が実の直交行列であるなら、

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (5.1.14)$$

複素行列であるなら、

$$[T]^{-1} = [T]^*{}^T = [T]^+ \quad (5.1.15)$$

である。添え字 T は転置を表す。

5.2 偏波比を使ったユニタリ変換行列

さて、以後はユニタリ行列を求めることになるが、その要素に対して偏波比 ρ を使って求めてみよう。基底ベクトルも含め、一般にベクトルはどの基底でも表現できるから、単位ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} を古い基底(XY)を使って表現すれば、

$$\mathbf{a} \text{ (XY)} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} = \frac{e^{j\phi_{a_x}}}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} \text{ (XY)} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \frac{e^{j\phi_{b_x}}}{\sqrt{1+\rho'\rho'^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho' \end{bmatrix} \quad (5.2.1)$$

ただし、

$$\rho = \frac{a_y}{a_x} = \frac{|a_y|}{|a_x|} e^{j\phi}, \quad \phi = \phi_{a_y} - \phi_{a_x}$$

$$\rho' = \frac{b_y}{b_x} = \frac{|b_y|}{|b_x|} e^{j\phi'}, \quad \phi' = \phi_{b_y} - \phi_{b_x}$$

である。

\mathbf{a}, \mathbf{b} は新しい基底(AB)における直交単位基底ベクトルなので次の条件を満たす必要がある。

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (5.2.2)$$

内積(ユニタリ積)の定義から

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left(\frac{e^{j\phi_{a_x}}}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \right) \left(\frac{e^{-j\phi_{b_x}}}{\sqrt{1+\rho'\rho'^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho'^* \end{bmatrix} \right) = \frac{e^{j(\phi_{a_x} - \phi_{b_x})}}{\sqrt{1+\rho\rho^*}\sqrt{1+\rho'\rho'^*}} (1 + \rho\rho'^*)$$

$$\text{これより } 1 + \rho\rho'^* = 0 \quad \text{あるいは} \quad 1 + \rho^*\rho' = 0 \quad \text{従って} \quad \rho' = -\frac{1}{\rho^*} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \text{ (XY)} &= \frac{e^{j\phi_{b_x}}}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{\rho^*}\right)\left(\frac{-1}{\rho}\right)}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{\rho^*} \end{bmatrix} = \frac{|\rho| e^{j\phi_{b_x}}}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \left(\frac{-1}{\rho^*} \right) \begin{bmatrix} -\rho^* \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{|\rho| e^{j\phi_{b_x}}}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \left(\frac{-1}{|\rho| e^{-j\phi}} \right) \begin{bmatrix} -\rho^* \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{e^{j(\phi_{b_x} + \phi)}}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} +\rho^* \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

この関係から(5.1.3)のように(XY)から(AB)基底への基底変換行列は

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} e^{j\phi_{a_x}} & \rho^* e^{j(\phi_{b_x} + \phi)} \\ \rho e^{j\phi_{a_x}} & -e^{j(\phi_{b_x} + \phi)} \end{bmatrix} \quad (5.2.5)$$

となる。従って、(XY)から(AB)基底へのベクトル変換行列は

$$[U] = [T]^{-1} = [T]^*{}^T = [T]^+ = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho\rho^*}} \begin{bmatrix} e^{-j\phi_{a_x}} & \rho^* e^{-j\phi_{a_x}} \\ \rho e^{-j(\phi_{b_x} + \phi)} & -e^{-j(\phi_{b_x} + \phi)} \end{bmatrix} \quad (5.2.6)$$

となる。位相成分 $\phi_{a_x}, \phi_{b_x}, \phi$ は別の位相に置き換えても一般性は失われないので、

$$\phi_{a_x} = \phi_1, \quad \phi_{b_x} + \phi = \phi_2$$

と置けば、基底変換行列とベクトル変換行列は、偏波比 ρ を使って一般に

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho\rho^*}} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & \rho^* e^{j\phi_2} \\ \rho e^{j\phi_1} & -e^{j\phi_2} \end{bmatrix} \quad (5.2.7)$$

$$[U] = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho\rho^*}} \begin{bmatrix} e^{-j\phi_1} & \rho^* e^{-j\phi_1} \\ \rho e^{-j\phi_2} & -e^{-j\phi_2} \end{bmatrix} \quad (5.2.8)$$

と書き表されることになる。これらの行列がユニタリ行列であるための条件は

$$[U]^*{}^T = [U]^{-1}, \quad [U]^*{}^T [U] = [I],$$

$$\det \{ [U]^*{}^T [U] \} = \det \{ [U]^*{}^T \} \det \{ [U] \} = \{ \det [U] \}^2 = 1, \quad |\det [U]| = 1 \quad (5.2.9)$$

であるが、これらの条件に対して今の $[U], [T]$ は

$$[U]^*{}^T = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho\rho^*}} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & \rho e^{j\phi_1} \\ \rho^* e^{j\phi_2} & -e^{j\phi_2} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho\rho^*}} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & \rho^* e^{j\phi_2} \\ \rho e^{j\phi_1} & -e^{j\phi_2} \end{bmatrix} = [T] \quad (5.2.10a)$$

$$[U]^{-1} = \frac{\sqrt{1 + \rho\rho^*}}{-(1 + \rho\rho^*)e^{-j(\phi_1 + \phi_2)}} \begin{bmatrix} -e^{-j\phi_2} & -\rho^* e^{-j\phi_1} \\ -\rho e^{-j\phi_2} & e^{-j\phi_1} \end{bmatrix} = \frac{e^{j(\phi_1 + \phi_2)}}{\sqrt{1 + \rho\rho^*}} \begin{bmatrix} e^{-j\phi_2} & \rho^* e^{-j\phi_1} \\ \rho e^{-j\phi_2} & -e^{-j\phi_1} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \rho\rho^*}} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & \rho^* e^{j\phi_2} \\ \rho e^{j\phi_1} & -e^{j\phi_2} \end{bmatrix} = [T] \quad (5.2.10b)$$

$$\det \{ [U] \} = -e^{j(\phi_1 + \phi_2)} = e^{j(\pi + \phi_1 + \phi_2)} \quad (5.2.11)$$

であり、 $[U]^{-1}[U] = [U][U]^{-1} = [I]$, $[U]^*{}^T = [U]^{-1}$, $|\det [U]| = 1$ の条件を満足している。なお、基底変換行列 $[T]$ についても全てこれらの条件を満たしている。

$$[T] = [U]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \rho^*}} \begin{bmatrix} e^{-j\phi_1} & \rho^* e^{-j\phi_1} \\ \rho e^{-j\phi_2} & -e^{-j\phi_2} \end{bmatrix}^{*T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \rho^*}} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & \rho^* e^{j\phi_2} \\ \rho e^{j\phi_1} & -e^{j\phi_2} \end{bmatrix} \quad (5.2.12)$$

$$\det \{ [T] \} = -e^{j(\phi_1 + \phi_2)} = e^{j(\pi + \phi_1 + \phi_2)} \quad (5.2.13)$$

5.3 直線偏波から円偏波基底への偏波変換

古い基底(XY)を直線(HV)基底とし、新しい基底(AB)を円偏波基底(LR)とする。我々はL,Rが次のように書けることを知っている。

$$L(HV) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}, \quad R(HV) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad (5.3.1)$$

(5.1.3)より基底変換行列[T]は

$$[T(HV \rightarrow LR)] = [L(HV), R(HV)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (5.3.2)$$

これを(5.2.7)に対応させれば,

$$[T(HV \rightarrow LR)] = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \rho^*}} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & \rho^* e^{j\phi_2} \\ \rho e^{j\phi_1} & -e^{j\phi_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

$\therefore \rho = j, \phi_1 = 0, \phi_2 = \frac{\pi}{2}$ が得られる。それゆえ、ベクトル変換行列は

$$[U(HV \rightarrow LR)] = [T]^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad (5.3.4)$$

もし、直線基底(HV)で偏波状態が $\mathbf{E}(HV)$ 、円偏波基底(LR)で $\mathbf{E}'(LR)$ ならば、ベクトル変換行列[U]を使って

$$\mathbf{E}'(LR) = [U(HV \rightarrow LR)] \mathbf{E}(HV) \quad (5.3.5)$$

あるいは

$$\mathbf{E}(HV) = [U(HV \rightarrow LR)]^{-1} \mathbf{E}'(LR) = [U(LR \rightarrow HV)] \mathbf{E}'(LR) = [T] \mathbf{E}'(LR) \quad (5.3.6)$$

例えば、左周り円偏波を直線偏波基底から円偏波基底に変換してみる(5.3.2), (5.3.4)を使って

$$L(LR) = [U(HV \rightarrow LR)] L(HV) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

逆に

$$L(HV) = [U(LR \rightarrow HV)] L(LR) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

5.4 散乱行列の変換

電圧方程式は

$$V = \mathbf{h}_r^T \mathbf{E}_S = \mathbf{h}_r^T [\mathbf{S}] \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_r^T [\mathbf{S}] \mathbf{E}_t \quad (5.4.1)$$

であるので、直線偏波基底 (HV) では

$$V(HV) = \mathbf{E}_r(HV)^T [\mathbf{S}(HV)] \mathbf{E}_t(HV) \quad (5.4.2)$$

新しい基底 (AB) では

$$V(AB) = \mathbf{E}'_r(AB)^T [\mathbf{S}'(AB)] \mathbf{E}'_t(AB) \quad (5.4.3)$$

(5.1.13b)のユニタリ変換行列[T] ($\mathbf{E}(XY) = [\mathbf{T}] \mathbf{E}(AB)$) を使って(5.4.2)を書き換える。

$$\begin{aligned} V(HV) &= \left([\mathbf{T}] \mathbf{E}'_r(AB) \right)^T [\mathbf{S}(HV)] \left([\mathbf{T}] \mathbf{E}'_t(AB) \right) \\ &= \mathbf{E}'_r(AB)^T [\mathbf{T}]^T [\mathbf{S}(HV)] [\mathbf{T}] \mathbf{E}'_t(AB) \\ &= \mathbf{E}'_r(AB)^T \left([\mathbf{T}]^T [\mathbf{S}(HV)] [\mathbf{T}] \right) \mathbf{E}'_t(AB) \end{aligned}$$

受信電圧は基底変換によって不変であるので散乱行列は

$$[\mathbf{S}'(AB)] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{S}(HV)] [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \dot{S}_{AA} & \dot{S}_{AB} \\ \dot{S}_{BA} & \dot{S}_{BB} \end{bmatrix} \quad (5.4.4)$$

即ち

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}]^T [\mathbf{S}] [\mathbf{T}] &= \frac{1}{1 + \rho \rho^*} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & \rho^* e^{j\phi_2} \\ \rho e^{j\phi_1} & -e^{j\phi_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & \rho^* e^{j\phi_2} \\ \rho e^{j\phi_1} & -e^{j\phi_2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + \rho \rho^*} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & \rho e^{j\phi_1} \\ \rho^* e^{j\phi_2} & -e^{j\phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH} e^{j\phi_1} + \rho S_{HV} e^{j\phi_1} \rho^* S_{HH} e^{j\phi_2} - S_{HV} e^{j\phi_2} \\ S_{VH} e^{j\phi_1} + \rho S_{VV} e^{j\phi_1} \rho^* S_{VH} e^{j\phi_2} - S_{VV} e^{j\phi_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

従って各要素は

$$\dot{S}_{AA} = \frac{e^{j2\phi_1}}{1 + \rho \rho^*} \left(S_{HH} + \rho S_{HV} + \rho S_{VH} + \rho^2 S_{VV} \right) \quad (5.4.5a)$$

$$\dot{S}_{AB} = \frac{e^{j(\phi_1 + \phi_2)}}{1 + \rho \rho^*} \left(\rho^* S_{HH} - S_{HV} + \rho \rho^* S_{VH} - \rho S_{VV} \right) \quad (5.4.5b)$$

$$\dot{S}_{BA} = \frac{e^{j(\phi_1 + \phi_2)}}{1 + \rho \rho^*} \left(\rho^* S_{HH} - S_{VH} + \rho \rho^* S_{HV} - \rho S_{VV} \right) \quad (5.4.5c)$$

$$\dot{S}_{BB} = \frac{e^{j2\phi_2}}{1 + \rho \rho^*} \left(\rho^{*2} S_{HH} - \rho^* S_{HV} - \rho^* S_{VH} + S_{VV} \right) \quad (5.4.5d)$$

これより、行列のSpanは

$$\begin{aligned} \text{Span} \left\{ \left[S' (AB) \right] \right\} &= \left| S'_{AA} \right|^2 + \left| S'_{AB} \right|^2 + \left| S'_{BA} \right|^2 + \left| S'_{BB} \right|^2 \\ &= \left| S_{HH} \right|^2 + \left| S_{HV} \right|^2 + \left| S_{VH} \right|^2 + \left| S_{VV} \right|^2 \\ &= \text{Span} \left\{ \left[S (HV) \right] \right\} = \left| \lambda_1 \right|^2 + \left| \lambda_2 \right|^2 \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

となり、基底の変換で不変量となっている。monostatic case では $S_{HV} = S_{VH}$ なので

$$S'_{AA} = \frac{1}{1 + \rho \rho^*} \left(S_{HH} + 2 \rho S_{HV} + \rho^2 S_{VV} \right) e^{j2\phi_1} \quad (5.4.7a)$$

$$S'_{AB} = S'_{BA} = \frac{1}{1 + \rho \rho^*} \left[\rho^* S_{HH} + (\rho \rho^* - 1) S_{HV} - \rho S_{VV} \right] e^{j(\phi_1 + \phi_2)} \quad (5.4.7b)$$

$$S'_{BB} = \frac{1}{1 + \rho \rho^*} \left(\rho^{*2} S_{HH} - 2 \rho^* S_{HV} + S_{VV} \right) e^{j2\phi_2} \quad (5.4.7c)$$

5.5 電力の最適化

さて、受信電力の最適化とそのときの偏波状態について考えよう。

$$P = |V|^2 = \left| \mathbf{h}^T [\mathbf{S}] \mathbf{E}^i \right|^2 \quad (5.5.1)$$

以後の統一的な記述のために送受信アンテナの偏波状態をJones Vector表現を使って、 $\mathbf{E}^i = \mathbf{h}_i$, $\mathbf{h} = \mathbf{h}_r$ と書こう。そのとき電圧は基底変換によって不変であるので、

$$P = |V|^2 = \left| \mathbf{h}_r^T [\mathbf{S}] \mathbf{h}_i \right|^2 = \left| \mathbf{h}_r'^T [\mathbf{S}'] \mathbf{h}_i' \right|^2 \quad (5.5.2)$$

したがって、送受信が同じ偏波状態($\mathbf{h}_r = \mathbf{h}_i = \mathbf{h}$)を持つCo-Pol Channelを考えると、受信電力は

$$\begin{aligned} P^c &= \left| \mathbf{h}^T [\mathbf{S}] \mathbf{h} \right|^2 = \left| \mathbf{h}'^T [\mathbf{S}'] \mathbf{h}' \right|^2 \\ &= \left| \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho \end{bmatrix} [\mathbf{S}] \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}}{1 + \rho \rho^*} \right|^2 = \left| \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho' \end{bmatrix} [\mathbf{S}'] \begin{bmatrix} 1 \\ \rho' \end{bmatrix}}{1 + \rho' \rho'^*} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

X-Pol channelでは $\mathbf{h}_r = \mathbf{h}_{i\perp} = \mathbf{h}_\perp$

$$\begin{aligned} P^x &= \left| \mathbf{h}_\perp^T [\mathbf{S}] \mathbf{h} \right|^2 = \left| \mathbf{h}_\perp'^T [\mathbf{S}'] \mathbf{h}' \right|^2 \\ &= \left| \frac{\begin{bmatrix} \rho^* & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{S}] \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}}{1 + \rho \rho^*} \right|^2 = \left| \frac{\begin{bmatrix} \rho'^* & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{S}'] \begin{bmatrix} 1 \\ \rho' \end{bmatrix}}{1 + \rho' \rho'^*} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

' は新しい基底を表す。 ρ' の値は未定であるが、電力の最大最小を調べるには $[\mathbf{S}]$ を対角化したほうが分かりやすい。ベクトル変換によって

$$[S'] = [T]^T [S] [T] \quad (5.5.5)$$

この非対角項をゼロにすることを考える。 $S'_{AB} = 0$ とすると

$$\rho S_{VV} + (1 - \rho \rho^*) S_{HV} - \rho^* S_{HH} = 0 \quad (5.5.6)$$

これは複素共役でも成り立つので $\rho^* S_{VV}^* + (1 - \rho \rho^*) S_{HV}^* - \rho S_{HH}^* = 0$
従って

$$\begin{aligned} (1 - \rho \rho^*) &= \frac{\rho^* S_{HH} - \rho S_{VV}}{S_{HV}} = \frac{\rho S_{HH}^* - \rho^* S_{VV}^*}{S_{HV}^*} \\ \rho^* (S_{HH} S_{HV}^* + S_{HV} S_{VV}^*) &= \rho (S_{HH}^* S_{HV} + S_{HV}^* S_{VV}) = \rho^* A^* = \rho A \end{aligned}$$

$A = S_{HH}^* S_{HV} + S_{HV}^* S_{VV}$ とおくと

$$\begin{aligned} -A^* \rho S_{VV} + (-A^* + \rho^2 A) S_{HV} + \rho A S_{HH} &= 0 \\ \rho^2 A - A^* + \left(\frac{A S_{HH} - A^* S_{VV}}{S_{HV}} \right) \rho &= A \rho^2 + \left(|S_{HH}|^2 - |S_{VV}|^2 \right) \rho - A^* = 0 \end{aligned}$$

そのため次の2次方程式が得られる。

$$A \rho^2 + B \rho + C = 0 \quad (5.5.8)$$

ただし, $A = S_{HH}^* S_{HV} + S_{HV}^* S_{VV}$, $B = |S_{HH}|^2 - |S_{VV}|^2$, $C = -A^*$
この根は

$$\rho_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (5.5.10)$$

なお, $\rho_1 \rho_2^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \left(\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right)^* = \frac{C^*}{A} = -1$ (5.5.11)

この条件により ρ_1 と ρ_2 の偏波状態は直交することになる。 ρ_1 か ρ_2 を選んでやると $[S]$ は対角化されて、新しい基底ではつぎのように表現される。

$$[S'(AB)] = \begin{bmatrix} S'_{AA} & 0 \\ 0 & S'_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = [S_d] \quad (5.5.12)$$

ρ_1 を選べば,

$$\lambda_{11} = S'_{AA}(\rho_1) = \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_1^*} \left(S_{HH} + 2 \rho_1 S_{HV} + \rho_1^2 S_{VV} \right) e^{j2\phi_1} \quad (5.5.13)$$

$$\lambda_{12} = S'_{BB}(\rho_1) = \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_1^*} \left(\rho_1^{*2} S_{HH} - 2 \rho_1^* S_{HV} + S_{VV} \right) e^{j2\phi_2} \quad (5.5.14)$$

ρ_2 を選べば,

$$\lambda_{21} = S'_{AA}(\rho_2) = \frac{1}{1 + \rho_2 \rho_2^*} \left(S_{HH} + 2 \rho_2 S_{HV} + \rho_2^2 S_{VV} \right) e^{j2\phi_1} \quad (5.5.15)$$

$$\lambda_{22} = S'_{BB}(\rho_2) = \frac{1}{1 + \rho_2 \rho_2^*} \left(\rho_2^{*2} S_{HH} - 2 \rho_2^* S_{HV} + S_{VV} \right) e^{j2\phi_2} \quad (5.5.16)$$

以上のように散乱行列を対角化するような古い基底での偏波比 ρ を決定することができる。その結果、基底変換行列が定まり、 $\mathbf{E}' = [\mathbf{T}]^{-1} \mathbf{E}$ によって新しい基底で ρ' を使った最大最小問題を考えることができる。基底変換行列 $[\mathbf{T}]$ を求めるには新しい基底ベクトルを古い基底ベクトルで表現しなければならない。 ρ_1 と ρ_2 が求まっているのでどちらを採用するかには任意性がある。以前示したと同じ方法で基底ベクトルを表現すると

$$\mathbf{a}_1 = \frac{e^{j\phi_{a1}}}{\sqrt{1 + \rho_1 \rho_1^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \frac{e^{j(\phi_{b1} + \phi_1)}}{\sqrt{1 + \rho_1 \rho_1^*}} \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{for } \rho_1 = |\rho_1| e^{j\phi_1} \quad (5.5.17)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{e^{j\phi_{a2}}}{\sqrt{1 + \rho_2 \rho_2^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \frac{e^{j(\phi_{b2} + \phi_2)}}{\sqrt{1 + \rho_2 \rho_2^*}} \begin{bmatrix} \rho_2^* \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{for } \rho_2 = |\rho_2| e^{j\phi_2} \quad (5.5.18)$$

しかし、 $\rho_1 \rho_2^* = -1$ より

$$\mathbf{a}_2 = \frac{e^{j\phi_{a2}}}{\sqrt{1 + \rho_2 \rho_2^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \frac{e^{j\phi_{a2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{\rho_1^*}\right)\left(\frac{-1}{\rho_1}\right)}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\rho_1^*} \end{bmatrix} = \frac{e^{j(\phi_{a2} + \phi_1)}}{\sqrt{1 + \rho_1 \rho_1^*}} \begin{bmatrix} \rho_1^* \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}_1 \quad (5.5.19)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{e^{j(\phi_{b2} + \phi_2)}}{\sqrt{1 + \rho_2 \rho_2^*}} \begin{bmatrix} \rho_2^* \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{e^{j(\phi_{b2} + \phi_2)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{\rho_1^*}\right)\left(\frac{-1}{\rho_1}\right)}} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\rho_1^*} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{e^{j\phi_{b2}}}{\sqrt{1 + \rho_1 \rho_1^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_1 \quad (5.5.20)$$

となって、位相変化があるのみでスピナーが同形であるから同じベクトルを表していることが分かる。 $\phi_{a2}, \phi_{a1}, \phi_{b1}, \phi_{b2}$ は絶対位相を表し電力には全く関係しない。その選び方には自由度がある。 $\phi_{b2} = \phi_{a1}, \phi_{a2} = \phi_{b1}$ と選べば、基底ベクトルも同じものを表していることがわかる。その結果、

$$[\mathbf{T}] = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_1 \rho_1^*}} \begin{bmatrix} e^{j\phi_{a1}} & \rho_1^* e^{j(\phi_{b1} + \phi_1)} \\ \rho_1 e^{j\phi_{a1}} & -e^{j(\phi_{b1} + \phi_1)} \end{bmatrix} \quad (5.5.21)$$

また,

$$\lambda_{21} = S'_{AA}(\rho_2) = S'_{AA}\left(\frac{-1}{\rho_1^*}\right) = \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_1^*} \left(\rho_1^{*2} S_{HH} - 2 \rho_1^* S_{HV} + S_{VV} \right) e^{j2(\phi_{a1} + \phi_1)} \quad (5.5.22)$$

$$\lambda_{12} = S'_{BB}(\rho_1) = \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_1^*} \left(\rho_1^{*2} S_{HH} - 2 \rho_1^* S_{HV} + S_{VV} \right) e^{j2(\phi_{b1} + \phi_1)} \quad (5.5.23)$$

$$\lambda_{22} = S'_{BB}(\rho_2) = S'_{BB}\left(\frac{-1}{\rho_1^*}\right) = \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_1^*} \left(S_{HH} + 2 \rho_1 S_{HV} + \rho_1^2 S_{VV} \right) e^{j2\phi_{b1}} \quad (5.5.24)$$

$$\lambda_{11} = S'_{AA}(\rho_1) = \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_1^*} \left(S_{HH} + 2 \rho_1 S_{HV} + \rho_1^2 S_{VV} \right) e^{j2\phi_{a1}} \quad (5.5.25)$$

基底変換行列も、一例として円偏波の基底変換も含むべきものであるから

$$[T_{HV \Rightarrow LR}] = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_1 \rho_1^*}} \begin{bmatrix} e^{j\phi_{a1}} & \rho_1^* e^{j(\phi_{b1} + \phi_1)} \\ \rho_1 e^{j\phi_{a1}} & -e^{j(\phi_{b1} + \phi_1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (5.5.26)$$

$\phi_{a1} = 0$ と決めることができる。 $\rho = j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ より $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$,

$$\det[T_{HV \Rightarrow LR}] = \exp j \left(\pi + \phi_{a1} + \phi_{b1} + \phi_1 \right) = \exp \left(j \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{より} \quad \phi_{b1} = 0$$

その結果、(XY)基底では変換行列は

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_1 \rho_1^*}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_1^* e^{j\phi_1} \\ \rho_1 & -e^{j\phi_1} \end{bmatrix} \quad (5.5.27)$$

また、散乱行列は

$$[S'] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (5.5.28)$$

$$\lambda_1 = \lambda_{11} = \lambda_{22} = S'_{AA}(\rho_1) = S'_{BB}(\rho_2) = \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_1^*} \left(S_{HH} + 2 \rho_1 S_{HV} + \rho_1^2 S_{VV} \right) \quad (5.5.29)$$

$$\lambda_2 = \lambda_{12} = \lambda_{21} = S'_{BB}(\rho_1) = S'_{AA}(\rho_2) = \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_1^*} \left(\rho_1^{*2} S_{HH} - 2 \rho_1^* S_{HV} + S_{VV} \right) e^{j2\phi_1} \quad (5.5.30)$$

となる。したがって、 ρ_1, ρ_2 のどれを選んでも差し支えない。そのうち、一つを選ぶこととし、以後最適化の問題を考える。

5.6 Co-Pol Channel

新しい偏波基底においてパワー表現は

$$P^c(\rho') = \left| \frac{[1, \rho']}{1 + \rho' \rho'^*} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho' \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \rho'^2}{1 + \rho' \rho'^*} \right|^2 \quad (5.6.1)$$

$$= \frac{|\lambda_1|^2 + \lambda_1^* \lambda_2 \rho'^2 + \lambda_1 \lambda_2^* \rho'^{*2} + |\lambda_2|^2 \rho'^2 \rho'^{*2}}{(1 + \rho' \rho'^*)^2} = \frac{a + c^* \rho'^2 + c \rho'^{*2} + b \rho'^2 \rho'^{*2}}{(1 + \rho' \rho'^*)^2}$$

$$\text{ただし, } a = |\lambda_1|^2 \quad b = |\lambda_2|^2 \quad c = \lambda_1 \lambda_2^* \quad c^* = \lambda_1^* \lambda_2 \quad (5.6.2)$$

変数は ρ' である。この極値を求めてみよう。そのために、 ρ', ρ'^* に関する微分をとって

る。

$$\frac{\partial P^c}{\partial \rho'} = \frac{2c^* \rho' + 2b \rho' \rho'^{*2} - 2a \rho'^* - 2c \rho'^{*3}}{(1 + \rho' \rho'^*)^3}, \quad \frac{\partial P^c}{\partial \rho'^*} = \frac{-2c^* \rho'^3 - 2a \rho' + 2b \rho'^* \rho'^2 + 2c \rho'^*}{(1 + \rho' \rho'^*)^3}$$

これらが0になるところは

$$\rho' = 0 \quad (5.6.3)$$

$$\rho' = \infty \quad (5.6.4)$$

$$\text{及び} \quad -c \rho'^{*3} - a \rho'^* + b \rho' \rho'^{*2} + c^* \rho' = 0 \quad (5.6.5)$$

$$-c^* \rho'^3 - a \rho' + b \rho'^* \rho'^2 + c \rho'^* = 0 \quad (5.6.6)$$

を満たす偏波比 ρ' , ρ'^* である。この2式より,

$$\begin{aligned} -c \rho'^{*3} \rho' + c^* \rho'^2 + c^* \rho'^* \rho'^3 - c \rho'^{*2} &= (1 + \rho'^* \rho') (c^* \rho'^2 - c \rho'^{*2}) = 0 \\ \therefore \rho'^* &= \pm \left(\frac{c^*}{c} \right)^{1/2} \rho' \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

これをもとの式に代入して

$$\rho' = \pm \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} \quad (5.6.8)$$

これは $\rho'^* = \pm \left(\frac{c^*}{c} \right)^{1/2} \rho'$ の符号によらない。それゆえ, 極値としてつぎの4個が求められる。

$$\rho' = 0, \quad \rho' = \infty, \quad \rho' = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2}, \quad \rho' = -\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} \quad (5.6.9)$$

これらに対して電力は

$$P^c(0) = \left| \frac{\lambda_1 + \lambda_2 0 0}{1 + 0 0} \right|^2 = |\lambda_1|^2 \quad (5.6.10)$$

$$P^c(\infty) = \left| \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \infty \infty}{1 + \infty \infty} \right|^2 = |\lambda_2|^2 \quad (5.6.11)$$

$$P^c\left(\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2}\right) = \left| \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2}}{1 + \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2*}} \right|^2 = 0 \quad (5.6.12)$$

$$P^c\left(-\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2}\right) = \left| \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2}}{1 + \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2*}} \right|^2 = 0 \quad (5.6.13)$$

したがって, $\rho' = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2}$ と $\rho' = -\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2}$ はゼロパワーを与える。そのため, これらの

偏波比(したがって偏波状態)をCo-Pol nullと名付け、次の様に表す。

$$\rho_{cn1} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2}, \quad \rho_{cn2} = -\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} \quad (5.6.14)$$

一方, $|\lambda_1|^2 > |\lambda_2|^2$ であれば $\rho = 0$ は最大電力を与える。そこでCo-Pol maximum とし
て

$$\rho_{cm} = 0 \quad (5.6.15)$$

そのとき, $\rho = \infty$ はsaddle あるいは単に極値(saddle)を与えるので

$$\rho_{cs} = \infty \quad (5.6.16)$$

とする。saddleになる理由として、このチャンネルでは4個の極値があるうち最大値が一つ、最小値が二つ存在し、偏波受信電力図(Polarimetric signature)を描いたときに、残る極値はsaddleしか存在し得ないためである。

それゆえ、新しい偏波基底においてターゲットの特徴的な偏波状態(偏波比)を与えるものは

$$\text{Co-Pol maximum} \quad \rho_{cm} = 0 \quad (5.6.15)$$

$$\text{Co-Pol saddle} \quad \rho_{cs} = \infty \quad (5.6.16)$$

$$\text{Co-Pol null} \quad \rho_{cn1} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2}, \quad \rho_{cn2} = -\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} \quad (5.6.14)$$

であることが分かる。これらを古い基底での偏波比 ρ に変換するには基底変換行列を使えばよい。

$$\begin{aligned} [T] &= \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_1 \rho_1^*}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_1^* e^{j\phi_1} \\ \rho_1 & -e^{j\phi_1} \end{bmatrix}, \\ \rho_1 &= |\rho_1| \exp(j\phi_1) \text{ such that } S'_{AB} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \rho \rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_1 \rho_1^*}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_1^* e^{j\phi_1} \\ \rho_1 & -e^{j\phi_1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \rho' \rho'^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

なお、古い基底でこれらの偏波状態について考えるとCo-Pol nullを求める問題は $P^c = 0$ と等価であり、

$$P^c = \left| \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}}{1 + \rho \rho^*} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \frac{S_{xx} + 2 S_{xy} \rho + S_{yy} \rho^2}{1 + \rho \rho^*} \right|^2 \quad (5.6.18)$$

$$\therefore S_{xx} + 2 S_{xy} \rho + S_{yy} \rho^2 = 0 \quad (5.6.19)$$

$$\text{その根を } \rho_{xn1}, \rho_{xn2} \text{ とすれば,} \quad \rho_{xn1}, \rho_{xn2} = \frac{-S_{xy} \pm \sqrt{S_{xy}^2 - S_{xx} S_{yy}}}{S_{yy}} \quad (5.6.20)$$

となって古い基底での偏波比が直接求められる。また、Co-Pol Maxを求める問題は

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho_1\rho_1^*}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_1^* e^{j\phi_1} \\ \rho_1 & -e^{j\phi_1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+00}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho_1\rho_1^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho_1 \end{bmatrix} \quad (5.6.21)$$

したがって

$$\rho_{cm1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (5.6.22)$$

$$\text{ただし, } A = S_{HH}^* S_{HV} + S_{HV}^* S_{VV}, \quad B = |S_{HH}|^2 - |S_{VV}|^2, \quad C = -A^* \quad (5.6.23)$$

5.7 X-Pol Channel

新しい偏波基底においてパワー表現は

$$P^*(\rho') = \left| \frac{\begin{bmatrix} \rho'^* - 1 \\ 1 + \rho'\rho'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho' \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \frac{\lambda_1 \rho'^* - \lambda_2 \rho'}{1 + \rho'\rho'^*} \right|^2 \quad (5.7.1)$$

$$= \frac{|\lambda_1|^2 \rho'\rho'^* - \lambda_1^* \lambda_2 \rho'^2 - \lambda_1 \lambda_2^* \rho'^{*2} + |\lambda_2|^2 \rho'\rho'^*}{(1 + \rho'\rho'^*)^2} = \frac{a \rho'\rho'^* - c^* \rho'^2 - c \rho'^{*2} + b \rho'\rho'^*}{(1 + \rho'\rho'^*)^2}$$

$$a = |\lambda_1|^2 \quad b = |\lambda_2|^2 \quad c = \lambda_1 \lambda_2^* \quad c^* = \lambda_1^* \lambda_2 \quad (5.7.2)$$

この極値を求めるために、微分をとると

$$\frac{\partial P^*}{\partial \rho'} = \frac{2c\rho'^{*3} + a\rho'^* + b\rho'^* - a\rho'\rho'^{*2} - b\rho'\rho'^{*2} - 2c^*\rho'}{(1 + \rho'\rho'^*)^3}$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial \rho'^*} = \frac{2c^*\rho'^3 + a\rho' + b\rho' - a\rho'^2\rho'^* - b\rho'^2\rho'^* - 2c\rho'^*}{(1 + \rho'\rho'^*)^3}$$

これらが0になるところは

$$\rho' = 0 \quad (5.7.3)$$

$$\rho' = \infty \quad (5.7.4)$$

$$\text{及び} \quad 2c\rho'^{*3} + (a+b)(1 - \rho'\rho'^*)\rho'^* - 2c^*\rho' = 0 \quad (5.7.5)$$

$$2c^*\rho'^3 + (a+b)(1 - \rho'\rho'^*)\rho' - 2c\rho'^* = 0 \quad (5.7.6)$$

を満たす偏波比 ρ' , ρ'^* である。この2式より,

$$(c\rho'^{*2} - c^*\rho'^2)(1 + \rho'\rho'^*) = 0 \quad \rho'^{*2} = \frac{c^*}{c}\rho'^2 \quad \therefore \quad \rho'^* = \pm \left(\frac{c^*}{c}\right)^{1/2} \rho' \quad (5.7.7)$$

これをもとの式に代入

$$\rho'^* = + \left(\frac{c^*}{c}\right)^{1/2} \rho' \quad \text{に対して} \quad \rho' = \pm \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2}\right)^{1/4} \quad (5.7.8)$$

$$\rho^* = -\left(\frac{c^*}{c}\right)^{1/2} \rho \quad \text{に対して} \quad \rho = \pm j \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} \quad (5.7.9)$$

それゆえ、6個の極値が求まる。これらに対して電力は

$$P^x(0) = \left| \frac{\lambda_1 0 - \lambda_2 0}{1 + 00} \right|^2 = 0 \quad (5.7.10)$$

$$P^x(\infty) = \left| \frac{\lambda_1 \infty - \lambda_2 \infty}{1 + \infty \infty} \right|^2 = 0 \quad (5.7.11)$$

$$P^x \left(\left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} \right) = \left| \frac{\lambda_1 \left(\frac{\lambda_1^* \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2^*} \right)^{1/4} - \lambda_2 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}}{1 + \left(\frac{\lambda_1^* \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2^*} \right)^{1/4} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}} \right|^2 = \frac{1}{4} (|\lambda_1| - |\lambda_2|)^2 \quad (5.7.12)$$

$$P^x \left(- \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} \right) = \left| \frac{-\lambda_1 \left(\frac{\lambda_1^* \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2^*} \right)^{1/4} + \lambda_2 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}}{1 + \left(\frac{\lambda_1^* \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2^*} \right)^{1/4} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}} \right|^2 = \frac{1}{4} (|\lambda_1| - |\lambda_2|)^2 \quad (5.7.13)$$

$$P^x \left(j \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} \right) = \left| \frac{-j \lambda_1 \left(\frac{\lambda_1^* \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2^*} \right)^{1/4} - j \lambda_2 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}}{1 + \left(\frac{\lambda_1^* \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2^*} \right)^{1/4} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}} \right|^2 = \frac{1}{4} (|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2 \quad (5.7.14)$$

$$P^x \left(-j \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} \right) = \left| \frac{j \lambda_1 \left(\frac{\lambda_1^* \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2^*} \right)^{1/4} + j \lambda_2 \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}}{1 + \left(\frac{\lambda_1^* \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2^*} \right)^{1/4} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}} \right|^2 = \frac{1}{4} (|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2 \quad (5.7.15)$$

したがって、 $\rho = \pm j \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}$ は最大値を与えるので X-Pol maximums

$$\rho_{xm1} = j \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}, \quad \rho_{xm2} = -j \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} \quad (5.7.16)$$

$\rho = 0$, $\rho = \infty$ はゼロパワーを与えるので X-Pol nulls

$$\rho_{xn1} = 0, \quad \rho_{xn2} = \infty \quad (5.7.17)$$

$$\rho' = \pm \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} \text{ は X-Pol saddles}$$

$$\rho'_{xs1} = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}, \quad \rho'_{xs2} = - \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} \quad (5.7.18)$$

となる。これらを古い基底での偏波状態に変換するには基底変換行列を使う。

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho_1\rho_1^*}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_1^* e^{j\phi_1} \\ \rho_1 & -e^{j\phi_1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\rho'\rho'^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho' \end{bmatrix} \quad (5.7.19)$$

なお、古い基底での偏波状態表現でX-Pol nullを求める問題は $P^* = 0$ と等価であり、

$$P^* = \left| \frac{[\rho^* - 1]}{1 + \rho\rho^*} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \frac{-S_{xy} + S_{xy}\rho\rho^* + S_{xx}\rho^* - \rho S_{yy}}{1 + \rho\rho^*} \right|^2 \quad (5.7.20)$$

$$\therefore -S_{xy} + S_{xy}\rho\rho^* + S_{xx}\rho^* - \rho S_{yy} = 0 \quad (5.7.21)$$

したがって、この式は以前にでてきた散乱行列の非対角要素を0にする問題と同じになる。その根を ρ_1, ρ_2 とすれば、古い基底での偏波比が直接求められる。

5.8 Matched Pol channel

3段階法：パワー散乱行列は最初GravesとKennaughによって研究されたもので、A.B.Kostinskiによって最適化が導かれた。次のような3ステップで最適化を行うものである。

ステップ1 - パワー散乱行列による散乱波の電力最適化
アンテナの直前の散乱波の電力密度は

$$P = |E_s|^2 = ([S]E_t)^* T ([S]E_t) = E_t^* ([S]^+ [S]) E_t = E_t^* [G] E_t \quad (5.8.1)$$

パワー散乱行列 $[G]$ は $[G] = [S]^+ [S]$ と定義される。 $[S]^+ = [S]^* T$ はエルミート共役である。どのような $[S]$ に対しても $[G] = [S]^+ [S]$ はエルミート行列 (def: $[G] = [G]^+$) になる。

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} \text{ とすると}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} S_{HH}^* & S_{VH}^* \\ S_{HV}^* & S_{VV}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |S_{HH}|^2 + |S_{VH}|^2 & S_{HH}^* S_{HV} + S_{VH}^* S_{VV} \\ S_{HV}^* S_{HH} + S_{VV}^* S_{VH} & |S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (5.8.2)$$

$$g_{11} = |S_{HH}|^2 + |S_{VH}|^2 \quad (5.8.3)$$

$$g_{12} = S_{HH}^* S_{HV} + S_{VH}^* S_{VV} \quad (5.8.4)$$

$$g_{21} = S_{HV}^* S_{HH} + S_{VV}^* S_{VH} = g_{12}^* \quad (5.8.5)$$

$$g_{22} = |S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 \quad (5.8.6)$$

このパワーの最適化は次の固有値問題に帰着される。

$$[G] \mathbf{E}_t = \lambda \mathbf{E}_t \quad (5.8.7)$$

従ってその固有値 λ は次の方程式から得られる。

$$\{[G] - \lambda[I]\} \mathbf{E}_{t,opt} = 0 \quad (5.8.8)$$

この解は単純な2次方程式の解となり、

$$\lambda^2 - (g_{11} + g_{22})\lambda + (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) = 0 \quad (5.8.10)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\text{Tr}\{[G]\} \pm \sqrt{\text{Tr}\{[G]\}^2 - 4 \det\{[G]\}} \right] \quad (5.8.11)$$

$$\text{Tr}\{[G]\} = g_{11} + g_{22}, \quad \det\{[G]\} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \quad (5.8.12)$$

$[G]$ がエルミート行列で物理的には電力に対応するので、その固有値 λ_1, λ_2 は実数となる。固有値 λ_1, λ_2 を代入して解くと固有ベクトル $\mathbf{E}_{T,opt}$ がつぎのように求まる。

$$\mathbf{E}_{T,opt} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \quad \text{とすると} \quad (g_{11} - \lambda_1) + g_{12}\rho = 0, \quad g_{21} + (g_{22} - \lambda_1)\rho = 0$$

$$\rho = \frac{\lambda_1 - g_{11}}{g_{12}} = \frac{g_{22} - g_{11} \pm \sqrt{(g_{11} - g_{22})^2 + 4g_{12}g_{21}}}{2g_{12}} \quad (5.8.13)$$

monostatic case では

$$\begin{aligned} &= \frac{|S_{VV}|^2 - |S_{HH}|^2 \pm \sqrt{(|S_{VV}|^2 - |S_{HH}|^2)^2 + 4|S_{HH}^* S_{HV} + S_{VH}^* S_{VV}|^2}}{2(S_{HH}^* S_{HV} + S_{VH}^* S_{VV})} \\ &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4|A|^2}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \rho_{1,2} \end{aligned} \quad (5.8.14)$$

したがって monostatic case では Co-Pol Channel の $\rho_{1,2}$ すなわち Co-Pol maxmums と等しい。このベクトルは散乱波の電力を最大化する送信偏波状態を与える。もし、2つの固有値が異なれば、2つの固有ベクトルは直交し、最大の電力は大きい方の固有値から得られる。更に、2つの固有値の和は全エネルギーに相当し、不変量である。

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr} \left\{ [G] \right\} = |S_{HH}|^2 + |S_{VH}|^2 + |S_{HV}|^2 + |S_{VV}|^2 = \text{Span} \left\{ [S] \right\} = \text{invariant} \quad (5.8.15)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det \left\{ [G] \right\} = \left(\det \left\{ [S] \right\} \right) \left(\det \left\{ [S]^* \right\} \right) = \text{invariant} \quad (5.8.16)$$

ステップ 2

与えられた散乱行列からこの $E_{t, opt}$ を使って散乱波を計算する。

$$E_{r, opt} = [S] E_{t, opt} \quad (5.8.17)$$

それゆえ $E_{R, opt}$ は指定されるが、一般に $E_{R, opt} \neq E_{T, opt}$ となる。これは $[S]$ と $[G]$ の固有値が異なるためである。

ステップ 3

偏波を整合するために、即ち、散乱波に含まれるすべての電力を受信するために、受信アンテナの偏波状態を次のように調整する。

$$h_{opt} = \frac{E_{r, opt}^*}{|E_{r, opt}|} = \frac{\left\{ [S] E_{t, opt} \right\}^*}{|[S] E_{t, opt}|} \quad (5.8.18)$$

$|| \dots ||$ はノルムを表す。これで第3ステップの最適化は終了する。この偏波状態を使って電力を計算すれば最適(最大, 最小)電力が得られる。

$$P^m = \left| h_{opt}^T [S] E_{t, opt} \right|^2 \quad (5.8.19)$$

この方法は bistatic radar でも使うことのできる非常に強力な方法である。

6章 Kennaughベクトルを用いた偏波チャンネル電力の最適化

ストークスベクトルとMueller行列あるいはKennaugh行列はコヒーレントな波だけでなくインコヒーレントな波に対しても使うことができる。この章ではとりあえず、コヒーレントな波に対して電力の最適受信の方法を考察する。

以前の章で、ストークスベクトルとMueller行列あるいはKennaugh行列によってmonostatic radarの受信電力は次のようにかけることが示された。ストークスベクトルもKennaughベクトルも、座標の原点がレーダにあるので、送信に関しては同じである。

$$P = \frac{1}{2} \mathbf{g}_{rec}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \frac{1}{2} \mathbf{g}_{rec}^T [\mathbf{K}] \mathbf{g}_t \quad (6.1)$$

送信ストークス (Kennaugh) ベクトルをコヒーレント波とし、その大きさを1と仮定すると

$$\mathbf{g}_t = \begin{pmatrix} 1, x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix}^T \quad (6.2)$$

とおける。ただし、

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 \quad (6.3)$$

Co-pol channelの受信電力 P^c は $\mathbf{g}_{rec} = \mathbf{g}_t$ より

$$P^c = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T [\mathbf{K}]_c \mathbf{g}_t \quad (6.4)$$

ただし、

$$[\mathbf{K}]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}]$$

で与えられ、monostatic radarを考慮するとKennaugh行列は

$$[\mathbf{K}]_c = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{01} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ -m_{30} & -m_{31} & -m_{32} & -m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{01} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{03} & m_{13} & m_{23} & -m_{33} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

の形の実対称行列となる。

X-pol channelでは受信電力 P^x は

$$P^x = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \frac{1}{2} \mathbf{g}_t^T [\mathbf{K}]_x \mathbf{g}_t \quad (6.6)$$

$$[\mathbf{K}]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \quad \begin{matrix} m_{01} = m_{10}, & m_{02} = m_{20}, & m_{03} = -m_{30}, \\ m_{12} = m_{21}, & m_{13} = -m_{31}, & m_{23} = -m_{32} \end{matrix} \quad \text{より}$$

$$[\mathbf{K}]_x = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ -m_{10} & -m_{11} & -m_{12} & -m_{13} \\ -m_{20} & -m_{21} & -m_{22} & -m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ -m_{01} & -m_{11} & -m_{12} & -m_{13} \\ -m_{02} & -m_{12} & -m_{22} & -m_{23} \\ -m_{03} & -m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Matched-pol channelでは散乱波のもつ電力を全て受信するので

$$P^m = \mathbf{g}_t^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] \mathbf{g}_t = \mathbf{g}_t^T [\mathbf{K}]_m \mathbf{g}_t \quad (6.8)$$

$$[\mathbf{K}]_m = \frac{1}{2} [\mathbf{K}]_c + \frac{1}{2} [\mathbf{K}]_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

である。

6.1 X-pol channel powerの最適化

まず、X-pol channel での最適化を考えてみよう。求めたい量はパワーが極値となる送信ストークスペクトルである。数学的には $1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ の条件のもとで

$$P^x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ -m_{01} & -m_{11} & -m_{12} & -m_{13} \\ -m_{02} & -m_{12} & -m_{22} & -m_{23} \\ -m_{03} & -m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (6.1.1)$$

を最適化する問題になる。そこで、

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \quad (6.1.2)$$

と置き、電力を展開してみる。 $\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} m_{01} & m_{02} & m_{03} \end{bmatrix}$ と置けば、

$$P^x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} & \mathbf{b}^T \\ -m_{11} - m_{12} - m_{13} & \\ -\mathbf{b} & -m_{12} - m_{22} - m_{23} \\ -m_{13} - m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} & \mathbf{b}^T \\ -\mathbf{b} & -[\mathbf{N}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & -m_{33} \end{bmatrix} \quad \text{対称行列}$$

$$P^x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} + \mathbf{b}^T \mathbf{X} \\ -\mathbf{b} - [\mathbf{N}] \mathbf{X} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(m_{00} + \mathbf{b}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{b} - \mathbf{X}^T [\mathbf{N}] \mathbf{X} \right) = \frac{1}{2} \left(m_{00} - \mathbf{X}^T [\mathbf{N}] \mathbf{X} \right) \quad (6.1.3)$$

とかける。すなわち3変数の2次形式になってくる。この式の最適化はラグランジェの未定定数法(未定係数 μ)により拘束条件

$$1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (6.1.4)$$

を組み入れて、

$$J = \frac{1}{2} \left(m_{00} - \mathbf{X}^T [\mathbf{N}] \mathbf{X} \right) + \mu \left(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right) \quad (6.1.5)$$

の極値問題と等価になる。この関数の極値は

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.1.6)$$

より求められ、その結果、

$$-[\mathbf{N}] \mathbf{X} = \mu \mathbf{X} \quad (6.1.7)$$

なる固有値問題に帰着される。 $-\mathbf{N}$ が3 x 3の実対称行列であるから数学的に

1. 縮退も含めて3つの実固有値 μ_i ($i = 1, 2, 3$)が存在する。
2. 各固有値に対応する固有ベクトル \mathbf{X}_i は互いに直交する。

ことが分かる。実固有値を μ_i 、固有ベクトルを \mathbf{X}_i とすると最大固有値は最大のパワーを与え、最小固有値は最小パワーを与える。また、その中間は鞍部点を与えることになり、固有ベクトル=ストークスベクトル同士は直交する。これらの固有ベクトルはターゲットの特徴的偏波状態をあらわすので、それぞれ、X-pol max, X-pol min, X-pol saddle である。そ

れゆえ、固有ベクトルは図6.1のようにポアンカレ球上で互いに直交したフレームを作ることが理解される。また、一つの固有値に対して拘束条件から全てが逆符号の固有ベクトルもまた解であり、固有ベクトルは2個存在することになる。パワーは

$$P_i^x = \frac{1}{2} (m_{00} + \mu_i) \quad (6.1.8)$$

によって与えられる。

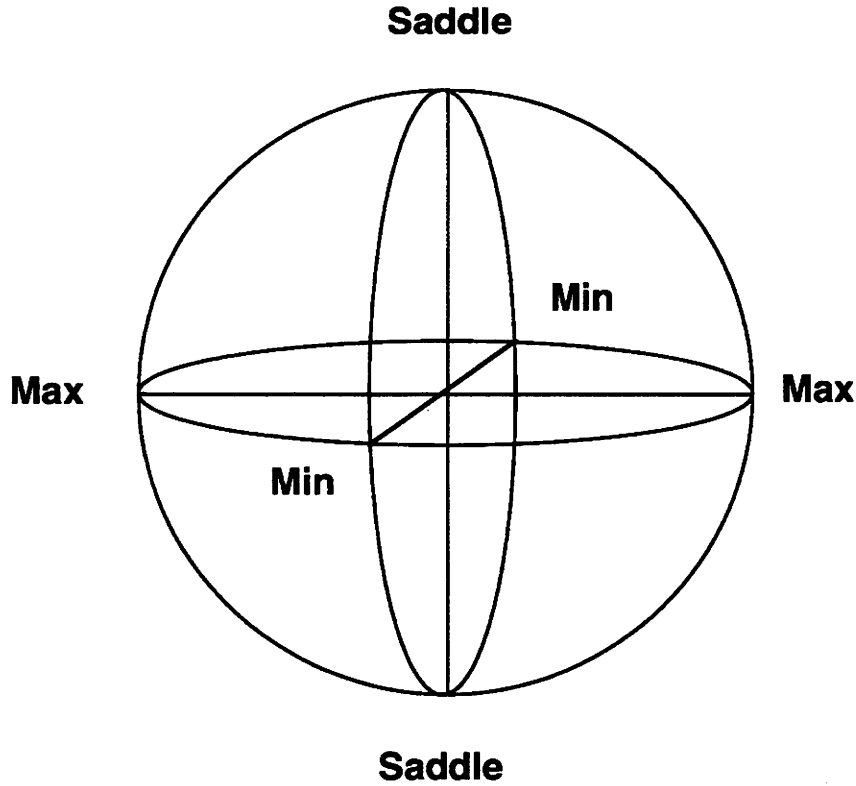


図6.1 互いに直交するX-Channel Characteristic Polarization States

一例としてMueller 行列が次のように与えられた場合、

Case A

$$[M] = \begin{bmatrix} 2.75 & 1.50 & 0.0 & 1.50 \\ 1.50 & 2.25 & 0.0 & 0.50 \\ 0.0 & 0.0 & -1.75 & 0.0 \\ -1.5 & -0.5 & 0.0 & -2.25 \end{bmatrix},$$

固有値方程式は

$$\begin{bmatrix} -2.25 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1.75 & 0 \\ -0.5 & 0 & -2.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

となり、これを解いて表1の結果を得る。

Case B

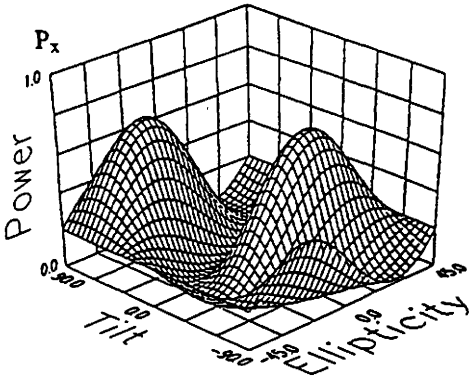
$[S] = \begin{bmatrix} 0.25 + j0.75 & -0.1 + j0.5 \\ -0.1 + j0.5 & 0.5 - j0.25 \end{bmatrix}$ から Mueller 行列を導いて

$[M] = \begin{bmatrix} 0.729 & 0.156 & 0.175 & 0.025 \\ 0.156 & 0.209 & 0.525 & -0.425 \\ 0.175 & 0.525 & 0.198 & 0.438 \\ -0.025 & 0.425 & -0.438 & -0.323 \end{bmatrix}$

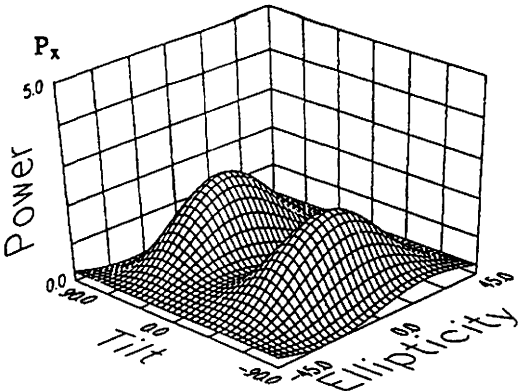
同様に固有値方程式から、表2の結果となる。

TABLE I
EIGENVALUES, EIGENVECTORS, AND POWER FOR CASE A

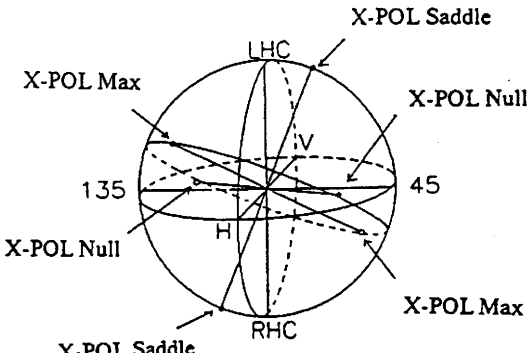
eigenvalue	power	x ₁	x ₂	x ₃	characteristic pol. state
$\lambda_1=1.75$	2.25	0.0	1.0	0.0	Max
	2.25	0.0	-1.0	0.0	
$\lambda_2=-1.75$	0.5	0.707	0.0	-0.707	Saddle
	0.5	-0.707	0.0	0.707	
$\lambda_3=-2.75$	0.0	0.707	0.0	0.707	Null
	0.0	-0.707	0.0	-0.707	



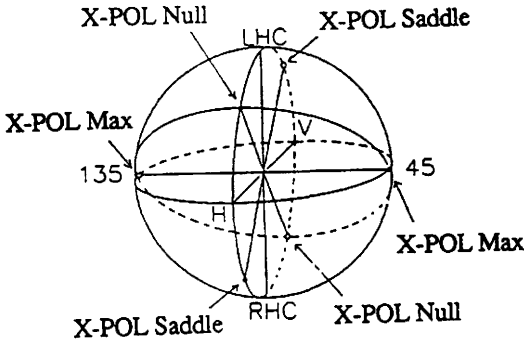
(a)



(a)



(b)



(b)

TABLE II
EIGENVALUES, EIGENVECTORS, AND POWER FOR CASE B

eigenvalue	power	x ₁	x ₂	x ₃	characteristic pol. state
$\lambda_1=0.69$	0.709	-0.601	0.610	-0.516	Max
	0.709	0.601	-0.610	0.516	
$\lambda_2=-0.69$	0.02	-0.448	0.278	0.850	Saddle
	0.02	0.448	-0.278	-0.850	
$\lambda_3=-0.73$	0.0	0.662	0.742	0.106	Null
	0.0	-0.662	-0.742	-0.106	

6.2 Co-pol channel power の最適化

$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1$ の条件のもとで

$$P^c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{01} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{03} & m_{13} & m_{23} & -m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (6.2.1)$$

の最適化を考えることになるが、前と同様に分解してみる。

$$[N] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & -m_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} m_{01} & m_{02} & m_{03} \end{bmatrix} \quad (6.2.2)$$

と置いて、

$$P^c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} + \mathbf{b}^T \mathbf{X} \\ \mathbf{b} + [N] \mathbf{X} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(m_{00} + \mathbf{b}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{b} + \mathbf{X}^T [N] \mathbf{X} \right) \quad (6.2.3)$$

$$\therefore P^c = \frac{1}{2} \left(\mathbf{X}^T [N] \mathbf{X} + 2 \mathbf{b}^T \mathbf{X} + m_{00} \right) \quad (6.2.4)$$

主軸変換によって $2 \mathbf{b}^T \mathbf{X}$ の項を消去し、見通しのよい2次形式に変換してみる。もし、それができれば3変数の2次形式となり、以後はX-polの場合と同様な手続きで最適化を考えることができる。 $2 \mathbf{b}^T \mathbf{X}$ を消去するため、

$$\frac{\partial P^c}{\partial x_i} = 0$$

とおくと

$$[N] \mathbf{X} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (6.2.5)$$

もし $\det[N] \neq 0$ ならば

$$\mathbf{X}_0 = -[N]^{-1} \mathbf{b} \quad (6.2.6)$$

この後の取り扱いは現在検討中である。

7章 特徴的偏波状態の性質

7.1 偏波比を使った特徴的偏波状態

散乱行列の非対角項を 0 とする新しい偏波基底においてパワーの極値をあたえる点として、Co-Pol, X-Pol channel でつぎの 10 個が求められた。

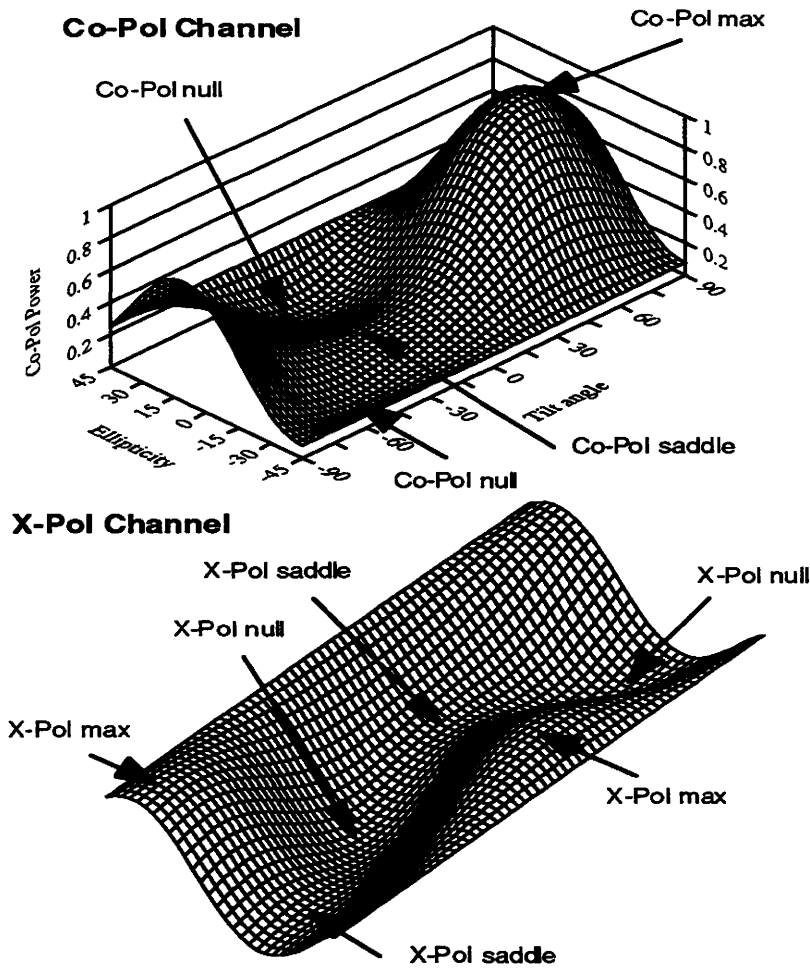
$$\text{Co-Pol maximum} \quad \text{X-Pol null} \quad \rho'_{cm} = 0 \quad \rho'_{xm1} = 0 \quad (7.1.1)$$

$$\text{Co-Pol saddle} \quad \text{X-Pol null} \quad \rho'_{cs} = \infty \quad \rho'_{xm2} = \infty \quad (7.1.2)$$

$$\text{Co-Pol null} \quad \rho'_{cm1} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2}, \quad \rho'_{cm2} = -\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} \quad (7.1.3)$$

$$\text{X-Pol saddles} \quad \rho'_{xs1} = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}, \quad \rho'_{xs2} = -\left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} \quad (7.1.4)$$

$$\text{X-Pol maximums} \quad \rho'_{xm1} = j \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4}, \quad \rho'_{xm2} = -j \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} \quad (7.1.5)$$



Polarimetric signature

Co-Pol maximum, Co-Pol saddleはX-Pol nullと等しいので、上の式から分かるように合計8個のポイントがあることになる。散乱行列はこのとき、

$$[S'] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (7.1.6)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_1^*} (S_{HH} + 2 \rho_1 S_{HV} + \rho_1^2 S_{VV}) \quad (7.1.7a)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{1 + \rho_1 \rho_1^*} (\rho_1^{*2} S_{HH} - 2 \rho_1^* S_{HV} + S_{VV}) e^{j2\phi_1} \quad (7.1.7b)$$

の形になっている。そこで、

$$\lambda_1 = |\lambda_1| e^{j\phi_1}, \quad \lambda_2 = |\lambda_2| e^{j\phi_2} \quad (7.1.8)$$

とおいて、式を変形すると

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1^*} = e^{j2\phi_1} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_2^*} = e^{-j2\phi_2} \quad \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} = e^{j\frac{2}{4}(\phi_1 - \phi_2)}$$

$v = \frac{1}{4}(\phi_1 - \phi_2)$ とおくと、(Target skip angle by Huynen)

$$\left(\frac{\lambda_1 \lambda_2^*}{\lambda_1^* \lambda_2} \right)^{1/4} = e^{j2v} \quad \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} = e^{j\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{1/2} e^{j2v}$$

$$\text{Co-Pol maximum} \quad \text{X-Pol null} \quad \rho_{cm}' = 0 \quad \rho_{xm1}' = 0 \quad (7.1.1)$$

$$\text{Co-Pol saddle} \quad \text{X-Pol null} \quad \rho_{cs}' = \infty \quad \rho_{xm2}' = \infty \quad (7.1.2)$$

$$\text{Co-Pol null} \quad \rho_{cn1}' = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{1/2} e^{j(2v + \frac{\pi}{2})}, \quad \rho_{cn2}' = - \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{1/2} e^{j(2v + \frac{\pi}{2})} \quad (7.1.9a)$$

$$\text{X-Pol saddles} \quad \rho_{xs1}' = e^{j2v} \quad \rho_{xs2}' = -e^{j2v} \quad (7.1.10)$$

$$\text{X-Pol maximums} \quad \rho_{xm1}' = e^{j(2v + \frac{\pi}{2})} \quad \rho_{xm2}' = -e^{j(2v + \frac{\pi}{2})} \quad (7.1.11)$$

$$\gamma : \text{Target characteristic angle} \quad \tan \gamma = \sqrt{\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}} \quad \text{by Huynen} \quad (7.1.12)$$

$$v = \frac{1}{4}(\phi_1 - \phi_2) : \text{skip angle} \quad (7.1.13)$$

$$m: \text{target size} \quad (7.1.14)$$

$$\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} = e^{j\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{1/2} e^{j2v} = e^{j\frac{\pi}{2}} \cot \gamma e^{j2v} = e^{j\frac{\pi}{2}} \tan(90 - \gamma) e^{j2v} \quad \text{となるので,}$$

$$\rho_{cn1,2}' = \pm \tan(90 - \gamma) e^{j2v} e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (7.1.9b)$$

とも書くことができる。

7.2 直交性とPolarization Fork

これらの偏波状態を表す偏波比は

$$\rho'_{xm1} \cdot \rho'^{*}_{xm2} = -1, \quad \rho'_{xs1} \cdot \rho'^{*}_{xs2} = -1, \quad \rho'_{xn1} \cdot \rho'^{*}_{xn2} = -1 \quad (7.2.1)$$

で直交条件を満たしている。また,

$$\rho'_{cn1} \cdot \rho'^{*}_{cn2} = - \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| \quad (7.2.2)$$

は直交していないことが分かる。もし、 $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ なら直交する。その場合は, sphere, diplane, plate, etc のターゲットである。

これらの偏波比の間には,

$$\rho'_{xm1} = e^{j\frac{\pi}{2}} \rho'_{xs1} \quad \rho'_{xm2} = e^{j\frac{\pi}{2}} \rho'_{xs2}$$

$$\rho'_{cn1} = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{1/2} \rho'_{xm1} = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{1/2} e^{j\frac{\pi}{2}} \rho'_{xs1} \quad \rho'_{cn2} = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{1/2} \rho'_{xm2} = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{1/2} e^{j\frac{\pi}{2}} \rho'_{xs2}$$

の関係になっていることが分かる。したがって、 ρ' の複素平面上で、次のような規則性がある。

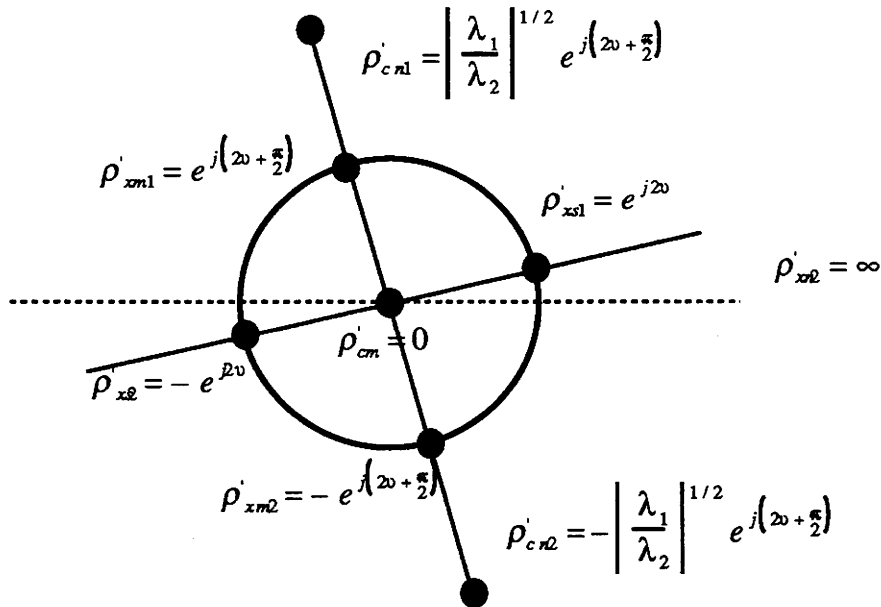


図7.1 複素平面上の特徴的偏波状態

この規則性とポアンカレ球を結びつけ、次のような図を考えると、図形的に非常に分かりやすくなる。

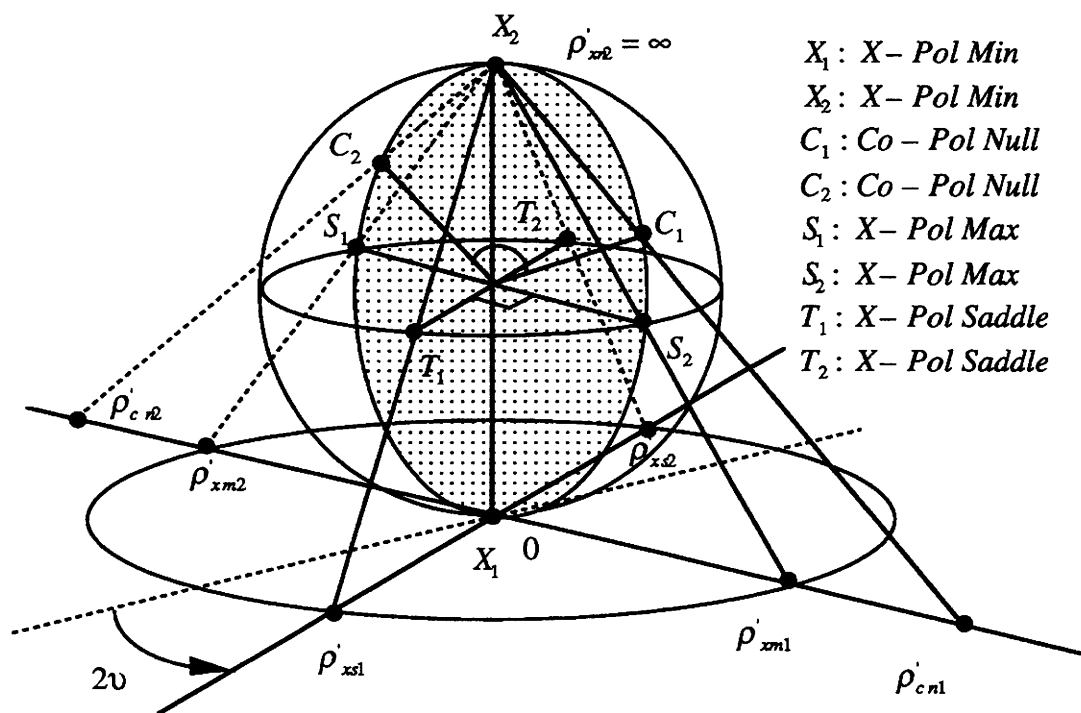


図7.2 ポアンカレー球と複素面

これから、特徴的偏波状態を抜き出してポアンカレー球上でその配置を見ると一般的に次のような形になっていることが分かる。

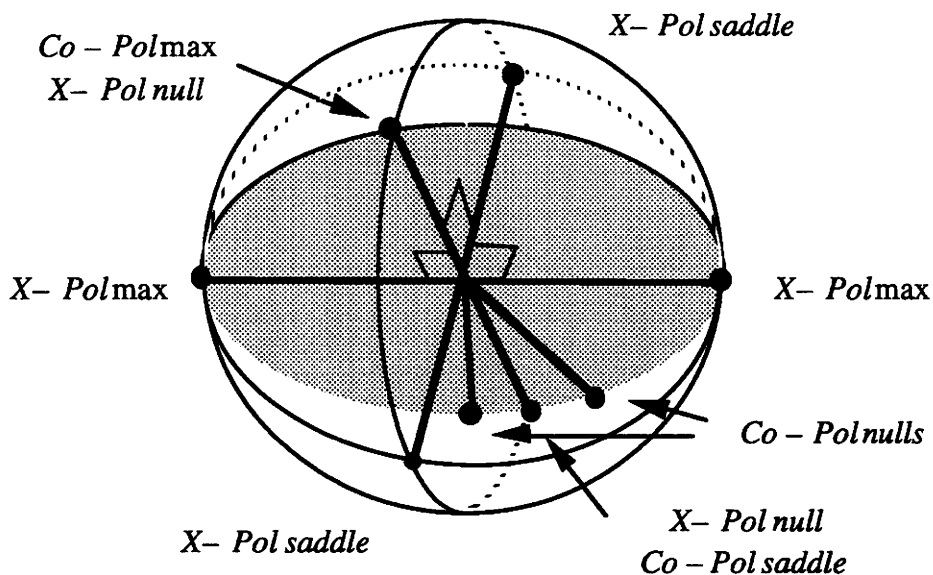


図7.3 ポアンカレー球上での特徴的偏波状態の配置 (Polarization Fork)

特徴的偏波状態のうち、Co-Pol Max, Co-Pol saddle, Co-Pol nullsはフォークの形を形成しているので、HuynemによってPolarization Forkと呼ばれた。その後、X-Pol Maxs, X-Pol saddlesが追加されている。この図から、逆に2つのCo-Pol nullsが決定されれば、残りの偏波状態は決められることが予想されるであろう。

これらをHV基底での偏波比 ρ に変換するには基底変換行列を使えばよい。
 なお、Co-Pol nullを求める問題は $P^c = 0$ と等価であり、

$$P^c = \left| \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho \end{bmatrix}}{1 + \rho\rho^*} \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{HV} & S_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \frac{S_{HH} + 2 S_{HV} \rho + S_{VV} \rho^2}{1 + \rho\rho^*} \right|^2 = 0 \quad (7.2.3)$$

その根を ρ_{xn1}, ρ_{xn2} とすれば、

$$\rho_{xn1}, \rho_{xn2} = \frac{-S_{HV} \pm \sqrt{S_{HV}^2 - S_{HH}S_{VV}}}{S_{VV}} \quad (7.2.4)$$

となって古い基底での偏波比が直接求められる。

X-Pol nullを求める問題も $P^x = 0$ と等価であり、

$$P^x = \left| \frac{\begin{bmatrix} \rho^* - 1 \end{bmatrix}}{1 + \rho\rho^*} \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{HV} & S_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \frac{-S_{HV} + S_{HV} \rho\rho^* + S_{HH}\rho^* - \rho S_{VV}}{1 + \rho\rho^*} \right|^2 = 0 \quad (7.2.5)$$

したがって、この式は以前にでてきた散乱行列の非対角要素を0にする問題と同じになる。

$$\rho_{cn1,2} = \rho_{xn1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (7.2.6)$$

$$A = S_{HH}^* S_{HV} + S_{HV}^* S_{VV} \quad B = |S_{HH}|^2 - |S_{VV}|^2 \quad C = -A^* \quad (7.2.7)$$

7.3 受信電力

受信電力はこの固有基底で特徴的偏波状態を使うと、

$$P^c(\rho'_{cm1}) = \left| \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}{1 + 0 \cdot 0} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right|^2 = |\lambda_1|^2 = m^2 \quad (7.3.1)$$

$$P^c(\rho'_{cs}) = \left| \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \infty\infty}{1 + \infty\infty} \right|^2 = |\lambda_2|^2 = m^2 \tan^4 \gamma \quad (\tan^2 \gamma < 1) \quad (7.3.2)$$

$$P^x(\rho'_{xm1}) = P^x(\rho'_{xm2}) = \frac{1}{4} (|\lambda_1| + |\lambda_2|)^2 = \frac{m^2}{4} (1 + \tan^2 \gamma)^2 = \frac{m^2}{4 \cos^4 \gamma} \quad (7.3.3)$$

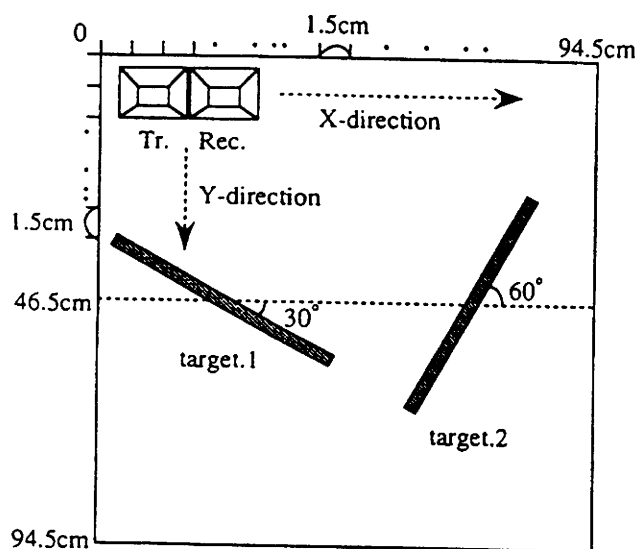
$$P^x(\rho'_{xs1}) = P^x(\rho'_{xs2}) = \frac{1}{4} (|\lambda_1| - |\lambda_2|)^2 = \frac{m^2}{4} (1 - \tan^2 \gamma)^2 = \frac{m^2 \cos^2 2\gamma}{4 \cos^4 \gamma} \quad (7.3.4)$$

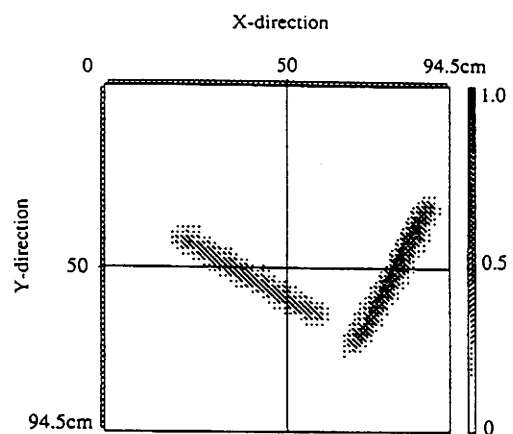
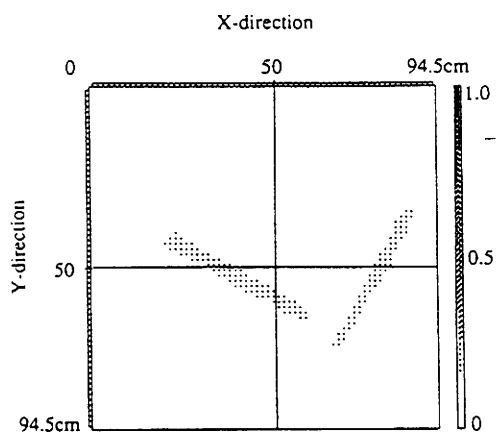
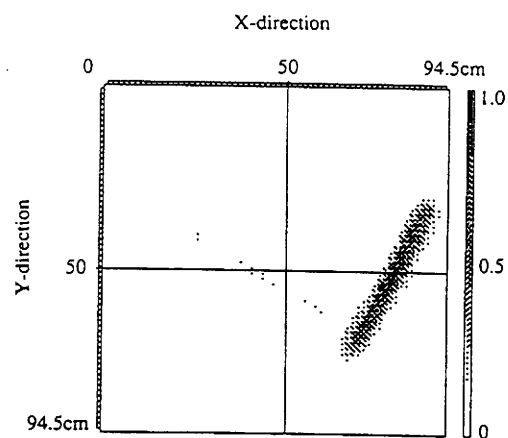
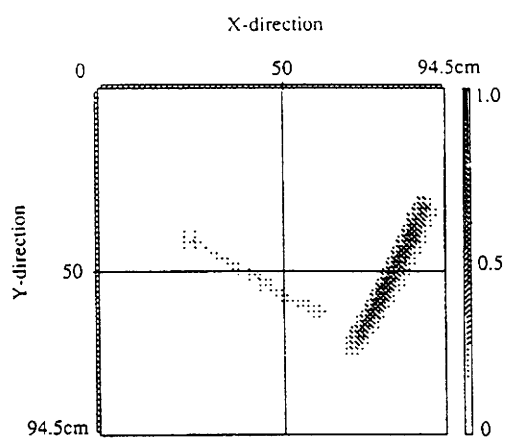
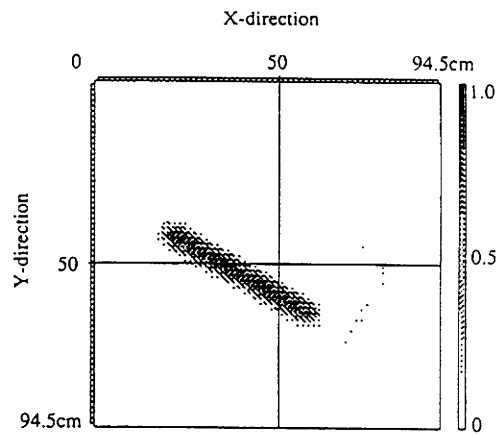
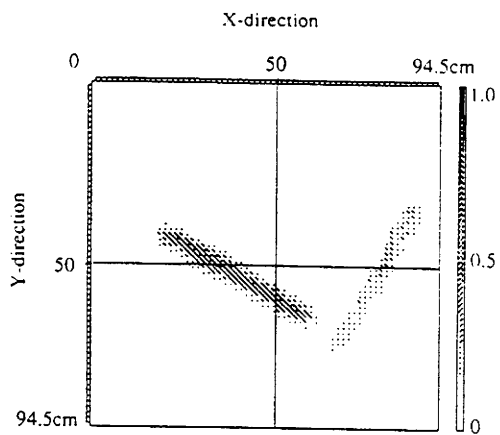
$$P^c(\rho'_{cn1}) = P^c(\rho'_{cn2}) = 0 \quad (7.3.5)$$

$$P^x(\rho'_{xn1}) = P^x(\rho'_{xn2}) = 0 \quad (7.3.6)$$

7.4 特徴的偏波状態でのイメージング

後述のFM-CWレーダを用いて、線状のターゲット2本を直交するように配置し、 x y テーブルにてアンテナを走査してポーラリメトリックイメージングを行った。 x 方向に対してターゲット1は -30 度、ターゲット2は 60 度傾けてある。各偏波基底での2次元合成開口処理結果、及び特徴的偏波状態での結果、さらにSpan imageを示す。これらのターゲットは互いに直交しているので、一方のMaxは他方のNull状態に相当する。したがって、一方にMaxをあわせれば他方が見えなくなるはずである。実験結果からもこのことが確かめられている。





8章 Polarimetric Contrast Enhancement

ポーラリメトリックレーダ画像は非常に数多くのピクセルからなっている。レーダの分解能に応じて、ピクセルがカバーする領域の広さが変わるが、一つのピクセルには一つの散乱特性が付随している。そこで、ポーラリメトリックレーダでは各ピクセルに対して希望する偏波状態でのイメージングが可能という利点がでてくる。これは、従来の固定偏波には無いものである。レーダシーンの中で着目する2つのターゲットA,Bがあるとき、AをBに対して強調したい場合、あるいはAだけを見たい場合、偏波状態を使ってフィルタリングをかけることができる。これは例えばクラッタに埋もれたターゲットを検出する場合や、埋没物体の検出等に大きな威力を発揮する。ターゲットの特徴的な偏波状態を使ってフィルタリングを行なうものとは少し手法が異なる。

8.1 受信電力によるコントラスト

クラッタやノイズをはじめ不要なピクセルから得られる電力と、こちらが必要なターゲットの電力を用いて、次式のように偏波によるコントラストを定義する。希望するターゲットを1, クラッタなど不要なターゲットを2の添え字を付けて表すとすれば受信電力比は

$$C = \frac{\text{desired power}}{\text{undesired power}} \quad (8.1)$$

これをコントラストエンハンスメントファクター(contrast enhancement factor)と呼ぼう。すると我々は3つの偏波チャンネルを持っているのでチャンネル毎にコントラストファクターを定義することができる。

$$\text{Co-Pol Channel : } C^c = \frac{P_1^c}{P_2^c} = \left| \frac{E_t^T [S]_1 E_t}{E_t^T [S]_2 E_t} \right|^2 = \frac{g_t^T [K]_{c,1} g_t}{g_t^T [K]_{c,2} g_t} \quad (8.2)$$

$$\text{X-Pol Channel : } C^x = \frac{P_1^x}{P_2^x} = \left| \frac{E_{t\perp}^T [S]_1 E_t}{E_{t\perp}^T [S]_2 E_t} \right|^2 = \frac{g_t^T [K]_{x,1} g_t}{g_t^T [K]_{x,2} g_t} \quad (8.3)$$

$$\text{Matched Channel : } C^m = \frac{P_1^m}{P_2^m} = \left| \frac{E_t^{*T} [G]_1 E_t}{E_t^{*T} [G]_2 E_t} \right|^2 = \frac{g_t^T [K]_{m,1} g_t}{g_t^T [K]_{m,2} g_t} \quad (8.4)$$

コントラストを最適化することは、Cが最大となる偏波状態を選ぶことであり、その偏波状態で、再度イメージングを行えば、最もコントラストのよい画像が得られる。この偏波状態は、いわゆるNull Polarization Stateで、これによって、不要なターゲットを消すことができる。これはチャンネル毎に行える。水中にある物体を見るとき、水面が光の反射で見にくい場合、カメラで偏光フィルターを使うと、よく見えるようになることと本質的に等価である。

散乱行列と偏波比を使ったときの手法も、ケノーベクトルを使ったときの手法も、本質的に同じであるが、以下に具体例を挙げて説明する。

8.2 Bonnanza Creek, AK, USA (AIR SAR data no. CC0045L)

NASA JPLから提供を受けたデータは、Full Polarimetricであるが、Stokes Matrix form でデータが格納されているため、我々が用いている定義に一致するようにデータの形式を変更してから、画像処理を行った。

着目したのは、森と河原である。この2つのターゲットの偏波状態がどのようになっているかを調べるために、性質のよく分かっているX-Pol channelでMaxを示す偏波状態をプロットしたものが、図8.1である。その結果、河原と森では異なる位置にMAXがあることが分かる。そこで、約40ピクセル程度からMueller行列の平均値を決定し、

River side

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} 2.5903 & 0.3716 & 0.0391 & 0.0060 \\ 0.3716 & 2.0150 & 0.0426 & -0.0274 \\ 0.0391 & 0.0426 & -0.9294 & -0.1669 \\ 0.0060 & -0.0274 & -0.1669 & 1.5047 \end{bmatrix}$$

Forested area

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} 1.2749 & 0.3539 & -0.0614 & -0.0298 \\ 0.3539 & 1.0870 & -0.0007 & 0.0010 \\ -0.0614 & -0.0007 & 0.3154 & 0.7949 \\ -0.0298 & 0.0010 & 0.7949 & -0.1276 \end{bmatrix}$$

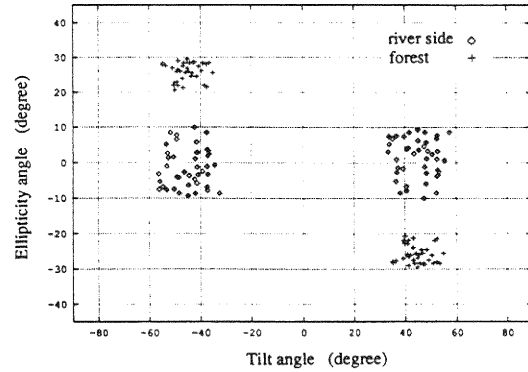


図8.1 X-Pol Max distribution

なる値を得た。これを基に、Polarimetric signatureを描いた結果を図8.2に示す。また、パワー比であるContrast signatureも同時に示す。この結果から、希望するターゲット（河原）の最大値を与える偏波状態がコントラスト最大ではないことが分かる。共に特徴的な偏波状態でイメージングをしたものを図8.3に示す。

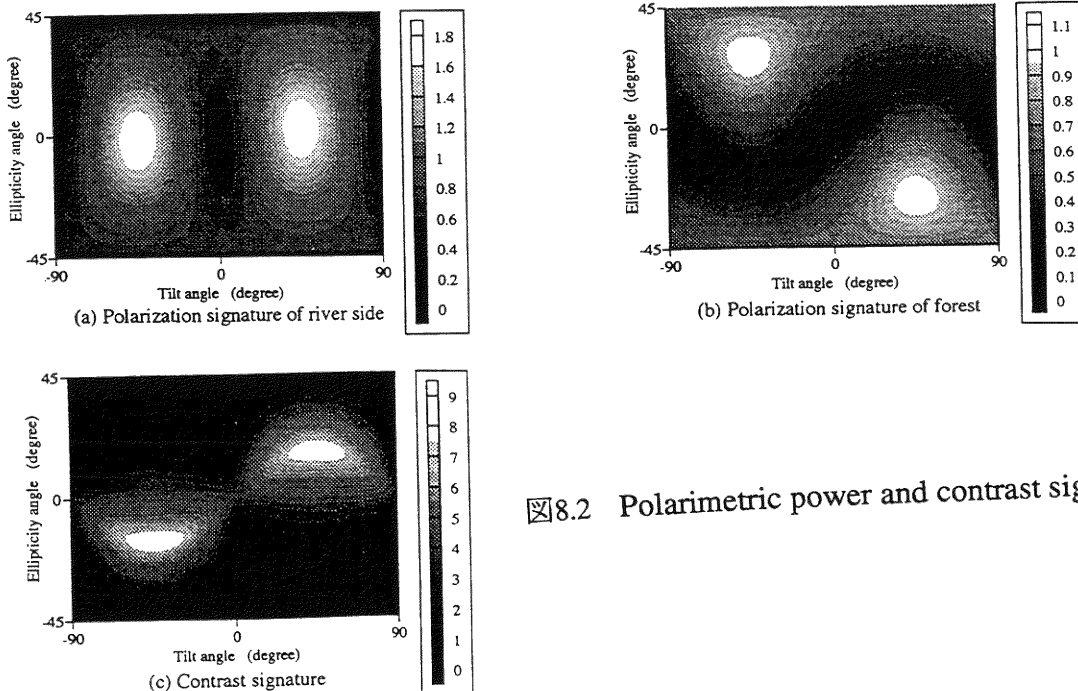
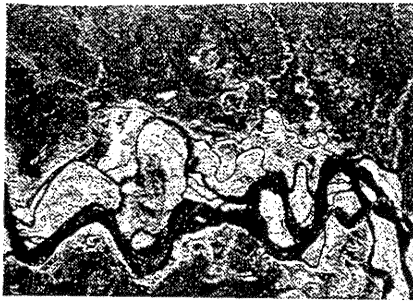


図8.2 Polarimetric power and contrast signature

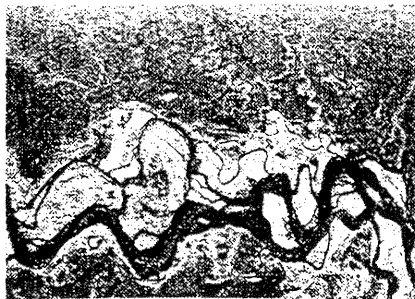


(a) X-Pol image which maximizes river side



(b) Maximum contrast image (river side / forest)

X-Pol channel



(a) Co-Pol image which maximizes river side



(b) Maximum contrast image (river side / forest)

Co-Pol channel



(a) M-Pol image which maximizes river side



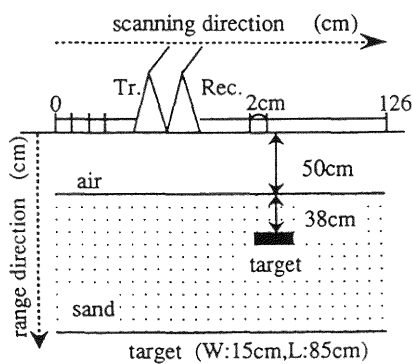
(b) Maximum contrast image (river side / forest)

Matched-Pol channel

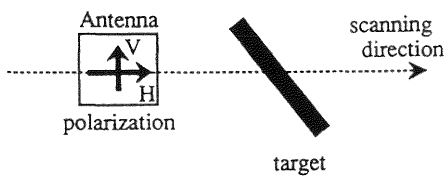
8.3 地中FM-CWレーダのデータについて

地中レーダは、地中に埋没した遺跡、遺構、パイプ、ケーブルなどのターゲット検出を目的としている。我々の開発してきたFM-CWレーダで、金属板を探索した結果を示す。特に、地中では表面からのクラッタが大きい。そこで、ターゲットを最大にするCo-Pol Maxと地表面を消すCo-Pol Nullを用いて、イメージングを行った。

これから、ターゲット最大のCo-Pol Maxが必ずしも最適な偏波とは言えないことが分かる。地中レーダでは、レーダ探査する側として既知のものは地表面である。したがって、最初から地表面の反射を打ち消す偏波状態を用いてやれば最も地中内部が良く見えるようになる。この点は、固定交差偏波によるイメージングとは異なることに注意が必要である。

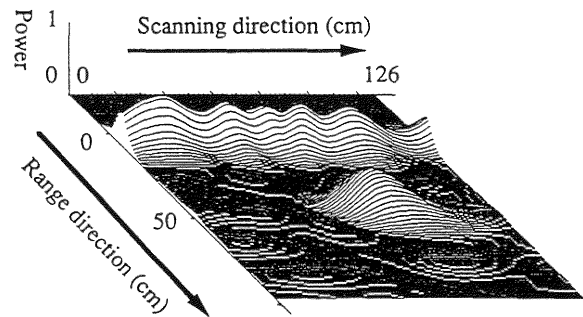


(a) Cross-sectional view

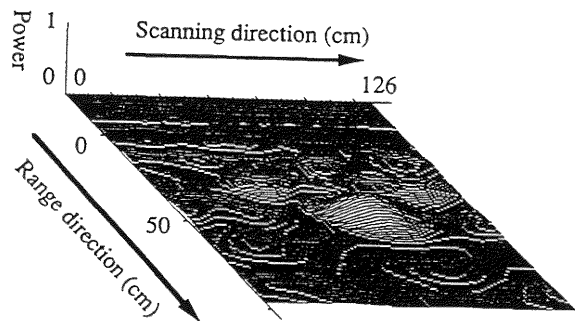


(b) Top view

実験状況



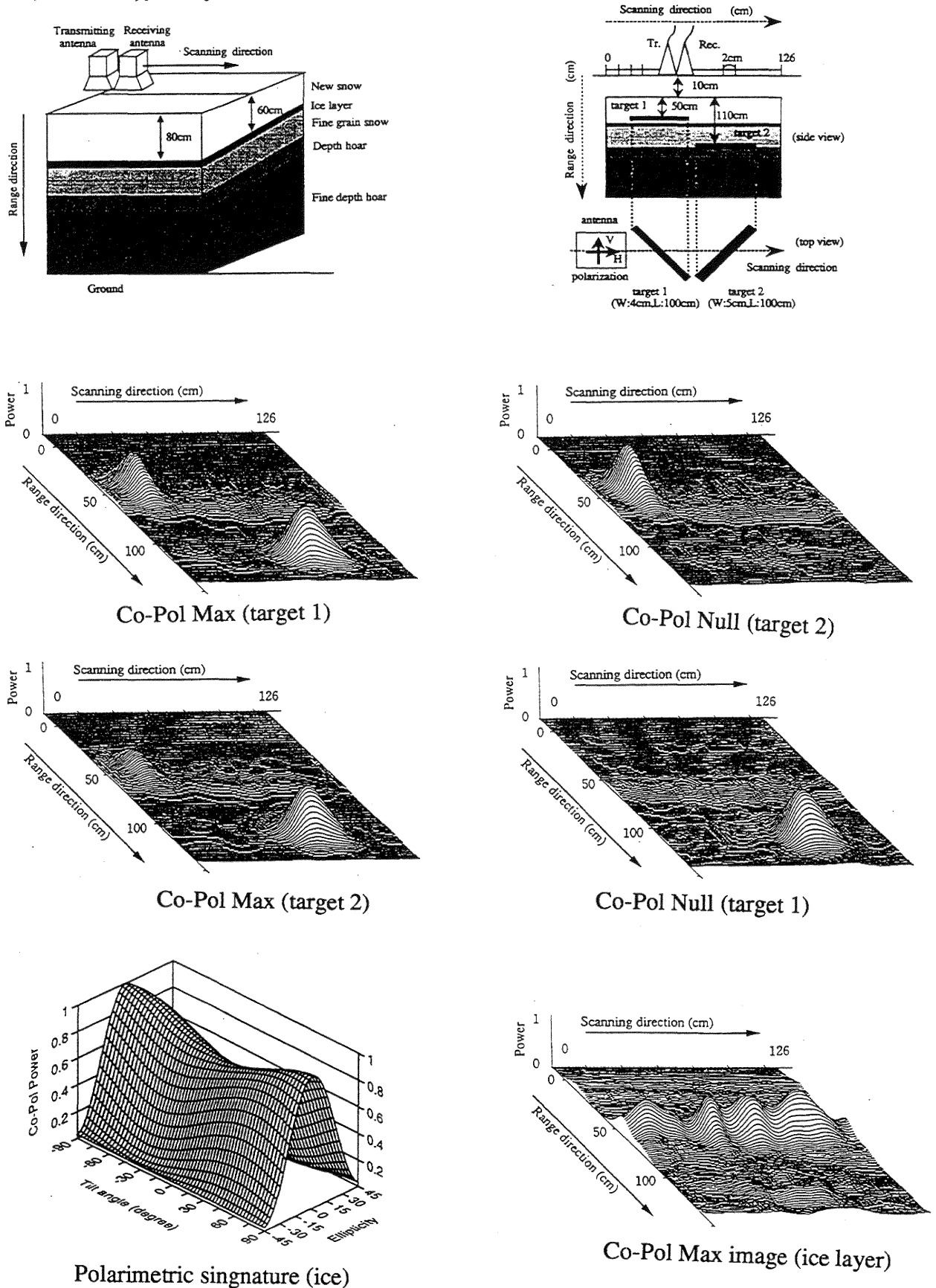
ターゲットのCo-Pol max image



地表面のCo-Pol null image

8.4 雪中FM-CWレーダによるイメージング

新潟県古志郡山古志村にて行った雪中埋没物体の検出について、その状況と観測結果例を図に示す。特に興味深いのは、氷のpolarimetric singatureである。このレスポンスから平板であることが分かる。



9章 ターゲットの分解

レーダイメージには数多くのピクセル=散乱行列がある。その中で散乱行列が与えられたとき、ターゲットの分解について考えてみよう。これは、ターゲットの散乱行列を基本的な散乱行列に分解し、最もよくマッチするものを選びだし、その散乱行列からターゲットを推定する逆問題である。

9.1 散乱行列と偏波基底

散乱行列自体はそれを取得する偏波基底によって変化する。たとえば、直線偏波基底で測定した線ターゲットは円偏波基底で測定したものと異なる値をとる。また、ターゲットが傾いてきたら、直線偏波基底の中でも散乱行列が変わる。どの基底で理論的な解析をしたらよいであろうか？あるいはどの基底で測定した方がよいであろうか？

物理現象として、直線偏波基底でレーダターゲットに関して線状ターゲットの散乱行列は線状ターゲットのオリエンテーション角（向き）によって変化する。コーナーリフレクタもおなじ。平板や球はターゲットの向きによらず一定の値をとる。ことは知っている。

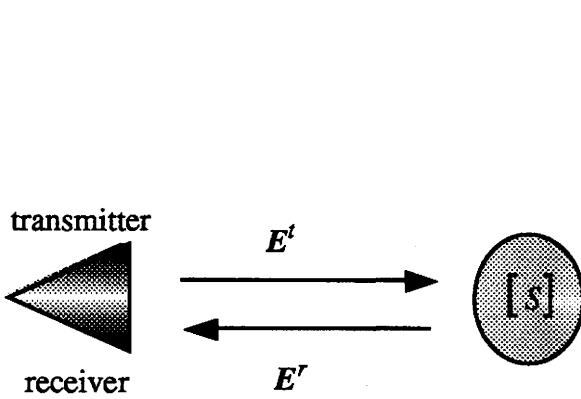


図9.1 後方散乱行列

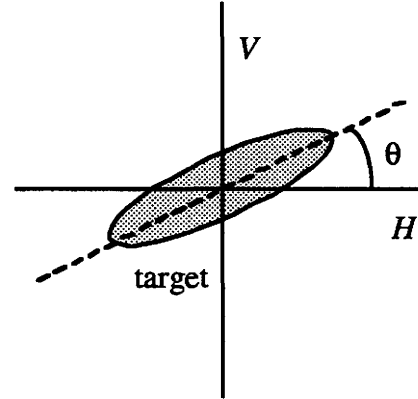


図9.2 傾いたターゲット

これらのことを理論的に確かめておこう。ターゲットが傾くとは、図9.2のようにオリエンテーション角（向き）が変化することで、これは、レーダでみるターゲットの偏波基底を回転させることに相当する。どのような偏波基底でも散乱行列は基底変換ができるので、変換行列を使って

$$[S'(AB)] = [T]^T [S(HV)] [T] = \begin{bmatrix} \dot{S}_{AA}' & \dot{S}_{AB}' \\ \dot{S}_{BA}' & \dot{S}_{BB}' \end{bmatrix} \quad (9.1.1)$$

の様に新しい偏波基底がとれる。直線偏波基底の中で、この回転を表すユニタリー変換行列は

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (9.1.2)$$

である。monostatic radar を仮定するとHV基底で $S_{hv} = S_{vh}$ なので、偏波基底を θ だけ回転さ

せると散乱行列は

$$[S(HV)]_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (9.1.3)$$

$$[S(HV)]_{\theta} = \begin{bmatrix} S_{hh} \cos^2 \theta + S_{vv} \sin^2 \theta - S_{hv} \sin 2\theta & \frac{S_{hh} - S_{vv}}{2} \sin 2\theta + S_{hv} \cos 2\theta \\ \frac{S_{hh} - S_{vv}}{2} \sin 2\theta + S_{hv} \cos 2\theta & S_{hh} \sin^2 \theta + S_{vv} \cos^2 \theta + S_{hv} \sin 2\theta \end{bmatrix} \quad (9.1.4)$$

となる。各ターゲットについてみてみよう

$$\text{wire } (S_{hh} = 1 \quad S_{hv} = S_{vv} = 0) \quad (9.1.5)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0 \quad [S(hv)]_{\theta=0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \theta = \theta \quad [S(hv)]_{\theta=\theta} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ \theta = 90 \quad [S(hv)]_{\theta=90} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{plate, sphere, trihedral corner reflector } (S_{hh} = S_{vv} = 1 \quad S_{hv} = 0) \quad (9.1.6)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0 \quad [S(hv)]_{\theta=0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \theta = \theta \quad [S(hv)]_{\theta=\theta} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \theta = 90 \quad [S(hv)]_{\theta=90} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{diplane, corner reflector } (S_{hh} = 1 \quad S_{hv} = 0 \quad S_{vv} = -1) \quad (9.1.7)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0 \quad [S(hv)]_{\theta=0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \theta = \theta \quad [S(hv)]_{\theta=\theta} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \\ \theta = 90 \quad [S(hv)]_{\theta=90} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{left helix } (S_{hh} = 1 \quad S_{vv} = -1 \quad S_{hv} = j) \quad (9.1.8)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0 \quad [S(hv)]_{\theta=0} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} \\ \theta = \theta \quad [S(hv)]_{\theta=\theta} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-j2\theta} & j e^{-j2\theta} \\ j e^{-j2\theta} & -e^{-j2\theta} \end{bmatrix} = \frac{e^{-j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} \\ \theta = 90 \quad [S(hv)]_{\theta=90} &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{right helix } (S_{hh} = 1 \ S_{vv} = -1 \ S_{hv} = -j) \quad (9.1.9)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0 \quad [S(hv)]_{\theta=0} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix} \\ \theta = \theta \quad [S(hv)]_{\theta=\theta} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & -j e^{j2\theta} \\ -j e^{j2\theta} & -e^{j2\theta} \end{bmatrix} = \frac{e^{j2\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix} \\ \theta = 90 \quad [S(hv)]_{\theta=90} &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

そこで、オリエンテーション角に依存しない基底がとれれば望ましい。これに対応するものとして円偏波基底がある。今まで、直線偏波基底で偏波の現象を考えてきたが、どのような偏波基底でも散乱行列は基底変換ができることを思い出そう。新しい基底となる偏波基底ベクトルA, Bを,

$$A_{(HV)} = \frac{e^{j\phi_1}}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \end{bmatrix}, \quad B_{(HV)} = \frac{e^{j\phi_2}}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} \rho^* \\ -1 \end{bmatrix} \quad (9.1.10)$$

とすると、基底変換行列[T]は,

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{1+\rho\rho^*}} \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} & \rho^* e^{j\phi_2} \\ \rho e^{j\phi_1} & -e^{j\phi_2} \end{bmatrix} \quad (9.1.11)$$

$$[S'(AB)] = [T]^T [S(HV)] [T] = \begin{bmatrix} S'_{AA} & S'_{AB} \\ S'_{BA} & S'_{BB} \end{bmatrix} \quad (9.1.12)$$

にて与えられる。このとき、散乱行列は次のように変換される。

$$S'_{AA} = \frac{1}{1+\rho\rho^*} \left(S_{HH} + 2\rho S_{HV} + \rho^2 S_{VV} \right) e^{j2\phi_1} \quad (9.1.13a)$$

$$S'_{AB} = S'_{BA} = \frac{1}{1+\rho\rho^*} \left[\rho^* S_{HH} + (\rho\rho^* - 1) S_{HV} - \rho S_{VV} \right] e^{j(\phi_1 + \phi_2)} \quad (9.1.13b)$$

$$S'_{BB} = \frac{1}{1+\rho\rho^*} \left(\rho^{*2} S_{HH} - 2\rho^* S_{HV} + S_{VV} \right) e^{j2\phi_2} \quad (9.1.13c)$$

これから直線偏波と円偏波の間では次の関係があることがわかる。

$$[S(LR)] = [T]^T [S(HV)] [T] = \begin{bmatrix} S_{LL} & S_{LR} \\ S_{RL} & S_{RR} \end{bmatrix} \quad (9.1.14)$$

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (9.1.15)$$

$$S_{LL} = \frac{1}{2} (S_{HH} - S_{VV}) + j S_{HV} \quad S_{LR} = \frac{1}{2} (S_{HH} + S_{VV}) \quad (9.1.16a)$$

$$S_{LR} = \frac{1}{2} (S_{HH} + S_{VV}) \quad S_{RR} = \frac{1}{2} (S_{HH} - S_{VV}) - j S_{HV} \quad (9.1.16b)$$

実験では直線偏波基底で散乱行列を取得し、それを円偏波基底に変換すればよい。2つの偏波基底における、具体的なターゲットの散乱行列の関係を調べてみよう。円偏波基底では散乱行列を代入して求めると

$$\text{wire} \quad [S(lr)]_{\theta=0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 1 \\ 1 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix} \quad (9.1.17)$$

$$\text{plate} \quad [S(lr)]_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1.18)$$

$$\text{diplane} \quad [S(lr)]_{\theta=0} = \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix} \quad (9.1.19)$$

$$\text{left helix} \quad [S(lr)]_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix} = e^{-j2\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.1.20)$$

$$\text{right helix} \quad [S(lr)]_{\theta=0} = \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e^{j2\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1.21)$$

以上をまとめると次の表9.1のようになる。

表9.1 2つの偏波基底における基本的な散乱行列

	Linear basis (HV)	Circular basis (LR)
$[S]_{\text{plate}}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$[S]_{\text{diplane}}$	$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$
$[S]_{\text{wire}}$	$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 1 \\ 1 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$
$[S]_{L\text{-helix}}$	$\frac{1}{2} e^{-j2\theta} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix}$	$e^{-j2\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$[S]_{R\text{-helix}}$	$\frac{1}{2} e^{j2\theta} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & -1 \end{bmatrix}$	$e^{j2\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

円偏波基底ではこの例のように、非対角項にrotation-invariantな性質が出てくる。非対角項は角度によって変化しない。また、この例からも予想されるように、重要な点は非対角項の大きさとターゲットを分類できる可能性がある。そこで、散乱行列の要素の大きさのみに着目し、散乱行列を分解するようにアルゴリズムを考える。

9.2 散乱行列の分解

さて、散乱行列はモノスタティックレーダを想定すると、一般に

$$[S(HV)] = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & c \\ c & a-b \end{bmatrix} \quad (9.2.1)$$

のように書くことができる。要素はすべて複素数である。相対散乱行列なので、ある要素の実部を正の実数としたとして、未知数は全体で振幅、位相を含め5つとなる。

この散乱行列を分解する際、上の変換表でわかるように、同じターゲットでも要素の現れ方が異なる。そこで、理論的にわかっている直線基底の散乱行列をもとに次の形に書いてみる。

$$\text{HV} \quad \begin{bmatrix} a+b & c \\ c & a-b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2.2)$$

一般 sphere, plate diplane others ?

これを円偏波LR基底に書き換えると

$$[S(LR)] = \begin{bmatrix} S_{LL} & S_{LR} \\ S_{RL} & S_{RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+jc & a \\ a & b-jc \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + jc \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

すると、 a は非対角項のみに現れてくる。つまり、 S_{LR} 成分はsphere, plate成分を表していることとなる。しかし、45, 135度のような傾いたワイヤでも sphere, plate成分として検出されてしまう問題がある。

そこで、Krogager, Czyzらは、円偏波基底で次のように、sphere, diplane, helixの3成分に分解した。

$$[S] = \begin{bmatrix} a+b & c \\ c & a-b \end{bmatrix} \quad (9.2.3)$$

$$[S] = e^{j\varphi} \left\{ e^{j\varphi_s} K_s [S]_{\text{sphere}} + K_d [S]_{\text{diplane}} + K_h [S]_{\text{helix}} \right\} \quad (9.2.4)$$

LR基底では、右回りHelix成分を含むターゲットに対して、

$$[S(LR)] = e^{j\varphi} \left\{ e^{j\varphi_s} K_s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + K_d \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix} + K_h \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (9.2.5)$$

または、左回りHelix成分を含むターゲットに対して、

$$\left[S_{(LR)} \right] = e^{j\varphi} \left\{ e^{j\varphi_s} K_s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + K_d \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix} + K_h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix} \right\} \quad (9.2.6)$$

係数 K_s, K_d, K_h は各基準散乱行列の強さを示すが、具体的には、 K_s はターゲットでの奇数回反射成分の大きさを、 K_d は偶数回反射成分の大きさを、 K_h は直線偏波を円偏波に変える(Helix)成分の大きさを示す。また、 θ はターゲットの方向角であり、 φ はabsolute phase、 φ_s はsphere成分に対するdiplane, helix成分の変位を示す。ただし、 φ_s はDiplane成分に対するSphere成分の変位。散乱行列の説明でも述べたとおり、LR基底での式の方が扱いやすく、上の円偏波での3成分分解法の式からも、 K_s, K_d, K_h の比や方向角 θ が、散乱行列から容易に分かる。つまり式が単純になり、利用しやすく、考察を行いやすい。

K_s, K_d, K_h を求める式は以下の通りである。

$$\left[S_{(LR)} \right] = e^{j\varphi} \begin{bmatrix} (K_d + K_h) e^{j2\theta} & K_s e^{j\varphi_s} \\ K_s e^{j\varphi_s} & K_d e^{-j2\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |S_{LL}| e^{j\varphi_{LL}} & |S_{LR}| e^{j\varphi_{LR}} \\ |S_{LR}| e^{j\varphi_{LR}} & |S_{RR}| e^{j\varphi_{RR}} \end{bmatrix} \quad (9.2.7)$$

この式の要素を比較して、大きさから、

$$K_s = |S_{LR}|, \quad K_d = |S_{LL}|, \quad K_h = |S_{RR}| - |S_{LL}| \quad \text{for } |S_{RR}| > |S_{LL}| \quad (9.2.8)$$

$$K_s = |S_{LR}|, \quad K_d = |S_{LL}|, \quad K_h = |S_{LL}| - |S_{RR}| \quad \text{for } |S_{RR}| < |S_{LL}| \quad (9.2.9)$$

角度は

$$\theta = \frac{1}{4} (\varphi_{LL} - \varphi_{RR}) \quad (9.2.10)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} (\varphi_{LL} + \varphi_{RR}) \quad (9.2.11)$$

$$\varphi_s = \varphi_{LR} - \frac{1}{2} (\varphi_{LL} + \varphi_{RR}) \quad (9.2.12)$$

このようにして得られた K_s, K_d, K_h を、表9.2と比較することにより、ターゲットの特徴を把握することが出来る。

表9.2 K_s, K_d, K_h 成分と基本散乱ターゲット

	K_s	K_d	K_h
Sphere, Plate, Trihedral	1	0	0
Corner reflector, Diplane	0	1	0
Wire, 線状物体	0.5	0.5	0
right > left Helix	0	0	1

それゆえ、散乱行列の分類アルゴリズムは、要素の大きさを基本として図9.3のように行うことができる。

1. $|S_{lr}|$ と対角項成分の大きさを調べる。
2. $|S_{lr}|$ が値を持ち、対角項が
0とみなせる場合は、プレートの可能性が強い。
同じ程度の大きさなら、ワイヤーである。
3. $|S_{lr}|$ の値が対角項のどちらかに比べて十分小さい (≈ 0)
 $|S_{ll}| = |S_{rr}|$ なら コーナーリフレクタ
 $|S_{ll}| = 0$ なら left helix
 $|S_{rr}| = 0$ なら right helix

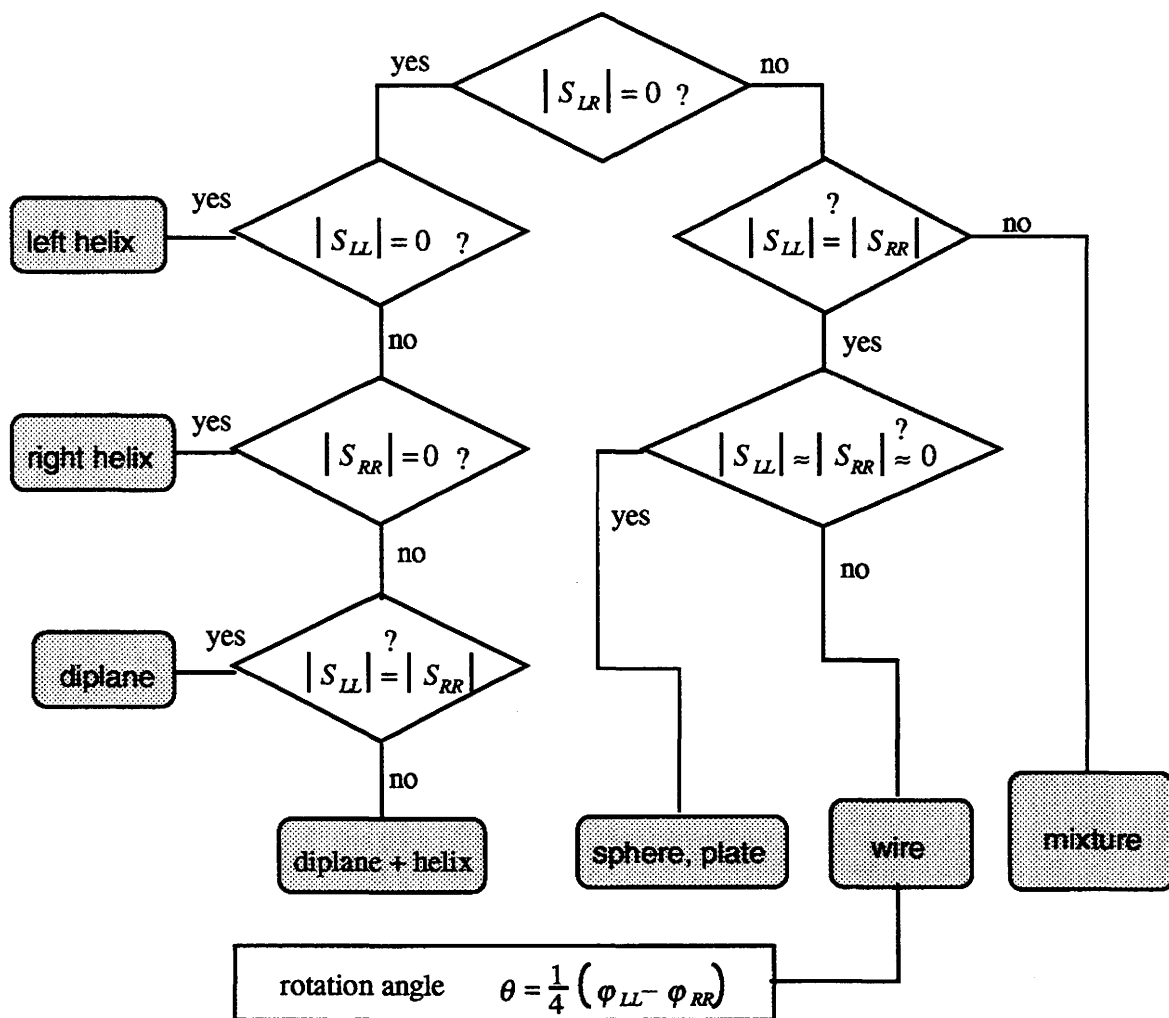


図9.4 散乱行列の分解アルゴリズム

このようにして分解された散乱行列とその構成要素の K_s, K_d, K_h から、求めたいピクセルを

$$\frac{K_i}{K_s + K_d + K_h} \quad (i = s, d, h) \quad (9.2.13)$$

の割合で、評価する。もし、ある特定の要素が90%を越えているようなら、それで代表するやり方である。ただし、ワイヤ成分に対しては

$$[S]_{wire} = \frac{1}{2} \left([S]_{diplane} + [S]_{sphere} \right) \quad (9.2.14)$$

のようにsphere, diplane成分が50%ずつである。

また、 θ 傾いたdiplane成分と $\theta + \pi/2$ 傾いたdiplane成分は同じ形の散乱行列になるので、この違いを認識するには、絶対位相を考慮する必要がある。

$$[S]_{diplane(\theta)} = \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix}, \quad [S]_{diplane(\theta+\pi/2)} = \begin{bmatrix} e^{j2(\theta+\pi/2)} & 0 \\ 0 & e^{-j2(\theta+\pi/2)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e^{j2\theta} & 0 \\ 0 & e^{-j2\theta} \end{bmatrix}$$

Wireの様なターゲットでは、前に述べたとおり、SphereとDiplaneの合成として現れる。方向角 θ は、Diplane成分に依存しているため、Diplane同様に90度異なった角度が得られる場合があるが、Sphere成分との位相差がゼロであるという条件($\phi_s=0$)を付けることにより、正しい θ を得ることが出来る。これについては、実験2により示す。

・実験1：複数のターゲットを並べ、分解、認識を行った。ターゲットの配置は図9.5に示すとおりである。奇数回反射するターゲットとしてPlateを2種類(4.5cm×20cm×1枚, 10cm×17cm×2枚), 偶数回反射するターゲットとしてCorner reflectorを4種類(5λ×1個, 4λ×2個, 3λ×2個, 2λ×2個), 図に示すような角度で配置し, Wireの様なターゲットとして線状物体を1個配置した。この線状物体とは, 10cm×8cmで厚さ1mmのPlateを垂直に立て, 8mm間隔で10枚並べたものである。分解結果を図9.6に示す。

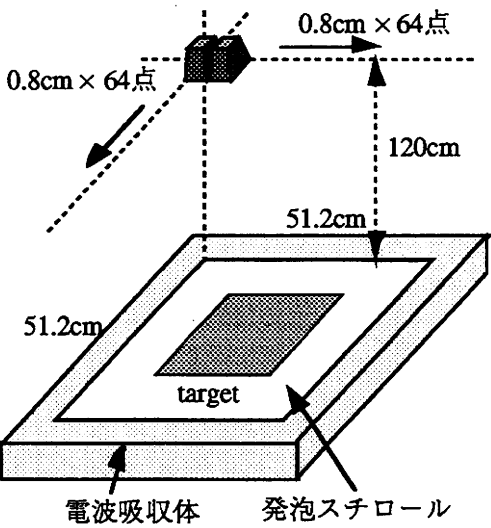


図9.4 測定状況

測定条件

掃引周波数	14.5-15.5GHz
走査間隔	0.8cm
走査点数	64×64点
ターゲットまでの距離	120cm
測定した偏波	HH,VV,HV

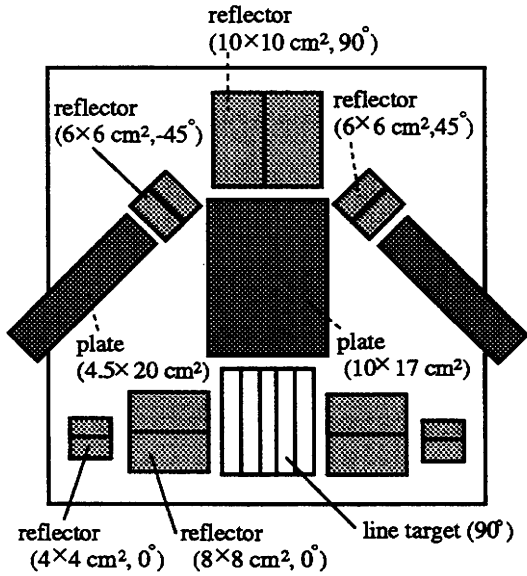


図9.5 ターゲットの配置

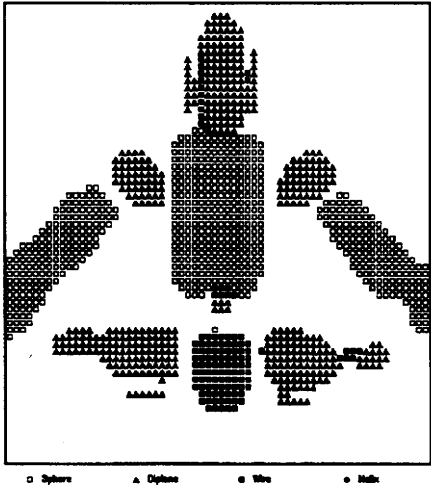
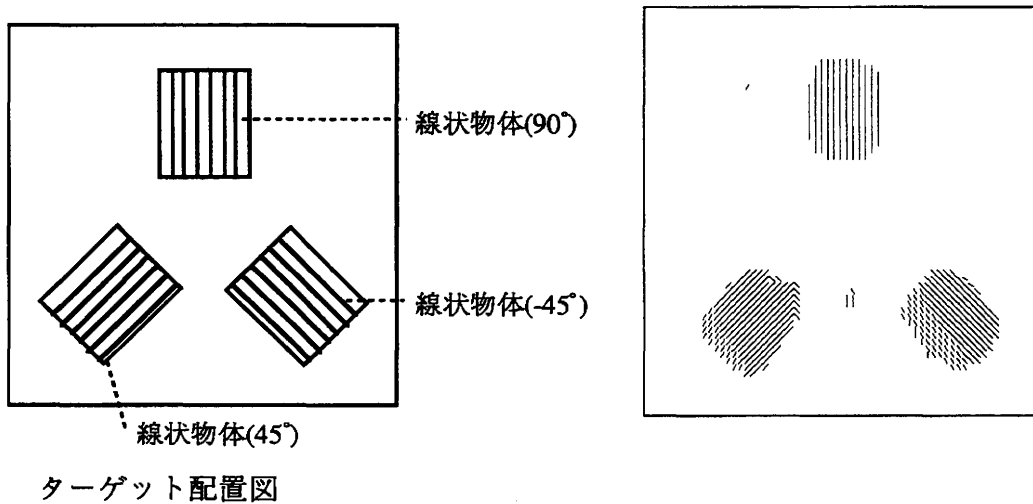


図9.6 分解結果

・実験2：Wireの様なターゲットでの方向角を求めるため，実験1で用いた線状物体を3個，図4の様にそれぞれ 90° 、 -45° 、 45° に配置して測定を行った。分解結果を図9.7 に示す。オリエンテーション角の測定結果を図9.8に示す。



分解の結果については表9.2の4タイプにマッチングを行っている。Wireについては K_s と K_d の比が(1:2)～(2:1)までとした。また，受信レベルの1割未満は表示していない。オリエンテーション角については， $90(-90)$ 、 60 、 45 、 30 、 0 、 -30 、 -45 、 -60 度の8タイプに分類を行った。

図9.6-8より，ターゲットが分解され，形状を認識できることがわかる。 2λ のreflectorは小さいために，大きな値は得られていないが，reflectorとして認識できる。また， 90 、 0 度のreflectorや， 45 、 -45 度の線状物体での誤差は，システムによるもの（アンテナを2つ並べてmonostaticなレーダを仮定しているなど）と思われる。

10章 FM-CWレーダ

レーダ(Radio Detection And Ranging)には軍用、気象、航空管制、資源探査用などいろいろな種類のレーダがある。レーダは電磁波を使ってターゲットまでの距離を求めたり、検出したりする装置であるが、最近はイメージングを行うことを主な目的にするようになってきた。その特徴は、電磁波というセンサーを使って物体を検出することであり、そのセンサーである電磁波の性質をうまく利用したものである。例えば、人間の目のように光領域の周波数ではターゲットが障害物に覆われていると検知することはできないが、可視光線ではなくマイクロ波のように周波数が低くなってくると覆っている障害物を透過するようになり、ターゲットを検出できる場合がある。その結果、例えば地中や雪中などに埋没した物体を検出することができるようになり、地中探査レーダのような発展的応用が考えられる。

現在、人工衛星や航空機に搭載されたレーダで地球環境、地表面、海洋、北極、南極の観測が行われているが、これも電磁波の雲を透過する性質をうまく利用したものである。そして、昼夜に関わらずデータの取得を可能にしている。注意すべき点はレーダで得られた画像データは使用している周波数での情報であって、人間の使っている光領域の情報ではないことである。この相違は欠点であると同時に利点でもある。使用する周波数やチャンネルが増えれば増えるほど、電磁波の散乱特性が変わるので、その情報を集め、解析することによって物体の認識に役立てることができるからである。一般にレーダ画像は光領域の画像に比べて分解能が悪いが、これは使用する周波数あるいはその波の波長に依存するためであり、分解能の問題を克服するために合成開口処理など分解能を向上させる努力が行われている。

さて、代表的なレーダの動作原理は図10.1に示すように、パルスを送り出し、ターゲットから跳ね返ってくる反射波を受信してその遅延時間 τ から距離の情報を得ている。レーダとターゲットの距離を R とすると、電磁波は $c = 3 \times 10^8$ m/sの速度で伝搬するので

$$\tau = \frac{2R}{c} \quad (10.1)$$

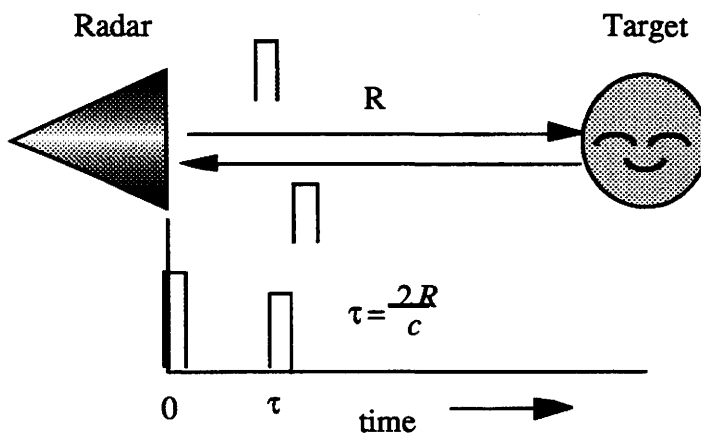


図10.1 時間領域（パルス）レーダの距離計測の原理

この遅延時間を直接測定するのがいわゆるパルスレーダの距離計測の原理である。一方、この時間領域の原理とは逆に周波数領域で距離を計測するレーダがある。それがFM-CWレーダであり、逆という言葉は時間と周波数を対極の量として扱うことを意味している。

10.1 FM-CWレーダ

FM-CWとはFrequency Modulated Continuous Waveの頭文字をとった略称であり、字の如く周波数変調した連続波を使う。図10.2(a)にレーダアンテナから放射される電磁波の時間と周波数の関係を示す。時間の経過と共に周波数が線形に大きくなるような信号である。FM-CWレーダでは周波数と時間が比例していることが重要で、このように送信信号に何らかの形を持たせた信号を変調信号という。図10.2(b)は(a)に対応する時間領域での波形である。時間が進むにつれて周波数が高くなり、音声で言えば低音から高音に移っていくので鳥のさえずりに似ていることから図10.2(b)の信号はチャープ信号とも呼ばれている。

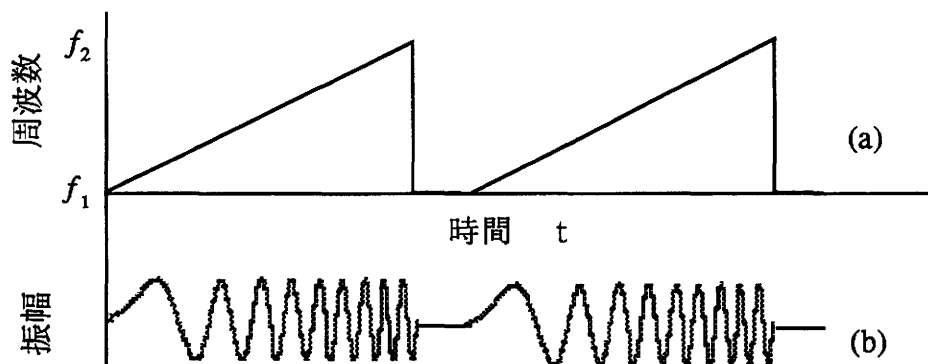


図10.2 FM-CWレーダの時間と周波数の関係

この送信波をアンテナから送り出し、距離 R_1 にある一つの物体に当てるとパルスレーダの時と同じように波は反射して遅延時間をもってレーダに戻ってくる（図10.3）。どの周波数でも速度は一定だから、反射波の時間と周波数の関係は図10.3(a)の波線のようなになる。そして、送信信号（実線）とは τ_1 だけ時間がずれる。つぎに、遠い距離 R_2 にある物体からの関係を調べると図10.3(b)のようになり、遠ければ遠いほど遅延時間の大きな反射波となる。ここで注意すべき点はある時間を固定したときの図10.3の縦軸から得られる値、すなわち送信波と受信波の周波数差である。時間と周波数が比例関係にあるので遅延時間が周波数差に比例していることである。差の周波数をビート周波数 f_b 、掃引時間 Δt 、掃引周波数幅 Δf とすると

$$\tau = \frac{2R}{c} \sqrt{\epsilon_r} \propto R \frac{\Delta t}{\Delta f} f_b \propto K f_b \quad (10.1.1)$$

の関係がある。 ϵ_r は電波の伝搬媒質中の比誘電率であり、空気中では1となる。従って、ビート周波数を計測すれば遅延時間が分かり、遅延時間が分かれば式(10.1)の関係から距離が分かってくる。これがFM-CWレーダの概念的な動作原理である。

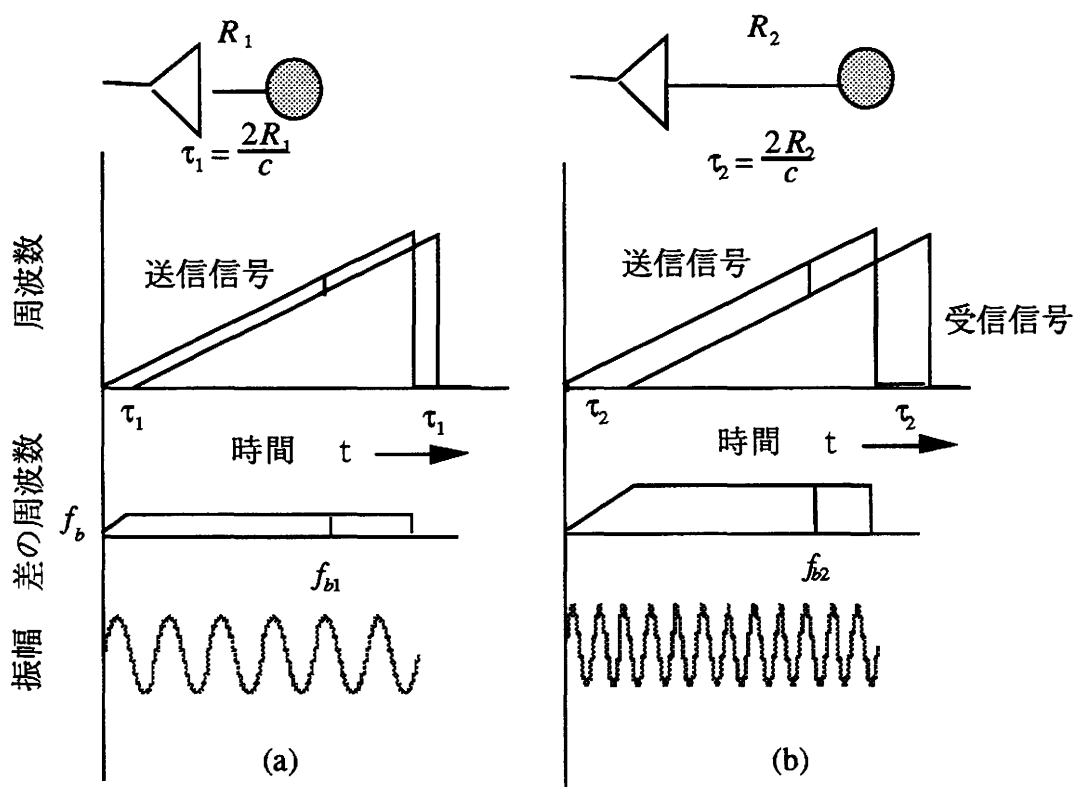


図10.3 FM-CWレーダの距離計測原理

さて、図10.4を参照して動作原理を具体的な式で示そう。 f_0 を送信信号の中心周波数とし、 Δf の周波数幅だけ掃引するとすれば、送信信号は次式で書くことができる。

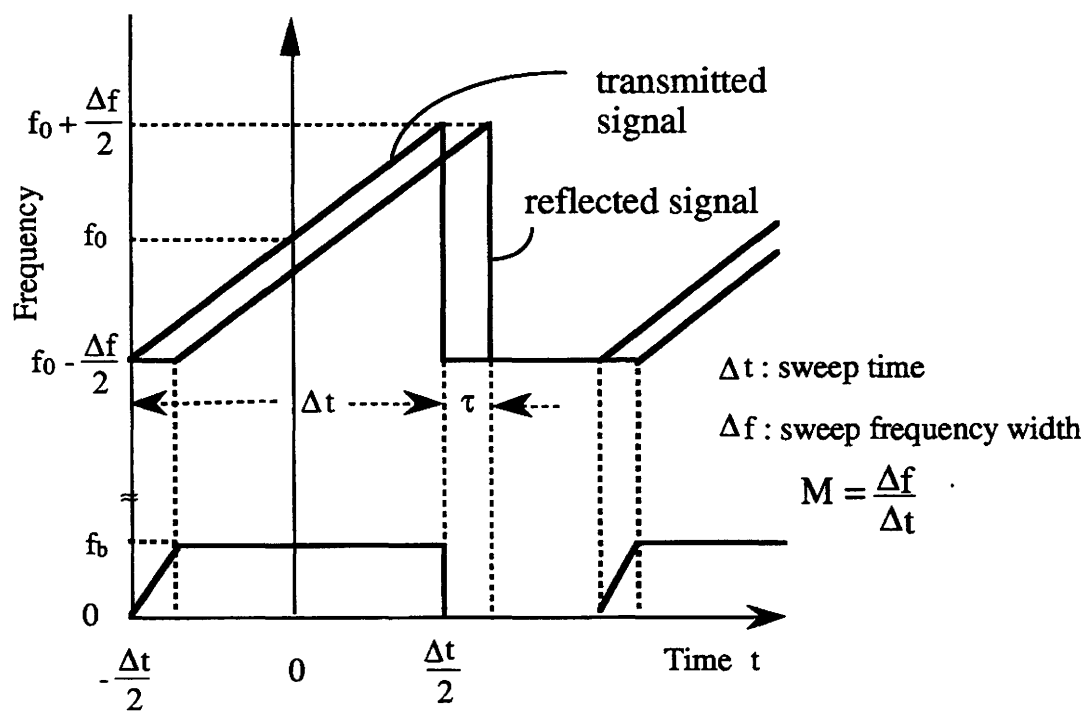


図10.4 FM-CWレーダの時間と周波数の関係

$$S_{tr}(t) = A \cos \left[2\pi \left(f_0 t + \frac{M}{2} t^2 \right) \right] \quad (10.1.2)$$

ここで, A : 振幅, t : time, $M = \frac{\Delta f}{\Delta t}$: 変調度, Δf : 掃引周波数幅, Δt : 掃引時間

もし, 比誘電率 ϵ_r の媒質中でアンテナから距離 r のに点ターゲットがあり, その点で反射係数が

$$g = g(x_0, z_0), \quad (x_0, z_0) : \text{coordinate of the object} \quad (10.1.3)$$

で表せられるとすると, レーダアンテナに戻って来る受信信号は

$$S_{rec}(t) = gA' \cos \left[2\pi \left\{ f_0 (t - \tau) + \frac{M}{2} (t - \tau)^2 \right\} \right] \quad (10.1.4)$$

となる。 A' は周波数と g に無関係な振幅で, $\tau = \frac{2r}{c} \sqrt{\epsilon_r}$ は遅延時間である。この2つの信号を加えあわせ, 非線形素子のミキサーで2乗検波すると

$$\left[S_{tr}(t) + S_{rec}(t) \right]^2 \quad (10.1.5)$$

この信号のうち, 低い周波数分 ($f \ll f_0$) のみをフィルターで拾い出すと

$$S_b(t) = gAA' \cos \left[2\pi \left(f_0 \tau + M\tau t - \frac{M}{2} \tau^2 \right) \right] \quad (10.1.6)$$

のビート信号が得られる。この中で時間 t に関する項はビート周波数を表し,

$$M\tau = \frac{2M\sqrt{\epsilon_r}}{c} r = \frac{2\sqrt{\epsilon_r}}{c} \frac{\Delta f}{\Delta t} r = f_b \quad (10.1.7)$$

距離 r に比例していることが分かる。それ故, 距離は

$$r = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r}} \frac{\Delta t}{\Delta f} f_b \quad (10.1.8)$$

によって求められる。FM-CWレーダで得られる信号は式(10.1.5)で, 図10.3の最下段に示すような時間領域の波形である。この時間領域の波形から周波数成分を取り出す方法として, よく知られたフーリエ変換がある。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (10.1.9)$$

これは時間領域の情報と周波数領域の情報の橋渡しをするもので、数学的には線形変換で時間と周波数に1対1の対応関係がある。したがって、パルスレーダのように時間領域で物理現象を考えても、FM-CWレーダのように周波数領域で考えても、上式の関係から本質は同等であると言える。掃引時間内で離散フーリエ変換を行うと周波数スペクトラムは次の式ようになる。

$$S_b(f) = B g \exp(j 2\pi f_0 \tau) \frac{\sin[\pi(f-f_b)\Delta t]}{\pi(f-f_b)\Delta t} \quad (10.1.10)$$

この絶対値を描くと図10.5のようになり、ビート周波数 f_{b1} , f_{b2} に対応しているところにピークが得られる。図10.5では2つのターゲットがあると仮定している。ピークをもつ周波数軸上の位置がターゲットまでの距離に対応しており、ローブの横幅は掃引周波数幅に依存する。つまり、周波数幅が広いほど、鋭いローブが得られ、逆に周波数幅が狭いほどなだらかになる。また、ピークをもつローブの隣はサイドローブと呼ばれ、本来ターゲットからのエコーではないので小さいほど望ましい。

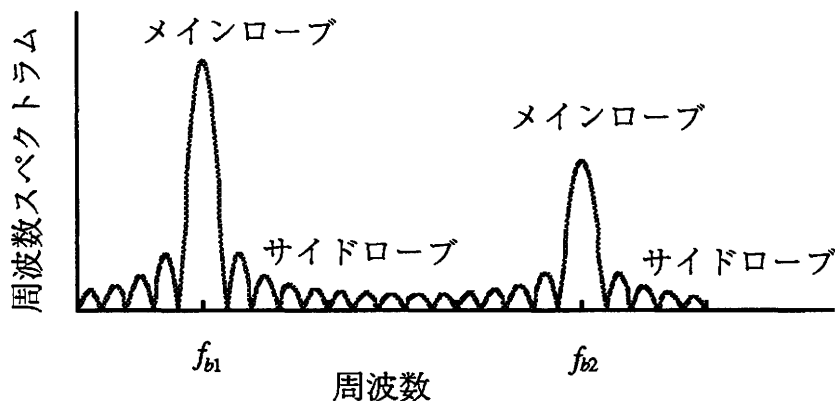


図10.5 周波数スペクトラム

10.2 合成開口法

今までの議論はレーダに対して距離方向のものである。距離方向で分解能を向上させるには基本的に周波数幅を広げればよい（伝搬媒質やアンテナの制約があるが）。一方、ターゲットのイメージングを行うにはレーダを横方向に走査しなければならない。そのとき問題となるのは横方向に走査したときの分解能である。アンテナは使用する電波の波長に比べて大きいほど放射するビームが鋭くなる。図10.6にその概念図を示す。地中探査などでは使用周波数が1GHz以下に限定されるので例えば100MHzを選んだとすると波長は3mにもなり、それ以上の大きさのアンテナは実用上不便である。実用の立場からはできるだけ物理的なサイズの小さいものが望ましい。電氣的にも小さなアンテナで鋭いビームを得られるように考え出されたものが合成開口法である。これは小形のアンテナを図10.7のように基線上に並べ、基線の各点で送受信を行い、それを合成して結果的に下の大開口アンテナと同じような鋭いビームを形成する手法である。

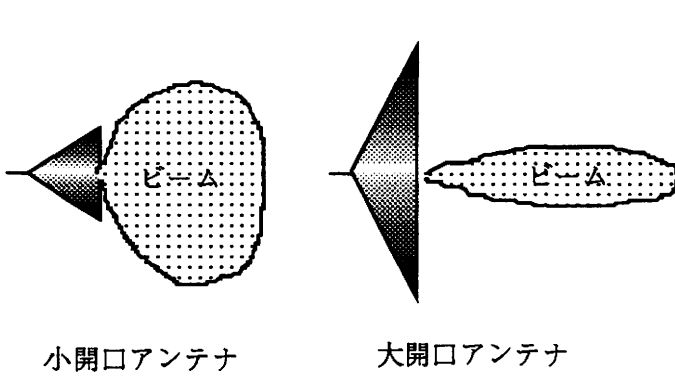


図10.6 アンテナの大きさとビーム幅

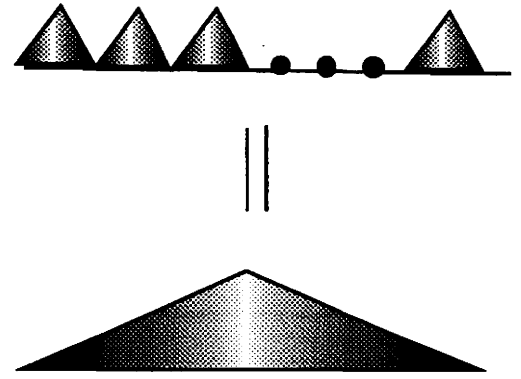


図10.7 合成開口アンテナ

さて、ターゲットが図10.8のようにフレネル領域にあると仮定すると、アンテナからターゲットまでの距離は次式で近似できる。

$$r \approx z_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2z_0} \quad (10.2.1)$$

遅延時間はそれ故、

$$\tau = \frac{2\sqrt{\epsilon_r}}{c} r \approx \frac{2\sqrt{\epsilon_r}}{c} \left[z_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2z_0} \right] \quad (10.2.2)$$

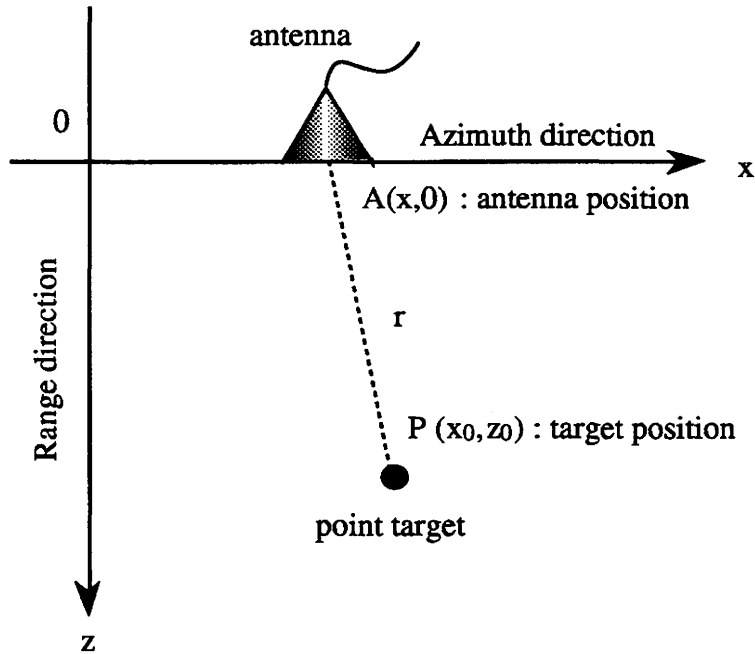


図10.8 アンテナとターゲットの位置関係

一方、式 (10.1.6) において $r \approx z_0$ と仮定すればビート周波数は次式で近似できる。

$$f_b \approx \frac{2\sqrt{\epsilon_r}}{c} \frac{\Delta f}{\Delta t} z_0 \quad (10.2.3)$$

その結果、次の関係が分かる。

$$\pi(f - f_b) \Delta t \approx \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_r}\Delta f}{c} (z - z_0) = \alpha(z - z_0), \quad \alpha = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_r}\Delta f}{c} \quad (10.2.4)$$

$$\frac{\sin [\pi (f-f_b) \Delta t]}{\pi (f-f_b) \Delta t} = \frac{\sin [\alpha (z-z_0)]}{\alpha (z-z_0)} \quad (10.2.5)$$

つまり, (10.1.10)は空間変数だけの関数となる。それゆえ, ビートスペクトラムを改めて $U(x,z)$ とおくと(10.1.10)は

$$\begin{aligned} U(x,z) &\equiv S_b(x,z,f) \approx S_b(x,z, \frac{\alpha}{\pi \Delta t} z) = S_b(x,z) \\ &= B g(x_0, z_0) \exp \left[j \frac{4\pi \sqrt{\epsilon_r} f_0}{c} \left\{ z_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2 z_0} \right\} \right] \frac{\sin [\alpha (z-z_0)]}{\alpha (z-z_0)} \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

となって, 位相項が含まれていることが分かる。実開口レーダでは大きさだけを調べているので, この位相項は無視されていたものである。簡単のために, この式を3つの関数に分解する。

$$\text{距離方向関数} \quad f(z-z_0) = \frac{\sin [\alpha (z-z_0)]}{\alpha (z-z_0)} = \text{Sinc} [\alpha (z-z_0)] \quad (10.2.7)$$

$$\text{伝搬関数} \quad h(x-x_0, z_0) = \exp \left[j \frac{4\pi \sqrt{\epsilon_r} f_0}{c} \left\{ z_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2 z_0} \right\} \right] \quad (10.2.8)$$

$$\text{物体関数} \quad g = g(x_0, z_0) \quad (10.2.9)$$

それゆえ, ビートスペクトラム $U(x,z)$ は次式でかけることになる。

$$U(x,z) = B f(z-z_0) g(x_0, z_0) h(x-x_0, z_0) \quad (10.2.10)$$

点ターゲットが x, z 方向にも分布しているような場合, $U(x,z)$ はそれらの合成となるので,

$$U(x,z) = B \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(z-z_0) g(x_0, z_0) h(x-x_0, z_0) dx_0 dz_0 \quad (10.2.11)$$

ここで, $z \approx z_0$ の近傍では $f(z-z_0)$ は最大となり,

$$U(x, z_0) = B \int_{-\infty}^\infty g(x_0, z_0) h(x_0-x, z_0) dx_0 \quad (10.2.12)$$

と近似できる。この形式はフレネルキルヒホッフ回折積分と同一の形式であるので一種のフレネルホログラムとみなせる。そのため, 物体の反射係数は逆伝搬関数を掛けることによってえられる。

$$g(x_0, z_0) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} U(x, z_0) h^*(x_0-x, z_0) dx \quad (10.2.13)$$

積分の L はアンテナの走査幅であり, $*$ は複素共役を表す。この式が合成開口レーダの原理を示している。つまり, アンテナの走査によって等価的に大開口のアンテナを合成し, それをレーダアンテナとして用いることができる。具体的な演算は

$$g(x_0, z_0) = FT^{-1} \left[FT(U) \cdot FT(h^*) \right] \quad (10.2.14)$$

のようにフーリエ変換を行うことによって物体関数を取り出すことができる。ここで、 FT はフーリエ変換、 FT^{-1} は逆フーリエ変換を表わす。

10.3 2次元合成開口法

図10.9で示されるような2次元的な平面上のアンテナと物体の位置関係において、反射係数 g をもつ物体に対して得られる自由空間でのビート信号は次式のようなになる。

$$s_b(t) = g A \cos \left[\frac{4\pi r}{c} \left(\frac{\Delta f}{\Delta t} t + f_0 \right) \right] \quad (10.3.1)$$

ただし、 A ：振幅 c ：光速 f_0 ：初期周波数 Δt ：掃引時間 Δf ：掃引周波数幅
式(10.1)より、アンテナから物体までの距離 r を求めるには、周波数成分

$$f_b = \frac{2\Delta f}{c\Delta t} r \quad (10.3.2)$$

が必要であるので、式(10.3.1)を時間に対してフーリエ変換すると次式のようなビートスペクトラムが得られる。

$$S_b(f) = g B \exp \left(j \frac{4\pi f_0}{c} r \right) \frac{\sin \left[\pi (f - f_b) \Delta t \right]}{\pi (f - f_b) \Delta t} \quad (10.3.3)$$

B ：振幅

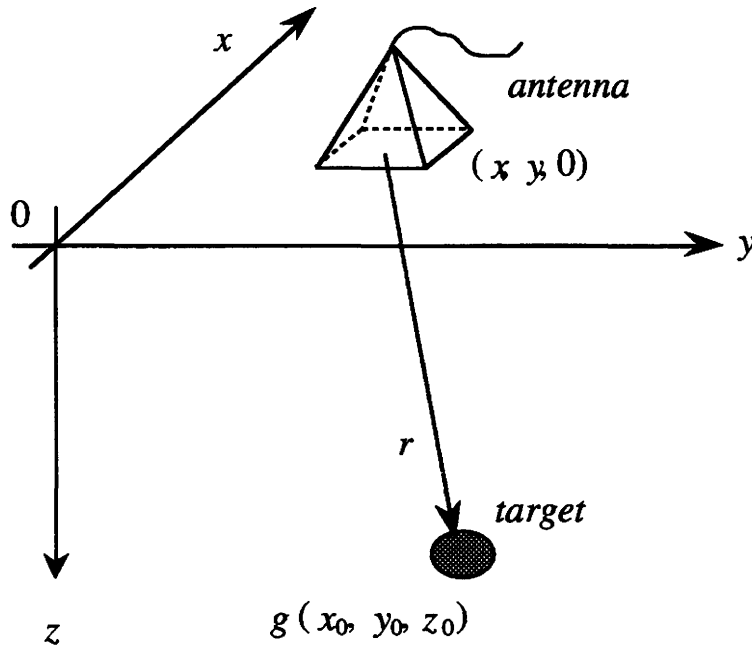


図10.9 アンテナと物体の位置関係

ただし、上式はビートスペクトラムの正の範囲の周波数成分のみである。また、図10.9において、物体がアンテナの位置に対して、フレネル領域内にあると仮定するとアンテナー物

体間の距離 r は次式のように書ける。

$$r = z_0 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2z_0} \quad (10.3.4)$$

実際の物体は空間的に広がりをもつので、その反射係数 g は、任意の空間点の関数となる分布として考え、次のようにおく。

$$g = g(x_0, y_0, z_0)$$

ただし、 x_0, y_0 : 物体方位座標
 z_0 : 物体距離座標

観測されたビートスペクトラムは、各領域について積分された信号として次式のように表わされる。

$$U(x, y, z) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(z-z_0) g(x_0, y_0, z_0) h(x-x_0, y-y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \quad (10.3.5)$$

ただし、

$$f(z-z_0) = \frac{\sin[\alpha(z-z_0)]}{[\alpha(z-z_0)]}, \quad \alpha = \frac{2\pi\Delta f}{c}$$

$$h(x-x_0, y-y_0, z_0) = \exp \left[j \frac{4\pi f_0}{c} \left\{ z_0 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2z_0} \right\} \right] \quad (10.3.6)$$

物体が存在する距離 $z = z_0$ では

$$U(x, y, z_0) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty g(x_0, y_0, z_0) h(x-x_0, y-y_0, z_0) dx_0 dy_0 \quad (10.3.7)$$

となる。これは畳み込み積分の形であり、形式上フレネルホログラムの一種とみなすことができる。よって、物体の反射係数分布は次のような逆伝搬関数

$$h^*(x, y, z_0) = \exp \left[-j \frac{4\pi f_0}{c} \left\{ z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0} \right\} \right] \quad (10.3.8)$$

を用いて、各方位方向に逆フレネル変換することによって次式のように求めることができる。

$$g(x_0, y_0, z_0) = \int_{-\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} \int_{-\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} U(x, y, z_0) h^*(x_0-x, y_0-y, z_0) dx dy \quad (10.3.9)$$

ただし、 L_x, L_y はアンテナの各方位方向の走査範囲、 $*$ は複素共役を示す。これは2次元の合成開口法で、この処理によって物体の反射係数分布がビートスペクトラムから取り出せる。

ここまでのFM-CWレーダにおける議論では、偏波について考慮していないが、偏波を考慮した物体の反射係数分布は、送受信の偏波の組み合わせによって得ることができる。式(10.3.9)は、物体の散乱情報を表わす複素量であるから、送受信の各偏波状態における反射

係数を散乱マトリックスの各要素とみなし、次のようにおく。

$$[S(HV)] = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{HH} & g_{HV} \\ g_{VH} & g_{VV} \end{bmatrix} \quad (10.3.10)$$

ただし、反射係数 g_{pq} の添字は、 p が受信、 q が送信を示す。これにより、FM-CWレーダにおいて散乱行列が取得され、レーダポーラリメトリの理論が適用できると思われる。

10.4 測定装置

FM-CWレーダは構成が簡単であり、比較的安価にできる。図10.10は構成したFM-CWレーダ装置のブロックダイアグラムである。アンテナとして偏波の組み合わせができるように2個の標準ホーンアンテナを使った。

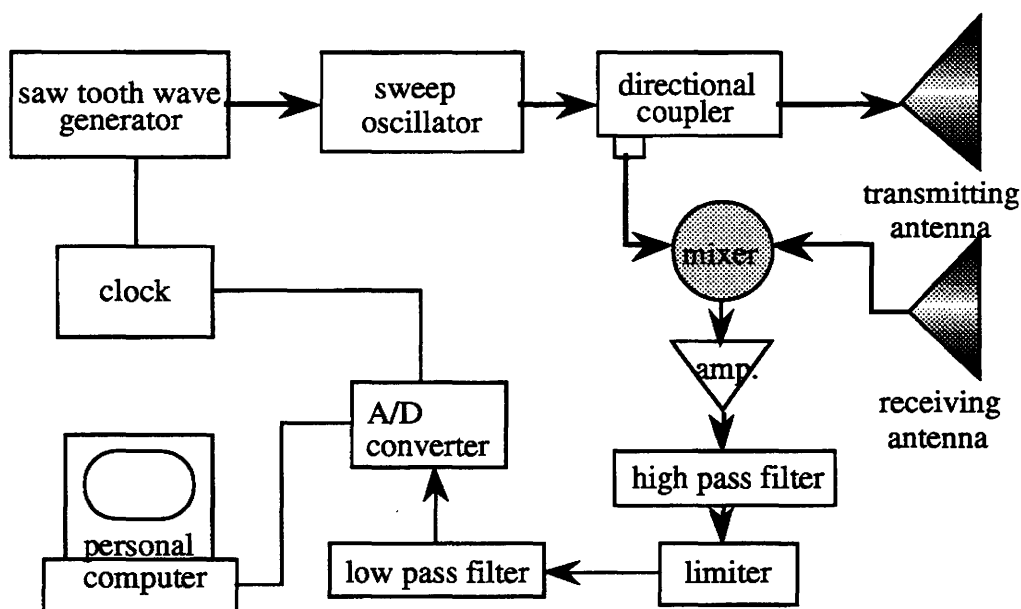


図10.10 FM-CWレーダ装置のブロックダイアグラム

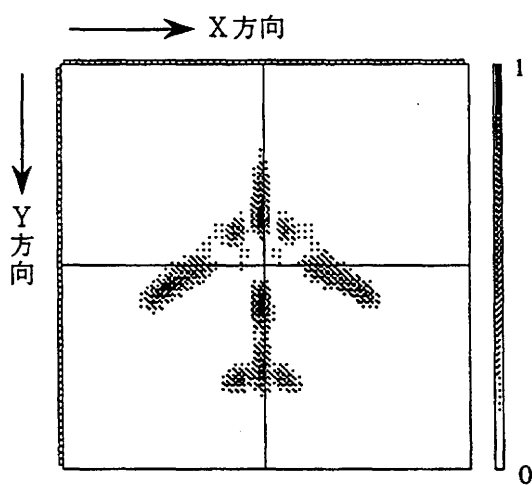
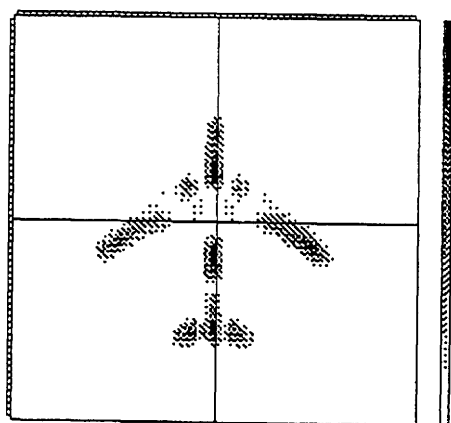
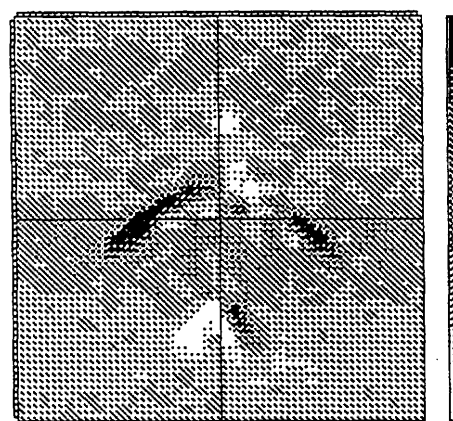
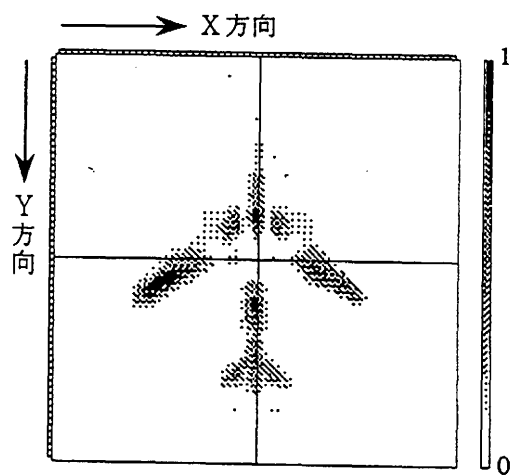
10.5 2次元イメージング実験

2次元イメージングを行なうとき、 x y 方向に120 cm程度走査できる装置を使い、送受信分離のアンテナを X 方向、 Y 方向に2次元に走査して測定を行なった。偏波方向は X 方向を H 偏波、 Y 方向を V 偏波とした。周波数はターゲットの大きさによる。おおよその測定上件は以下のようなものである。

測定条件

掃引周波数	X, Ku-band
アンテナー物体間の距離	70 cm以上
走査間隔	1.5 cm以下
走査点数	64×64点
測定偏波	XX, XY, YY

XY基底で測定したときのイメージング結果とSpan imageを示す。これらの結果は、物体が存在する距離におけるスライス面イメージングであり、受信電力の強さを白黒の濃淡によって表したものである。なお、これらのイメージは、測定データから得られたビートスペクトラムを2次元合成開口処理したものである。



11章 まとめ

電磁波は偏波というベクトル性質を持っている。この報告では、場の方程式とその解、平面波の偏波について説明し、偏波の表現方法、レーダとしてアンテナから放射された電波が如何に散乱し、受信アンテナに届くかということを偏波の観点から詳しく述べた。ポーラリメトリ基礎方程式から出発し、レーダ受信電力のCo-Pol, X-Pol, Matched Pol Channelパワーを偏波比と散乱行列、あるいはストークスベクトルとKennaugh (Mueller) 行列にて厳密に定式化している。各種ターゲットからの受信電力の具体例を挙げ、偏波の依存性を指摘した。また、受信電力の最適化問題を取り上げ、各種の方法で電力の極値を求め、その極値の与える偏波状態がターゲット固有の特徴的偏波状態になっていること、また、特徴的偏波状態は一般的なターゲットに対して数学的に10個存在する。その特徴的偏波状態はCo-Pol Max 2個, Co-Pol Null 2個, X-Pol Max 2個, X-Pol Null 2個, X-Pol Saddle 2個の合計10個である。この中で、Co-Pol Max 2個 = X-Pol Null 2個 となるので、物理的には合計8個となる。これらはポアンカレ球上でPolarization Forkを形成する。

ここで述べたレーダポーラリメトリ理論は単一周波数に基礎をおいており、その理論は狭帯域な周波数を使うレーダであればどのようなレーダにも適用できる。従来から我々が研究してきたFM-CWレーダは広帯域であり、連続周波数掃引を行っている。この点を考慮し、如何にポーラリメトリをFM-CWレーダに取り入れるかが最大の課題であった。レーダから得られる時間領域ビート信号をフーリエ変換すると複素量となり、それに合成開口処理を施すとレーダ画像の1ピクセルに対応する複素量がSinclair 散乱行列の要素にかなり近くなる。理論的なターゲットの状態に近い散乱行列が得られれば、直ちにFM-CWレーダにもポーラリメトリが適用できる。そのため、基礎研究として2次元平面に置かれた各種ターゲットのイメージング実験を行い、合成開口FM-CWレーダで得られる散乱行列が理論的な散乱行列に対応するかを検討した。その結果、偏波の組み合わせ実験で得られた散乱行列の各要素がよく対応し、合成開口FM-CWレーダが完全なFull Polarimetric レーダとして動作することが確認できた。そしてCo-Pol MaxやCo-Pol Nullなどの特徴的偏波状態でのイメージングを行い、その有効性が確認できた。

また、野外実験として、人間が見ることのできない場所(積雪中、地中、コンクリート中など)での埋没物体の探査などを行い、ポーラリメトリックイメージングが有効であることが確認した。

さらに、室内実験ではあるが、散乱行列を3つの成分に分解し、それらからターゲットがどのような散乱体であるかも分かるようになってきた。この事実は今後のレーダセンシングに非常に大きな貢献をすることが期待される。

この報告書は科研費基盤研究(C)によるものである。貴重な研究費に感謝したい。筆者は1988年よりレーダポーラリメトリの研究を始め、その基礎理論については米国イリノイ大学のW-M. Boerner 教授よるところが大きく、現在も共同研究を継続中である。また、実験的検討に精力的に協力いただいた新潟大学大学院学生・西川君、二瓶君、森山君、中村君に感謝する。ポーラリメトリについて有用なヒントを頂いた大分大学・田中充教授、NASA JPL の関係諸氏、Moscow State Technical University・A. Koslov, A. Logvin, 教授、フランス IRESTE・Dr. E. Pottierに感謝する。新潟大学・仙石正和教授、山田寛喜講師には各方面でお世話になった。厚く感謝する。